arXiv:2302.01639v1 [math.ST] 3 Feb 2023

戈珀茨族适合您的数据吗?

预印本

Dennis Dobler
阿姆斯特丹自由大学理学院数学系 阿姆斯特丹 De Boelelaan 1111,
NL-1081 HV d.dobler@vu.nl

Bruno Ebner
随机学研究所
卡尔斯鲁厄理工学院（KIT）
Englerstr. 2，D-76133 卡尔斯鲁厄
bruno.ebner@kit.edu

2023年2月6日

摘要

数据服从戈姆珀茨分布是应用科学诸多领域中广泛采用的假设，例如生物学领域或生存时间分析中。由于模型设定错误可能导致错误结论，因此评估数据与潜在模型的拟合情况至关重要。我们提出一类基于刻画的加权 L^2型拟合优度新检验，用于检验戈姆佩茨分布族，即在参数未知时检验复合假设。该刻画受到与分布近似的Stein方法相关联的分布变换启发。我们在希尔伯特空间框架下给出检验统计量的极限零分布；由于该极限分布依赖未知参数，我们提出一种参数自助法程序。我们证明了该检验程序的相合性。大量模拟研究以及真实数据示例的应用展示了这些方法的实际优势：我们分析的第一个数据集包含果蝇寿命，第二个数据集则是根据德国1948年出生女性的生命表合成生成的。

1 引言

戈姆珀茨分布最早于 [11] 被推导出来，作为一种描述人类死亡率的概率模型。精算师和人口学家普遍接受它用于描述成年人的寿命分布。事实上，正如 Oliver Kuß 教授（德国糖尿病中心和海因里希·海涅大学杜塞尔多夫校区）所指出的（个人交流）：“在流行病学和人口学中，戈姆珀茨分布用于对寿命分布建模。人们普遍认为，对于 40 岁及以上的人群，死亡年龄几乎完全服从戈姆珀茨分布，这一点可以通过将经验死亡率（例如 5 年死亡率）与冈珀茨拟合所得的死亡率进行比较来观察到。”除了这一重要应用之外，它还用于生物学等应用科学领域（见 [6], ）和老年学领域（见 [17], ）的生存分析；用于计算机科学中的失效率建模（见 [12], ）；用于能源燃料的氢气生产（见 [22, 31] ）；也用于描述 Erd˝os-R´enyi 随机图中随机自避行走的步数（见 [29]）。

使用该模型进行严谨统计推断的第一步，是评估观测数据是否来自戈珀茨族中的某个分布。由于即使底层服从冈珀茨定律这一假设成立，真实参数仍然未知，因此在检验该分布族对数据的拟合情况时，显然必须将这一点纳入考虑。因此，与针对某个固定戈珀茨分布进行检验的简单假设（包括先估计参数、再将其视为已知的情形）不同，我们必须考虑所谓的复合假设。

迄今为止，关于这一拟合优度检验问题的文献几乎一片空白。唯一的例外是文章[18]。作者对经典的安德森–达林检验及其由 [25], 提出的一些扩展进行了比较模拟研究，还研究了一种相关系数类检验，以及针对截断广义极值分布

*2010*年数学主题分类。主要分类 62G10 次要分类 62E10关键词和短语拟合优度；戈姆珀茨分布；希尔伯特空间值随机元素；参数自助法

最小值的情况。所引文章未考虑复合情形下的检验程序，因为作者先将参数拟合到冈珀茨定律，再进行简单假设检验。文章未推导这些检验程序的渐近理论。因此，我们认为，迄今为止，文献尚未涉及复合情形。

本文基于冈珀茨定律的一种刻画，提出了针对 Gompertz 分布族的新拟合优度检验。利用刻画推导拟合优度检验的想法可追溯至 [20] ，也是构建高效检验程序的基础；详情请参见 [23]。本文旨在提出首个基于刻画的检验，以检验数据是否来自（任意一种）冈珀茨定律所对应的复合假设，并给出原假设下的渐近理论。由于极限零分布取决于未知形状参数，本文提出了参数自助法程序，并针对这一情形开展了首个比较性蒙特卡洛模拟研究。具体而言，设$GO(\eta,\ b)$表示由以下概率密度函数定义的戈姆珀茨分布

$$f(x;\eta,b)=b\eta\exp(\eta+bx-\eta e^{bx}),\quad x\geq 0, \tag{1}$$

其中，速率参数 $b>0$ 为尺度参数，$\eta>0$ 为形状参数。其累积分布函数为

$$F(x;\eta,b)=1-\exp(-\eta(e^{bx}-1)),\quad x\geq 0,$$

且 $F(x;\ \eta,\ b)=0$ 在其他情况下成立。我们用 $\mathrm{GO}=\{GO(\eta,\ b):\ \eta,\ b>0\}$ 表示戈姆珀茨分布族；有关参数族 GO 的详情，见[21], 第 10 章。设 $X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots$ 为定义在同一概率空间 $(\Omega\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$ 上的正值、独立同分布（i.i.d.）随机变量，并用 $\mathbb{P}^X$表示 X 的分布。我们检验以下复合假设

$$H_0:\ \mathbb{P}^X\in\mathrm{GO} \tag{2}$$

针对一般备择假设。

本文结构安排如下。第2节介绍戈姆珀茨分布族，对这些分布给出 Stein 特征刻画，并提出一种基于该特征刻画的拟合优度检验统计量 T_n 。第3节分析原假设下 T_n 的分布，并提出一种用于近似该零分布的参数自助法方案。具体而言，我们在希尔伯特空间框架下，基于戈珀茨定律的假设推导 T_n的渐近分布，并证明参数自助法程序具有良好的校准效果。随后，第4节考察检验统计量在备择假设下的表现：在估计量满足收敛假设时，该程序具有一致性。第5节通过一项具有竞争力的蒙特卡洛模拟研究，考察原假设和备择假设下的情形，并将新检验与经典经验分布方法进行比较。结果表明，新检验可与经典方法相媲美。第6节还将该程序应用于生物学和人口学中的真实数据集。第7节总结研究发现并提出尚待解决的问题。所有证明和冗长的推导均置于附录中。

2 戈珀茨定律的刻画与新的检验统计量

本文研究了一种基于推论3所给出的戈姆珀茨分布族刻画的、用于检验（2）的程序。这类刻画与 Stein方法中的分布刻画（主题介绍参见 [7]）以及所谓的密度方法（参见 [19, 26]）有关。为完整起见，我们陈述这一刻画，证明见附录A。

定理2.1。设 X 为 $\quad X$一个累积分布函数为 G 且 $\mathbb{E}|X|<\infty$的正随机变量。定义f $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

或$\eta,\ b>0$ 函数 T

$$T^X(s)=\begin{cases}\mathbb{E}\big[(\eta be^{bX}-b)\min\{X,s\}\big], & s>0,\\ 0, & s\leq 0.\end{cases}$$

则 $X\sim GO(\eta,b)$，当且仅当 $T^X\equiv G$ 在 $\mathbb{R}$上。

下文中，我们用 $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ 表示依概率收敛，用 $(\widehat{\eta}_n,\ \widehat{b}_n)$ 表示 $(\eta,\ b)$ 的相合估计量。我们始终假设，对于所有考虑的分布，$(\widehat{\eta}_n,\ \widehat{b}_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}(\eta_0,\ b_0)\in(0,\ \infty)^2$ 当 $n\to\infty$ 时成立；也就是说，如果$X\sim GO(\eta,\ b)$，那么当 $n\to\infty$ 时，$(\widehat{\eta}_n,\ \widehat{b}_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}(\eta,\ b)$。鉴于 Gompertz族具有尺度不变性，我们令$\frown$ $\frown Y_{n,}$ $_j=b_nX_j,\ j=1,\ldots,n$，并假设 b_n 是 b 的尺度等变估计量，即我们有

$$\widehat{b}_n(\beta X_1,\ldots,\beta X_n)=\widehat{b}_n(X_1,\ldots,X_n)/\beta$$

并且 $\widehat{\eta}_n$ 是尺度不变的，即

$$\widehat{\eta}_n(\beta X_1, \ldots, \beta X_n) = \widehat{\eta}_n(X_1, \ldots, X_n)$$

^对所有 $\beta > 0$均成立。这意味着 $b_n(Y_{n,\,1}, \ldots\ldots, Y_{n,\,n}) = 1$，因此在 H_0下，随机变量$Y_{n,\,j}$ 的分布应接近 $GO(\eta,\ 1)$ 分布。因此，基于定理2.1，我们提出以下加权 L^2 型统计量

$$T_n = n \int_0^\infty V_n^2(s)\, w(s)\, \mathrm{d}s,$$

其中

$$V_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\widehat{\eta}_n e^{Y_{n,j}} - 1)\min\{Y_{n,j}, s\} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}\{Y_{n,j} \le s\}, \quad s > 0, \tag{3}$$

且 $w(\cdot)$ 是连续正权函数，并且

$$\int_0^\infty (s^2+1)w(s)\, ds < \infty, \tag{4}$$

and

$$n\int_0^\infty \left|w(\widehat{b}_n s) - w(s)\right|^3 w^{-2}(s)\, ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

当 T_n 取较大值时，我们拒绝假设 H_0。注意， T_n 仅取决于重缩放数据 $Y_{n,\,j}, j = 1, \ldots\ldots, n$，因此它在数据的尺度变换下保持不变，即对于形如$x \mapsto \beta x, \beta > 0$的变换不变。

