arXiv:2302.01658v2 [math.NA] 1 Feb 2024

一种用于高维抛物型偏微分方程的时空自适应低秩方法

MARKUS BACHMAYR[1] 和 MANFRED FALDUM[1]

Abstract. 本文构造并分析了一种用于抛物型偏微分方程的自适应方法，该方法将时间方向上的稀疏小波展开与空间变量方向上的自适应低秩近似相结合。研究证明，该方法能够收敛，并且满足与现有用于椭圆问题的自适应低秩方法相似的复杂度界，从而确立了其适用于高维空间定义域上的抛物型问题。此外，该方法的构造还为这类问题提供了可计算且严格的后验误差界。最后，通过数值实验展示了相关结果。

1. 引言

高维空间上抛物型偏微分方程（PDE）的数值近似在众多应用领域中都备受关注。特别是，这类问题会作为与随机过程相关联的柯尔莫哥洛夫方程出现，用于确定性地描述随机动力学下密度和期望的时间演化。以多粒子系统为例，问题的维数与粒子数量成正比。数理金融和最优控制中也会出现具有类似特征、但通常还涉及额外非线性的问题。

人们提出了各种专门的方法，用于数值求解这类问题，例如基于稀疏展开 [21,37,38], 、低秩张量近似 [4,13,15,22], 或深度神经网络。尤其是在神经网络的情况下，这类针对高维问题的方法通常利用与随机微分方程的联系，通过对样本路径进行蒙特卡洛平均来近似解的点值，并可通过回归构造近似解，参见例如 [12]。

在本文中，我们旨在研究基于稀疏和低秩表示的方法，这些方法能够扩展到高维情形，同时又能在相关范数下，针对微分方程的精确解，对数值误差提供可靠的确定性后验控制。这里，无论是在计算近似还是在计算相应的误差界时，主要关注的问题都是避免维数灾难，即理想情况下，使计算成本相对于维数呈低阶多项式增长，而不是指数增长。

这里关注的一个典型模型问题是定义在 d 维单位立方体 $\Omega = (0,1)^d$ 上、关于时间依赖函数 u 的如下非定常扩散方程

[1] Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen University, Temp-lergraben 55, 52056 Aachen, Germany*E-mail addresses*: bachmayr@igpm.rwth-aachen.de，faldum@igpm.rwth-aachen.de。*Date*：2024年2月2日。M.B. 和 M.F. 感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）的资助——项目编号 233630050、320021702、442047500——TRR 146“软物质系统的多尺度模拟方法”、GRK2326“能量、熵与耗散动力学（EDDy）”以及 SFB 1481“稀疏性与奇异结构”。

以及时间区间 $[0,T]$ 上具有初始数据 u_0 的 $T>0$，

$$\partial_t u - \nabla_x \cdot (a\nabla_x u) = f \ \text{ in } (0,T]\times\Omega, \quad u|_{t=0} = u_0 \ \text{ on } \Omega, \tag{1.1}$$

其中， a 和 f 分别是给定的扩散系数和源项。为简单起见，我们假设在 $\partial\Omega$上满足齐次狄利克雷边界条件。

1.1. **与现有结果的关系**。 对于上述类型的相应定常椭圆问题，利用解在适当张量积基中的近似稀疏性的方法——例如稀疏网格或基于小波的自适应变体——已被证明适用于维数适中的问题，维数最高可达 $d\approx 20$。正如 [21], 对高维泊松问题的研究所展示的那样，解关于这类基的可逼近性本身通常可能随 d呈指数级恶化。对于将时间步进与基于稀疏网格的空间离散相结合的非自适应抛物型问题处理方法，这种对中等维数的限制同样可见于 [45]。

与依赖给定基下稀疏性的方法不同，低秩方法能够利用问题的其他结构特征，使更高维的问题在计算上变得可处理。在这类方法中，解关于乘积基的展开系数以适当的低秩张量格式表示。 [6, 8] 中针对高维椭圆问题开发的此类自适应求解器，能够系统地缩减误差，同时具有近最优的渐近计算复杂度，并可显式计算相对于 u的 H^1-误差上界。对于具有适当低秩可逼近性的椭圆问题，这些方法已被证明能够避免维数灾难；相关测试案例包括 [21], ，其中 [7, 8], 中的自适应低秩求解器数值测试处理了最高达 $d=256$ 维的问题。

原则上，要将这类自适应低秩概念推广到时变问题，可以采用多种基本构造。例如，可以直接依靠用于椭圆问题的低秩求解器来实现时间步进格式。比如， [15, 22]中就提出了采用固定空间离散的此类方法。然而，在这种情况下，张量秩的演化和计算复杂度都难以控制。

动态低秩近似 [32, 34] 提供了另一种策略，可在固定秩张量流形上获得近似演化。该方法在抛物方程中的应用已在 $d=2$ 中 [9, 18] 得到研究；对于参数问题，则见 [30]。然而，目前尚无已知的此类方法能够确保问题（1.1）达到给定的解误差容限。

另一种备选方案是基于时空变分形式的方法。例如，基于自适应小波方法的求解器，通过在空间和时间上使用黎曼基展开得到稀疏展开；相关工作见 [14, 31, 36, 37]；而采用稀疏多项式逼近的方法见 [38]。关于采用各种不同变分形式的有限元方法，已有大量文献，例如见 [2, 24, 25, 27, 33, 39, 43]。在 [3]中，研究了结合时间小波与空间有限元的方法，用于预条件；而 [42] 则将其用于自适应求解器。

采用时空格式获得低秩近似的一种最自然方法，是将时间视为张量近似中的一个附加模，从而在时间变量与空间自由度之间进行低秩分离。 [4, 13] 采用固定离散化时便遵循了这种方法。其缺点是，通常并不清楚所求解是否确实能在这种时间变量与空间变量分离的格式下具有高效的低秩近似。例如，在对流占主导的问题中，或在时变源于空间区域内移动的问题中，就可能出现这一问题。问题的这些特征可能导致解中出现只有在空间变量与时间变量之间的分离中采用较大秩才能解析的结构。此外，这种分离还会在.....的相互作用方面带来微妙问题

张量结构与相关函数空间之间的相互作用；在 [4] 中，这会妨碍对低秩格式下预条件进行完全严格的处理。我们将在下一节和备注4.5中讨论这些困难，以及在我们的设定中如何避免这些困难。

1.2. 创新贡献。 我们采用一种新方法，将时间变量上的稀疏 小波展开与空间变量上的低秩 层次张量近似相结合。这意味着，对于近似中的每个时间小波指标，我们都使用独立的低秩张量表示来表示空间近似系数。为尽可能充分地利用解的稀疏性，每个时间索引对应的空间离散空间也独立自适应调整。

我们来考察这些近似在以下情形中的形式 $d = 2$: 对于例（1.1），对应于两个空间变量。我们采用 [37], 中所考虑的经典时空变分形式，并将在第2节进一步详细讨论该形式。在这一形式中，我们在空间区域 Ω 上以弱形式处理（1.1），其中 $= (0,1)^2$, 并在空间

$$\mathcal{X} = L_2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \cap H^1\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big), \tag{1.2}$$

并且在 $L_2(\Omega)$ 中显式施加初始条件。我们假设存在合适的 Riesz 基 $\{\Phi_{\nu_t,\nu_1,\nu_2}\}_{\nu_t\in\vee_t,\nu_1,\nu_2\in\vee_1}$，它属于 $\mathcal{X}$，其可数指标集为 $\vee_t$ 和 $\vee_1$，并寻求如下形式的近似

$$u(t,x_1,x_2) \approx \sum_{\nu_t\in\Lambda_t}\sum_{\nu_1\in\Lambda_{1,\nu_t}}\sum_{\nu_2\in\Lambda_{2,\nu_t}} \mathbf{u}_{\nu_t,\nu_1,\nu_2}\Phi_{\nu_t,\nu_1,\nu_2}(t,x_1,x_2), \tag{1.3}$$

其中，有限指标集 $\Lambda_t \subset \vee_t$ 和 $\Lambda_{\nu_t,1},\Lambda_{\nu_t,2} \subset \vee_1$ 需要根据给定的近似误差容限确定。此外，对于每个活跃时间基指标 $\nu_t \in \Lambda_t$，我们需要找到一个秩参数 $r_{\nu_t} \in \mathbb{N}$ 以及向量 $\mathbf{U}^{(i)}_{\nu_t,k} \in \mathbb{R}^{\Lambda_{\nu_t,i}}$，其中 $k = 1,\dots,r_{\nu_t}$，以及$i = 1,2$，使得我们得到足够精确的低秩近似

$$\mathbf{u}_{\nu_t,\nu_1,\nu_2} = \sum_{k=1}^{r_{\nu_t}} \mathbf{U}^{(1)}_{\nu_t,k,\nu_1}\mathbf{U}^{(2)}_{\nu_t,k,\nu_2} \qquad \text{for } (\nu_1,\nu_2) \in \Lambda_{\nu_t,1}\times\Lambda_{\nu_t,2}. \tag{1.4}$$

为计算这种结合稀疏与低秩的近似，我们构造了一种时空自适应求解器，其性质与针对椭圆问题的相应现有方法非常相似，见 [8]。具体而言，我们在 $\mathcal{X}$-范数下实现了有保证的误差缩减，并获得可计算的时空误差界。同时，在自然的低秩可逼近性假设下，我们再次获得近乎最优的渐近计算成本，其收敛率接近相应底层一维近似的收敛率。对于较大的 d，计算复杂度可保证不会随 d呈指数增长，因此避免了维数灾难。这一结果要求问题数据和解的可逼近性不会随着 d增加而过度恶化。不过需要注意的是，我们的自适应求解器本身并不使用关于解的低秩可逼近性的任何显式知识（这一性质也称为普适性），而且数值测试中对 d的依赖实际上远比我们的估计所保证的更有利。

为了通过降维运算达到所需的计算复杂度，基函数具有乘积结构至关重要。具体而言，分别选取适当的正交样条小波型基 $\{\theta_{\nu_t}\}_{\nu_t\in\vee_t}$ 和 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\vee_1}$，其定义域分别为 $L_2(0,\ T)$ 和 $L_2(0,\ 1)$，令

$$\Phi_{\nu_t,\nu_1,\nu_2}(t,x_1,x_2) = \|\theta_{\nu_t}\otimes\psi_{\nu_1}\otimes\psi_{\nu_2}\|_{\mathcal{X}}^{-1}\,\theta_{\nu_t}(t)\,\psi_{\nu_1}(x_1)\,\psi_{\nu_2}(x_2)\,.$$

这种 L_2-正交归一基由 Donovan-Geronimo-Hardin 多小波 [23]提供。在这里，$\mathcal{X}$-范数中的归一化确保了 Riesz 基性质，即对于（$\mathbf{u}$ 在（1.3）中的系数序列，我们有 $c\|\mathbf{u}\|_{\ell_2} \le \|u\|_{\mathcal{X}} \le C\|\mathbf{u}\|_{\ell_2}$，且具有一致的

常数。由于方法中的低秩压缩是相对于 ℓ_2-范数计算的，这一性质对于确保所计算近似在 $\mathcal{X}$- 范数下的总误差界至关重要。然而，与椭圆问题中的情形类似，在 [8]，中会遇到缩放因子 $\|\theta_{\nu_t}\otimes\psi_{\nu_1}\otimes\psi_{\nu_2}\|_{\mathcal{X}}^{-1}$ 不具有显式低秩形式的问题。为规避这一问题，我们针对该对角缩放构造了新的依赖于离散化的低秩近似，使其适用于当前的时空设置。

请注意，我们的基本构造不同于 [42]，中的方法：后者将时间方向的小波离散化与空间方向可能完全不同的离散化（例如有限元）结合起来。我们在此考虑的方法基于标准的时空乘积小波离散化，如 [37]，中所示，但采用了该离散化下基系数的一种特殊非线性参数化，其中时间也发挥着特殊作用。

1.3. **概念概述与文章结构**。 本文结构如下：第 2节讨论 [37] 所依据的时空变分形式及其小波 Riesz 基表示，以及高维情形下对小波基的特定要求。

第 3节转而讨论时间方向自适应稀疏近似与空间变量低秩近似相结合的基本问题。我们说明， [6, 8] 中提出的通过基表示在函数空间中构造低秩近似的一般框架，可以适用于如下情形：针对每个时间基指标分别采用低秩表示，如式（1.4）所示。特别地，对于基粗化和秩约简过程，我们得到了与 [6]中单一低秩表示情形类似的结果。

在第 4 节中，我们分析基于指数和近似的新型时空低秩对角预条件子。借助这些低秩近似，我们处理多维 Riesz 基中出现的缩放因子缺乏可分离性的问题。这也是椭圆问题低秩求解器中的一个核心问题 [8]，，但对于时空格式，我们需要一种新的构造方法。我们充分利用每个时间基指标对应的分离张量表示的结构，从而能够针对每个时间索引独立地近似预条件子的对角项。随后，基于$s \mapsto \sqrt{s}/(s+a)$的逆拉普拉斯变换，通过指数和实现这些近似，其中 $a > 0$ 取决于相应的时间索引。

–

在第 5 节中，我们将新的对角缩放低秩近似用于一种方案，以构造时空格式中算子的基表示的稀疏低秩近似。随后，这些自适应算子近似成为在自适应方案中获得残差近似的主要组成部分。我们为时间导数的基表示设计了新技术；这里涉及不同低秩表示之间的相互作用。我们还为初始时刻迹的表示设计了新技术。尤其是，后者带来了相较于椭圆情形的新困难，因为它导致算子表示秩与激活基函数的最大小波层级之间产生额外耦合。

在第 6 节中，我们将由此得到的残差近似格式用作自适应方法的核心组成部分。该方法基于序列空间中的近似理查森迭代，并应用于时空变分形式的最小二乘形式。首先，我们证明该方法在自然范数（1.2）下收敛到抛物型偏微分方程的精确解。随后，在解的可逼近性满足典型假设的条件下，我们分析该方法所需基本运算总数的复杂度。此类复杂度界的首个关键要素，是对离散化指标集大小和低秩表示秩给出的近乎最优估计

这些中间结果由低秩重新压缩和基底粗化过程提供。第二个关键要素是算子近似复杂度的上界。尤为重要的是，为了估计迭代格式中多个步骤的累积效应，我们需要处理活跃基底指标集与算子近似的低秩表示之间的相互作用。

最后，在第 7 节中，我们给出该新方法在大规模 d上的一些初步数值示例，并在第 8 节总结结论，并展望进一步的开放问题。

1.4. 记号。 在本文余下部分，为简化记号，我们用 $\|\cdot\|$ 表示相应指标集上的ℓ_2范数，用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示相应的内积。用$A \lesssim B$表示 $A \leq CB$ ，其中 $C > 0$为常数； $A \gtrsim B$ 定义为 $B \lesssim A$，而$A \eqsim B$ 定义为 $A \lesssim B$ 和 $A \gtrsim B$。

2. Preliminaries

2.1. 问题表述。 设 V, H 为可分希尔伯特空间，且 V稠密嵌入于 H中。将 H 与其对偶空间 H'等同，可得盖尔范德三元组 $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$。

设 $0 < T < \infty$和 $I = [0, T]$。对于几乎处处的 $t \in I$，记 $a(t;\cdot,\cdot)$为定义在$V \times V$上的双线性型，使得对所有 $v, \hat{v} \in V$，函数 $t \mapsto a(t; v, \hat{v})$ 在 I上可测。此外，对于几乎处处的 $t \in I$，我们假设

$$|a(t;v,\hat{v})| \leq a_{\max}\|v\|_V\|\hat{v}\|_V \quad \text{for all } v,\hat{v} \in V \qquad \text{(boundedness)}, \tag{2.1a}$$

$$a(t;v,v) + \lambda_0\|v\|_H^2 \geq a_{\min}\|v\|_V^2 \quad \text{for all } v \in V \qquad \text{(coercivity)} \tag{2.1b}$$

其中 $0 < a_{\min} \leq a_{\max} < \infty$ 和 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$为某些常数。因此，对于几乎处处的 $t \in I$，我们可以定义$A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$，如下所示：

$$\langle A(t)v, \hat{v}\rangle_{V'\times V} = a(t;v,\hat{v}).$$

我们考虑如下形式的线性抛物型问题

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + A(t)u(t) &= g(t) \qquad \text{in } V', \\ u(0) &= h \qquad \text{in } H, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $g \in L_2(I; V')$ 和 $h \in H$ 已给定。

我们采用经典的抛物型问题的时空弱形式（2.2），该形式在自适应方法的背景下于 [37] 中进行了分析；另见 [20,第 XVIII 章]。该形式的试验空间为

$$\mathcal{X} = L_2(I;V) \cap H^1(I;V') = \left\{v \in L_2(I;V) : \partial_t v \in L_2(I;V')\right\}, \tag{2.3}$$

检验空间为

$$\mathcal{Y} = L_2(I;V) \times H. \tag{2.4}$$

对于 $v \in \mathcal{X}$ 和 $(w_1, w_2) \in \mathcal{Y}$，相应的范数为

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{X}} &= \left(\|v\|_{L^2(I;V)}^2 + \|\partial_t v\|_{L_2(I;V')}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|(w_1,w_2)\|_{\mathcal{Y}} &= \left(\|w_1\|_{L^2(I;V)}^2 + \|w_2\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

（2.2）的时空弱形式现在写作 $u \in \mathcal{X}$

$$b(u,v) = f(v) \quad \text{for all } v \in \mathcal{Y}, \tag{2.6}$$

其中双线性型 $b\colon\ \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$b(v,w)=\int_I \langle\partial_t v(t),w_1(t)\rangle_{V'\times V}+a\big(t;v(t),w_1(t)\big)\,dt+\langle v(0),w_2\rangle_H \tag{2.7}$$

以及泛函 $f\colon\ \mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(w)=\int_I \langle g(t),w_1(t)\rangle_H\,dt+\langle h,w_2\rangle_H.$$

定理 2.1。算子 $B\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\ \mathcal{Y}')$ 定义为 $(Bv)(w)\ =\ b(v,\ w)$ 其中 b 如(2.7)所示，$\mathcal{X}$ 如 (2.3) 所示，且 $\mathcal{Y}$ 如 (2.4) 所示，该算子有界可逆。

关于该定理的证明及范数的显式上界 $\|B\|$ 和 $\|B^{-1}\|$，请参见 [37]。我们的工作专门研究具有强制空间部分的问题，例如$A(t)\ =-\Delta$，其中（2.1b）在 $\lambda_0\ =\ 0$下成立。请注意，对于这类问题，B 和 B^{-1} 的上界均与终止时间 T无关，这可从 [37, 定理 5。1]看出。若在 $\mathcal{X}$ 上采用一种修正范数，将初始迹纳入$t=0$，如 [44] 所示，则 T无关性在 $\lambda_0>0$时也成立；但下文中我们采用（2.5）中的标准范数。