容易证明，对于所有 $a > 0$ ，权函数 $w_a(s) = \exp(-as), \ s > 0$，均满足 (4) 和 (5)。直接计算可得一个数值稳定且无需积分的表示式

$$\begin{aligned}
T_{n,a} =& n\int_0^\infty V_n^2(s) w_a(s)\, ds \\
=& \frac{2}{n}\sum_{0\le i<j\le n}\left[\frac{G_j}{a^3}e^{-aY_{(i)}}\big(-aG_iY_{(i)} - 2G_i - a^2Y_{(i)} - a\big)\right. \\
&\left. + \frac{1}{a^2}e^{-aY_{(j)}}\big(-G_iG_jY_{(i)} - aG_iY_{(i)} + G_j + a\big) + 2G_iG_j\right] \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{a^3}e^{-aY_{(j)}}\big(-2aG_j^2Y_{(j)} - 2G_j^2 - 2a^2G_jY_{(j)} + a^2\big) + 2G_j^2\right],
\end{aligned}$$

其中， $Y_{(j)}$ 表示$Y_{n,\,1}$、……、$Y_{n,\,n}$和 $G_j = \widehat{\eta}_n e^{Y_{(j)}} - 1$、 $j = 1$、……、n的 j阶次序统计量。请注意，所提出的检验遵循 Stein 拟合优度检验的思路；有关这种也适用于其他分布族的一般方法的详情，请参阅 [1] 及其中的参考文献。在 [4] 中，推导了定理2.1的离散类比，并将其应用于检验数据是否拟合离散分布族。

3 极限零分布与自助法程序

本节推导原假设下的渐近分布。由于检验统计量具有 L^2结构，一个方便的框架是可分希尔伯特空间 $\mathbb{H} = L^2([0,\infty),\ \mathcal{B},\ w(t)\mathrm{d}t)$，其元素为满足 $\int_0^\infty |f(t)|^2\, w(t)\, \mathrm{d}t < \infty$的可测函数 f（等价类）： $[0,\infty) \to \mathbb{R}$。这里，$\mathcal{B}$表示$[0,\infty$上的博雷尔 σ-域。 $\mathbb{H}$ 中的内积与范数记作

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^\infty f(t)g(t)\, w(t)\, \mathrm{d}t, \quad \|f\|_{\mathbb{H}} = \langle f, f\rangle_{\mathbb{H}}^{1/2}, \quad f, g \in \mathbb{H},$$

分别。鉴于 T_n 的尺度不变性，我们在下文中假设$X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$是一个行内独立同分布随机变量的三角阵，并假设$X_{n,1} \sim GO(\eta_n,1)$，其中正参数序列为$(\eta_n)$，

$\lim_{n\to\infty}\eta_n \quad \asymp \eta > 0$。在下文中，我们假设估计量$(\widehat{\eta}_n, b_n)$具有线性表示

$$\sqrt{n}(\widehat{\eta}_n - \eta_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\psi_1(X_{n,j},\eta_n) + o_{\mathbb{P}}(1), \tag{6}$$

$$\sqrt{n}(\widehat{b}_n - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\psi_2(X_{n,j},\eta_n) + o_{\mathbb{P}}(1), \tag{7}$$

其中 ψ_1 und ψ_2 是可测函数，且

$$\mathbb{E}[\psi_1(X_{n,1},\eta_n)] = 0, \qquad \mathbb{E}[\psi_2(X_{n,1},\eta_n)] = 0, \tag{8}$$

$$\mathbb{E}[\psi_1^2(X_{n,1},\eta_n)] < \infty, \qquad \mathbb{E}[\psi_2^2(X_{n,1},\eta_n)] < \infty, \tag{9}$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\psi_1^2(X_{n,1},\eta_n)] = \mathbb{E}[\psi_1^2(X,\eta)], \qquad \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\psi_2^2(X_{n,1},\eta_n)] = \mathbb{E}[\psi_2^2(X,\eta)]. \tag{10}$$

这里及下文中， $o_{\mathbb{P}}(1)$表示依概率收敛到 0 的项。满足这些假设的一组（$\widehat{\eta}_n, b_n$）示例是极大似然估计量。通过直接计算证明 Fisher 信息矩阵的逆存在，并应用 [30]中的定理5.39，即可得到这一结论。

定理 3.1。 对于三角阵 $X_{n,1},\ldots,X_{n,n}$，有

$$T_n = n\|V_n\|_{\mathbb{H}}^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \|\mathcal{W}\|_{\mathbb{H}}^2, \quad n\to\infty,$$

其中 $\mathcal{W}$ 是 $\mathbb{H}$ 中的中心高斯随机元，其协方差核为

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\eta(s,t) =& (s-2)F(s;\eta,1) + s(1-t)F(t;\eta,1) + 2\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}\{X\le s\}\big] + \mathbb{E}\big[X^2\mathbf{1}\{X\le s\}\big]\\ &+ \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}\{X\le t\}\big] + \mathbb{E}\big[R(s;\eta)r(t;\eta)\big] + \mathbb{E}\big[R(t;\eta)r(s;\eta)\big] + \mathbb{E}\big[r(s;\eta)r(t;\eta)\big]\end{aligned}$$

对于 $0 < s \le t < \infty$，其中 $X \sim GO(\eta, 1)$ 且

$$\begin{aligned}R(s;\eta) =& (\eta X e^X - X - 1)\mathbf{1}\{X\le s\} + s(\eta e^X - 1)\mathbf{1}\{X > s\},\\ r(s;\eta) =& \psi_1(X,\eta)\frac{1}{\eta}\big(1 + \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}\{X\le s\}\big]\big) + \psi_2(X,\eta)\big(1 + \mathbb{E}\big[X\big] + \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}\{X\le s\}\big] + \mathbb{E}\big[X^2\mathbf{1}\{X\le s\}\big]\big).\end{aligned}$$

$\|\mathcal{W}\|_{\mathbb{H}}^2$的分布已知具有等价表示 $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(\eta)N_j^2$，其中 N_1， N_2，.....是相互独立且服从标准正态分布的随机变量，而 $\lambda_1(\eta)$ $\lambda_2(\eta)$.....是该积分算子的非零特征值递减序列

$$K : \mathbb{H}\to\mathbb{H}, \quad f \mapsto Kf(\cdot) = \int_0^\infty \mathcal{K}_\eta(\cdot,t)f(t)\,w(t)\,\mathrm{d}t.$$

显然，该算子取决于真实的未知参数 $\eta > 0$。要计算 $\mathcal{K}$ 的特征值 λ，必须求解第二类齐次Fredholm积分方程

$$\int_0^\infty \mathcal{K}_\eta(x,t)f(t)\,w(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x), \quad x > 0, \tag{11}$$

例如，参见 [16]。由于协方差核十分复杂，似乎很难找到方程（11）的显式解，进而也难以得到特征值的公式。尽管文献中有数值方法和随机方法可用于近似特征值（例如参见 [5, 10, 27], ），但 $\mathcal{K}_\eta$ 的复杂性表明，即使是这些方法也很难应用。此外，由于实际中真实参数 η 未知，因此无法利用极限零分布推导检验的临界值。 [15] 提出的参数自助法程序可解决这一问题，具体如下：

(1) 计算 $\widehat{\eta}_n = \widehat{\eta}_n(X_1,\ldots,X_n)$。(2) 在给定 $\widehat{\eta}_n$ 和 $b_n = 1$ 的条件下，从 $GO(\widehat{\eta}_n, 1)$ 独立同分布地模拟 B 个自助样本 $X_{j,1}^*,\ldots,X_{j,n}^*$，并计算 $T_{n,j}^* = T_n(X_{j,1}^*,\ldots,X_{j,n}^*)$、 $j = 1,\ldots,B$。

(3) 记

$$H^*_{n,B}(s) = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} \mathbf{1}\{T^*_{n,j} \le s\}, \qquad s > 0,$$

经验 分布函数$T^*_{n,\,1}$，……，$T^*_{n,\,B}$，并导出经验（$1-\alpha$）分位数$c^*_{n,\,B}$（α）。

（4）若 T_n（X_1，……，X_n）$> c^*_{n,\,B}$（α），则在显著性水平 α 下拒绝假设（2）。

请注意，每次计算$T^*_{n,\,j}$时，都必须针对每个 j 分别进行参数估计；显然，检验取决于重缩放自助法数据。以下定理为基于检验统计量 T_n对 H_0 进行检验的右尾检验程序提供最终依据。

定理 3.2。 设 $X \sim GO(\eta_n,\ 1)$，其中(η_n)仍为正数列，且$\lim_{n\to\infty}\eta_n = \eta > 0$，并且 X_1、……、 X_n是 X的独立同分布副本。进一步记自助法程序中的量为$H^*_{n,\,B}$和$c^*_{n,\,B}$。那么，我们有

$$\mathbb{P}_\eta\big(T_n > c^*_{n,B}(\alpha)\big) \longrightarrow \alpha, \qquad as\ n, B \to \infty.$$

4 相合性

在本节中，我们假设 X 是一个取正值、非退化的随机变量，其分布任意，且满足 $\mathbb{E}[X] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[X\exp(X)] < \infty$。鉴于 T_n 的尺度不变性，我们假设 $b_0 = 1$，即对于 $n \to \infty$，有 $(\widehat{\eta}_n,\ \widehat{b}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\eta_0,\ 1)$，$\eta_0 > 0$。

注 4.1。请注意，在某些正则条件下，众所周知，模型设定错误时的最大似然估计量对于 Kullback-Leibler信息准则的极小化解具有相合性；参见 [32] 中的定理 2.2。下文中，我们假设这种相合性成立。

定理 4.2。设 X_1、…、X_n 是 X 的独立同分布副本。那么

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \Delta_{\eta_0}, \quad n \to \infty,$$

其中 $\Delta_{\eta_0} = \|\Delta^*_{\eta_0}\|^2_{\mathbb{H}}$ 和 $\Delta^*_{\eta_0}(s) = \mathbb{E}\big[(\eta_0 e^X - 1)$ 的最小值$\{X, s\}\big] - \mathbb{P}(X \le s) \quad s > 0$。

以下推论表明，基于 T_n 的参数自助法检验程序对于一大类备择假设是一致的。

推论 4.3 节。 在采用第*3*节中的记号并满足既定假设的条件下，我们有 *if* $\mathbb{P}^X \notin GO$

$$\mathbb{P}\big(T_n > c^*_{n,B}(\alpha)\big) = 1, \qquad n, B \to \infty.$$

5 模拟研究

我们通过一项大规模模拟研究评估这项新检验的实际效用。我们选择的显著性水平为 $\alpha = 5\%$，样本量为 $n = 20$,50,100，并在每种模拟情景下对每项检验重复进行 10,000 次，每次检验均基于 2,000 次参数自助法迭代。我们针对调节参数 $a \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 3, 5, 10\}$ 的若干取值应用了该检验。此外，我们还考虑了以下竞争性^拟合优度检验；这些检验同样具有尺度不变性，因为它们基于 F_n 重新缩放的数据^的经验分布函数 $Y_j = b_n X_j$:

(柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验)
$$\mathrm{KS} = \sup_x |\widehat{F}_n(x) - F(x; \widehat{\eta}_n, 1)|,$$

(安德森-达令)
$$\mathrm{AD} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\widehat{F}_n(x) - F(x;\widehat{\eta}_n,1))^2}{F(x;\widehat{\eta}_n,1)(1-F(x;\widehat{\eta}_n,1))} dF(x;\widehat{\eta}_n,1)$$

（克拉默-冯·米塞斯）
$$\mathrm{CM} = \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{F}_n(x) - F(x;\widehat{\eta}_n,1))^2 dF(x;\widehat{\eta}_n,1)$$

（沃森）
$$\mathrm{WA} = \mathrm{CM} - n\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F(Y_j;\widehat{\eta}_n,1) - \frac{1}{2}\Big)^2.$$

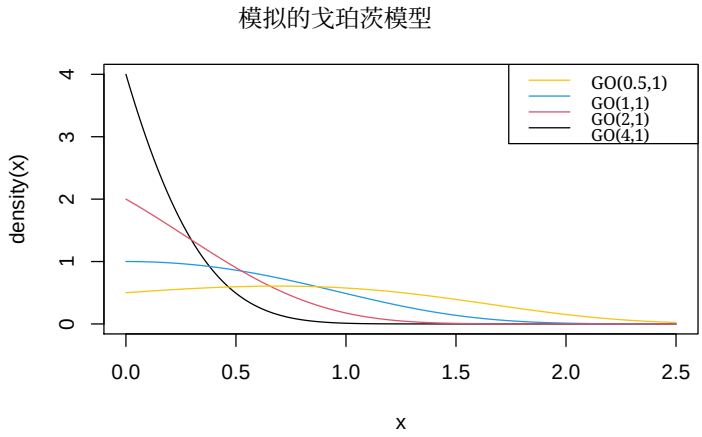

图1：尺度参数为 $b = 1$ 、形状参数为 $\eta = 0$ 的戈姆珀茨分布密度函数。5（黄色）、1（蓝色）、2（红色）、4（黑色）。

分布	密度（单位： $x > 0$）
对数正态分布 $LN(\sigma)$ $\sigma = 0.5$，1，	$\exp(-\frac{(\log x)}{2\sigma^2}^2)/(\sqrt{2\pi}\sigma x)$，
伽马分布 $\Gamma(k)$ $k = 1$，2，3	$x^{k-1}\exp(-x)/\Gamma(k)$，
逆高斯分布 $IG(\mu, \lambda)$ $\mu = 1, \lambda = 1$,3	$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$，
威布尔分布 $W(k)$ $k = 0.5$, 3	$\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)$，
均匀分布 U(0，5)	$0.2 \cdot 1_{(0,5)}(x)$，
幂 $Pow(\nu)$ $\nu = 1$，2，4	$x^{1-1}/\nu \cdot 1\{0 \le x \le 1\}$，
平移帕累托分布 $SP(\nu)$，3，5，10	$\nu(x+1)^{-\nu-1}$，
线性递增失效率 $LF(\nu)$ $\nu = 3$，5，10	$\nu(x+1)$ 指数 $\left(\frac{1-\nu^2}{2\nu}(x+1)^2\right)$，
GO(1)-Γ(5)-混合分布 $Mix(p)$ $p = 0.1$，0。25，0。5，0。75	$p \cdot$ 指数$(1 + x - e^x) + (1 - p) \cdot x^4$指数$(-x)/\Gamma(5)$。

表1：模拟研究中考虑的非戈姆珀茨分布。

所有这些竞争性检验均采用第3节所述的同一参数自助法程序进行。为此，我们使用最大似然参数估计量；有关实际实施的技术细节（包括无法找到最大值的情形），请参见附录 B。

基于各种基础戈姆珀茨分布，对原假设下检验的规模进行了模拟，GO(0。5，1) GO(1，1) GO(2，1) GO(4，1)；请注意，检验具有尺度不变性，因此我们只让形状参数变化。图1all从概率密度的角度展示了所考虑的戈珀茨分布。为了比较备择假设下检验的幂表现，我们根据表1中汇总的具有非负支撑集的非戈姆珀茨分布模拟了数据。注意， Γ(1)是指数分布（Exp），Pow(1)是均匀分布，事实上， $LF(a)$具有线性递增失效率（或风险）速率 $x \mapsto a(x + 1)$。

模拟研究的结果见表 2–4。表格中的最后两列显示最大似然估计量 b_n 或其自助法对应估计量 b_n^* 无法求得的频率。在原假设下，这种情况极少发生；戈姆珀茨分布的形状参数越大，发生概率越高（对于 $\eta = 4$，迭代中最高达 12%）。在非戈姆珀茨分布下，这些百分比因情况而异，即使在同一分布族中也是如此：例如，威布尔分布下，从完全没有发生（威布尔参数等于 3）到约^53%（对于 b_n，参数等于 0.5）不等。

n	true 分布。	提出的拟合优度检验；调节参数 $a=$ 0。1 0。25 0。5 0。75 1 1。5 2 3 5 10										经典检验 安德森-达林检验 柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验		克拉默-冯-米塞斯检验 沃森检验		未找到 $\widehat{b}_n$	$\widehat{b}_n^*$
20	$GO(0.5,1)$	2	3	5	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	1	1
50		4	4	5	5	6	6	6	5	5	4	5	5	5	5	0	0
100		4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	0
20	$GO(1,\ 1)$	2	3	4	5	5	6	6	6	6	6	5	5	5	5	3	3
50		3	4	4	4	5	5	6	6	5	5	5	5	5	5	1	2
100		4	4	5	5	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	0	1
20	$GO(2,\ 1)$	2	3	3	4	4	5	6	6	6	6	4	4	4	5	6	7
50		3	3	3	3	4	4	5	5	6	5	5	5	5	5	5	6
100		3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	5	5	5	5	2	3
20	$GO(4,\ 1)$	3	3	4	4	4	5	6	6	6	6	4	4	4	4	11	10
50		3	3	3	3	3	4	4	5	6	6	4	4	4	5	10	12
100		3	3	3	3	3	4	4	5	6	6	5	4	4	5	7	10

表2：原假设下模拟得到的四舍五入拒绝概率（%）。所考虑的经典检验包括安德森-达令（安德森-达林检验）、柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺检验（柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验）、克拉默-冯·米塞斯检验（克拉默-冯·米塞斯检验）、沃森（沃森检验）。最后两列给出了最大似然估计量 b_n 及其参数自助法对应项 b_n^* 无法求得的频率（%）。

n	true 分布	提出的拟合优度检验；调节参数 $a=$ 0.1	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	3	5	10	经典检验 AD	KS	克拉默-冯-米塞斯检验 沃森检验		未找到 $\widehat{b}_n$	$\widehat{b}_n^*$
20	$LN(0。5)$	40	47	54	58	60	58	54	45	33	18	53	45	53	54	1	1
50		95	96	97	98	98	98	98	97	93	73	97	93	95	95	0	0
100		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100		100	0	0
20	$LN(1)$	9	10	10	10	11	12	11	11	11	10	15	17	19	19	22	10
50		13	12	14	14	15	15	15	15	15	15	41	32	40	44	34	15
100		15	15	16	18	18	17	17	17	17	17	78	55	67	75	42	21
20	$\Gamma(1)$	5	6	5	6	6	7	7	7	7	6	7	7	7	6	15	10
50		5	5	6	6	6	6	6	7	6	5	7	7	6	6	19	12
100		6	5	5	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	24	16
20	$\Gamma(2)$	4	5	7	10	11	14	15	16	14	11	11	12	14	15	1	2
50		25	27	31	34	37	41	43	45	46	45	42	32	39	39	0	0
100		61	62	65	68	71	74	76	79	82	84	79	63	71	70	0	1
20	$\Gamma(3)$	15	18	23	27	29	30	28	24	18	10	23	21	26	26	0	0
50		62	65	69	72	74	75	76	75	72	58	71	57	65	65	0	0
100		94	94	95	96	97	98	98	98	98	97	97	90	94	93	0	0
20	$IG(1、1)$	6	7	8	9	10	12	13	15	17	18	18	18	22	26	14	9
50		9	10	12	15	16	20	24	29	36	45	73	57	62	70	16	11
100		19	17	19	22	24	29	32	38	45	51	99	96	96	98	20	15
20	$IG(1、3)$	31	37	46	52	55	57	55	49	38	23	50	44	51	52	2	1
50		93	94	96	97	97	97	98	97	96	86	98	93	95	95	1	1
100		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100		100	0	0
20	$W(0.5)$	19	21	21	22	21	23	24	24	25	26	97	91	93	84	51	15
50		20	21	20	21	23	25	28	35	44	54	100	100	100	100	53	19
100		19	20	20	21	23	26	29	39	69	74	100	100	100	100	53	23
20	$W(3)$	15	17	19	17	14	7	3	1	0	0	14	12	15	15	0	0
50		47	48	49	48	45	34	21	9	2	0	40	26	35	35	0	0
100		80	81	82	83	82	77	69	52	26	1	74	50	63	62	0	0