我们构造自适应方法的基础，是利用适当的小波 Riesz 基，对问题（2.6）进行等价的无限矩阵表示。设 $\{\theta_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{t}}}$ 是 $L_2(I)$ 的 Riesz 基，且 $\{\|\theta_\nu\|^{-1}_{H^1\ (I)}\theta_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{t}}}$ 是 $H^1(I)$ 的 Riesz 基；再设$\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}$ 是 H 的 Riesz 基，使得 $\{\|\Psi_\nu\|_V^{-1}\Psi_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}$ 是 V 的 Riesz 基，且 $\{\|\Psi_\nu\|_{V'}^{-1}\Psi_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}$ 是 V' 的 Riesz 基。

设 $\bar{S}^{\mathcal{X}}$ 和 $\bar{S}^{\mathcal{Y}}$ 分别是在 $\vee=\vee_{\mathrm{t}}\times\vee_{\mathrm{x}}$ 和 $\vee_{\mathrm{x}}$ 上各项为正的实数序列，并满足

$$\bar{S}^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\eqsim\Big(\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_V^2+\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|^2_{H^1(I)}\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|^2_{V'}\Big)^{-\frac{1}{2}},\qquad \bar{S}^{\mathcal{Y}}_{\nu_{\mathrm{x}}}\eqsim\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_V^{-1} \tag{2.8}$$

对所有 $\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}$、$\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}$ 均一致。于是，正如 [37], 中所指出的

$$\Sigma_{\mathcal{X}}=\Big\{(t,x)\mapsto\bar{S}^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}(t)\,\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}(x)\colon\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}\Big\}$$

是 $\mathcal{X}$ 的 Riesz 基，并且

$$\Sigma_{\mathcal{Y}}=\big\{(t,x)\mapsto\big(\bar{S}^{\mathcal{Y}}_{\nu_{\mathrm{x}}}\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}(t)\,\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}(x),0\big):\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}\big\}\cup\Big\{x\mapsto\big(0,\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}(x)\big):\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}\Big\}$$

是 $\mathcal{Y}$ 的 Riesz 基。利用 $\vee'=\vee\cup\vee_{\mathrm{x}}$，我们引入记号 $\Sigma_{\mathcal{X}}=\{X_\nu\}_{\nu\in\vee}$ 和 $\Sigma_{\mathcal{Y}}=\{Y_\mu\}_{\mu\in\vee'}$，分别表示这些集合中的元素。因此，定义

$$\bar{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{B}}_1\\ \bar{\mathbf{B}}_2\end{bmatrix},\quad \bar{\mathbf{B}}_1=\big(b(X_\nu,Y_{\nu'})\big)_{\nu\in\vee,\nu'\in\vee'},\ \bar{\mathbf{B}}_2=\big(b(X_\nu,Y_{\nu_{\mathrm{x}}})\big)_{\nu\in\vee,\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}},$$

并将 $\ell_2(\vee')$ 与 $\ell_2(\vee)\ \times\ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$ 视为同一对象，可知 $\bar{\mathbf{B}}$ 定义了一个从$\ell_2(\vee)$到 $\ell_2(\vee')$ 的同构。此外，利用

$$\bar{\mathbf{f}}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{f}}_1\\ \bar{\mathbf{f}}_2\end{bmatrix},\quad \bar{\mathbf{f}}_1=\big(f(Y_{\nu'})\big)_{\nu'\in\vee'},\ \bar{\mathbf{f}}_2=\big(f(Y_{\nu_{\mathrm{x}}})\big)_{\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}}$$

我们有 $\bar{\mathbf{f}}\in\ell_2(\vee')$。因此，无穷线性方程组 $\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}\ =\ \bar{\mathbf{f}}$ 有唯一解 $\bar{\mathbf{u}}\in\ell_2(\vee)$，并且 u 求解（2.6）可表示为 $u=\sum_{\nu\in\vee}\bar{\mathbf{u}}_\nu X_\nu$。

现在来考察$\bar{\mathbf{B}}$的结构。为此，我们引入对角缩放矩阵

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}&=\big(\bar{S}^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\delta_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}),(\nu'_{\mathrm{t}},\nu'_{\mathrm{x}})}\big)_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}),(\nu'_{\mathrm{t}},\nu'_{\mathrm{x}})\in\vee},\\ \bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}&=\big(\bar{S}^{\mathcal{Y}}_{\nu_{\mathrm{x}}}\delta_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}},\tilde{\nu}_{\mathrm{x}}),(\nu'_{\mathrm{t}},\nu'_{\mathrm{x}},\tilde{\nu}'_{\mathrm{x}})}\big)_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}},\tilde{\nu}_{\mathrm{x}}),(\nu'_{\mathrm{t}},\nu'_{\mathrm{x}},\tilde{\nu}_{\mathrm{x}})\in\vee'}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

利用 b 的双线性，以及 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的基的定义，我们可以将 $\bar{\mathbf{B}}$ 改写为以下形式

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\mathrm{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}, \tag{2.10}$$

其中 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{T}_0$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \Big(b\big(\theta_{\nu_{\mathrm{t}}} \otimes \Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}, (\theta_{\nu'_{\mathrm{t}}} \otimes \Psi_{\nu'_{\mathrm{x}}}, 0)\big) \Big)_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}),(\nu'_{\mathrm{t}},\nu'_{\mathrm{x}})\in\vee}, \\ \mathbf{T}_0 &= \Big(b\big(\theta_{\nu_{\mathrm{t}}} \otimes \Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}, (0, \Psi_{\nu'_{\mathrm{x}}})\big) \Big)_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}})\in\vee,\nu'_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

并且 $\mathbf{I}_{\mathrm{x}} = (\delta_{\nu,\nu'})_{\nu,\nu'\in\vee_{\mathrm{x}}}$。

注 2.2。对于（2.2），可以采用不同于（2.6）中的试验空间与检验空间，构造其他弱形式，例如下面这种形式（参见 [14]）：求 $u \in L_2(I;V)$ 使得

$$\int_I -\langle u(t), \partial_t v(t)\rangle + a\big(t; u(t), v(t)\big)\, dt = \int_I \langle g(t), v(t)\rangle_H\, dt + \langle h, v(0)\rangle_H$$

对所有 $v \in L_2(I;V) \cap \{w \in H^1(I;V') \colon w(T) = 0\}$。这种表述可通过对本文所发展的技术进行直接调整来处理，事实上还能缓解处理初值时遇到的一些技术难点（见第5.4节）。然而，由于（2.6）在近似解方面具有更强的收敛性——其范数为 $\mathcal{X}$，而非 $L_2(I;V)$——因此我们采用弱形式（2.6）。

2.2. **二阶问题**。本文关注如下情形：$A(t)$ 是定义在 $\Omega = (0,1)^d$ 上的二阶椭圆算子，其中 $V = H_0^1(\Omega)$、$H = L_2(\Omega)$、$V' = H^{-1}(\Omega)$，且 $A(t)\colon V \to V'$ 由下式给出

$$A(t)v = -\nabla_x \cdot M(t)\nabla_x v + q(t)\cdot\nabla_x v + c(t)v, \quad v \in V, \tag{2.12}$$

其中 $M(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$、$q(t) \in \mathbb{R}^d$、$c(t) \in \mathbb{R}$ 均满足适当条件。

对于定义在乘积区域上的这一问题，我们基于以下假设，采用一种特定构造来建立具有张量积结构的 V 和 V' 的空间小波Riesz基。设可数指标集为 $\vee_1$，令 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\vee_1}$ 为 $L_2(0,1)$ 的一个正交归一基，同时也是 $H_0^1(0,1)$ 和 $H^{-1}(0,1)$ 的 Riesz 基，并采用相应的归一化。对于每个 $\nu \in \vee_1$，记基函数 ψ_ν 的小波层级为 $|\nu|$。接着，令 $\vee_{\mathrm{x}} = \bigtimes_{i=1}^d \vee_1$，并令 $\Psi_\nu = \bigotimes_{i=1}^d \psi_{\nu_i}$，使得

$$\|\Psi_\nu\|_V = \Big(\sum_{i=1}^d \|\psi_{\nu_i}\|^2_{H_0^1(0,1)}\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu \in \vee_{\mathrm{x}}.$$

然后，我们很容易验证以下观察结果，这些结果与 [21, 第 2] 和 [37,第 8]节中以类似形式提出的观察一致。

命题2.3。对于 $\{\Psi_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}$ 在 $\Omega = (0,1)^d$ 上，且 $V = H_0^1(\Omega)$，$H = L_2(\Omega)$ 如上所述，特别是它构成 H 的一个正交归一基，我们有如下结论：

(i) $\{\|\Psi_\nu\|_V^{-1}\Psi_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}$ 是 V 的一个 *Riesz* 基，其中存在与 d 无关的常数，使得

$$\|\mathbf{v}\| \eqsim \Big\| \sum_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}} v_\nu \|\Psi_\nu\|_V^{-1}\Psi_\nu \Big\|_V \quad \textit{for all } \mathbf{v} = (v_\nu)_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}}).$$

（ii）其中常数与 d 无关，

$$\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{V'} \eqsim \|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_V^{-1} \quad \textit{for } \nu_{\mathrm{x}} \in \vee_{\mathrm{x}}.$$

（iii） $\{\|\Psi_\nu\|_V\Psi_\nu\}_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}$ 是 V' 的 *Riesz* 基，其中常数与 d 无关，

$$\|\mathbf{v}\| \eqsim \Big\|\sum_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}} v_\nu\|\Psi_\nu\|_V\Psi_\nu\Big\|_{V'} \quad \textit{for all } \mathbf{v}=(v_\nu)_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}\in\ell_2(\vee_{\mathrm{x}}).$$

注意，对于命题 d2.3 中常数的-无关性，关键在于我们从 $L_2(0,1)$-正交归一的单变量小波 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\vee_1}$开始，因为（正如 [21] 中所观察到的）否则这些常数将依赖于 d，最终导致本方法的计算成本呈指数级增长。对于 [8] 中讨论的椭圆问题自适应低秩方法，单变量小波的选择也受到同样的限制。

尽管我们的自适应求解器可以采用满足上述要求的相当一般的基函数来构造，但复杂度分析还要求施加进一步的限制。下文中，我们假设 $\{\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\}_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}$ 和 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\vee_1}$ 均为样条小波型基，分别在 $L_2(0,T)$ 和 $L_2(0,1)$ 上正交归一，具有足够多的消失矩，并且满足

$$\operatorname{diam}\operatorname{supp}\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\lesssim 2^{-|\nu_{\mathrm{t}}|},\quad \operatorname{diam}\operatorname{supp}\psi_\nu\lesssim 2^{-|\nu|}$$

对 $\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}$ 和 $\nu\in\vee_1$均一致成立。这些条件由 Donovan-Geronimo-Hardin 多小波 [23]满足。

注2.4。注意，也可以使用其他类型的小波。对于空间基，最关键的性质是 L_2-正交归一性，以及单变量小波具有足够的正则性；例如，经过边界适配的标准 Daubechies小波也具备这些性质。我们的分析也可应用于这种情形，但使用额外具有分段多项式性质的小波，能获得更好的算子可压缩性，并且更易于计算矩阵元素。对于时间基函数，我们的分析可以推广到其他小波，只要它们能提供恒等算子和时间导数算子的足够稀疏的表示。特别是，结合注2.2中讨论的另一种变分形式，也可以使用 [14] 中专为此目的构造的小波；不过，这些小波有一个缺点，即在 $t=0$处为零。这意味着，在较短时间内，必须通过强自适应细化来求解初始条件，这在当前设置下会导致不理想的定量性能。

现在，我们按照式（ $\bar{S}^{\mathcal{X}}$ 和 $\bar{S}^{\mathcal{Y}}$ 2.8）引入适用于我们目的的序列。首先，取 $\bar{S}^{\mathcal{Y}}_\nu=\|\Psi_\nu\|_V^{-1}$ 使 $\nu\in\vee_{\mathrm{x}}$，从而式（2.8）中的第二个关系取等号。因此，其中

$$\bar{\mathbf{D}}=\big(\|\Psi_\nu\|_V^{-1}\delta_{\nu,\mu}\big)_{\nu,\mu\in\vee_{\mathrm{x}}} \tag{2.13}$$

以及$\mathbf{I}_{\mathrm{t}}=(\delta_{\nu,\,\nu'})_{\nu,\,\nu'\in\vee_{\mathrm{t}}}$，我们有

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}=\mathbf{I}_{\mathrm{t}}\otimes\bar{\mathbf{D}}\,. \tag{2.14}$$

关于 $\bar{S}^{\mathcal{X}}$，对于 $\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\otimes\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\in\mathcal{X}$，由命题2.3(ii)可得

$$\begin{aligned}\Big(\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|^2_{H^1_0(\Omega)}+\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|^2_{H^1(I)}\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\Big)^{\frac12}&\eqsim\Big(\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|^2_{H^1_0(\Omega)}+\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|^2_{H^1(I)}\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|^{-2}_{H^1_0(\Omega)}\Big)^{\frac12}\\&\eqsim\frac{\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|^2_{H^1_0(\Omega)}+\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|_{H^1(I)}}{\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{H^1_0(\Omega)}}\end{aligned}$$

其中常数与 d 无关。因此，对于

$$\bar{S}^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}=\frac{\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{H^1_0(\Omega)}}{\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|^2_{H^1_0(\Omega)}+\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|_{H^1(I)}}, \tag{2.15}$$

第一个关系式（2.8）同样成立，且其中的常数与 d 无关。

在下文中，我们假设 $A(t)$ 与时间无关，即 $A(t) = A$ 对某个 $A\colon V \to V'$ 成立；在此假设下，由于小波基的 L_2-正交归一性，算子$\mathbf{T}$ 具有如下形式

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{T}_{\mathrm{x}} + \mathbf{T}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{x}}. \tag{2.16}$$

我们定义

$$\bar{\mathbf{B}}_{\mathrm{t}} = \bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{T}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{x}})\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}, \tag{2.17}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\mathrm{x}} = \bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{T}_{\mathrm{x}})\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}. \tag{2.18}$$

为避免涉及过多技术细节，我们仅考虑 $A(t) = A$ 为二阶椭圆算子的情形，尤其是热方程这一模型情形，此时 $A(t) = -\Delta$。将结论推广到具有常系数的广义二阶算子M, q 以及 c 在(2.12)中的情形，可直接由 [8], 得到，5.3 见注释，详情可参见该处。我们的方法也可处理系数随空间和时间变化的情形，通过适当调整算子压缩，可以得到收敛方法。然而，根据对系数的具体假设，方法的复杂度分析可能会变得困难得多。举一个具体例子，考虑将随时间平滑变化的系数替换为关于时间的多项式逼近。这同样会得到一个由克罗内克积之和构成的算子表示，如(2.16)所示，但项数取决于误差容限，而且新增项需要采用更复杂的压缩过程。我们将在未来的工作中对此进行更详细的研究。

3. Adaptive Low-Rank Approximations

3.1. **层次张量**。 此处考虑的低秩近似依赖于层次张量 [28,29]，它是一种用于高阶张量低秩表示的特殊格式。由于我们只关注定义在指标集 $\vee_{\mathrm{x}} = \vee_1 \times \cdots \times \vee_1$上的张量，因此我们给出以下关于以 $\vee_{\mathrm{x}}$为指标的张量的基本结果。关于层次张量表示的详细介绍，请参阅 [28,第 11]和 [5]。

定义层次格式的出发点是二叉维度树 $\mathbb{T}_d$，它是 $\alpha^* = \{1, \dots, d\}$ 的一个子集层级结构，而 $\alpha^* = \{1, \dots, d\}$ 是 $\mathbb{T}_d$ 的根节点。对于$\alpha \subset \alpha^*$，记作 $\alpha^{\mathsf{c}} = \alpha^* \setminus \alpha$。从根节点 $\alpha^* \in \mathbb{T}_d$ 开始，对于每个满足 $\#\alpha > 1$ 的 $\alpha \in \mathbb{T}_d$，恰好存在两个互不相交的子节点 α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{T}_d$，使得 $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$。因此， $\{1\}$, ..., $\{d\} \in \mathbb{T}_d$; 这些元素称为叶节点。此外， $\mathbb{T}_d$具有树结构，即对于每个 α, $\beta \in \mathbb{T}_d$，若满足 $\alpha \neq \beta$，则 $\alpha \subset \beta$、 $\beta \subset \alpha$ 或 $\alpha \cap \beta = \emptyset$ 必成立。

层次张量格式基于给定张量的矩阵化 低秩表示，这些矩阵化是将其矩阵元素排列成矩阵形式得到的。对于 $\nu \in \vee_{\mathrm{x}}$，令$\nu_\alpha = (\nu_i)_{i \in \alpha^{\circ}}$ α-矩阵化 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$定义为

$$\mathrm{mat}_\alpha(\mathbf{v}) = \big(\mathbf{v}_\nu\big)_{\nu_\alpha \in \vee_1^{\#\alpha}, \nu_{\alpha^{\mathsf{c}}} \in \vee_1^{d-\#\alpha}},$$

并定义 $\mathsf{rank}_\alpha(\mathbf{v}) = \mathsf{rank}\,\mathsf{mat}_\alpha(\mathbf{v})$，简记为 $\mathsf{rank}_i(\mathbf{v}) = \mathsf{rank}^{\{i\}}(\mathbf{v})$，其中$i = 1, \dots, d$。

定义 3.1。 给定一个固定的二叉维度树 $\mathbb{T}_d$。

(a) $\mathbb{T}_d$ 的有效边 集合为以下各对

$$\mathbb{E}_d = \big\{\{\alpha, \alpha^{\mathsf{c}}\} \colon \alpha \in \mathbb{T}_d \setminus \{\alpha^*\}\big\},$$

对于每个 $e \in \mathbb{E}_d$，我们将满足 $\alpha \in \mathbb{T}_d$ 的 $\alpha \in e$ 定义为 代表元 $[e]$；如果该元素不唯一，我们任意选取一个 $[e]$。

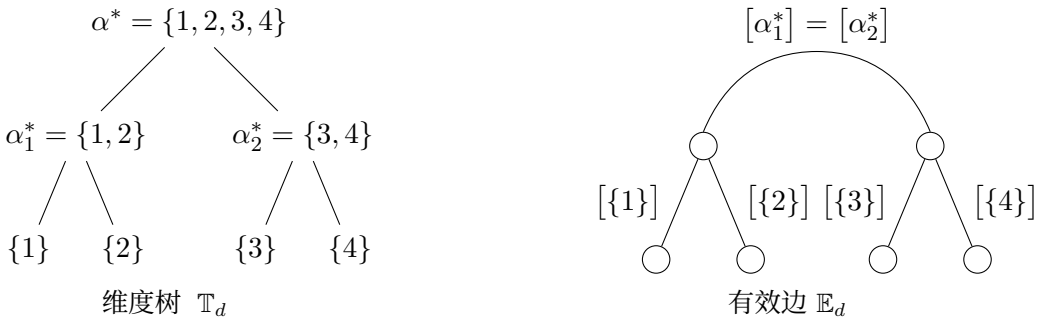

FIGURE 1. 维度为 $d = 4$ 时，二叉维度树 $\mathbb{T}_d$ 及其对应有效边 $\mathbb{E}_d$ 的示例。

（b）秩不超过 $\mathbf{r} = (r_e)_{e\in\mathbb{E}_d}$ 且满足 $r_e \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 的$e \in \mathbb{E}_d$ 张量集合定义如下：

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \big\{\mathbf{v} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}}) \colon \operatorname{rank}_{[e]}(\mathbf{v}) \le r_e \text{ for all } e \in \mathbb{E}_d\big\}.$$

(c) 对于 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$，我们根据矩阵化的矩阵秩定义层次秩向量的记号：

$$\operatorname{rank}(\mathbf{v}) = \big(\operatorname{rank}_{[e]}(\mathbf{v})\big)_{e\in\mathbb{E}_d}.$$

上述定义中的有效边 $\mathbb{E}_d$ 对应于定义与 $\mathbb{T}_d$相关联的层次张量格式的矩阵化。这里，将转置后相同的矩阵化（对应于同一个秩约束）视为同一条有效边。图 $\mathbb{T}_d$ 展示了维度为 $\mathbb{E}_d$ 时的二叉维度树及其对应有效边 $d = 4$ 。对于任意二叉维度树对应的有效边数，很容易验证 $\#\mathbb{E}_d = 2d - 3$。

对于每个 $\alpha \in \mathbb{T}_d \setminus \{\alpha^*\}$，都存在一个正交归一系 $\{\mathbf{U}_k^\alpha\}_{k=1,\dots,\operatorname{rank}_\alpha(\mathbf{v})}$ in$\ell_2(\vee_1^{\#\alpha})$，称为模态框架，它是 range mat$_\alpha$(v) 的一个正交归一基。对于$\alpha \in \mathbb{T}_d \setminus \{\alpha^*\}$ 且 $\#\alpha > 1$，对于 α的子节点 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{T}_d$，有

$$\mathbf{U}_k^\alpha = \sum_{\ell_1=1}^{\operatorname{rank}_{\alpha_1}(\mathbf{v})} \sum_{\ell_2=1}^{\operatorname{rank}_{\alpha_2}(\mathbf{v})} \mathbf{b}_{k,\ell_1,\ell_2}^\alpha \mathbf{U}_{\ell_1}^{\alpha_1} \otimes \mathbf{U}_{\ell_2}^{\alpha_2}, \quad k = 1,\dots,\operatorname{rank}_\alpha(\mathbf{v}), \tag{3.1}$$

传递张量 $\mathbf{b}^\alpha$ 由 $\mathbf{b}_{k,\ell_1,\ell_2}^\alpha = \langle \mathbf{U}_k^\alpha, \mathbf{U}_{\ell_1}^{\alpha_1} \otimes \mathbf{U}_{\ell_2}^{\alpha_2}\rangle$给出。嵌套性 (3.1) 意味着可行秩受到限制：$\operatorname{rank}_\alpha(\mathbf{v}) \le \operatorname{rank}_{\alpha_1}(\mathbf{v})\operatorname{rank}_{\alpha_2}(\mathbf{v})$。对于固定的维度树 $\mathbb{T}_d$，我们将层次张量在 $(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})^{\mathbb{E}_d}$ 中的可行秩向量集合记为 $\mathcal{R}$。

对于$\mathbf{v} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$，第一步我们得到分解

$$\mathbf{v} = \sum_{\ell_1=1}^{\operatorname{rank}_{\alpha_1^*}(\mathbf{v})} \sum_{\ell_2=1}^{\operatorname{rank}_{\alpha_2^*}(\mathbf{v})} \mathbf{b}_{\ell_1,\ell_2}^{\alpha^*} \mathbf{U}_{\ell_1}^{\alpha_1^*} \otimes \mathbf{U}_{\ell_2}^{\alpha_2^*}$$

其中 α_1^*，α_2^*是根节点 α^*的子节点，并且 $\mathbf{b}^{\alpha^*} = \big(\langle \mathbf{v},\ \mathbf{U}_{\ell_1}^{\alpha_1^*} \otimes \mathbf{U}_{\ell_1}^{\alpha_1^*}\rangle\big)_{\ell_1,\ \ell_2}$；注意，在这一特定情形下，秩$\alpha_1^*$(v) = 秩$\alpha_2^*$(v)，因为根节点的子节点具有相同的矩阵化形式（至多相差一个转置）。递归地应用（3.1），我们可以通过 $\mathbf{b}$ 、$\mathbf{b}^{\alpha^*}$，通过对所有满足 $\#\alpha > 1$ 的 $\alpha \in \mathbb{T}_d \setminus \{\alpha^*\}$ 的传递张量 $\mathbf{b}^\alpha$，以及模态框架 $\{\mathbf{U}_k^{\{i\}}\}_{k=1、\dots\operatorname{rank}_i(\mathbf{v})}$（对于 $i = 1,\ \dots d$）来表示 $\mathbf{v}$。随后，层次张量上的所有运算都仅通过这些表示分量完成。注意，计算中产生的作为中间结果的层次张量也可以表示为

具有非正交模态框架和传递张量的形式，其秩参数大于实际的层次秩；在这种情况下，我们称其为表示秩。

3.2. **抛物型问题的自适应方法**。 在基于时空变分形式的低秩方法中，可以像 [4,13] 中那样，将时间变量视为低秩分解中的一个独立张量模。然而，正如上文所述，这种做法在解的基本可逼近性和某些算法方面均有不足，我们将在备注 4.5 中详细讨论。我们采用另一种方法，将时间变量上的稀疏近似与空间变量上的自适应低秩逼近相结合。

主要思路是对每个时间基指标分别在空间变量上采用低秩表示，从而得到具有如下结构的近似：记 $\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \in \ell_2(\vee_\mathrm{t})$ 为克罗内克向量，其中 $\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} = (\delta_{\nu_\mathrm{t},\mu_\mathrm{t}})_{\mu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}$，则任意 $\mathbf{u} \in \ell_2(\vee) = \ell_2(\vee_\mathrm{t} \times \vee_\mathrm{x})$ 均可唯一地写成如下形式：

$$\mathbf{u} = \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \mathbf{u}_{\nu_\mathrm{t}}, \tag{3.2}$$

其中，$\mathbf{u}_{\nu_\mathrm{t}} \in \ell_2(\vee_\mathrm{x})$需针对每个 $\nu_\mathrm{t} \in \vee_\mathrm{t}$分别以层次张量格式表示，并共享固定的维度树 $\mathbb{T}_d$。我们称$\mathbf{u}$ 具有空间分量$(\mathbf{u}_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}$ ，并定义

$$\operatorname{rank}_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{u}) = \operatorname{rank}(\mathbf{u}_{\nu_\mathrm{t}})\,.$$

为简化记号，我们写作

$$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{u}) = \big\|(|\operatorname{rank}_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{u})|_\infty)_{\nu_\mathrm{t}}\big\|_{\ell_\infty}\,,$$

换言之，$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{u})$表示与时间基指标相关联的层次张量的最大秩的最大值。类似地，对于$(\mathsf{r}_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \in \mathcal{R}^{\vee_\mathrm{t}}$，我们写作

$$\operatorname{rank}_\infty\big((\mathsf{r}_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\big) = \big\|(|\mathsf{r}_{\nu_\mathrm{t}}|_\infty)_{\nu_\mathrm{t}}\big\|_{\ell_\infty}\,.$$

3.2.1. 近最优低秩重新压缩。对于层次张量格式，给定秩界时，最佳近似总是存在的，而截断层次奇异值分解(HSVD)可得到近最佳近似。对于单个层次张量表示，在 [6], 的方法中，低秩逼近误差以层次秩元组中最大元素来量化。对于当前的一系列张量表示，我们对这一概念加以改进，并以每个时间基指标对应的层次张量表示的最大秩的 ℓ_∞范数来量化近似误差。

任意的 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee_\mathrm{x})$ 都有一个层次奇异值分解表示，其模态框架为 $\{\mathbf{U}_k^\alpha\}_{k=1,\dots,\operatorname{rank}_\alpha(\mathbf{v})}$，它们是对每个 $\alpha(\mathbf{v})$ 的矩阵化 $\operatorname{mat}_\alpha \in \mathbb{T}_d \setminus \{\alpha^*\}$的左奇异向量。这些矩阵化对应的奇异值记为 $\sigma_k^\alpha(\mathbf{v})$，$k = 1,\dots,$秩$_\alpha(\mathbf{v})$。接下来，我们考虑通过逐项截断层次奇异值分解表示，得到形式为（3.2）的低秩近似。为此，我们首先引入给定目标精度 η下的最小秩概念。需要注意的是，在说明所得到的矩阵化时，我们采用定义 3.1(a)。

定义 3.2。 对于具有空间分量（$\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}}$）$_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}$ 且具有（$\mathbf{r}_{\nu_\mathrm{t}}$）$_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \in \mathcal{R}^{\vee_\mathrm{t}}$、其中 $\mathbf{r}_{\nu_\mathrm{t}} = (r_{\nu_\mathrm{t},e})_{e\in\mathbb{E}_d}$的 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$，我们定义

$$\lambda\big((\mathsf{r}_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}};\mathbf{v}\big) = \Bigg(\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\sum_{e\in\mathbb{E}_d}\sum_{k>r_{\nu_\mathrm{t},e}} \big|\sigma_k^{[e]}(\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}})\big|^2\Bigg)^{\frac12}.$$

对于任意 $\eta > 0$，我们选择秩最小的 $\mathbf{r}(\mathbf{v},\eta) \in \mathcal{R}^{\vee_\mathrm{t}}$，使得$\ell_\infty(\mathbf{r}(\mathbf{v},\eta))$ 满足

$$\lambda(\mathsf{r}(\mathbf{v},\eta);\mathbf{v}) \le \eta;$$

也就是说，我们选择满足该上界的层次秩，使最大层次秩的最大值最小化。

对于 $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ 和 $\hat{\mathbf{v}} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$，我们用 $\mathrm{P}_{\hat{\mathbf{v}},\mathbf{r}}$ 表示线性映射，它作用于$\mathbf{v}$后得到层次秩为 $\mathbf{r}$ 的层次奇异值分解截断。根据给定目标精度 η 时最小秩 $\mathbf{r}(\mathbf{v},\eta)$ 的定义，记 $\mathbf{r}(\mathbf{v},\eta) = (\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}$，我们定义

$$\hat{\mathrm{P}}_\eta(\mathbf{v}) = \sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}} \mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}} \otimes \mathrm{P}_{\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}},\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}}} \mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}} \tag{3.3}$$

其中 $\mathbf{v}$ 具有形式 (3.2)。根据定义可得

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathrm{P}}_\eta(\mathbf{v})\| \le \lambda(\mathsf{r}(\mathbf{v},\eta);\mathbf{v}) \le \eta, \quad \operatorname{rank}_{\nu_{\mathrm{t}}}\big(\hat{\mathrm{P}}_\eta(\mathbf{v})\big) = \mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}}, \quad \nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}.$$

基于表示式 (3.2)，对于 $(\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}} \in \mathcal{R}^{\vee_{\mathrm{t}}}$，我们引入具有有界秩的表示类

$$\mathcal{F}\big((\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\big) = \Big\{ \sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}} \mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}} \otimes \mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}} : \mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}} \in \mathcal{H}(\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}}) \text{ for all } \nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}} \Big\}.$$

如下命题所示，基于层次奇异值分解截断进行近似的准最优性结果也适用于这一类近似。

命题 3.3。 设 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 且 $\kappa_{\mathrm{P}} = \sqrt{2d-3}$。那么对于 $(\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}} \in \mathcal{R}^{\vee_{\mathrm{t}}}$，有

$$\lambda\big((\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}};\mathbf{v}\big) \le \kappa_{\mathrm{P}} \inf_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}((\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}})} \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|. \tag{3.4}$$

证明。 对于将 $\hat{\mathbf{v}} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$ 近似为 $\mathcal{H}(\mathbf{r})$ 中元素的情形，任取 $\mathbf{r} = (r_e)_{e\in\mathbb{E}_d} \in \mathcal{R}$，有

$$\sum_{e\in\mathbb{E}_d} \sum_{k>r_e} \big|\sigma_k^{[e]}(\hat{\mathbf{v}})\big|^2 \le \kappa_{\mathrm{P}} \inf_{\mathbf{w}\in\mathcal{H}(\mathsf{r})} \|\mathbf{w}-\hat{\mathbf{v}}\|^2.$$

将 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 写成 (3.2) 的形式，可得

$$\begin{aligned}
\lambda^2\big((\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}};\mathbf{v}\big) &\le \sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}} \kappa_{\mathrm{P}}^2 \inf_{\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}}\in\mathcal{H}(\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})} \|\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}} - \mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}\|^2 \\
&= \kappa_{\mathrm{P}}^2 \sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}} \inf_{\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}}\in\mathcal{H}(\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})} \|\mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}} \otimes \mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}} - \mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}} \otimes \mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}\|^2 \\
&= \kappa_{\mathrm{P}}^2 \inf_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}((\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}})} \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2,
\end{aligned}$$

对于任意的 $(\mathsf{r}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}$，其中我们利用了每个求和中的矩阵元素互不重叠这一点。 □

对于 $r \in \mathbb{N}_0$，我们将最大秩为 r 时的最佳逼近误差定义为

$$\sigma_r(\mathbf{v}) = \inf\Big\{ \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\| : \mathbf{w} \in \mathcal{F}\big((r_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}}\big) \text{ with } (r_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}} \in \mathcal{R}^{\vee_{\mathrm{t}}}, \operatorname{rank}_\infty\big((r_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}}\big) \le r \Big\}.$$

对于每个 $\eta > 0$，我们通过选取 $\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{v},\eta) \in \mathcal{R}^{\vee_{\mathrm{t}}}$ 引入相应的最佳逼近秩，使得

$$\operatorname{rank}_\infty\big(\bar{\mathsf{r}}(\mathbf{v},\eta)\big) = \min\{r \in \mathbb{N}_0 : \sigma_r(\mathbf{v}) \le \eta\}.$$

下面的引理给出了 [6, 引理 2] 的一个类似结果，其证明方法相同，利用了命题 3.3。为方便读者，证明见附录 B。

引理 3.4。 固定任意 $\alpha > 0$。对于任意满足 $\|\mathbf{u},\mathbf{v}\ \eta$ *satisfying* $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \eta$ 的 $\mathbf{u},\mathbf{v}\ \eta$，有

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathrm{P}}_{\kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha)\eta}(\mathbf{v})\| \le (1+\kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha))\eta \tag{3.5}$$

同时

$$\operatorname{rank}_\infty\big(\hat{\mathrm{P}}_{\kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha)\eta}(\mathbf{v})\big) \le \operatorname{rank}_\infty\big(\bar{\mathsf{r}}(\mathbf{u},\alpha\eta)\big). \tag{3.6}$$

现在，我们以与单个低秩表示相同的方式来考虑相应的逼近类，见 [6, 定义 4]。为简洁起见，我们采用相同的记号。

定义 3.5。 我们称正的严格递增序列 $\gamma = \big(\gamma(n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足$\gamma(0) = 1$ 且 $\gamma(n) \to \infty$，为 $n \to \infty$ 一个增长序列。对于给定的增长序列 γ，我们定义

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}(\gamma)} = \sup_{r\in\mathbb{N}_0} \gamma(r)\sigma_r(\mathbf{v}), \qquad \mathcal{A}(\gamma) = \big\{\mathbf{v} \in \ell_2(\vee) : \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}(\gamma)} < \infty\big\}.$$

我们称增长序列 γ 可容许，若

$$\rho_\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\gamma(n)}{\gamma(n-1)} < \infty,$$

which 对应于至多指数增长的限制。根据 $\gamma^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0$，我们将
称为 γ 的左连续逆函数。

请注意，$\mathbf{v} \in \mathcal{A}(\gamma)$ 意味着目标精度 ε 可通过规模为 $\gamma^{-1}(\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}(\gamma)}/\varepsilon)$ 的最大秩实现，因此，形式为 $\gamma^{-1}(C\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}(\gamma)}/\varepsilon)$ 的秩界（其中 C 为任意常数）是近乎最优的。

我们以关于在（3.3）中定义的高阶奇异值分解重压缩算子的最后一个结果结束本节。这里假设被近似函数 $\mathbf{u}$属于逼近类$\mathcal{A}$（γ）。

定理 3.6。 令 $\kappa_{\mathrm{P}} = \sqrt{2d-3}$和 $\alpha > 0$。假设 $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$（$\gamma$） 具有可容许增长序列 γ，并且$\mathbf{v} \in \ell_2$（$\vee$） 满足 $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \le \eta$，其中 $\eta > 0$。然后定义$\hat{}\mathbf{w}\eta = \mathrm{P}_{\kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha)\eta}(\mathbf{v})$，则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\eta\| \le (1 + \kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha))\eta, \qquad \operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_\eta) \le \gamma^{-1}\big(\rho_\gamma\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}(\gamma)}/(\alpha\eta)\big),$$

and

$$\|\mathbf{w}_\eta\|_{\mathcal{A}(\gamma)} \le \big(\alpha^{-1}(1 + \kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha)) + 1\big)\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}(\gamma)}.$$

利用引理 3.4，该结论可完全按照单个低秩表示的情形证明，参见 [6, 定理 6]。注意，在此，采用可容许 γ并非利用引理 3.4获得秩界所必需的；但对于 γ 增长更快的情形（对应于矩阵化奇异值衰减快于指数衰减），关于秩准最优性只能得到比定理3.6所给结果更弱的信息。