表3：备择假设下模拟得到的四舍五入拒绝概率（%），对应分布为：对数正态分布（LN）、伽马分布（Γ）、逆高斯分布（IG）、威布尔分布（W）、均匀分布（U）。所考虑的经典检验包括安德森-达令（AD）、柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫（KS）、克拉默–冯·米塞斯（CM）和沃森（WA）。最后两列列出了最大似然估计量 b_n 和参数自助法对应结果 b_n^* 无法求得的频率（%）。

n	true 分布	提出的拟合优度检验；调节参数 $a=$ 0.1	0.25	0.5	0.75	1	1。5	2	3	5	10	经典检验 AD	KS	克拉默-冯-米塞斯检验	沃森检验	未找到 $\widehat{b}_n$	$\widehat{b}_n^*$
20	Pow(1)	9	11	14	15	15	14	13	12	11	10	14	9	11	11	0	1
50		35	36	36	36	33	29	25	21	19	16	35	21	28	28	0	0
100		73	72	70	66	63	55	48	41	34	26	69	43	58	58	0	0
20	Pow(2)	6	7	9	12	15	20	23	28	34	40	57	30	35	37	12	11
50		21	20	23	29	33	42	48	57	64	71	89	61	71	74	9	11
100		61	53	55	62	66	73	78	83	86	88	99	91	96	97	6	9
20	Pow(4)	16	15	14	15	15	17	17	17	15	11	99	93	94	92	49	20
50		18	16	14	15	15	16	17	18	17	10	100	100	100	100	52	23
100		20	16	15	16	16	19	20	21	19	13	100	100	100	100	52	25
20	SP(3)	12	12	12	13	13	14	14	14	11	8	31	29	31	20	36	16
50		16	16	16	18	19	19	20	19	17	11	54	50	55	35	46	20
100		20	18	19	21	23	24	24	24	21	16	77	72	78	56	51	23
20	SP(5)	9	9	9	9	10	10	10	10	9	7	17	16	18	11	31	17
50		12	11	12	12	13	13	13	13	11	7	28	25	29	16	40	22
100		15	13	14	15	16	17	16	16	14	9	43	39	44	25	47	24
20	SP(10)	7	7	8	8	7	8	8	8	7	6	9	10	10	7	25	16
50		8	8	8	8	8	8	9	9	8	6	13	12	13	9	33	22
100		10	9	9	9	10	10	10	10	9	6	17	15	18	11	38	24
20	LF(3)	3	3	4	5	6	7	7	7	6	5	5	6	6	6	3	4
50		5	5	6	7	8	9	9	9	8	6	7	7	8	8	2	2
100		11	11	12	13	13	14	13	13	12	10	11	10	11	12	0	1
20	LF(5)	3	4	5	5	6	7	7	6	5	4	5	6	6	7	2	3
50		7	8	9	10	10	11	11	11	9	7	8	8	10	10	1	2
100		16	17	17	18	18	19	19	18	16	13	16	14	16	16	0	0
20	LF(10)	4	4	6	7	8	8	8	7	5	3	6	7	7	8	2	2
50		10	11	12	14	14	15	14	13	11	7	12	11	13	13	0	1
100		24	25	26	27	27	28	27	26	24	18	24	19	23	23	0	0
20	Mix(0.1)	10	12	15	16	16	15	13	10	8	7	14	13	15	15	0	0
50		35	36	37	38	38	36	32	26	16	9	34	32	37	36	0	0
100		64	65	65	66	66	64	60	51	33	13	62	59	65	64	0	0
20	Mix(0.25)	5	7	10	13	16	19	21	23	25	24	21	15	15	16	0	1
50		16	19	23	28	32	37	40	44	46	44	40	32	33	33	0	0
100		40	44	50	56	61	67	70	73	73	68	69	59	63	64	0	0
20	Mix(0.5)	9	11	13	15	18	22	24	27	30	32	45	44	48	49	19	9
50		20	20	23	27	30	34	38	43	48	53	85	84	89	90	19	11
100		34	26	28	33	36	42	47	53	59	63	99	99	100	100	17	14
20	Mix(0.75)	18	17	18	19	19	19	18	17	13	9	56	59	64	56	47	15
50		21	19	20	23	23	24	23	22	17	9	95	95	97	95	52	19
100		21	18	18	23	23	24	23	22	19	16	100	100	100	100	53	23

表4：在备择假设下，各分布对应的模拟四舍五入拒绝概率（%）：幂律分布（Pow）、平移帕累托分布（SP）、线性失效分布（LF）、混合分布（Mix）。所考察的经典检验包括安德森-达令（安德森-达林检验）、柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫（柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验）、克拉默冯·米塞斯检验（克拉默-冯·米塞斯检验）和沃森检验（沃森检验）。最后两列给出了最大似然估计量 b_n 及其参数自助法对应方法 b_n^* 无法求得的频率（%）$\widehat{}$ $\widehat{}$。

表2展示了原假设下的经验拒绝率结果。我们观察到，样本量变化带来的差异很小；针对 $a \geq 1.5$ 的多数所提出的检验以及所有经典检验的拒绝率都非常接近5%。然而，对于调节参数 $a \leq 1$，多数所提出的检验趋于保守，拒绝率降至3%，少数情况下甚至降至2%。

现在我们比较所提出的检验与经典检验的检验功效结果；模拟结果见表3和表4。总体而言，我们注意到，在许多情形下，所提出的检验大多能与经典检验一较高下；至少在某些 a 取值下，其拒绝率接近或略高于经典检验。涉及的分布包括表3中的 $LN(0.5)$、$\Gamma(k)$ $k=1$，2，3、$IG(1, 3)$和 $W(3)$，以及表4中的均匀分布 $Pow(1)$、$LF(\nu)$ $\nu=3$，5，10和混合分布 $Mix(p)$ $p=0.1$，0.25。与此相反，我们还观察到，在以下情形中，经典检验明显优于所提出的检验：

其余一些情形，例如表3中的底层分布 $LN(1)$、 $IG(1,\ 1)$、 $W(0.5)$，以及表4中的$Pow(2)$ $Pow(4)$、 $SP(3)$ $SP(5)$、 $Mix(0.5)$和 $Mix(0.75)$。似乎所有这些情形都伴随着最大似然估计量很可能无法找到的情况。

调节参数 a 的大多数取值下，所提出检验的模拟检验功效相近；分布 $LN(0.5)$（对于 $n = 20$）、 $\Gamma(2)$、 $\Gamma(3)$、 $IG(1, 1)$、 $W(k)$、 $Pow(1)$、 $Pow(2)$、$Mix(p)$ 是值得注意的例外。经典检验在大多数情形下也表现出相近的检验功效。

总的来说，与经典检验相比，我们所提出的检验通常表现良好，但在某些备择假设下，选择合适的调节参数 a 至关重要。此外，如果无法以较高概率计算尺度参数 b的极大似然估计量，所提出的检验表现就不够理想。

6 真实数据示例

本节将拟合优度检验应用于两个不同的数据集：与果蝇寿命有关的数据，以及1948年出生于德国的女性寿命数据（由生命表生成）。所有检验的显著性水平均设为 $\alpha = 5\%$。

6.1 果蝇寿命

我们即将分析的第一个数据集包含记录在案的125只雄性果蝇的寿命数据，该数据集可公开获取。[1] 这些数据来自五个不同的雄性果蝇组，每组25只；各实验组的交配对象类型和数量各不相同。 [24] 认为，“增加性活动会缩短雄性果蝇的寿命”。关于这些数据及其分析的教学方面内容，请参阅 [13, 14]。

首先，我们考察了完整数据集的寿命值，也就是包含全部五个子组的测量结果。图2（右下方的面板）以直方图展示了该数据集，并将其与非参数核密度估计量和拟合的参数戈珀茨分布进行比较。直方图和核密度估计量显示，该分布至少有两个峰，而非像拟合的戈珀茨分布那样呈单峰分布。出现多峰性的原因之一可能是不同组的寿命值存在异质性：从同一图中的其他面板可以看出，子样本4和5的位置参数与子样本1至3的位置参数不同。

基于 2,000 次重抽样迭代所得的拟合优度检验的 p 值见表5。显然，对于完整数据集，所提出的检验会在调节参数 a 的大多数取值下拒绝“数据服从戈珀茨分布”这一原假设——更准确地说，对所有 $a \leq 2$ 都如此。此外，几乎所有经典检验也得出了相同结果。除此之外，几乎没有任何检验在单独应用于子样本时得出显著结果。这些结果可能有以下原因：首先，检验的效能随样本量增加而提高，这并不令人意外；而合并后的数据集（$n = 125$）远大于各个子样本（$n = 25$）。其次，五个子样本很可能各自来自不同的底层分布，将它们合并后得到的样本可能无法用任何戈珀茨分布恰当地描述：不同戈珀茨分布的混合并不是戈珀茨分布。此外，将拟合于合并数据集的戈珀茨分布与核密度估计量进行比较，也清楚地显示出二者存在差异：密度估计几乎呈对称的双峰形态，而拟合的戈珀茨分布则呈左偏的单峰形态。

作为对这些数据分析的总结，我们想指出，与经典检验相比，所提出的检验并未带来太多意外。

6.2 根据德国1948年出生女性的生命表生成的数据

我们将要分析的第二类数据集基于德国联邦统计局（位于德国威斯巴登的德国联邦统计局）于2020年9月29日发布的生命表，该数据可公开获取。[2] 根据德国1948年出生女性的瞬时风险率（q_x 见包含生命表的 PDF 文件第439–440页第二列），我们重建了其对应的概率质量函数；更多详情请参见附录C。基于该函数，我们可以利用多项分布生成数据，其中概率参数等于上述概率质量函数。由于婴儿死亡率相对较高导致风险率较早达到峰值，且100岁以上年龄段的风险率经过了汇总，我们决定