3.2.2. 收缩与粗化。 除了近最优的低秩重压缩算子外，我们还需要一种方法，以便在每个模态框架中选取有限多个基指标用于近似。为实现这一机制，我们借鉴了低维收缩的概念，见 [6,8]。

粗化算子的基本思想是：通过丢弃绝对值足够小的所有系数对应的基指标，降低张量表示中给定系数序列的复杂度。同时，在当前设定下，我们还需要针对每个时间索引，分别保留空间索引集的笛卡尔积结构。下面介绍最佳 N 项近似的标准概念。

定义 3.7。 对于任意可数指标集 $\hat{\vee}$, $\Lambda \subset \hat{\vee}$，以及$\mathbf{v} \in \ell_2(\hat{\vee})$，我们将限制 $\mathrm{R}_\Lambda\mathbf{v}$ 定义为：在 Λ 上等于$\mathbf{v}$，在 $\hat{\vee} \setminus \Lambda$ 上为零。对于 $s > 0$，我们定义

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}^s(\hat{\vee})} = \sup_{N\in\mathbb{N}_0} (N+1)^s \inf_{\substack{\Lambda\subset\hat{\vee}\\ \#\Lambda\le N}} \|\mathbf{v} - \mathrm{R}_\Lambda\mathbf{v}\| \tag{3.7}$$

以及逼近类

$$\mathcal{A}^s(\hat{\vee}) = \Big\{\mathbf{v} \in \ell_2(\hat{\vee}) : \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}^s(\hat{\vee})} < \infty\Big\}.$$

可以证明，$\mathcal{A}^s(\hat{\vee})$ 是一个拟巴拿赫空间，其拟范数定义于（3.7）；也就是说，$\|\cdot\|_{\mathcal{A}^s(\hat{\vee})}$ 满足范数的各项性质，但三角不等式除外。在不会引起混淆的情况下，我们记作 $\mathcal{A}^s = \mathcal{A}^s(\hat{\vee})$。以下结论直接由 $\mathcal{A}^s$-拟范数的定义得到。

命题 3.8。 对于 $\mathbf{v}$、$\mathbf{w} \in \mathcal{A}^s(\hat{\vee})$， $\mathcal{A}^s$-拟范数具有以下性质：

(i) $\|v+w\|_{\mathcal{A}^s} \le 2^s(\|v\|_{\mathcal{A}^s} + \|w\|_{\mathcal{A}^s})$。 *(ii)* 若 $\#\,supp(v) \le N$，则有 $\|v\|_{\mathcal{A}^s} \le N^s\|v\|$。 *(iii)* 若 v_N 是 v 的最佳 N 项近似，则 $\|v\|_{\mathcal{A}^s} \ge (N+1)^s\|v - v_N\|$。
(iv) 对任意 $\Lambda \subset \hat{\vee}$， $\|R_\Lambda v\|_{\mathcal{A}^s} \le \|v\|_{\mathcal{A}^s}$。

在我们当前的设定中，我们将这一逼近类的概念分别应用于每个张量模中的低维基指标集合。与文献 [6, 8]，中用于椭圆问题的单张量表示一样，我们采用近最佳 N项近似的概念，其基于张量收缩。如下文所定义，这些收缩可解释为系数张量的低维密度。在此，我们通过对每个时间基指标对应的每个低秩近似使用收缩集合，将收缩的概念扩展到空间低秩与时间稀疏相结合的逼近中。

定义 3.9. 对于 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$，其中 $\vee_{\mathrm{x}} = \bigtimes_{i=1}^d \vee_1$，且 $i = 1, \dots, d$，我们根据矩阵元素定义（空间）收缩 $\pi^{(i)}(\mathbf{v}) = \left(\pi_\mu^{(i)}(\mathbf{v})\right)_{\mu \in \vee_1} \in \ell_2(\vee_1)$

$$\pi_\mu^{(i)}(\mathbf{v}) = \left(\sum_{\nu_1 \in \vee_1} \cdots \sum_{\nu_{i-1} \in \vee_1} \sum_{\nu_{i+1} \in \vee_1} \cdots \sum_{\nu_d \in \vee_1} |\mathbf{v}_{\nu_1,\dots,\nu_{i-1},\mu,\nu_{i+1},\dots,\nu_d}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu \in \vee_1.$$

设 $\mathbf{w} \in \ell_2(\vee)$，其空间分量为 $(\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}}$，其中 $\vee = \vee_{\mathrm{t}} \times \vee_{\mathrm{x}}$。对于 $i = 1, \dots, d$，我们定义时空收缩

$$\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}) = \left(\pi_\mu^{(i)}(\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}})\right)_{(\nu_{\mathrm{t}},\mu) \in \vee_{\mathrm{t}} \times \vee_1}$$

以及时间收缩

$$\pi^{(\mathrm{t})}(\mathbf{w}) = \left(\pi_{\nu_{\mathrm{t}}}^{(\mathrm{t})}(\mathbf{w})\right)_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}} = \left(\|\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}}\|\right)_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}}.$$

直接计算这些量需要进行高维求和。 [6] 中的观察结果表明，由于张量格式的正交性，可以避免这一点。这些结果也适用于当前情形，因为求和是针对每个时间索引独立进行的。在我们的情形中，收缩具有以下类似的基本性质。

命题 3.10。 设 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 具有空间分量 $(\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}}$。

(i) 我们有 $\|\mathbf{v}\| = \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|$, $i = 1, \dots, d$.(ii) 对每个 $i = 1, \dots, d$，设 $\Lambda_{\nu_{\mathrm{t}}}^{(i)} \subseteq \vee_1$，并且 $\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}$，且令

$$\Lambda = \bigcup_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}} \{\nu_{\mathrm{t}}\} \times \Lambda_{\nu_{\mathrm{t}}}^{(1)} \times \cdots \times \Lambda_{\nu_{\mathrm{t}}}^{(d)},$$

那么我们有

$$\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_\Lambda \mathbf{v}\| \le \left(\sum_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}} \sum_{i=1}^d \sum_{\nu_{\mathrm{x}} \in \vee_1 \setminus \Lambda_{\nu_{\mathrm{t}}}^{(i)}} \left|\pi_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

（iii）对于 $i = 1, \dots, d$，此外令 $\mathbf{U}_{\nu_{\mathrm{t}}}^{(i)}$为模态框架， $\sigma^{(i,\nu_{\mathrm{t}})}{}_k$ 为$\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}$的层次奇异值分解中的模态-$i$ 奇异值序列。那么

$$\pi_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v}) = \left(\sum_k \left|\left(\mathbf{U}_{\nu_{\mathrm{t}}}^{(i)}\right)_{\nu_{\mathrm{x}},k}\right|^2 \left|\sigma_k^{(i,\nu_{\mathrm{t}})}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

在某些地方，我们需要对命题3.10（ii）的记号稍作修改。定义如下：

$$\Lambda^{(i)} = \bigcup_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \left\{(\nu_\mathrm{t},\nu_i) : \nu_i \in \Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t}}\right\}$$

并由（3.8）得到

$$\|\mathbf{v}-\mathrm{R}_\Lambda\mathbf{v}\| \le \left(\sum_{i=1}^d \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v}) - \mathrm{R}_{\Lambda^{(i)}}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^d \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v}) - \mathrm{R}_{\Lambda^{(i)}}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|. \tag{3.9}$$

此外，我们还有以下次可加性性质，它是三角不等式的直接推论。

命题 3.11。设有 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\mathbf{v}_n\in\ell_2(\vee)$ $n=1,\dots,N$。那么，对于 $i=1,\dots,d$ 和 $\nu_\mathrm{x}\in\vee_1$，$\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}$，有

$$\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}\left(\sum_{n=1}^N \mathbf{v}_n\right) \le \sum_{n=1}^N \pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}(\mathbf{v}_n).$$

与单个张量表示的情形一样，我们通过对收缩 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})$ 进行最佳 N 项近似来选取指标集，从而对具有低秩表示的空间分量 $\mathbf{v}$ 进行粗化。所得空间基指标集针对每个时间基指标分别具有笛卡尔积结构。我们通过重新排列所有时间指标下所有模态框架的全部收缩集合来确定这些指标集，具体如下：

$$\left\{\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}(\mathbf{v}) : \nu_\mathrm{x}\in\vee_1, \nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}, i=1,\dots,d\right\},$$

为非递增序列

$$\pi^{(\mathrm{t},i(1))}_{\nu^*_\mathrm{t}(1),\nu^*_\mathrm{x}(1)}(\mathbf{v}) \ge \pi^{(\mathrm{t},i(2))}_{\nu^*_\mathrm{t}(2),\nu^*_\mathrm{x}(2)}(\mathbf{v}) \ge \dots \ge \pi^{(\mathrm{t},i(j))}_{\nu^*_\mathrm{t}(j),\nu^*_\mathrm{x}(j)}(\mathbf{v}) \ge \dots,$$

其中 $i(j)\in\{1,\dots,d\}$，$\nu^*_\mathrm{t}(j)\in\vee_\mathrm{t}$ 和 $\nu^*_\mathrm{x}(j)\in\vee_1$ 对每个 $j\in\mathbb{N}$ 均成立。我们仅保留此排序中最大的 N 个，并将它们重新分配到相应的维度分箱和时间指标中，

$$\Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{v},N) = \left\{\nu^*_\mathrm{x}(j) : i(j)=i, \nu^*_\mathrm{t}(j)=\nu_\mathrm{t}, j=1,\dots,N\right\}.$$

现在，对于每个时间索引 $\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}$，我们考虑笛卡尔积指标集

$$\Lambda_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{v},N) = \bigtimes_{i=1}^d \Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{v},N)$$

并用 $\Lambda(\mathbf{v}\ N)$ 表示这些乘积集与其各自时间指标的并集，即，

$$\Lambda(\mathbf{v},N) = \bigcup_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \left(\{\nu_\mathrm{t}\}\times\Lambda_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{v},N)\right) \subset \vee. \tag{3.10}$$

根据构造，

$$\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\sum_{i=1}^d \#\Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{v},N) \le N$$

and

$$\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\sum_{i=1}^d \sum_{\nu_\mathrm{x}\in(\vee_1\setminus\Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t}}(\mathbf{v},N))} |\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}(\mathbf{v})|^2 = \min_{\hat\Lambda}\left\{\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\sum_{i=1}^d \sum_{\nu_\mathrm{x}\in(\vee_1\setminus\hat\Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t}})} |\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}(\mathbf{v})|^2\right\}, \tag{3.11}$$

ˆ其中， Λ 遍历所有可写成如下形式的集合

$$\hat{\Lambda} = \bigcup_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \{\nu_\mathrm{t}\} \times \bigtimes_{i=1}^{d} \hat{\Lambda}_{\nu_\mathrm{t}}^{(i)}, \quad \text{where} \quad \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \sum_{i=1}^{d} \#\hat{\Lambda}_{\nu_\mathrm{t}}^{(i)} \leq N\,. \tag{3.12}$$

命题 3.12。 对于任意 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$，其空间分量为$(\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}$，有

$$\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\Lambda(\mathbf{v},N)}\mathbf{v}\| \leq \mu_N(\mathbf{v}), \tag{3.13}$$

其中

$$\mu_N(\mathbf{v}) = \left(\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\nu_\mathrm{x}\in(\vee_1\setminus\Lambda_{\nu_\mathrm{t}}^{(i)}(\mathbf{v},N))} |\pi_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.14}$$

ˆ并且对于任意 Λ 满足 (3.12)的，有

$$\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\Lambda(\mathbf{v},N)}\mathbf{v}\| \leq \mu_N(\mathbf{v}) \leq \sqrt{d}\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}}\mathbf{v}\|. \tag{3.15}$$

ˆ证明。 上界 (3.13) 是 (3.8) 的直接推论。现在令 Λ 满足假设，则利用 (3.13) 和 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\Lambda(\mathbf{v},N)}\mathbf{v}\|^2 &\leq \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\nu_\mathrm{x}\in(\vee_1\setminus\hat{\Lambda}_{\nu_\mathrm{t}}^{(i)})} |\pi_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})|^2 \\
&= \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \|\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}} - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{\nu_\mathrm{t}}^{(1)}\times\vee_1\times\cdots\times\vee_1}\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}}\|^2 + \ldots + \|\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}} - \mathrm{R}_{\vee_1\times\cdots\times\vee_1\times\hat{\Lambda}_{\nu_\mathrm{t}}^{(d)}}\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}}\|^2 \\
&\leq \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} d\|\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}} - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{\nu_\mathrm{t}}}\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}}\|^2 \\
&= d\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}}\mathbf{v}\|^2,
\end{aligned}$$

其中，最后一行用到了$\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}}$ 对每个 $\nu_\mathrm{t} \in \vee_\mathrm{t}$ 都有互不相交的支撑集。 □

所有收缩的集合的排序可以由准排序取代，即通过二进制分箱实现，这对应于粗化算子的一维情形，见[11, 21, 35]。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，我们可以将 $\Lambda(\mathbf{v}$ N与满足条件（$(\mathbf{v}$ N）的指标集进行比较，其中条件包括（3.12）以及

$$\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{v},N)}\mathbf{v}\| = \min_{\sum_i \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}))\leq N} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|. \tag{3.16}$$

由（3.15）可得，

$$\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\Lambda(\mathbf{v},N)}\mathbf{v}\| \leq \mu_N(\mathbf{v}) \leq \kappa_\mathrm{C}\|\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{v},N)}\mathbf{v}\|, \quad \kappa_\mathrm{C} = \sqrt{d}, \tag{3.17}$$

其中 $\mu_N(\mathbf{v})$ 来自（3.14）。

在自适应方案中，我们需要一个相应的过程，使得所得指标集尽可能小，同时可计算的误差上界 $\mu_N(\mathbf{v})$ 低于给定阈值 η。为此，我们定义 $N(\mathbf{v}\ \eta) = \min\{N\colon\ \mu_N(\mathbf{v})$ $\leq\ \eta\}$。相应的阈值化过程为

$$\hat{\mathrm{C}}_\eta(\mathbf{v}) = \mathrm{R}_{\Lambda(\mathbf{v},N(\mathbf{v},\eta))}\mathbf{v}. \tag{3.18}$$

3.2.3. 张量重新压缩与粗化的组合。 本节最后给出以下关于低秩重新压缩与基粗化相结合的主要结果。这是对定理3.6 的推广，并表明两种约简技术结合后，除一致常数因子外是最优的，并且分别关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^s}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(\gamma)}$（模态框架和低秩可逼近性）具有稳定性。

定理 3.13。 设 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 满足 $\mathbf{u} \in \mathcal{A}(\gamma)$，其中 γ 是可容许增长序列，$\pi^{(\mathrm{t},i)} \in \mathcal{A}^s$ 对于 $i = 1$、.....、d 以及 $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \le \eta$。如前所述，设 $\kappa_{\mathrm{P}} = \sqrt{2d-3}$ 和 $\kappa_{\mathrm{C}} = \sqrt{d}$。则对于

$$\mathbf{w}_\eta = \hat{\mathrm{C}}_{\kappa_{\mathrm{C}}(\kappa_{\mathrm{P}}+1)(1+\alpha)\eta}\left(\hat{\mathrm{P}}_{\kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha)\eta}(\mathbf{v})\right),$$

我们有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\eta\| \le (1 + \kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha) + \kappa_{\mathrm{C}}(\kappa_{\mathrm{P}}+1)(1+\alpha))\eta \tag{3.19}$$

以及

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_\eta) &\le \gamma^{-1}\big(\rho_\gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}(\gamma)}/(\alpha\eta)\big), \\ \|\mathbf{w}_\eta\|_{\mathcal{A}(\gamma)} &\le C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}(\gamma)}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中 $C_1 = \alpha^{-1}(1 + \kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha)) + 1$ 和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)) &\le 2\eta^{-\frac{1}{s}} d\alpha^{-\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^d \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \sum_{i=1}^d \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s} &\le C_2 \sum_{i=1}^d \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中 $C_2 = 2^s(1+2^s) + 2^{3s}\alpha^{-1}(1 + \kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha) + \kappa_{\mathrm{C}}(\kappa_{\mathrm{P}}+1)(1+\alpha))d^{\max\{1,s\}}$。

为证明该定理，我们沿用 [6, 定理 7]的思路。为方便读者，证明见附录 B。

注记 3.14. 粗化和重新压缩程序都需要对其输入进行层次奇异值分解。对于每个有限支撑的 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$，利用层次格式下给出的各分量 $\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}} \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$ 的运算成本上界 $\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}$，计算这些分解所需的运算总数有一个固定倍数的上界：

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}} \left(d|\operatorname{rank}_{\nu_{\mathrm{t}}}(\mathbf{v})|_\infty^4 + |\operatorname{rank}_{\nu_{\mathrm{t}}}(\mathbf{v})|_\infty^2 \sum_{i=1}^d \#\operatorname{supp}(\pi^{(i)}(\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}))\right) \\ &\qquad \le d\operatorname{rank}_\infty^4(\mathbf{v}) \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})) + \operatorname{rank}_\infty^2(\mathbf{v}) \sum_{i=1}^d \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})), \end{aligned}$$

而右端项可估计为

$$2\operatorname{rank}_\infty^4(\mathbf{v}) \sum_{i=1}^d \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})).$$

当需要对表示秩大于 $\operatorname{rank}_{\nu_{\mathrm{t}}}(\mathbf{v})$（$\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}$）的冗余层次张量表示计算层次奇异值分解时，上述上界中的后者需要替换为相应的表示秩。

4. Low-Rank Preconditioning

缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$（2.9）和（2.14）起着重要作用，与中讨论的椭圆情形类似，[8], 其意义在于，算子 $\mathbf{B}$ 由（2.10）定义，且有界可逆，其条件数与空间维度无关 d。然而，尽管算子 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{T}_0$ 由（2.11）定义，且具有显式的低秩表示，由于缩放矩阵不具有有限秩表示，算子 $\mathbf{B}$ 通常

仍然具有无界秩。为了解决这个问题，我们定义缩放算子 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$，它们分别与 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$ 等价，具体而言，

$$\|\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}^{-1}\|, \|\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}\| < \infty, \quad \|\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}^{-1}\|, \|\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}^{-1}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}\| < \infty, \tag{4.1}$$

但同时也能以高效且可量化的方式用可分离算子进行逼近。出于实际考虑，(4.1) 中相应的上界不应过大。

采用这样的等价替代缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$，并且

$$\mathbf{g}_1 = (f(\theta_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \Psi_{\nu_\mathrm{x}}, 0))_{(\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x})\in\vee}, \quad \mathbf{g}_2 = (f(0, \Psi_\nu))_{\nu\in\vee_\mathrm{x}},$$

我们得到一个修正后的系统

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\mathbf{g}_1\\ \mathbf{g}_2\end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

其中

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\mathbf{T}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{T}_0\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\,. \tag{4.3}$$

这里，我们利用缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$和$\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$ 可由可分离算子高效逼近这一事实，获得了低秩可逼近性。此外，根据 (4.1)，双无限矩阵 $\mathbf{B}$ 仍然是有界可逆的。

在本节余下部分中，我们将构造适当的 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$。对于 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$，我们可以利用这样一个事实：关于低秩可逼近性，$\mathbf{D}$ 已得到充分研究，参见 [8, 第 4 节。1]。对于矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$，我们将开发一种新型低秩近似。

4.1. 缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$。 令 $\mathbf{E}_{\nu_\mathrm{t}} = \mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}}\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}}^\intercal$ 对于 $\nu_\mathrm{t} \in \vee_\mathrm{t}$，我们构造$\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$，其形式为

$$\mathbf{D}_{\mathcal{X}} = \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \mathbf{E}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\,.$$

每个 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}\text{的构造}\nu_\mathrm{t}}$ 遵循与 [8] 类似的思路，基于相对误差具有上界的指数和近似。这里，我们为每个固定的 2.15 中的表达式构造替代形式，使其具有高效的低秩近似。在以下这类结果中，ν_t 道森函数 F发挥了重要作用，其定义如下：

$$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{s^2}\,ds. \tag{4.4}$$

定理 4.1。 对于每个 $a > 0$，令

$$\alpha_a(x) = a^{-1}e^x, \qquad w_a(x) = \pi^{-1/2}a^{-1/2}\big(1 - 2e^{x/2}F(e^{x/2})\big)e^{x/2}\,.$$

对于任意但固定的 $\delta \in (0,\ 1)$，令 h_a 满足

$$0 < h_a \le \frac{2\pi^2}{3\ln\left(1 + 10\frac{1+a}{\delta}\right)} \tag{4.5}$$

并设

$$n_a^+ = n_a^+(\delta) = \left\lceil 2h_a^{-1}\ln\left(\sqrt{a}\,\mathrm{erfc}^{-1}(\delta/2)\right)\right\rceil. \tag{4.6}$$

然后，定义

$$\Phi_{a,n}(s) = \sum_{k=-n}^{n^+} h_a w_a(kh_a)e^{-\alpha_a(kh_a)s}, \quad \Phi_{a,\infty}(s) = \lim_{n\to\infty}\Phi_{a,n}(s),$$

可得

$$\left|\frac{\sqrt{s}}{s+a}-\Phi_{a,\infty}(s)\right|\le\delta\frac{\sqrt{s}}{s+a}\quad \textit{for all } s\in[1,\infty). \tag{4.7}$$

对于任意 $\eta>0$ 和 $K>1$，若满足

$$n\ge\min\Big\{n\in\mathbb{N}_0:\max\big\{f_a(1,h_an),f_a(K,h_an)\big\}\le\min\{\delta/2,\eta\}\Big\}$$

其中 f_a 定义为

$$f_a(s,y)=2\sqrt{\tfrac{a}{s\pi}}e^{-\frac{s}{a}e^{-y}}F\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)+\operatorname{erf}\left(\sqrt{\tfrac{s}{a}}e^{-\frac{y}{2}}\right),$$

此外还有

$$\left|\frac{\sqrt{s}}{s+a}-\Phi_{a,n}(s)\right|\le\delta\frac{\sqrt{s}}{s+a}\quad \textit{for all } s\in[1,K], \tag{4.8}$$

$$|\Phi_{a,\infty}(s)-\Phi_{a,n}(s)|\le\eta\frac{\sqrt{s}}{s+a}\quad \textit{for all } s\in[1,K]. \tag{4.9}$$

该定理的证明见附录 A。定义 $S_{\min}=\big(\min_{\nu\in\vee_{\mathrm{x}}}\|\Psi_\nu\|_V\big)^{-1}$并设

$$a_{\nu_{\mathrm{t}}}=S_{\min}^2\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|_{H^1(I)},\quad \nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}. \tag{4.10}$$

此外，根据定理 4.1，令 δ、$h_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 和 $n^+_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 对每个 $\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}$ 的取值固定，其中 $h_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 取为（4.5）中的上界。于是，对于任意 $\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}$和 $\mathbf{n}=(n_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\subset\mathbb{N}_0$，定义

$$S^{\mathcal{X}}_{n,\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}=S_{\min}\Phi_{a_{\nu_{\mathrm{t}}},n}\big(S_{\min}^2\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_V^2\big)$$

以及

$$\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}},\mathbf{n}}\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}=(\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathbf{n}}\mathbf{v})_{\nu_{\mathrm{t}}}=\Big(S^{\mathcal{X}}_{n_{\nu_{\mathrm{t}}},\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}v_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\Big)_{\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}}.$$

根据此定义，$\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}},\mathbf{n}}$ 对于每个时间索引 ν_{t}，都可以近似表示为 $1+n_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}(\delta)^{+n_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}}$ 个可分离项之和。当 $n\to\infty$ 时，我们得到参考尺度

$$\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}=(\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{v})_{\nu_{\mathrm{t}}}=\big(S^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}v_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\big)_{\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}}$$

其中

$$S^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}=\lim_{n\to\infty}S^{\mathcal{X}}_{n,\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}=S_{\min}\Phi_{a_{\nu_{\mathrm{t}}},\infty}\big(S_{\min}^2\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_V^2\big).$$

接下来，我们将用缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathbf{n}}$来改写陈述式 (4.8) 和 (4.9)。注意，对于任意 $K>1$，上界 (4.8) 和 (4.9) 对子集中的空间指标均成立

$$\Lambda_K=\big\{\nu_{\mathrm{x}}\in\vee_{\mathrm{x}}:S_{\min}^2\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_V^2\le K\big\}. \tag{4.11}$$

此外，我们定义

$$M_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;K)=\min\Big\{n\in\mathbb{N}_0:\max\big\{f_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}(1,h_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}n),f_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}(K,h_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}n)\big\}\le\min\{\delta/2,\eta\}\Big\},$$
$$M_{\mathcal{X},0,\nu_{\mathrm{t}}}(K)=M_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\delta/2,K),$$

其中 $a_{\nu_{\mathrm{t}}}$ 由 (4.10) 给出。于是，对于所有 $\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}$，$\eta>0$ 和 $K>1$，我们对$n\ge M_{\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;K)$ 得到如下估计

$$\Big|\big(\bar S^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\big)^{-1}\big(\bar S^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}-S^{\mathcal{X}}_{n,\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\big)\Big|\le\delta,\quad \Big|\big(\bar S^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\big)^{-1}\big(S^{\mathcal{X}}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}-S^{\mathcal{X}}_{n,\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}}}\big)\Big|\le\eta.$$

这些估计直接由(4.8)和(4.9)，以及(4.10)和 $\bar S^{\mathcal{X}}$ 在(2.15)中的定义得出。

在当前设定中，我们通常针对每个时间索引使用不同的空间索引集。基于此，我们将 $\mathsf{K} = (K_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}$ 的指标集定义为

$$\Lambda_{\mathsf{K}} = \bigcup_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \{\nu_\mathrm{t}\}\times\Lambda_{K_{\nu_\mathrm{t}}} \tag{4.12}$$

并设

$$\mathsf{M}_{\mathcal{X}}(\eta;\mathsf{K}) = \left(M_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}(\eta;K_{\nu_\mathrm{t}})\right)_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}, \qquad \mathsf{M}_{\mathcal{X},0}(\mathsf{K}) = \left(M_{\mathcal{X},0,\nu_\mathrm{t}}(K_{\nu_\mathrm{t}})\right)_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}.$$

那么，对于任意 $\eta>0$ 和 $\mathsf{K}>1$，只要 $\mathsf{n}\geq\mathsf{M}_{\mathcal{X}}(\eta;\mathsf{K})$（这些不等式按分量理解），就有

$$\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}-\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}})\mathrm{R}_{\Lambda_{\mathsf{K}}}\|\leq\delta, \quad \|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}^{-1}(\mathbf{D}_{\mathcal{X}}-\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}})\mathrm{R}_{\Lambda_{\mathsf{K}}}\|\leq\eta\,. \tag{4.13}$$

此外，由（4.7）可得

$$1-\delta\leq\left(\bar{S}^{\mathcal{X}}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}\right)^{-1}S^{\mathcal{X}}_{n,\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}\leq 1+\delta, \quad (\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x})\in\vee. \tag{4.14}$$

函数 $w_{a_{\nu_\mathrm{t}}}$ 在其整个定义域上均为正。然而，我们可以使用

$$\tfrac{dF}{dx}(e^{\frac{x}{2}}) = 1-2e^{x/2}F(e^{x/2})$$

结合道森函数在区间 $[0,\tfrac{3}{4}[$[46]上严格递增这一事实，可得 $w_{a_{\nu_\mathrm{t}}}(-kh_{a_{\nu_\mathrm{t}}})\geq 0$对所有 $k>h^{2}_{a_{\nu_\mathrm{t}}}\ln(\tfrac{4}{3})$均成立。因此，对于 $n_{\nu_\mathrm{t}}\geq h^{2}_{a_{\nu_\mathrm{t}}}\ln(\tfrac{4}{3})$，根据定义有

$$S^{\mathcal{X}}_{n,\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}\leq S^{\mathcal{X}}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}$$

并且根据（4.14），$\left(S^{\mathcal{X}}_{\nu_\mathrm{t},\,\nu_\mathrm{x}}\right)^{-1}S^{\mathcal{X}}_{n_{\nu_\mathrm{t}},\,\nu_\mathrm{t},\,\nu_\mathrm{x}}\leq 1+\delta$。在附加限制 $\nu_\mathrm{x}\in\Lambda_{K_{\nu_\mathrm{t}}}$和 $n\geq M_{0,\,\nu_\mathrm{t}}(K_{\nu_\mathrm{t}})$ 下，我们有相应的下界 $\left(S^{\mathcal{X}}_{\nu_\mathrm{t},\,\nu_\mathrm{x}}\right)^{-1}S^{\mathcal{X}}_{n_{\nu_\mathrm{t}},\,\nu_\mathrm{t},\,\nu_\mathrm{x}}\geq 1-\delta$。我们将上述观察总结如下。

注 4.2。对于对角算子 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$、$\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$、$\mathbf{D}_{\mathcal{X},\,\mathsf{n}}$我们有

$$\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\|\leq 1+\delta, \quad \|\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}\|\leq(1-\delta)^{-1}, \tag{4.15}$$

这意味着$\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}$的谱条件数由 $(1+\delta)/(1-\delta)$ 上界所限。此外，对于满足 $n_{\nu_\mathrm{t}}\geq h^{2}_{a_{\nu_\mathrm{t}}}\ln(\tfrac{4}{3})$ 的 $\mathsf{n}=(n_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}$，我们有

$$\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}}\|\leq 1+\delta$$

并且对于任意 $\mathsf{K}=(K_{\nu_\mathrm{t}})_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}>1$ 和 $\eta>0$,

$$(1-\delta)\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}}\mathbf{v}\|\leq(1+\delta)\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}\mathbf{v}\| \quad \text{when} \quad \operatorname{supp}(\mathbf{v})\subset\Lambda_{\mathsf{K}}.$$

为了给迭代中的秩设定上界，我们需要在给定 $\eta>0, K\in\mathbb{R}$ 和 $\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}$ 时，为 $M_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}(\eta;K)$ 设定一个上界。

引理 4.3. 设 $0<\eta<1$、$K\in\mathbb{R}$ 和 $\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}$。则有

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}(\eta;K)\leq 1+2h^{-1}_{a_{\nu_\mathrm{t}}}\Big(&C+|\ln(\min\{\delta/2,\eta\})|\\&+\tfrac{1}{2}\ln(a_{\nu_\mathrm{t}})+\max\{0,\tfrac{1}{2}\ln(K)-\ln(a_{\nu_\mathrm{t}})\}\Big),\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中 $C=\ln(\frac{4}{\sqrt{\pi}})$。

证明。我们定义

$$g_{a_{\nu_\mathrm{t}}}(y) = \tfrac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\sqrt{a_{\nu_\mathrm{t}}}\max\left\{1,\tfrac{\sqrt{K}}{a_{\nu_\mathrm{t}}}\right\}.$$

利用 $\frac{dF}{dx}(x)=1-2xF(x)\leq 1$和 $F(0)=0$，可得对于所有 $x\geq 0$，$F(x)\leq x$。类似地，对于所有 $x>0$，有误差函数$(x)\leq\frac{2}{\sqrt{\pi}}x$。将此与 $c+c^{-1}\leq$结合

$2\max\{c, c^{-1}\}$可得对于所有 $y \in \mathbb{R}, s \in [1, K]$, $f_{a_{\nu_t}}(s, y) \leq g_{a_{\nu_t}}(y)$。选取满足 $g_{a_{\nu_t}}($ $nh_{a_{\nu_t}}) \leq \eta$的最小$n \in \mathbb{N}$，可得

$$n - 1 \leq 2h_{a_{\nu_t}}^{-1} \left(C + |\ln(\min\{\delta/2, \eta\})| + \tfrac{1}{2}\ln(a_{\nu_t}) + \max\{0, \tfrac{1}{2}\ln(K) - \ln(a_{\nu_t})\}\right)$$

其中 $C = \ln(\frac{4}{\sqrt{\pi}})$。由于 $f_{a_{\nu_t}}(s, nh_{a_{\nu_t}}) \leq g_{a_{\nu_t}}(nh_{a_{\nu_t}}) \leq \eta$对所有 $s \in [1, K]$均成立，我们有$M_{\mathcal{X},\nu_t}(\eta;\ K) \leq n$，由此可得（4.16）。□

请注意，上界不仅取决于时间索引 ν_t （通过 a_{ν_t}），还取决于该时间索引处的空间支撑集（通过 K_{ν_t}）。

注 4.4. 步长 $h_{a_{\nu_t}}$ 并非固定，而是依赖于 a_{ν_t} 时间索引 ν_t。根据定义，有 $a_{\nu_t} \eqsim 2^{|\nu_t|}$。若令 $h_{a_{\nu_t}}$ 为式（4.5）中的上界，则得到$h_{a_{\nu_t}} \eqsim |\nu_t|^{-1}$。根据 $h_{a_{\nu_t}}$的结果，很容易看出 $n^+_{a_{\nu_t}}$ 关于 $|\nu_t|$呈二次增长。对于 n的下界，可得 $n \geq \frac{2}{h_{a_{\nu_t}}} \ln(\frac{4}{3})$。

备注 4.5。 在当前方法中，$\mathbf{D}\mathcal{X}_{,\ \nu_t}$ 针对每个 $\nu_t \in \vee_t$分别近似为可分离项的有限和，并且每个$\mathbf{D}\mathcal{X}_{,\ \nu_t}$ 的近似恰好作用于与时间索引 ν_t相关联的一个低秩表示。这取决于我们所采用的特定近似格式，即为每个ν_t分别使用独立的低秩表示。若转而寻求将时间依赖性作为额外张量模处理的低秩近似，则需要对$\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$进行直接的低秩近似，这似乎是一个困难得多的问题；据我们所知，目前还没有适用于此类问题的误差可控构造；但请参见 [4], 关于通过启发式方法获得与$\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$等价缩放算子的低秩近似的讨论。

4.2. **缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$。** 缩放算子$\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$具有如下形式：$\mathbf{D}_{\mathcal{Y}} = \mathbf{I}_t \otimes \mathbf{D}$，其中$\mathbf{D}$ 如式（2.13）所示。对于$\mathbf{D}$ ，$\mathbf{D}$的一个等价缩放算子可表示为 [8, 第 4 节1]中所给出的、可近似为可分离算子有限和的形式。在本章中，我们将回顾相关结果。随后，我们调整这些结果以得到$\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$。因此，我们利用时间维度上的恒等算子，并可针对每个时间索引，依据其对应的空间支撑集独立地近似缩放矩阵$\mathbf{D}$。

我们首先回顾$\mathbf{D}$ 和$\mathbf{D}_n$的构造。令 $\delta \in (0,1)$，并且

$$h \in \left(0, \frac{\pi^2}{5(|\ln\frac{\delta}{2}|+4)}\right], \quad n^+ = \lceil h^{-1}\max\{4\pi^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{|\ln(\delta/2)|}\}\rceil,$$
$$\alpha(x) = \ln^2(1+e^x), \quad w(x) = 2\pi^{-\frac{1}{2}}(1+e^x)^{-1}.$$

利用指数和

$$\varphi_{h,n}(t) = \sum_{k=-n}^{n^+} hw(kh)e^{-\alpha(kh)t}, \quad \varphi_{h,\infty}(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{h,n}(t)$$

我们定义$\mathbf{D}$ 和$\mathbf{D}_n$ 为

$$\mathbf{D}_n\mathbf{v} = \left(S^V_{n,\nu}\mathbf{v}_\nu\right)_{\nu\in\vee_x}, \quad \text{where} \quad S^V_{n,\nu} = S_{\min}\varphi_{h,n}\left(S^2_{\min}\|\Psi_\nu\|^2_V\right),$$
$$\mathbf{D}\mathbf{v} = \left(S^V_{\nu}\mathbf{v}_\nu\right)_{\nu\in\vee_x}, \quad \text{where} \quad \tilde{S}^V_{\nu} = S_{\min}\varphi_{h,\infty}\left(S^2_{\min}\|\Psi_\nu\|^2_V\right).$$

接下来，我们陈述有关等价缩放矩阵的相关结果，更多细节请参见 [8,第 4 节。1] 对于 $\eta > 0$、$h \in \mathbb{R}$、 $0 < \delta < 1$ 和 $K \in \mathbb{R}$，令

$$M_{\mathcal{Y}}(\eta; K) = \lceil h^{-1}(\ln(2\pi^{-\frac{1}{2}}) + |\ln(\min\{\delta/2, \eta\})| + \tfrac{1}{2}\ln(K))\rceil, \tag{4.17}$$
$$M_{\mathcal{Y},0}(K) = M_{\mathcal{Y}}(\delta/2, K).$$

假设 $n \geq M_{\mathcal{Y}}(\eta;\ K)$，则有

$$\|\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\bar{\mathbf{D}} - \mathbf{D}_n)\mathrm{R}_{\Lambda_K}\| \leq \delta, \quad \|\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_n)\mathrm{R}_{\Lambda_K}\| \leq \eta. \tag{4.18}$$