[1] http://jse.amstat.org/jse_data_archive.htm；最后访问于2022年8月8日。[2] https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Bevoelkerung/Sterbefaelle-Lebenserwartung/Publikationen/ publikationen-innen-kohortensterbetafel.html；最后访问于2022年8月8日。

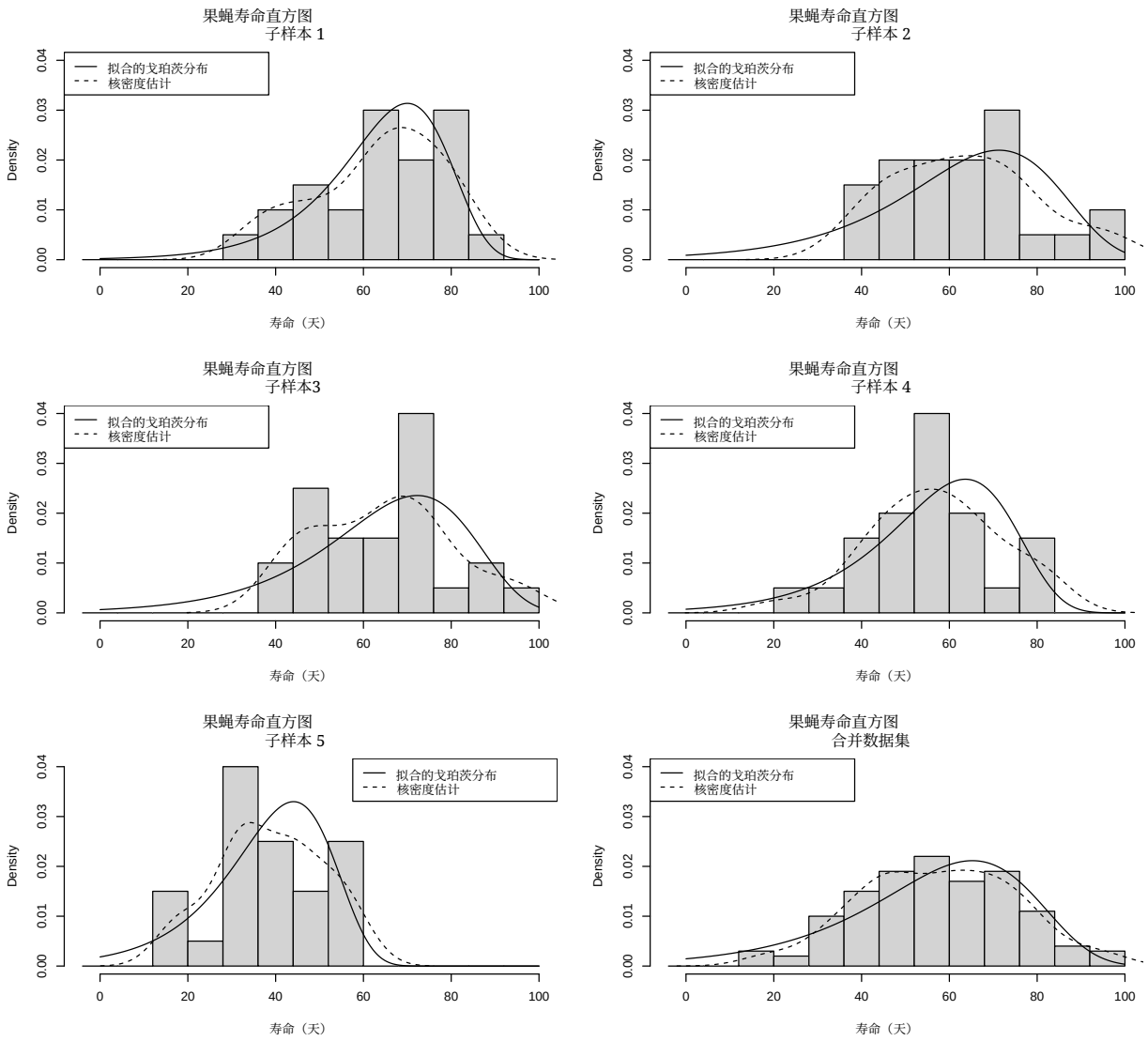

图2：果蝇的寿命（以天计），分别展示所有子样本和完整数据集；比较直方图、核密度估计量（R 中的默认选项）以及拟合的戈珀茨分布。

将分布截取为（i）10至99岁和（ii）40至99岁两个区间。我们的想法是检验拟合优度检验能否检测出与 Gompertz 分布族的偏离，以及当寿命仅限于40至99岁之间的所有死亡者时，对某个 Gompertz 分布的拟合是否足够好；这一做法与第1节中的动机类似。

基于这两种截断分布，我们人为生成了样本量为 20、50、100 和 1,000 的数据集。表6列出了所进行检验的 p 值。我们先关注截断在 10 至 99 年的寿命。对于 $n \leq 100$，没有一项经典检验拒绝 H_0，但当 $n = 1$ 为 1,000 时，所有检验都拒绝了 H_0。当 $n = 20$,50 时，所提出的检验也都没有拒绝 H_0。对于 $n = 100$，所提出的检验结果并不完全一致：所有采用 $a \leq 0.75$ 的检验都拒绝了 H_0，但没有采用 $a \geq 1$ 的检验拒绝 H_0。当 $n = 1$ 为 1,000 时，调节参数 a 的这一阈值移至 $a \leq 2$ 和 $a \geq 3$。

接下来，对于截断在 40 至 99 年之间的寿命，我们发现所提出的检验呈现出相似的模式，不过这次拒绝 H_0的检验更少：基于 $a \geq 0.5$ 的检验在 $n = 100$时没有拒绝 H_0。另一方面，对于该样本量，所有经典检验都拒绝了 H_0。对于 $n = 1$,000，我们得到相似的结果，只是这次所有 a 不超过 1 的所提出的检验都拒绝原假设；a 较大时则未予拒绝。柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验是唯一一个在所有考察的样本量下都拒绝 H_0 的检验。

（子）样本		提出的拟合优度检验；调节参数 $a=$ 0。1 0。25 0.5 0.75 1 1.5 2 3 5 10										经典检验 安德森-达林检验 柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验 克拉默-冯-米塞斯检验			WA
完整	$<$	**1**		$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	**2**	**4**	10	16	36	$<$**1**	5	**4**	**4**
	1	71	65	55	49	47	48	51	53	48		44	52	49	50	47
	2	6	**5**	5	7	10	27	44	56	55		51	8	27	15	17
	3	6	6	6	8	13	31	47	57	54		49	9	22	15	17
	4	28	27	30	36	44	57	62	60	54		49	22	14	27	28
	5	42	39	35	35	35	43	49	54	56		53	33	9	28	28

表5：应用于果蝇数据集的所有检验的 p值（%）；四舍五入至整数百分比。显著结果（考虑到显著性水平 $\alpha = 5\%$）以粗体显示。

截断样本 至年	大小	提出的拟合优度检验；调节参数 $a=$ 0.1 0.25 0.5 0.75 1 1.5 2 3 5 10										经典检验 安德森-达林检验 柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验 克拉默-冯-米塞斯检验			WA
10 至 99	20	18	12	8	7	6	5	5	6	11	39	55	79	74	76
	50	15	12	11	11	11	12	11	12	22	44	55	62	76	82
	100	**1**	**1**	**2**	**3**	6	10	12	12	26	45	6	7	16	24
	1,000	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	6	9	39	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**
40 至 99	20	10	11	14	21	25	28	28	39	39	39	16	**4**	18	19
	50	16	18	24	30	36	38	37	45	43	43	17	**3**	12	13
	100	**2**	**3**	5	9	15	25	31	47	45	44	**2**	$<$**1**	**3**	**3**
	1,000	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	12	33	66	58	52	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**	$<$**1**

表6：基于（截断）生命表生成的数据集上所有检验的 p值（%）；四舍五入至整数百分比。显著结果（以显著性水平 $\alpha = 5\%$为准）以粗体显示。

从所提出的检验角度来看，可以总结如下：大多数检验证实了我们先前的假设，即超过 40 年的寿命近似服从戈珀茨分布；至少在调节参数 a 并非过小的情况下如此。随着样本量增至 1,000，越来越多的检验倾向于拒绝戈姆珀茨族模型；鉴于这些检验的幂不断增大，而且所有模型都是错误的，这一结果很自然。然而，如果将寿命截断在 10 至 99 年之间，所提出的检验会更容易拒绝 H_0，这表明戈姆珀茨族模型可能不适用于一般的寿命分布；对于完全不受限制的分布，这一点更是如此，因为其中可能观察到较高的婴儿死亡率（未示出）。

7 讨论与展望

本文展示了如何利用戈姆珀茨分布族的 Stein 特征刻画，为复合原假设构建一种基于参数自助法的拟合优度检验。在模拟研究和真实数据分析中，我们使用了戈姆珀茨分布参数的最大似然估计量。只要其他参数估计量具有渐近线性结构，所提出的理论也可以涵盖这些估计量。关于参数估计方法对拟合优度检验幂的影响，更多信息见 [9]。当最大似然估计量无法找到尺度参数 b的概率较高时，这或许可以解决表 3 和表 4 中观察到的幂次欠佳问题。除此之外，所提出的检验对多种底层戈姆珀茨分布均能良好控制第一类错误概率，并且在许多所考虑的备择假设下表现出令人满意的检验幂，与经典竞争检验相比亦是如此。不过，调节参数 a 的选择对于获得可靠的检验至关重要。一般而言，若无其他信息可用，选择接近 1.5 的中间值 a 似乎最为稳妥。解决这一问题的另一种方法是将所提出的检验与自适应选择程序结合起来；例如，参见 [28] 中基于自助法的方法。需要注意的是，额外的自助法步骤会显著增加检验程序的计算复杂度。