注 4.6（参见 [8, 注 11]）。对于对角算子 $\mathbf{D}$，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}_n$，有

$$\|\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{D}_n\|, \|\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{D}\| \leq 1+\delta, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \|\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{D}}\| \leq (1-\delta)^{-1},$$

尤其是，$\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{D}}$ 的谱条件数由 $(1+\delta)/(1-\delta)$ 上界所限制。此外，对于任意 $K>1$ 和 $n \geq M_{\mathcal{Y},0}(K)$，

$$(1-\delta)\|\bar{\mathbf{D}}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{D}_n\mathbf{v}\| \leq (1+\delta)\|\bar{\mathbf{D}}\mathbf{v}\| \quad \text{when} \quad \operatorname{supp}(\mathbf{v}) \subseteq \Lambda_K.$$

基于这一认识，我们能够为 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$ 定义一个等价缩放算子。令 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}} = \mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{D}$，其秩仍然无界。对于秩截断版本，我们允许每个时间索引对应不同的秩：对于 $\mathsf{n} \in \mathbb{N}_0^{\vee_{\mathrm{t}}}$，定义

$$\mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}} = \sum_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}} \mathbf{E}_{\nu_{\mathrm{t}}} \otimes \mathbf{D}_{n_{\nu_{\mathrm{t}}}}.$$

对于 $\mathsf{K} = (K_{\nu_{\mathrm{t}}})_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}}$，定义

$$\mathsf{M}_{\mathcal{Y}}(\eta;\mathsf{K}) = (M_{\mathcal{Y}}(\eta;K_{\nu_{\mathrm{t}}}))_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}}, \qquad \mathsf{M}_{\mathcal{Y},0}(\mathsf{K}) = (M_{\mathcal{Y},0}(K_{\nu_{\mathrm{t}}}))_{\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}}.$$

那么，当 $\mathsf{n} \geq \mathsf{M}_{\mathcal{Y}}(\eta;\mathsf{K})$，由式（4.18），可得

$$\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}^{-1}(\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}})\mathrm{R}_{\Lambda_{\mathsf{K}}}\| \leq \delta, \quad \|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}^{-1}(\mathbf{D}_{\mathcal{Y}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}})\mathrm{R}_{\Lambda_{\mathsf{K}}}\| \leq \eta.$$

注 4.7。对于对角算子 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$，$\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}}$ 根据注4.6，可直接得到

$$\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}}\|, \|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\| \leq 1+\delta, \quad \mathsf{n} \in \mathbb{N}_0^{\vee_{\mathrm{t}}}, \quad \|\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}^{-1}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}\| \leq (1-\delta)^{-1}, \tag{4.19}$$

且对任意的 $\mathsf{K} > 1$ 和 $\mathsf{n} \geq \mathsf{M}_{\mathcal{Y},0}(\mathsf{K})$，

$$(1-\delta)\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}}\mathbf{v}\| \leq (1+\delta)\|\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}\mathbf{v}\| \quad \text{when} \quad \operatorname{supp}(\mathbf{v}) \subseteq \Lambda_{\mathsf{K}}.$$

5. Adaptive approximation of rescaled low-rank operators

给定上一节构造的等价缩放算子及其近似，现在我们转而讨论低秩表示中算子的自适应应用。为实现这一点，对于 $\mathbf{B}_1$，，我们需要考虑如下形式的算子

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{x}} + \mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{T}_{\mathrm{x}}, \tag{5.1}$$

其中，具有某个秩参数 R，且 $\mathsf{K}_d(R) = \bigtimes_{i=1}^{d}\{1,\dots,R\}$，$\mathbf{T}_{\mathrm{x}}$ 具有如下形式

$$\mathbf{T}_{\mathrm{x}} = \sum_{\mathsf{n} \in \mathsf{K}_d(R)} c_{\mathsf{n}} \bigotimes_i \mathbf{T}_{n_i}^{(i)}, \tag{5.2}$$

其中，分量张量 $(c_{\mathsf{n}})_{\mathsf{n} \in \mathsf{K}_d(R)}$ 采用层次格式，秩至多为 R。

注 5.1。对于热方程，其中$\mathbf{T}_{\mathrm{x}}$ 对应于拉普拉斯算子的表示，我们得到以下一维算子

$$\mathbf{T}_1^{(i)} = (\langle \psi_\nu, \psi_\mu \rangle)_{\nu,\mu \in \vee_1} = \mathbf{I}_i, \quad \mathbf{T}_2^{(i)} = \left(\langle \psi_\nu', \psi_\mu' \rangle\right)_{\nu,\mu \in \vee_1}, \quad \mathbf{T}_{\mathrm{t}} = \left(\langle \psi_\nu', \psi_\mu \rangle\right)_{\nu,\mu \in \vee_{\mathrm{t}}}.$$

在这种情况下，我们有 $R=2$；若 $(n_1, \dots, n_d)$ 是 $(2, 1, \dots, 1)$ 的一种排列，则有 $c_{\mathsf{n}} = 1$，否则有 $c_{\mathsf{n}} = 0$。自然可以为每个空间维度选用相同的小波基，这样我们可以写成 $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^{(i)}$。因此，在这种情况下，算子 $\mathbf{T}_{\mathrm{x}}$ 的形式为

$$\mathbf{T}_{\mathrm{x}} = \mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d + \cdots + \mathbf{I}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{d-1} \otimes \mathbf{T}_2. \tag{5.3}$$

在本节前几部分中，对于给定的有限层次秩 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$和任意给定的容差 $\eta > 0$，我们构造一个近似 $\mathbf{w}_\eta \in \ell_2(\vee)$，使其满足估计 $\|\mathbf{B}_1\mathbf{v} - \mathbf{w}_\eta\| \leq \eta$，并且满足关于层次秩和低维支撑集大小$\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta))$的上界，这些上界相对于 η是准最优的。在本节最后一部分，我们将转而讨论$\mathbf{B}_2$的类似结果。

处理$\mathbf{B}_1$ 的方法是分别考察空间算子和时间算子，随后将结果结合起来。对于这两个算子，我们都利用第4 节中缩放算子的性质，并将问题转化为具有显式低秩格式的算子。随后，空间算子可以按照 [6,8], 中的椭圆情形以类似方式处理；而对于时间算子，由于与不同时间基函数相对应的不同层次张量表示之间存在相互作用，因此需要一些新的概念。

我们首先回顾 [16] 中关于算子的自适应可压缩性的以下标准概念。

定义 5.2。 设 $\hat{\vee}$ 为一个可数指标集，并设 $s^* > 0$。若算子 $\mathbf{M}\colon \ell_2(\hat{\vee}) \to \ell_2(\hat{\vee})$ 被称为 s^*-可压缩，则对于任意 $0 < s < s^*$，存在可求和正数列 $(\alpha_j)_j$，$(\beta_j)_j$，使得对每个 $j \in \mathbb{N}_0$，存在 $\mathbf{M}^j$，其每行和每列至多具有 $\alpha_j 2^j$ 个非零矩阵元素，并满足 $\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_j\| \le \beta_j 2^{-sj}$。对于给定的 s^*-可压缩算子，我们将所得到的数列记为 $\alpha(\mathbf{M})$ 和 $\beta(\mathbf{M})$。

以下的可压缩性始终取决于与缩放矩阵的组合。首先，我们定义低维缩放算子 $\hat{\mathbf{D}}^\tau\colon \mathbb{R}^{\vee_1} \to \mathbb{R}^{\vee_1}$ 和 $\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^\tau\colon \mathbb{R}^{\vee_{\mathrm{t}}} \to \mathbb{R}^{\vee_{\mathrm{t}}}$，即

$$\hat{\mathbf{D}}^\tau \mathbf{v} = \left(\|\psi_\nu\|_{H_0^1(0,1)}^{-\tau} \mathbf{v}_\nu\right)_{\nu\in\vee_1}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}}^1,$$
$$\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^\tau \mathbf{v} = \left(\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|_{H^1(I)}^{-\tau} \mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}\right)_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}, \quad \hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}} = \hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^1.$$

这些算子

$$\mathbf{C}_2 = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{T}_2\hat{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{C}_{\mathrm{t}} = \mathbf{T}_{\mathrm{t}}\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}} \tag{5.4}$$

对于足够光滑的时间基函数和空间基函数是有界的。此外，它们是 s^*-可压缩的：对于每个 $s < s^*$，都存在近似序列 $(\mathbf{T}_{2,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$、$(\mathbf{T}_{\mathrm{t},j})_{j\in\mathbb{N}_0}$，满足

$$\|\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_{2,j})\hat{\mathbf{D}}\| \le \beta_j(\mathbf{C}_2)2^{-sj},$$
$$\|(\mathbf{T}_{\mathrm{t}} - \mathbf{T}_{\mathrm{t},j})\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}\| \le \beta_j(\mathbf{C}_{\mathrm{t}})2^{-sj}. \tag{5.5}$$

5.1. **空间算子**。 接下来，我们考虑与式（2.18）中相同的如下形式的算子

$$\mathbf{B}_{\mathrm{x}} = \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{T}_{\mathrm{x}})\mathbf{D}_{\mathcal{X}}, \tag{5.6}$$

其中 T_{x} 具有式（5.2）的形式。我们假设系数 $\mathrm{T}_{n_i}^{(i)}$ 按照式（5.5）的意义是 s^*-可压缩的，而 $\mathrm{T}_{n_i}^{(i)}$、j 是相应的近似。为了对给定的 $\mathrm{v} \in \ell_2(\vee)$自适应地应用算子 B_{x}，我们希望像一维和高维椭圆情形那样，将关于 B_{x} （s^*-可压缩性）的现有先验信息与关于 v 的后验信息结合起来。我们将说明如何针对细化参数 $J \in \mathbb{N}_0$ 构造 $\mathrm{B}_{\mathrm{x}}\mathrm{v}$ 的近似 w_J，然后用误差容限来表述这些结果。我们的方法遵循文献 [8], 中高维椭圆情形的思路，但采用定义 3.9 中的时空收缩 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{v})$ 来控制近似。

令 $\bar{\Lambda}_j^{(i)}(\mathrm{v})$ 表示收缩$\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{v})$ 的最佳 2^j 项近似的支撑集。据此，我们提取每个时间索引 ν_{t} 和每个空间维度 i 对应的支撑集，方法如下：

$$\bar{\Lambda}_{\nu_{\mathrm{t}},j}^{(i)}(\mathrm{v}) = \{\nu_{\mathrm{x}} : (\nu_{\mathrm{t}}, \nu_{\mathrm{x}}) \in \bar{\Lambda}_j^{(i)}(\mathrm{v})\}, \quad j = 0, \dots, J. \tag{5.7}$$

对于每个时间索引的指标，我们可以完全按照椭圆情形 [6]进行。如果$\mathbf{T}_{n_i}^{(i)} = \mathbf{I}_i$，则无需近似，直接设为 $\tilde{\mathbf{T}}_{n_i}^{(i)} = \mathbf{I}_i$。否则，对于每个 $\nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}$,

令 $\bar{\Lambda}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},-1}(\mathbf{v}) = \emptyset$ 并

$$\Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},[p]}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \bar{\Lambda}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},p}(\mathbf{v}) \setminus \bar{\Lambda}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},p-1}(\mathbf{v}), & p = 0,\dots,J, \\ \vee_1 \setminus \bar{\Lambda}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},J}(\mathbf{v}), & p = J+1, \\ \emptyset, & p > J+1. \end{cases} \tag{5.8}$$

相应地，我们将所有对应时间指标构成的集合定义为

$$\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[p]}(\mathbf{v}) = \big\{(\nu_\mathrm{t},\nu_i) : \nu_\mathrm{t} \in \vee_\mathrm{t}, \nu_i \in \Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},[p]}(\mathbf{v})\big\}. \tag{5.9}$$

此外，设

$$\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{n_i,[p]} = \begin{cases} \mathbf{T}^{(i)}_{n_i,J-p}, & p = 0,\dots,J, \\ 0, & p > J. \end{cases} \tag{5.10}$$

现在，我们将算子近似应用于以下形式的 $\mathbf{w} \in \ell_2(\vee)$，其中该形式由式（3.2）给出：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}]\mathbf{w} &= \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \left(\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},\nu_\mathrm{t},J}[\mathbf{v}]\mathbf{w}_{\nu_\mathrm{t}}\right) \\ &= \sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \left(\sum_{\mathsf{n}\in\mathrm{K}_d(R)} c_{\mathsf{n}} \bigotimes_{i=1}^{d} \tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},n_i}[\mathbf{v}] \right) \mathbf{w}_{\nu_\mathrm{t}}, \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},n_i}[\mathbf{v}] = \sum_{p\in\mathbb{N}_0} \tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{n_i,[p]} \mathrm{R}_{\Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},[p]}(\mathbf{v})}.$$

因此，对于每个时间索引，我们根据 $\mathbf{T}_\mathrm{x}$ 的对应收缩，以不同方式近似该算子 $\mathbf{v}$。为避免技术细节，我们给出拉普拉斯算子的算子近似误差估计的证明，也就是说，针对式（$\mathbf{T}_\mathrm{x}$ （5.3）所示的形式。

备注 5.3。 以下估计可推广到更一般的常系数二阶椭圆算子情形，如 [8, 第 6 节。2]。由于在 $\mathbf{B}_\mathrm{x}$ 中，算子的空间部分可针对每个时间索引分别处理，因此可以直接应用 [8, 定理 34 、引理 35 以及 36] 中的含混合导数项的上界，从而得到与下文引理 5.5 类似的结果，该结果也适用于具有常扩散张量的二阶算子；扩散张量的层次张量表示的秩会出现在相应的误差界中。例如，对于常三对角扩散张量，其秩至多为五，见 [8, 例 5]。

我们定义近似

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{x},J}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_\mathcal{Y} \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}] \mathbf{D}_\mathcal{X} \mathbf{v}, \tag{5.11}$$

其中 $\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}$ 取决于 $\mathbf{v}$，通过划分（5.8）。为简化记号，根据（5.4）定义

$$\tilde{\mathbf{C}}_2 = \hat{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{T}}_2 \hat{\mathbf{D}}.$$

在分析近似之前，我们需要建立高维与一维缩放矩阵作用效果之间的关系。

引理 5.4。 对于 $\mathbf{M}_\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\vee_1\times\vee_1}$、$\mathbf{M}_\mathrm{t} \in \mathbb{R}^{\vee_\mathrm{t}\times\vee_\mathrm{t}}$ 和 $\nu_\mathrm{t} \in \vee_\mathrm{t}$，有

$$\|\mathbf{D}[\mathbf{I}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{i-1} \otimes \mathbf{M}_\mathrm{x} \otimes \mathbf{I}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d]\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\| \le C_\delta \|\hat{\mathbf{D}}\mathbf{M}_\mathrm{x}\hat{\mathbf{D}}\|, \tag{5.12}$$

$$\|\mathbf{D}_\mathcal{Y}[\mathbf{M}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x}]\mathbf{D}_\mathcal{X}\| \le C_\delta \left\|\mathbf{M}_\mathrm{t}\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}\right\|, \tag{5.13}$$

其中对 $i = 1$ 和 $i = d$采用标准解释，且 $C_\delta = (1+\delta)^2$。

证明。 估计式（5.12）由下式得出

$$\|[\mathbf{I}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{i-1} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d]\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\| \leq 1+\delta,$$
$$\|\mathbf{D}[\mathbf{I}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{i-1} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d]\| \leq 1+\delta,$$

其中我们分别使用了（4.15）、（4.19）以及 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$ 的定义。由于该算子的特殊结构，

$$\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{M}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x}) = (\mathbf{I}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{D})(\mathbf{M}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x}) = (\mathbf{M}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x})(\mathbf{I}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{M}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x})\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}.$$

将这一事实与（4.15）、（4.19）以及 $\|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-1} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x})\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{Y}}\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}\| \leq 1$ 结合，可得（5.13）. □

现在我们能够分析关于典范缩放矩阵的自适应应用。

引理 *5.5*。设 $B_\mathrm{x} = D_{\mathcal{X}}(I_\mathrm{t} \otimes T_\mathrm{x})D_{\mathcal{Y}}$ 由（*5.6*）定义。假设对于任意 $s < s^*$，（*5.5*）成立。此外，设 $v, w \in \ell_2(\vee)$，其中对于 $i = 1, \ldots, d$，有 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(v) \in \mathcal{A}^s$。则对于每个 $J \in \mathbb{N}_0$ 以及按照依赖于 v 的划分（*5.8*）在（*5.11*）中定义的 $B_{\mathrm{x},J}$，我们有如下后验界

$$\|\mathbf{B}_\mathrm{x}\mathbf{w} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{w}\| \leq e_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}](\mathbf{w}), \tag{5.14}$$

with

$$e_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}](\mathbf{w}) = C_\delta \sum_{i=1}^{d}\sum_{p=0}^{J} 2^{-s(J-p)}\beta_{J-p}(\mathbf{C}_2)\left\|\mathrm{R}_{\Lambda_{[p]}^{(t,i)}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\right\| + \|\mathbf{C}_2\|\left\|\mathrm{R}_{\Lambda_{[J+1]}^{(t,i)}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\right\|$$

且 C_δ 与引理 *5.4*中的先验估计一样

$$\|\mathbf{B}_\mathrm{x}\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{x},J}(\mathbf{v})\| \leq 2^s C_\delta 2^{-sJ}\left(\|\mathbf{C}_2\| + \|\beta(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1}\right)\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}. \tag{5.15}$$

此外，对于 $i = 1, \ldots, d$，我们有如下支撑界

$$\#\operatorname{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t},i)}\left(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{x},J}(\mathbf{v})\right)\right) \leq 2\|\alpha(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1}2^J. \tag{5.16}$$

证明。 我们从误差界（5.14）开始。由于 T_x 的结构（5.3），

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{B}_\mathrm{x}\mathbf{v} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{w}\| \\
&\leq \left\|\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\Big(\mathbf{I}_\mathrm{t} \otimes (\mathbf{T}_2 - \tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{\nu_\mathrm{t},2}[\mathbf{v}]) \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d\Big)\mathbf{D}_{\mathcal{X}}(\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \mathbf{w}_{\nu_\mathrm{t}})\right\| + \cdots + \\
&\qquad \left\|\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\Big(\mathbf{I}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{I}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{d-1} \otimes (\mathbf{T}_2 - \tilde{\mathbf{T}}^{(d)}_{\nu_\mathrm{t},2}[\mathbf{v}])\Big)\mathbf{D}_{\mathcal{X}}(\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \mathbf{w}_{\nu_\mathrm{t}})\right\|.
\end{aligned}$$

根据一维近似的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\Big(\mathbf{I}_\mathrm{t} \otimes (\mathbf{T}_2 - \tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{\nu_\mathrm{t},2}[\mathbf{v}]) \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d\Big)\mathbf{D}_{\mathcal{X}}(\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \mathbf{w}_{\nu_\mathrm{t}})\right\| \\
&\leq \sum_{p\in\mathbb{N}_0}\left\|\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\Big(\mathbf{I}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{D}\Big((\mathbf{T}_2 - \tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{2,[p]})\mathrm{R}_{\Lambda^{(1)}_{\nu_\mathrm{t},[p]}(\mathbf{v})} \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d\Big)\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\Big)(\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}} \otimes \mathbf{w}_{\nu_\mathrm{t}})\right\|
\end{aligned}$$

以及对 $i = 2, \ldots, d$ 的类似估计。

利用$\mathbf{B}_{\mathrm{x}}(\mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}}\otimes\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}})$对每个时间索引$\nu_{\mathrm{t}}$的支撑集两两不相交、对角算子可交换这一事实，以及引理5.4中的（5.12），可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\Big(\mathbf{I}_{\mathrm{t}}\otimes\mathbf{D}\Big((\mathbf{T}_2-\tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{2,[p]})\mathrm{R}_{\Lambda^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},[p]}(\mathbf{v})}\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d\Big)\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}\Big)(\mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}}\otimes\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}})\right\|^2\\
\le&\sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\left\|\mathbf{D}\Big((\mathbf{T}_2-\tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{2,[p]})\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d\Big)\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}\right\|^2\left\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},[p]}(\mathbf{v})}\pi^{(1)}(\mathbf{w}_{\nu_{\mathrm{t}}})\right\|^2\\
\le&C_\delta\left\|\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{T}_2-\mathbf{T}_{2,J-p})\hat{\mathbf{D}}\right\|^2\left\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},1)}_{[p]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w})\right\|^2.
\end{aligned}$$

此外，由于s^*可压缩性，我们有$\|\hat{}\mathrm{D}(\mathbf{T}_2-\mathrm{T}2,_{J-p})\,\hat{}\mathrm{D}\|\le\beta_{J-p}(\mathrm{C}_2)2^{-s(J-p)}$当$p=0,\dots,J$时。根据我们的构造，可得$\|\mathrm{T}_2-\tilde{}\mathrm{T}^{(i)}_2,_{[J+1]}\|=\|\mathrm{T}_2\|$以及$\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[p]}}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|=0$，其中$p>J+1$。结合前面的估计可得（5.14）。

根据指标集$\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[p]}(\mathbf{v})$的选取以及$\|\cdot\|_{\mathcal{A}^s}$的定义，我们得到

$$\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[p]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|\le 2^{-s(p-1)}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s},\quad p=0,\dots,J+1,$$

这证实了（5.15）。

由于缩放算子是对角的，因此不会改变近似的支撑集。因此，与一维情形一样，有

$$\#\operatorname{supp}\Big(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{x},J}(\mathbf{v}))\Big)\le 2(\alpha_J(\mathbf{C}_2)2^J2^0+\cdots+\alpha_0(\mathbf{C}_2)2^02^J)\le 2\|\alpha(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1}2^J,\tag{5.17}$$

这说明（5.16）；（5.17）中额外的因子 2 源于拉普拉斯算子的层次表示秩。□

我们得到了与椭圆情形下类似的估计，见 [8], 这很自然，因为$\mathbf{B}_{\mathrm{x}}$不涉及不同时间基索引对应的张量表示之间的相互作用。

5.2. **时间算子**。现在我们考虑时间算子的自适应近似

$$\mathbf{B}_{\mathrm{t}}=\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{T}_{\mathrm{t}}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{x}})\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}.\tag{5.18}$$

由于不同时间基索引对应的层次张量格式之间的相互作用可能导致秩增加，因此我们需要对时间导数$\mathbf{C}_{\mathrm{t}}$的（重缩放）表示具有稍严格一些的可压缩性，此表示在（5.4）中引入。

定义 5.6。设$\hat{\vee}$，$\tilde{\vee}$为可数指标集。若存在一个可求和正数列$(\beta_j)_{j\ge0}$以及一个$c>0$，使得对每个$j\in\mathbb{N}_0$，都存在$\mathbf{M}_j$满足$\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_j\|\le\beta_j2^{-j}$，且对每个$j\in\mathbb{N}_0$，算子$\mathbf{M}_{j+1}-\mathbf{M}_j$的每行和每列都只有$c$个非零元素，则称算子$\mathbf{M}$：$\ell_2(\hat{\vee})\to\ell_2(\tilde{\vee})$为超可压缩。

注释 5.7。通过修改序列$(\beta_j)_j$和常数$c>0$，可以匹配定义5.2中的任意速率s。对于超可压缩的$\mathbf{T}_{\mathrm{t}}$，不失一般性，假设$\|(\mathbf{T}_{\mathrm{t}}-\mathbf{T}_{\mathrm{t},j})\hat{}\mathbf{D}_{\mathrm{t}}\|\le\beta_j2^{-sj}$，其中$s$如式 (5.5) 中空间算子$\mathbf{C}_2$的可压缩性所定义。此外，令$\mathbf{T}_{\mathrm{t},0}=0$且$\beta_0=\|\mathbf{T}_{\mathrm{t}}\hat{}\mathbf{D}_{\mathrm{t}}\|$。于是，根据定义的直接推论，$\mathbf{T}_{\mathrm{t},J}$在每一行和每一列中至多有$cJ$个非零元素，对每个$J\in\mathbb{N}_0$均成立。为简化记号，我们记作$\beta^{(\mathrm{t})}=\beta(\mathbf{C}_t)$。

注 5.8。这种关于算子表示可压缩性的新定义限制显著更严格，但足以满足我们的目的：由于我们使用的 Donovan-Geronimo-Hardin 多小波是具有足够多个消失矩的样条函数，

我们通过在 [41]中对分段光滑小波的一般情形进行研究所得的观察，获得了这种可压缩性；具体而言，对于时间多重小波基 $\{\theta_\nu\}_{\nu\in\vee_\mathrm{t}}$和 ν， $\nu'\in\vee_\mathrm{t}$ 使得 θ_ν 和 $\theta_{\nu'}$ 在 I的边界点处消失，我们有

$$\int_I \theta'_\nu\theta_{\nu'}\,\mathrm{d}x = -\int_I \theta_\nu\theta'_{\nu'}\,\mathrm{d}x = 0$$

当 $\operatorname{supp}\theta_\nu$ 不包含样条 $\theta_{\nu'}$ 的任何节点，反之亦然时。由于采用了样条小波，矩阵 $\mathbf{T}_\mathrm{t}$ 的矩阵元素可以通过数值积分精确计算。因此，我们可以假设近似序列是嵌套的，即对于任意 $j_1<j_2$ 和 ν， μ 若满足 $(\mathbf{T}_{\mathrm{t},j_1})_{\nu,\mu}\neq 0$，则有 $(\mathbf{T}_{\mathrm{t},j_1})_{\nu,\mu}=(\mathbf{T}_{\mathrm{t},j_2})_{\nu,\mu}$。由此，我们得到连续的近似 $\mathbf{T}_{\mathrm{t},j}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathrm{t},j+1}$，它们每行和每列仅有 c 个矩阵元素不同。请注意，其他小波也能实现这一性质，参见备注 2.4。

为了构造 $\mathbf{B}_\mathrm{t}\mathbf{v}$的近似，如同对空间算子 $\mathbf{B}_\mathrm{x}$的情形一样，我们采用时空收缩 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})$。下文中，我们假设 $\mathbf{T}_\mathrm{t}$ 是超可压缩的，如备注5.7所述。

我们首先对输入$\mathbf{v}$ 2^j的基指标进行细分，其基本思路是组合各个空间维度上的最佳 2^j项近似。因此，我们设

$$\begin{aligned}\bar\Lambda_j^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v}) &= \bigcup_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}} \{\nu_\mathrm{t}\}\times\bar\Lambda^{(1)}_{\nu_\mathrm{t},j}(\mathbf{v})\times\cdots\times\bar\Lambda^{(d)}_{\nu_\mathrm{t},j}(\mathbf{v}),\\ \mathbf{v}_j &= \mathrm{R}_{\bar\Lambda_j^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}\mathbf{v}\end{aligned}\tag{5.19}$$

对每个 $j=0,\ldots,J$满足 $\bar\Lambda^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},j}(\mathbf{v})$ 来自式（5.7）。我们将近似定义为

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{t},J}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_\mathcal{Y}(\mathbf{T}_{\mathrm{t},J}\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x})\mathbf{D}_\mathcal{X}\mathbf{v}_0 + \sum_{j=1}^{J}\mathbf{D}_\mathcal{Y}(\mathbf{T}_{\mathrm{t},J-j}\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x})\mathbf{D}_\mathcal{X}(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_{j-1}).$$

由于$\mathbf{v}_j$的构造在所有维度上都使用了限制，因此在实际实现中，采用等价表述更为方便:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{t},J}(\mathbf{v}) = \sum_{j=0}^{J-1}\mathbf{D}_\mathcal{Y}((\mathbf{T}_{\mathrm{t},J-j}-\mathbf{T}_{\mathrm{t},J-j-1})\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x})\mathbf{D}_\mathcal{X}\mathbf{v}_j + \mathbf{D}_\mathcal{Y}(\mathbf{T}_{\mathrm{t},0}\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x})\mathbf{D}_\mathcal{X}\mathbf{v}_J.\tag{5.20}$$

这里可以利用超压缩性，因为根据注 5.7，$(\mathbf{T}_{\mathrm{t},\,j+1}-\mathbf{T}_{\mathrm{t},\,j})$ 对每个 $j\in\mathbb{N}_0$而言，每行和每列都只有 c 个非零元素。作为后续参考，我们还注意到

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{t},J}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_\mathcal{Y}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}_\mathcal{X}\mathbf{v},$$

˜其中，算子$\mathbf{T}_{\mathrm{t},\,J}[\mathbf{v}]$ 定义为

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}] = \sum_{j=0}^{J-1}\big((\mathbf{T}_{\mathrm{t},J-j}-\mathbf{T}_{\mathrm{t},J-j-1})\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x}\big)\mathrm{R}_{\bar\Lambda_j^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})} + (\mathbf{T}_{\mathrm{t},0}\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x})\mathrm{R}_{\bar\Lambda_J^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}.$$

注意到 $\bar\Lambda_j^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})\subseteq\bar\Lambda_{j+1}^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})$ 对每个 $j\in\mathbb{N}_0$均成立。结合式（3.9），可得

$$\begin{aligned}\Big\|\mathrm{R}_{\bar\Lambda_{j+1}^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}\mathbf{w}-\mathrm{R}_{\bar\Lambda_j^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}\mathbf{w}\Big\| &= \Big\|\mathrm{R}_{\bar\Lambda_{j+1}^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}\mathbf{w}-\mathrm{R}_{\bar\Lambda_j^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}\Big(\mathrm{R}_{\bar\Lambda_{j+1}^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}\mathbf{w}\Big)\Big\|\\ &\le \sum_{i=1}^{d}\Big\|\mathrm{R}_{\bar\Lambda_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})-\mathrm{R}_{\bar\Lambda_j^{(i)}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\Big\|\\ &\le \sum_{i=1}^{d}\Big\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[j+1]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\Big\|\end{aligned}\tag{5.21}$$

对于 $\mathbf{w} \in \ell_2(\vee)$，其中 $\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[j+1]}(\mathbf{v})$ 在式（5.9）中定义。

注5.9. 作为另一种选择，($\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_j(\mathbf{v})$ 在 (5.19) 中的指标集也可以通过以下粗化过程中的指标集来定义： $\Lambda(\mathbf{v}\ N)$ 来自 (3.10)，其中 $N = 2^j$。在当前设定下，这会得到基本相同的结果。

引理 *5.10.* 设 $B_{\mathrm{t}} = D_{\mathcal{Y}}(T_{\mathrm{t}} \otimes I_{\mathrm{x}})D_{\mathcal{X}}$ 由 *(5.18)* 定义，并假设 T_{t} 是超-˜可压缩的。给定任意 v、$w \in \ell_2(\vee)$ 和 $J \in \mathbb{N}_0$，令 $B_{\mathrm{t},J}(v)$ 由 *(5.20)* 定义。那么，只要 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(v) \in \mathcal{A}^s$ 对某些 $0 < s < s^*$ 和 $i = 1, \ldots, d$ 成立，就有如下后验误差界

$$\|\mathbf{B}_{\mathrm{t}}\mathbf{w} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{w}\| \le e_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}](\mathbf{w}), \tag{5.22}$$

其中

$$e_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}](\mathbf{w}) = C_\delta \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{J} 2^{-s(J-j)}\beta^{(\mathrm{t})}_{J-j}\left\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[j]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\right\| + \|\mathbf{C}_{\mathrm{t}}\|\left\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[J+1]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\right\|$$

以及先验误差界

$$\|\mathbf{B}_{\mathrm{t}}\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{t},J}(\mathbf{v})\| \le 2^s C_\delta 2^{-sJ}(\|\beta^{(\mathrm{t})}\|_{\ell_1} + \|\mathbf{C}_{\mathrm{t}}\|)\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}. \tag{5.23}$$

此外，有如下支撑估计

$$\#\operatorname{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{t},J}(\mathbf{v}))\right) \le 2c2^J, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{5.24}$$

证明。 我们从陈述（5.22）开始。为简便起见，我们定义 $\Lambda^{(\mathrm{t})}_{-1}(\mathbf{v}) = \emptyset$。有 s

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{B}_{\mathrm{t}}\mathbf{w} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{w}\| \\
&\le \sum_{j=0}^{J}\|\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}((\mathbf{T}_{\mathrm{t},J-j} - \mathbf{T}_{\mathrm{t}}) \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{x}})\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\|\left\|\mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_j(\mathbf{v})}\mathbf{w} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_{j-1}(\mathbf{v})}\mathbf{w}\right\| + \|\mathbf{B}_{\mathrm{t}}\|\left\|\mathbf{w} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_J(\mathbf{v})}\mathbf{w}\right\| \\
&\le C_\delta \sum_{j=0}^{J}\|(\mathbf{T}_{\mathrm{t},J-j} - \mathbf{T}_{\mathrm{t}})\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}\|\left\|\mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_j(\mathbf{v})}\mathbf{w} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_{j-1}(\mathbf{v})}\mathbf{w}\right\| + C_\delta\left\|\mathbf{w} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_J(\mathbf{v})}\mathbf{w}\right\|,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式用到了引理 5.4中的（5.13）。结合超压缩性和（5.21），即可得到（5.22）。先验误差界（5.23）的推导与空间算子的情形完全相同。

如上所述，（$\mathbf{T}_{\mathrm{t},\ j+1} - \mathbf{T}_{\mathrm{t},\ j}$）的每一列只有 c 个非零元素。由（5.20）可知，我们有

$$\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v}_j)) \le 2^j$$

对每个 $j = 0$，……， J。由于对角缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$保持支撑集不变，因此结论（5.24）成立。□

5.3. **算子的组合。** 本节给出关于给定误差容限和秩截断缩放算子的情况下，空间算子 $\mathbf{B}_{\mathrm{x}}$ 与时间算子$\mathbf{B}_{\mathrm{t}}$ 组合的主要结果。下面的结论直接由引理5.5和引理5.10得出。

推论 5.11. 在引理*5.5* 和引理 *5.10* 关于 $\mathbf{T}_{\mathrm{t}}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathrm{x}}$的假设下，设 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 具有有限支撑，并设

$$\tilde{\mathbf{B}}_{1,J}(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{t},J}(\mathbf{v}) + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{x},J}(\mathbf{v}) \tag{5.25}$$

and

$$\tilde{\mathbf{T}}_J[\mathbf{v}] = \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}] + \tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}].$$

那么对于 $\mathbf{w} \in \ell_2(\vee)$ 和 $e_J[\mathbf{v}](\mathbf{w}) = e_{\mathrm{t},J}[\mathbf{v}](\mathbf{w}) + e_{\mathrm{x},J}[\mathbf{v}](\mathbf{w})$，有如下后验界

$$\|\mathbf{B}_1\mathbf{w} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_J[\mathbf{v}]\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{w}\| \le e_J[\mathbf{v}](\mathbf{w}),$$

以及先验误差界

$$\|\mathbf{B}_1\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{B}}_{1,J}(\mathbf{v})\| \le 2^s C_\delta \tilde{C} 2^{-sJ} \sum_{i=1}^{d} \big\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\big\|_{\mathcal{A}^s}$$

其中 $\tilde{C} = \|\beta^{(\mathrm{t})}\|_{\ell_1} + \|\mathbf{C}_\mathrm{t}\| + \|\mathbf{C}_2\| + \|\beta(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1}$。此外

$$\#\operatorname{supp}\Big(\pi^{(\mathrm{t},i)}\big(\tilde{\mathbf{B}}_{1,J}(\mathbf{v})\big)\Big) \le 2(c + \|\alpha(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1})2^J. \tag{5.26}$$

为简化记号，我们记 $e_J(\mathbf{v}) = e_J[\mathbf{v}](\mathbf{v})$。

注 5.12. 每当 $\mathbf{v}$ 具有有限支撑时，就存在一个 $p(\mathbf{v}) \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\Lambda_{[p]}^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v}) = \emptyset$ 对于 $i = 1, \ldots, d$ 对所有 $p > p(\mathbf{v})$ 均成立。对于每个 $J \in \mathbb{N}_0$，都可以计算量 $e_J(\mathbf{v})$，因为对 p 求和时，其中所有矩阵元素在 $J \ge p(\mathbf{v})$ 处均为零。进一步增大 $J \ge p(\mathbf{v})$，将使右端的所有加项减小。因此，对于固定的 $s < s^*$，每个 $\eta > 0$ 都存在一个最小的 $J \in \mathbb{N}_0$，使得 $e_J(\mathbf{v}) \le \eta$。

缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}$ 的秩仍然无界。因此，需要进一步用 $\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}$ 和 $\mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}_2}$ 近似缩放矩阵，使其对每个时间基指标都具有有界秩。

引理 5.13。 设 $\mathbf{T}$ 如 (5.1) 中所定义，设 $\tilde{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^{\vee\times\vee}$, $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 和 $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2 \in \mathbb{N}_0^{\vee_\mathrm{t}}$ 满足

$$\operatorname{supp}(\mathbf{v}) \in \Lambda_{\mathsf{K}_1}, \quad \operatorname{supp}(\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{v}) \in \Lambda_{\mathsf{K}_2},$$