最后，考虑到该检验在医学生存时间数据中的应用，另一项重要的扩展是处理删失数据。这方面的困难主要有两点：首先，检验统计量需要使用重新缩放的观测值的 Kaplan-Meier 估计量，而非经验累积分布函数；特别是，Stein 特征刻画中给出的期望需要由另一种估计量取代，但目前尚无标准方法。其次，戈姆珀茨分布参数的最大似然估计量也会发生变化。最终检验统计量的大样本性质有望通过改造生存分析中的相关技术来确立。

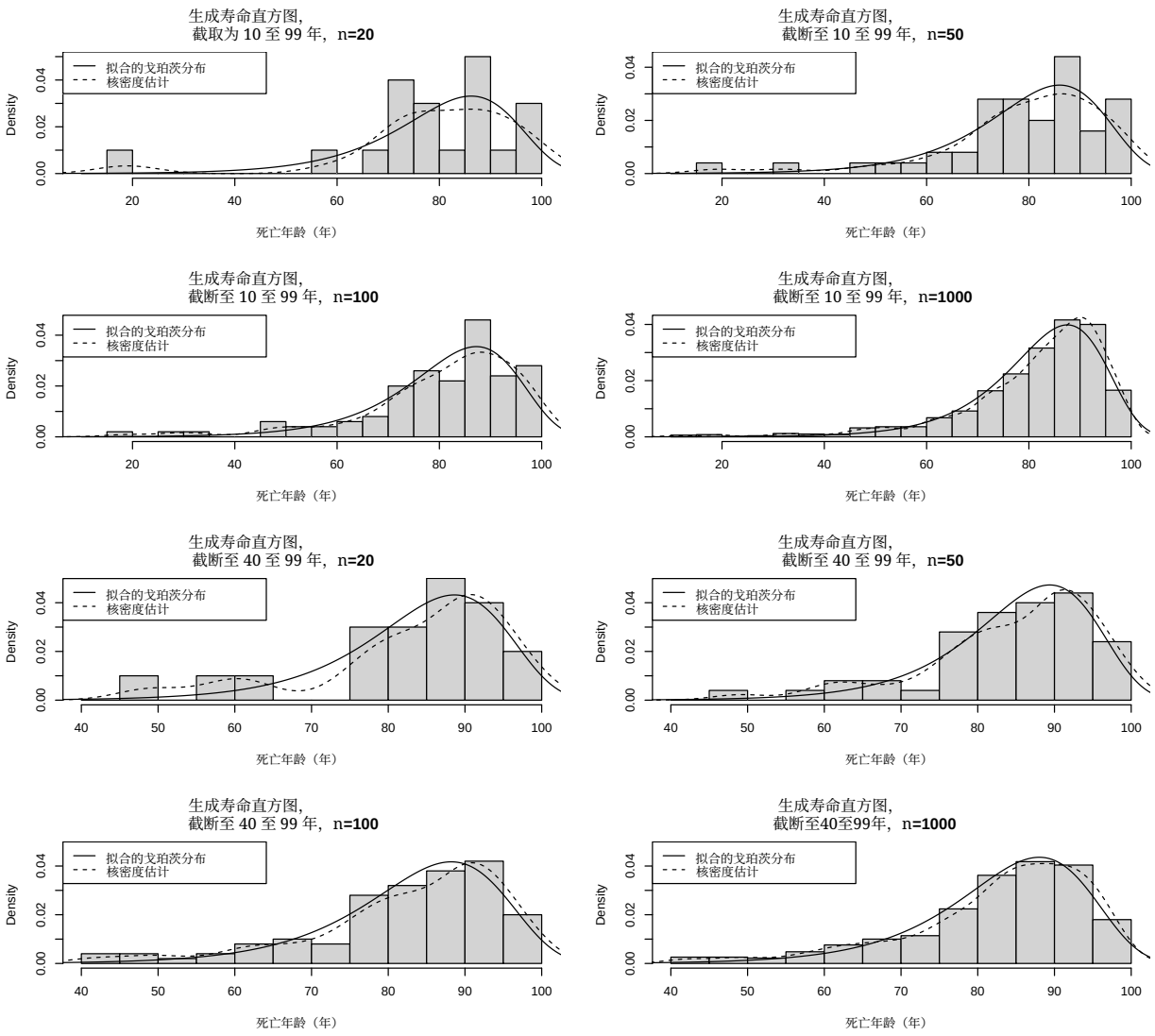

图3：1948年出生于德国的女性人工生成的寿命直方图（单位：年）、核密度估计量（虚线；R中的默认值）以及拟合的戈珀茨分布（实线）；寿命分布采用不同的截断范围：10至99年（上半部分）和40至99年（下半部分）。生成全部八个数据集时使用相同的随机种子。

致谢

作者感谢 B。　　感谢 Clauß 在硕士论文中对这一主题所做的前期研究，以及 O. Kuß 提供的宝贵讨论。s.

利益冲突声明

两位作者均声明不存在财务或商业利益冲突。

参考文献

[1] A. Anastasiou、A. Barp、F.-X. Briol、B. Ebner、R. E. Gaunt、F. Ghaderinezhad、J. Gorham、A. Gretton、C. Ley、Q. Liu、L. Mackey、C. J. Oates、G. Reinert 和 Y. Swan。《Stein方法与计算统计学：近期若干进展综述》。*Statistical Science*，38(1):1 – 20，2023。

[2] S. Betsch 和 B. Ebner。伽马分布的一种新刻画及相关拟合优度检验。Metrika，82(7):779–806，2019。[3] S. Betsch 和 B. Ebner。连续单变量概率分布的不动点刻画及其应用。Annals of the Institute of Statistical Mathematics，73(1):31–59，2021。[4] S. Betsch、B. Ebner 和 F. Nestmann。非归一化离散概率分布的刻画及其在统计学中的应用。Electronic Journal of Statistics，16(1):1303 – 1329，2022。[5] V. Boˇzin、B. Miloˇsevi´c、Y. Y. Nikitin 和 M. Obradovi´c。基于新刻画的对称性检验。Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，43(1):297–320，2020。[6] O. Burger 和 T. I. Missov。衰老的进化理论与相关Gompertz参数问题。Journal of Theoretical Biology，408:34–41，2016。[7] L. H. Y. Chen、L. Goldstein 和 Q.-M. Shao。Stein方法的正态逼近。Probability and its applications。Springer，柏林，2011。[8] X. Chen 和 H. White。Hilbert值相依异质阵列的中心极限定理与函数型中心极限定理及其应用。Econometric Theory，14(2):260–284，1998。[9] F. C. Drost、W. C. M. Kallenberg 和 J. Oosterhoff。在非稳健估计干扰参数时经验分布函数拟合检验的幂。Statistics & Risk Modeling，8(2):167–182，1990。[10] B. Ebner 和 N. Henze。Epps–Pulley正态性检验的Bahadur效率。Rossi˘ıskaya Akademiya Nauk. Sankt-Peterburgskoe Otdelenie. Matematicheski˘ı Institut im. V. A. Steklova. Zapiski Nauchnykh Seminarov (POMI)，30:302–314，2021。[11] B. Gompertz。XXIV. 关于表达人类死亡率规律的函数性质，以及确定生命或有事件价值的一种新方法。致F. R. S. Francis Baily先生的一封信。Philosophical Transactions of the Royal Society of London，115:513–583，1825。[12] N. Hakamipour 和 S. Rezaei。带II型删失和戈姆珀茨分布的双变量简单步进应力加速寿命试验模型的最优设计。International Journal of Information Technology & Decision Making，14(6):1243–1262，2015。[13] J. A. Hanley。多变量分析的恰当应用。Annual Review of Public Health，4(1):155–180，1983。[14] J. A. Hanley 和 S. H. Shapiro。性活动与雄性果蝇的寿命：一份引人关注的数据集。Journal of Statistics Education，2(1)，1994。[15] N. Henze。离散模型的经验分布函数拟合优度检验。The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique，24(1):81–93，1996。[16] M. Kac 和 A. J. F. Siegert。平稳高斯过程的显式表示。Annals of Mathematical Statistics，18(3):438–442，1947。[17] E. Krafsur、R. Moon 和 Y. Kim。根据蝶呤浓度估算夏季黄腹家蝇（双翅目，蝇科）种群的年龄结构和繁殖组成。Journal of Medical Entomology，32(5):685–696，1995。[18] A. Lenart 和 T. I. Missov。戈姆珀茨分布的拟合优度检验。Communications in Statistics - Theory and Methods，45(10):2920–2937，2016。[19] C. Ley 和 Y. Swan。Stein密度方法与信息不等式。Electronic Communications in Probability，18:1–14，2013。[20] Y. V. Linnik。线性形式与统计判据 I、II。Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability，3:1–40，41–90。最初发表于1953年《乌克兰数学杂志》第5卷，第207–243、247–290页（俄文），1962年。[21] A. W. Marshall 和 I. Olkin。寿命分布：非参数、半参数和参数族的结构。Springer统计学丛书。Springer，纽约，2007。[22] Y. Mu、X. Zheng、H. Yu 和 R. Zhu。厌氧污泥在不同温度下的生物制氢。International Journal of Hyrogen Energy，31(6):780–785，2006。[23] Y. Y. Nikitin。基于刻画的检验及其效率：综述。Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica，21(1):3–24，2017。[24] L. Partridge 和 M. Farquhar。性活动会缩短雄性果蝇的寿命。Nature，294(5841):580–582，1981。

[25] C. Sinclair、B. Spurr 和 M. Ahmad。修正安德森-达林检验。*Communications in Statistics -Theory andMethods*，19(10)：3677–3686，1990。[26] C. Stein、P. Diaconis、S. Holmes 和 G. Reinert。使用可交换对分析模拟。在*Stein方法，由 P. Diaconis 和 S. Holmes 编*中，《style id='7'>讲义丛书—专著系列》第46卷，第1–25页，美国俄亥俄州比奇伍德，2004年。数理统计学会。[27] M. A. Stephens。带未知参数的拟合优度统计量的渐近结果。《统计年刊》，4(2)：357–369，1976。[28] C. Tenreiro。关于某些拟合优度检验族中调节参数的自动选择。《统计计算与模拟杂志》，89(10)：1780–1797，2019。[29] I. Tishby、O. Biham 和 E. Katzav。Erd˝os–R´enyi 网络中自避免行走的路径长度分布。《物理学杂志*A*：数学与理论》，49，2016。[30] A. W. van der Vaart。渐近统计学，《style id='23'>剑桥统计与概率数学丛书》第3卷。剑桥：剑桥大学出版社，1998。[31] D. Wang、X. Yang、C. Tian、Z. Lei、N. Kobayashi、M. Kobayashi、Y. Adachi、K. Shimizu 和 Z. Zhang。超细气泡水的特性及其在利用剩余活性污泥强化甲烷生产方面的试验。《生物资源技术》，273：63–69，2019。[32] H. White。模型设定错误下的最大似然估计。《计量经济学》，50(1)：1–25，1982。

附录

证明

首先，我们给出戈姆珀茨分布的 Stein型刻画，这是 Stein方法中所谓密度方法的一个特例，参见 [26], 命题 1.4。引理 A.1 的证明遵循 [2]中定理1的证明思路，因此略去。

引理 A.1. 若正随机变量 X 服从 $GO(\eta, b)$， $\eta, b > 0$分布，当且仅当

$$\mathbb{E}\big[g'(X) + \big(-\eta b e^{bX} + b\big)g(X)\big] = 0$$

对所有函数 $g \in \mathcal{G}$均成立，其中

$$\mathcal{G} = \big\{g : (0,\infty) \to \mathbb{R} \big|\ g \textit{ is differentiable}, g'(x) \textit{ and } \big(\eta b e^{bx} - b\big)g(x) \textit{ are bounded, and } \lim_{x\downarrow 0} g(x) = \lim_{x\downarrow 0} g(x)f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)f(x) = 0\big\},$$

且 f 表示式*(1)*中 $GO(\eta, b)$ 的概率密度函数。

定理*2.1*的证明。 首先假设 $X \sim GO(\eta,\ b)$。根据(1)中的 $f(x) = f(x;\ \eta,\ b)$，有

$$\mathbb{E}\big[(\eta b e^{bX} - b)\mathbf{1}\{X > s\}\big] = \int_0^\infty (\eta b e^{bx} - b)\mathbf{1}\{x > s\}f(x)\,dx = -\int_0^\infty f'(x)\mathbf{1}\{x > s\}\,dx = f(s), \quad s > 0.$$

由 $\min\{X, s\} = \int_0^s \mathbf{1}\{X > t\}\,dt$ 和 Fubini定理，得

$$\begin{aligned} T^X(s) = \mathbb{E}\big[(\eta b e^{bX} - b)\min\{X, s\}\big] &= \int_0^\infty (\eta b e^{bx} - b)\int_0^s \mathbf{1}\{x > t\}\,dt f(x)\,dx \\ &= \int_0^s \int_0^\infty (\eta b e^{bx} - b)\mathbf{1}\{x > t\}f(x)\,dx\,dt = \int_0^s f(t)\,dt = F(s). \end{aligned}$$

对所有 $s > 0$ 均成立，因此在 $\mathbb{R}$ 上有 $T^X \equiv F$。

现在假设 $T^X \equiv F$。定义 $d^X(s) = \mathbb{E}\big[(\eta b e^{bx} - b)\mathbf{1}\{X > s\}\big]\mathbf{1}\{0 < s < \infty\}$，对所有 $s \in \mathbb{R}$ 均成立。根据 Tonelli定理，有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{E}\big[|\eta b e^{bX} - b|\mathbf{1}\{X > t\}\big]\,dt &= \mathbb{E}\Big[|\eta b e^{bX} - b|\int_0^\infty \mathbf{1}\{X > t\}\,dt\Big] \\ &= \mathbb{E}\big[|\eta b e^{bx} - b|X\big] \le \eta b \mathbb{E}\big[X e^{bX}\big] + b\mathbb{E}\big[X\big] < \infty. \end{aligned}$$

因此可以应用 Fubini定理，并且

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^s d^X(t)\,dt = \int_0^s \mathbb{E}\big[(\eta b e^{bX} - b)\mathbf{1}\{X > t\}\big]\,dt &= \mathbb{E}\Big[(\eta b e^{bX} - b)\int_0^s \mathbf{1}\{X > t\}\,dt\Big] \\ = \mathbb{E}\big[(\eta b e^{bX} - b)\min\{X, s\}\big] = T^X(s), &\quad s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

得证，并且 $d^X \ge 0$ 几乎处处成立，因为 T^X 单调递增，且

$$\int_{\mathbb{R}} d^X(t)\,dt = \lim_{s\to\infty} T^X(s) = \lim_{s\to\infty} F(s) = 1.$$

由此可知， d^X是 T^X的概率密度函数，因此 F。设 $g \in \mathcal{G}$，其中 $\mathcal{G}$来自引理 A.1。由于 g有界，根据 Fubini 定理

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g'(X)] = \int_0^\infty g'(s)d^X(s)\,ds &= \int_0^\infty f'(s)\mathbb{E}\big[(\eta b e^{bx} - b)\mathbf{1}\{X > s\}\big]\,ds \\ &= \mathbb{E}\big[(\eta b e^{bx} - b)\int_0^\infty g'(s)\mathbf{1}\{X > s\}\,ds\big] = \mathbb{E}\big[-(-\eta b e^{bx} + b)(g(X) - g(0))\big] \\ &= \mathbb{E}\Big[-(-\eta b e^{bx} + b)g(X)\Big]. \end{aligned}$$

由引理 A.1 可得结论。 □

定理 *3.1* 的证明。 核心思路是在希尔伯特空间中使用中心极限定理。由于在式 (3) 中，估计量和重缩放数据导致各项相依，因此中心极限定理不能直接适用。因此，我们首先引入辅助过程

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_n(s) =& \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\Big\{(\eta_n e^{X_{n,j}}-1)\min\{X_{n,j},s\}-\mathbf{1}\{X_{n,j}\le s\}\Big\}\\ &+\sqrt{n}(\widehat{\eta}_n-\eta_n)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\{e^{X_{n,j}}\min\{X_{n,j},s\}\Big\}\\ &+\sqrt{n}(\widehat{b}_n-1)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\{\big(\eta_n e^{X_{n,j}}+\eta_n X_{n,j}e^{X_{n,j}}-1\big)\min\{X_{n,j},s\}\Big\},\quad s>0,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}V_n^*(s) =& \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\Big\{(\eta_n e^{X_{n,j}}-1)\min\{X_{n,j},s\}-\mathbf{1}\{X_{n,j}\le s\}\\ &+\psi_1(X_{n,j},\eta_n)\mathbb{E}\big[e^X\min\{X,s\}\big]\\ &+\psi_2(X_{n,j},\eta_n)\Big\{\eta_n\mathbb{E}\big[e^X\min\{X,s\}\big]+\eta_n\mathbb{E}\big[Xe^X\min\{X,s\}\big]-\mathbb{E}\big[\min\{X,s\}\big]\Big\}\Big\},\quad s>0.\end{aligned}$$

通过在 (η_n,1) 附近进行多元泰勒近似、某种积分变换、运用 H¨older 不等式以及条件 (4) 和 (5)，反复应用 Slutzki引理和紧性论证，并利用估计量的相合性，~ _ ~以及冗长的计算，我们能够证明 $\|\sqrt{n}V_n - V_n\|_{\mathbb{H}} = o_{\mathbb{P}}(1)$ 和 $\|V_n - V_n^*\|_{\mathbb{H}} = o_{\mathbb{P}}(1)$。将 V_n^* 的第 j 个加项记为 $W_{n,j}$。直接计算可得 $\mathbb{E}[W_{n,j}] = 0$，并且我们有一个逐行同分布随机变量序列。我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}W_{n,j}\Big\|_{\mathbb{H}}^2<\infty. \tag{12}$$

Lindeberg-Feller 中心极限定理表明，对所有 $g\in\mathbb{H}\setminus\{0\}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\langle W_{n,j},g\rangle_{\mathbb{H}}\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}(0,\sigma_\eta^2(g)),\quad n\to\infty, \tag{13}$$

其中 $\sigma_\eta^2(g) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big[\langle W_{n,1},g\rangle_{\mathbb{H}}^2\big]$。根据 [8], (12) 和 (13) 中的引理 3.1 和注 3.3，我们有 e

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}W_{n,j}\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W},$$

其中 $\mathcal{W}$ 表示一个取值于 $\mathbb{H}$ 的中心化高斯随机元，其协方差算子为 $\mathcal{C}$，且对所有$g\in\mathbb{H}\setminus\{0\}$ 均满足方程 $\sigma_\eta^2(g) = \langle\mathcal{C}g,g\rangle_{\mathbb{H}}$。该协方差算子与 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[W_{n,1}(s)W_{n,\ 1}(t)]$, 相同。经过大量直接计算后，即可得到定理中给出的公式。请注意，我们推导并使用了恒等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(\eta e^X-1)^2\min\{X,s\}\min\{X,t\}\big] &= -sf(s;\eta,1)-sf(t;\eta,1)+sF(s;\eta,1)+s(1-t)F(t;\eta,1)\\ &\quad+\mathbb{E}[X\mathbf{1}\{X\le s\}]+\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}\{X\le s\}]+\mathbb{E}[X\mathbf{1}\{X\le t\}],\\ \mathbb{E}\big[(\eta e^X-1)\min\{X,s\}\mathbf{1}\{X\le t\}\big] &= -sf(t;\eta,1)+F(s;\eta,1)\\ \mathbb{E}\big[(\eta e^X-1)X\mathbf{1}\{X\le s\}\big] &= -sf(s;\eta,1)+F(s;\eta,1)\\ \mathbb{E}\big[Xe^X\min\{X,s\}\big] &= \frac{1}{\eta}\big(s-sF(s;\eta,1)+\mathbb{E}\big[X\big]+\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}\{X\le s\}\big]+\mathbb{E}\big[X^2\mathbf{1}\{X\le s\}\big]\big)\\ \mathbb{E}\big[e^X\min\{X,s\}\big] &= \frac{1}{\eta}\big(1+\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}\{X\le s\}\big]\big)\\ \mathbb{E}\big[\min\{X,s\}\big] &= s-sF(s;\eta,1)+\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}\{X\le s\}\big],\end{aligned}$$

其中 $X\sim GO(\eta,1)$ 且 $0<s\le t<\infty$。因此，利用 Slutzki引理、连续映射定理以及三角不等式，可以证明该结论。□。

定理 *3.2* 的证明。令 $H^{\eta}(\cdot)$ 表示 $\|\mathcal{W}\|_{\mathbb{H}}^2$ 的分布，并令 $H_n^{\eta_n}$ 表示 T_n 的分布。注意， H^{η} 在 $\{s>0$ 上连续且严格递增: $0<H^{\eta}(s)<1\}$。根据定理 3.1，对于每个 $s>0$，当 $n\to\infty$ 时，均有 $H_n^{\eta_n}(s)\to H^{\eta}(s)$，因此由 H^{η} 的连续性可得

$$\sup_{s>0}|H_n^{\eta_n}(s)-H^{\eta}(s)|\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

将上一个结果与 $\widehat{\eta}_n$ 的相合性结合，可得

$$\sup_{s>0}\left|H_n^{\widehat{\eta}_n}(s)-H^{\eta}(s)\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

因此，通过与 [15]中 (3.10) 相同的构造，我们有

$$\sup_{s>0}\left|H_{n,B}^{*}(s)-H^{\eta}(s)\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{as } n,B\to\infty,$$

由此，$c_{n,\,B}^{*}(\alpha) \xrightarrow{\mathbb{P}} \inf\{s:\, H^{\eta}(s)\geq 1-\alpha\}$ 成立，因为 $n,\ B\to\infty$。这就证明了该结论。 □

定理 *4.2* 的证明。记

$$\begin{aligned}\bar{V}_n(s)=&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\{(\eta_0 e^{X_j}-1)\min\{X_j,s\}-\mathbf{1}\{X_j\leq s\}\Big\}+(\widehat{\eta}_n-\eta_0)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\{e^{X_j}\min\{X_j,s\}\Big\}\\&+(\widehat{b}_n-1)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\{\big(\eta_0 e^{X_j}+\eta_0 X_j e^{X_j}-1\big)\min\{X_j,s\}\Big\},\quad s>0,\end{aligned}$$

根据定理 3.1 的证明中相同的推理，我们有 $\|V_n-\bar{V}_n\|_{\mathbb{H}}=o_{\mathbb{P}}(1)$。因此，根据三角不等式，我们有

$$\frac{T_n}{n}=\|V_n\|_{\mathbb{H}}^2\leq\|V_n-\bar{V}_n\|_{\mathbb{H}}^2+\|\bar{V}_n\|_{\mathbb{H}}^2=\|\bar{V}_n\|_{\mathbb{H}}^2+o_{\mathbb{P}}(1)\leq\|V_n\|_{\mathbb{H}}^2+o_{\mathbb{P}}(1).$$

ˆ由于ˆη_n 和 b_n 分别对 η_0 和1具有相合性，且所有所需期望均有限，因此根据大数定律和 Slutzki引理，V_n 定义中的最后¯两项依概率收敛于 0。该收敛关于 $s>0$一致成立。此外，结合单调性论证与大数定律，V_n 定义中的第一项依概率收敛于 $\Delta_{\eta_0}^{*}(s)$，且关于 $s>0$一致成立。因此

$$\|\bar{V}_n\|_{\mathbb{H}}^2=\int_0^{\infty}\{\bar{V}_n^2(s)-\Delta_{\eta_0}^{*2}(s)\}w(s)\mathrm{d}s+\Delta_{\eta_0}.$$

这里，由于上述依概率一致收敛，第一项的绝对值有上界 $\sup_{s>0}|\bar{V}_n^2(s)-\Delta_{\eta_0}^{*2}(s)|\cdot\|1\|_{\mathbb{H}}^2=o_{\mathbb{P}}(1)$，而 $\|1\|_{\mathbb{H}}^2<\infty$ 则由（4）得出。再次应用 Slutzki引理即可完成证明。□。

ˆ推论*4.3*的证明。根据假设(6)–(10)，我们知道估计量 $\widehat{\eta}_n$ 和 b_n 分别依概率收敛于某个 $\tilde{\eta}>0$ 和 $b>0$。因此，对于给定的显著性水平 α，由定理 3.2的证明可知，临界值$c_{n,\,B}^{*}(\alpha)$对 $n,\ B\to\infty$收敛于某个固定值 $0<c<\infty$ （记作）。根据定理 2.1中的刻画，若底层分布不属于Gompertz族GO，则定理 4.2中的Δ_{η_0}严格为正，因此结论直接成立。□

B More 从实际角度看最大似然估计的细节 w

ˆ由于Gompertz族中最大似然估计量 $\widehat{\eta}_n$ 和 b_n 没有闭式解，我们使用牛顿-拉夫森算法对最大化解进行数值近似；为此使用了R软件包*pracma*ˆ。该算法需要为尺度参数 b 提供一个初始猜测，以便求得 b_n。接下来， η的最大似然估计量通过 $\widehat{\eta}_n=(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp(\widehat{b}_n x_j)-1)^{-1}$依赖于 $\widehat{b}_n$。

在本附录中，我们将说明如何求得这样的初始估计量。我们的想法是使用累积风险函数的一个估计量， $\Lambda:\ x\mapsto\eta(\exp(bx)-1)$。具体而言，众所周知，

$$\widehat{\Lambda}_n:x\mapsto\sum_{j:X_{(j)}\leq x}\frac{1}{n-j+1}$$

是 $\Lambda(x)$ 的相合估计量；此处， $X_{(1)}$，……， $X_{(n)}$ 表示次序统计量。接下来，我们从数据 X_1，……， X_n中选取一个相当大的值 $\hat{z}_n$，例如其第 90th 百分位数；无论如何，随着样本量增加，$\hat{z}_n$ 应收敛到某个有限的固定值 $z > 0$。于是，我们的初始估计量定义为

$$\widehat{b}_{n,\text{pilot}} = \frac{2}{\hat{z}_n} \log\Big(\frac{\widehat{\Lambda}_n(\hat{z}_n) - \widehat{\Lambda}_n(\hat{z}_n/2)}{\widehat{\Lambda}_n(\hat{z}_n/2)}\Big).$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$事实上，由于 Λ_n 在紧区间上对 Λ 具有一致一致性，$b_{n,\text{ pilot}}$ 是一个相合估计量

$$\frac{2}{z} \log\Big(\frac{\Lambda(z) - \Lambda(z/2)}{\Lambda(z/2)}\Big) = \frac{2}{z} \log\Big(\frac{\exp(bz) - \exp(bz/2)}{\exp(bz/2) - 1}\Big) = \frac{2}{z} \log(\exp(bz/2) \cdot 1) = b.$$

因此，尺度参数估计量可通过求解下式得到

$$h(b; x_1, \ldots, x_n) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(bx_j) - 1\Big) \cdot (b\bar{x}_n + 1) - \frac{b}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \exp(bx_j) = 0 \tag{14}$$

借助牛顿-拉夫森算法。为了找到一个合理的初始估计量，作为算法中 b 的初始值，我们使用了戈珀茨累积风险函数$x \mapsto \eta(\exp(bx) - 1)$的一个估计量；有关初始估计量的详细信息见附录 B。每当（14）在正数范围内对 b 无解时，我们就$\widehat{}$选取较小的值 $b_n = 0.001$，因为 $\lim_{b\downarrow 0} h(b; x_1, \ldots, x_n) = 0$。

C 根据离散风险率重构概率质量函数

在第 6.2 节中，我们根据官方生命表生成了数据。本附录将详细说明这一过程。

设 X 是一个取值于 $\mathbb{N}_0$ 的随机变量，其概率质量函数为 $k \mapsto p(k) = P(X = k)$， $k \in \mathbb{N}_0$。众所周知，风险函数可由下式得到:

$$q(k) = P(X = k \mid X \geq k) = \frac{p(k)}{S(k-1)},$$

其中， $S(k) = P(X > k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p(\ell) = \prod_{\ell=-\infty}^{k}(1 - q(\ell))$ 是所谓的生存函数。因此，给定风险函数 q 后，可通过以下迭代过程重建相应的概率质量函数:

- $p(0) = q(0)$,
- $S(k-1) = \prod_{\ell=0}^{k-1}(1 - q(\ell))$, $k \geq 1$,
- $p(k) = S(k-1) \cdot q(k)$, $k \geq 1$.

对于每个 k，在将 k 增加到下一个整数值之前，必须依次完成最后两个步骤。

对于第 6.2 节中的数据集，需要进行最后一次调整，以确保概率质量函数之和为 1；由于舍入误差，起初并未满足这一点。因此，最后一步是将 $\tilde{p}(k) = p(k)/\sum_{\ell=0}^{\infty} p(\ell)$，$k \in \mathbb{N}_0$，作为概率质量函数。

在第 6.2 节中，我们还考虑了一些截断分布（其概率质量函数记作 $\check{}p$），它们的概率质量函数按如下方式得到：对于截断区域内的每个 k，记作 $k \in [0, L] \cup [R, \infty$，其中 $0 \leq L < R < \infty$ 为整数，我们令 $\check{}p(k) = 0$。对于 $k \in [L+1, R-1]$，我们令 $\check{}p(k) = \tilde{p}(k)/\sum_{\ell=L+1}^{R-1} p(\ell)$，以便将 $\check{}p$ 重新缩放为概率质量函数。