并设 $\mathbf{G} = \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{T}})\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$。那么，只要 $\mathsf{n}_1 \ge \mathsf{M}_{\mathcal{X}}(\eta, \mathsf{K}_1)$、$\mathsf{n}_2 \ge \mathsf{M}_{\mathcal{Y}}(\eta, \mathsf{K}_2)$，就有

$$\begin{aligned}\Big\|(\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\mathbf{T}\mathbf{D}_{\mathcal{X}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}_2}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1})\mathbf{v}\Big\| &\le \|\mathbf{G}\mathbf{v}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1})\mathbf{v}\| \\ &\quad + \tfrac{\eta}{1-\delta}\|\mathbf{G}(\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1})\mathbf{v}\| + \tfrac{2\eta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\|.\end{aligned} \tag{5.27}$$

证明可仿照 [8, 引理 32]，利用第 4 节中建立的缩放矩阵性质完成。这里需要指出的一个重要问题是，$\mathbf{n}_1$ 的选取应使 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}$ 的每个对角元素都不超过 1。

现在我们证明秩截断缩放矩阵的误差界。对于给定的 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 和容差 $\eta > 0$，我们选择参数

$$J(\eta;\mathbf{v}) = \min\big\{J \in \mathbb{N}_0 : e_J(\mathbf{v}) \le \eta/4\big\}, \quad c(\mathbf{v})\eta = \tfrac{\eta(1-\delta)}{4\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\|}$$

and

$$\mathsf{m}_{\mathcal{X}}(\eta;\mathbf{v}) = \mathsf{M}_{\mathcal{X}}\big(c(\mathbf{v})\eta; \mathsf{K}(J(\eta;\mathbf{v});\mathbf{v})\big), \quad \mathsf{m}_{\mathcal{Y}}(\eta;\mathbf{v}) = \mathsf{M}_{\mathcal{Y}}\big(c(\mathbf{v})\eta; \mathsf{K}(J(\eta;\mathbf{v});\mathbf{v})\big)$$

with

$$\mathsf{K}(J;\mathbf{v}) = \min\{\mathsf{K} > 0 : \operatorname{supp}(\mathbf{v}) \cup \operatorname{supp}(\tilde{\mathbf{T}}_J[\mathbf{v}]\mathbf{v}) \subseteq \Lambda_{\mathsf{K}}\}. \tag{5.28}$$

这里的最小值是指逐元素的最小值。

定理 5.14. 设 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 且 $0 < \eta < 2\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\|$。我们固定

$$J = J(\eta;\mathbf{v}), \ \mathsf{K} = \mathsf{K}(J(\eta;\mathbf{v}),\mathbf{v}), \ \mathsf{n}_1 = \mathsf{m}_{\mathcal{X}}(\eta;\mathbf{v}), \ \mathsf{n}_2 = \mathsf{m}_{\mathcal{Y}}(\eta;\mathbf{v}), \ \zeta = c(\mathbf{v})\eta.$$

于是，对于 $\mathbf{w}_\eta = \mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}_2}\mathbf{T}_J[\mathbf{v}]\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}\mathbf{v}$，我们有

$$\|\mathbf{B}_1\mathbf{v} - \mathbf{w}_\eta\| \le \eta\,. \tag{5.29}$$

~ ~ ~证明。 为简化记号，我们记 $\mathbf{T}_J = \mathbf{T}_J[\mathbf{v}]$。引理 5.13 给出，对于$\mathbf{d} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1})\mathbf{v}$， ~$\mathbf{v} = (\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1})\mathbf{v}$，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{B}_1\mathbf{v} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}_2}\tilde{\mathbf{T}}_J\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}\mathbf{v}\| &\le \|\mathbf{B}_1\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{B}}_{1,J}(\mathbf{v})\| + \|\mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_J\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{d}}\| \\ &\quad + \frac{\zeta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_J\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{v}}\| + \frac{2\zeta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\| \\ &\le e_J(\mathbf{v}) + e_J[\mathbf{v}](\tilde{\mathbf{d}}) + \frac{\zeta}{1-\delta}e_J[\mathbf{v}](\tilde{\mathbf{v}}) + \frac{2\zeta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\|.\end{aligned}$$

通过选择 K 和 n_1, ，我们得到 $(\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\,\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1})_\nu \le 1$ 对于 $\nu \in \Lambda_{\mathsf{K}}$。此外，由 (4.15) 和 (4.13) 可得估计

$$\left|(\mathbf{I} - (\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1})_\nu\right| \le (1-\delta)^{-1}\zeta.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{B}_1\mathbf{v} - \mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}_2}\tilde{\mathbf{T}}_J\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}\mathbf{v}\| &\le e_J(\mathbf{v})\left(1 + \frac{2\zeta}{1-\delta}\right) + \frac{2\zeta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\| \\ &\le 2e_J(\mathbf{v}) + \frac{2\zeta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\|.\end{aligned}$$

根据 J 和 ζ 的定义，以及 $\eta \le 2\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\|$，我们得到 (5.29)。 □

注意，条件 $\eta < 2\|\mathbf{B}_1\|\|\mathbf{v}\|$ 并非限制，因为否则解可以用零近似。基于上述误差界，下一步我们将给出近似的支撑集大小、秩和 $\mathcal{A}^s$-范数的估计。引理 5.5 和引理 5.10给出了关于近似参数J的支撑集大小估计。现在我们将针对给定容差 η重新表述这些估计。

引理 5.15. 在定理 *5.14*的假设下，我们有

$$\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)) \le \hat{\alpha}(\mathbf{B}_1)4^{1+\frac{1}{s}}C_\delta^{\frac{1}{s}}\eta^{-\frac{1}{s}}\tilde{C}^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}\Big)^{\frac{1}{s}} \tag{5.30}$$

其中 $\hat{}\alpha(\mathbf{B}_1) = 2(c + \|\alpha(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1})$，并且

$$\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s} \le 4^sC_\delta(\hat{C}_1 + \check{C}_{\mathrm{x}})\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s} + 2^s\sqrt{C_\delta}\hat{C}_2\sum_{j=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},j)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}, \tag{5.31}$$

其中 $\check{}\,C_{\mathrm{x}} = 2(d-1)\|\mathbf{C}_2\|$， $\hat{}C_1 = \frac{2^{3s+2}}{2^s-1}\|\alpha(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1}^s(2\|\mathbf{C}_2\|)$ 以及 $\hat{}C_2 = 2c^s2^{4s}(\|\beta^{(\mathrm{t})}\|_{\ell_1} + \|\mathbf{C}_{\mathrm{t}}\|)$。此外，我们有如下秩估计

$$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_\eta) \le \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty}\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty}(cJ(\eta;\mathbf{v}) + 2)\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{v}), \tag{5.32}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}) &= 1 + n^+_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}(\delta) + \mathsf{m}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}), \quad \nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}, \\ \hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y},\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}) &= 1 + n^+(\delta) + \mathsf{m}_{\mathcal{Y},\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}), \quad \nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}.\end{aligned}$$

证明。 由于缩放矩阵具有对角结构，因此支撑集不受其影响。 ~根据推论 5.11 可得 $J(\eta;\mathbf{v}) \le J(\eta;\mathbf{v})$ 满足

$$\bar{J}(\eta;\mathbf{v}) = \arg\min\Big\{J \in \mathbb{N}_0 : 2^sC_\delta\tilde{C}2^{-sJ}\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s} \le \frac{\eta}{4}\Big\},$$

由此得到

$$2^{\bar{J}(\eta;\mathbf{v})} \le 4^{1+\frac{1}{s}}C_\delta^{\frac{1}{s}}\eta^{-\frac{1}{s}}\tilde{C}^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{5.33}$$

将其代入（5.26）得到（5.30）。

秩估计 (5.32) 是通过将各因子 $\mathrm{D}\mathcal{Y},\mathsf{n}_2$, $\mathrm{T}_J[\mathbf{v}]$ 和 $\mathrm{D}\mathcal{X},\mathbf{n}_1$ 的层次˜秩上界相乘得到的。因子 $cJ(\eta;\mathbf{v})+2$ 来自将算子表示为 $\mathrm{T} = \mathrm{T}_\mathrm{t}\otimes\mathrm{I}_\mathrm{x} + \mathrm{I}_\mathrm{t}\otimes\mathrm{T}_\mathrm{x}$。加项 2 基于空间算子的秩，这里空间算子是拉普拉斯算子的表示；而加项 $cJ(\eta;\mathbf{v})$ 则基于备注 5.7，这是由时间导数表示的超压缩性得出的。我们得到因子 $cJ(\eta;\mathbf{v})$，因为对于每个 $j\in\mathbb{N}_0$，$(\mathrm{T}_{\mathrm{t},j+1}-\mathrm{T}_{\mathrm{t},j})$ 的每一行中至多有c 个非零矩阵元素，并且共有 $J(\eta;\mathbf{v})$ 个加项。

在证明（5.31）时，我们再次省略指标集和算子˜ ˜近似对 $\mathbf{T}_J = \mathbf{T}_J[\mathbf{v}]$的依赖关系。我们从以下观察开始

$$\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_i}(\mathbf{w}_\eta) = \pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_i}(\mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathsf{n}_2}\tilde{\mathbf{T}}_J\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}\mathbf{v}) \le \pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_i}(\mathbf{D}_\mathcal{Y}\tilde{\mathbf{T}}_J\mathbf{D}_\mathcal{X}\tilde{\mathbf{v}})$$

对于 $(\nu_\mathrm{t},\nu_i)\in\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta))$，其中 ˜$\mathbf{v} = \mathbf{D}_\mathcal{X}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}\mathbf{v}$。

我们将分别考察算子 $\mathbf{T}_\mathrm{t}\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x}$和 $\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\mathbf{T}_\mathrm{x}$，并利用命题3.8(i)。我们给出 $i=1$ 的证明； i 的其余取值可用完全˜类似的方式处理。我们首先考虑 $\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\mathbf{T}_\mathrm{x}$。由于$\mathbf{T}_{\mathrm{x},J}$的结构，我们有

$$\begin{aligned}
\pi^{(\mathrm{t},1)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_1}(\mathbf{D}_\mathcal{Y}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}\mathbf{D}_\mathcal{X}\tilde{\mathbf{v}}) &= \pi^{(1)}_{\nu_1}(\mathbf{D}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},\nu_\mathrm{t},J}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_\mathrm{t}}) \\
&\le \pi^{(1)}_{\nu_1}\Big(\mathbf{D}\Big(\mathbf{I}_1\otimes\sum_{\mathsf{n}\in\mathrm{K}_d(1,2,\dots,2)} c_\mathsf{n}\bigotimes_{i=2}^{d}\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},n_i}\Big)\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_\mathrm{t}}\Big) \\
&\quad + \pi^{(1)}_{\nu_1}\Big(\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{\nu_\mathrm{t},2}\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_\mathrm{t}}\Big) \\
&=: D_{1,\nu_\mathrm{t},\nu_1} + D_{2,\nu_\mathrm{t},\nu_1},
\end{aligned} \tag{5.34}$$

这里也用到了关于$\mathbf{T}_\mathrm{x}$的简化假设。为估计第一个表达式，对于 $i=1,\dots,d$，我们引入如下记号

$$\check{\mathbf{D}}_i = \Big(\Big(\sum_{j\neq i}\|\psi_{\nu_i}\|^2_{H^1_0(0,1)}\Big)^{-1/2}\delta_{\nu,\nu'}\Big)_{\nu,\nu'\in\vee_\mathrm{x}}.$$

由于我们考虑的是拉普拉斯算子，因此知道 $c_\mathsf{n}=1$ 当 n 是 $(2,1,\dots,1)$ 的一个排列时取该值，其他情况下为零。利用引理 5.4 的一个略作修改的版本以及 [8,引理 35], ，我们得到

$$\begin{aligned}
D_{1,\nu_\mathrm{t},\nu_1} &\le (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}\Big(\Big(\mathbf{I}_1\otimes\check{\mathbf{D}}_1\Big(\sum_{\mathsf{n}\in\mathrm{K}_d(1,2,\dots,2)} c_\mathsf{n}\bigotimes_{i=2}^{d}\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},n_i}\Big)\check{\mathbf{D}}_1\Big)(\mathbf{I}_1\otimes\check{\mathbf{D}}_1^{-1})\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_\mathrm{t}}\Big) \\
&\le (1+\delta)\sum_{\mathsf{n}\in\mathrm{K}_d(1,2,\dots,2)}|c_\mathsf{n}|\Big\|\check{\mathbf{D}}_1\bigotimes_{i=2}^{d}\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},n_i}\check{\mathbf{D}}_1\Big\|\pi^{(1)}_{\nu_1}((\mathbf{I}_1\otimes\check{\mathbf{D}}_1^{-1})\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_\mathrm{t}}) \\
&\le (1+\delta)\sum_{i=2}^{d}\|\hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{\nu_\mathrm{t},2}\hat{\mathbf{D}}\|\pi^{(1)}_{\nu_1}((\mathbf{I}_1\otimes\check{\mathbf{D}}_1^{-1})\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_\mathrm{t}}) \\
&\le \check{C}_\mathrm{x}(1+\delta)^2\pi^{(\mathrm{t},1)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_1}(\tilde{\mathbf{v}}) \le \check{C}_\mathrm{x}(1+\delta)^2\pi^{(\mathrm{t},1)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_1}(\mathbf{v}),
\end{aligned}$$

其中我们利用了对角算子 ˇ$\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{D}$ 和 $(\mathbf{I}_1\otimes$ ˇ$\mathbf{D}_1^{-1})\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}$的所有矩阵元素均由 $(1+\delta)$ 上界所界定。

现在考察式（5.34）右端项中的第二个加项。我们得到

$$D_{2,\nu_\mathrm{t},\nu_1} \le (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\Big((\hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_2\hat{\mathbf{D}})\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d\Big)\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_\mathrm{t}}\right),$$

其中 $\bar{\mathbf{D}}_1 = \hat{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d$。我们令 $\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_1^{-1})\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{v}}$，$\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}}}$，$_2 = \hat{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}}}$，$2\hat{\mathbf{D}}$，并且对每个 $j \in \mathbb{N}_0$ 和每个 $\lambda_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}$ 定义 $\hat{}\hat{\mathbf{C}}2,_j = \mathbf{DT}2,_j\mathbf{D}$

$$\hat{\Lambda}_{\lambda_{\mathrm{t}},[0]} = \operatorname{supp}\operatorname{range}\mathbf{C}_{2,0}\mathrm{R}_{\Lambda^{(1)}_{\lambda_{\mathrm{t}},[0]}},$$
$$\hat{\Lambda}_{\lambda_{\mathrm{t}},[q]} = \Big(\bigcup_{j+l=q}\operatorname{supp}\operatorname{range}\mathbf{C}_{2,j}\mathrm{R}_{\Lambda^{(1)}_{\lambda_{\mathrm{t}},[l]}}\Big)\setminus\Big(\bigcup_{i<q}\hat{\Lambda}_{\lambda_{\mathrm{t}},[i]}\Big),\ q>0,$$

其中 $\Lambda^{(1)}_{\lambda_{\mathrm{t}}}$，$_{[j]} = \Lambda^{(1)}_{\lambda_{\mathrm{t}}}$，$_{[j]}(\mathbf{v})$ 和 $\Lambda^{(\mathrm{t},1)}_{[j]} = \Lambda^{(\mathrm{t},1)}_{[j]}(\mathbf{v})$ 分别按式（5.8）和式（5.9）定义。此外，我们定义对所有时间基索引的并集

$$\hat{\Lambda}_{[k]} = \bigcup_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\{\nu_{\mathrm{t}}\}\times\hat{\Lambda}_{\nu_{\mathrm{t}},[k]}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}_0$。因此，对于

$$\hat{\mathbf{w}} = \sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}}\otimes\Big(\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},2}\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d\Big)\mathbf{v}_{\nu_{\mathrm{t}}}$$

我们得到

$$\|\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{[q]}}\pi^{(\mathrm{t},1)}(\hat{\mathbf{w}})\|^2 = \sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\|\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{\nu_{\mathrm{t}},[q]}}\pi^{(1)}((\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}_{2,\nu_{\mathrm{t}}}\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d)\hat{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}})\|^2.$$

右端项中的每一项都可以按定理 [6, 的8]证明中的方法处理，从而得到

$$\|\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{\nu_{\mathrm{t}},[q]}}\pi^{(1)}((\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}_{2,\nu_{\mathrm{t}}}\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d)\hat{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}})\|^2 \le 3\tilde{C}\left(\sum_{l=0}^{q-1}\gamma_{q,l}2^{-2s(q-l-1)}\|\mathrm{R}_{\Lambda_{\nu_{\mathrm{t}},[q]}}\pi^{(1)}(\hat{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}})\|^2\right.$$
$$\left.+\sum_{l=q}^{J}\beta^{(\mathrm{x})}_{J-l}2^{-2s(j-l)}\|\mathrm{R}_{\Lambda_{\nu_{\mathrm{t}},[q]}}\pi^{(1)}(\hat{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}})\|^2+\|\mathbf{C}_2\|\|\mathrm{R}_{\bigcup_{j\ge q}\Lambda_{\nu_{\mathrm{t}},[j]}}\pi^{(1)}(\hat{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}})\|^2\right),$$

其中 $\beta^{(\mathrm{x})} = \beta(\mathbf{C}_2)$ 和 $\gamma_{q,\ l} = \beta^{(\mathrm{x})}_{J-l}+\beta^{(\mathrm{x})}_{q-l-1}$。对每个时间索引求和并利用

$$\sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\|\mathrm{R}_{\Lambda_{\nu_{\mathrm{t}},[q]}}\pi^{(1)}(\hat{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}})\|^2 = \|\mathrm{R}_{\Lambda_{[q]}}\pi^{(\mathrm{t},1)}(\hat{\mathbf{v}})\|^2,$$

我们得到

$$\|\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{[q]}}\pi^{(\mathrm{t},1)}(\hat{\mathbf{w}})\|^2 \le 3\tilde{C}\left(\sum_{l=0}^{q-1}\gamma_{q,l}2^{-2s(q-l-1)}\|\mathrm{R}_{\Lambda_{[q]}}\pi^{(\mathrm{t},1)}(\hat{\mathbf{v}})\|^2\right.$$
$$\left.+\sum_{l=q}^{J}\beta^{(x)}_{J-l}2^{-2s(j-l)}\|\mathrm{R}_{\Lambda_{[q]}}\pi^{(\mathrm{t},1)}(\hat{\mathbf{v}})\|^2+\|\mathbf{C}_2\|\|\mathrm{R}_{\bigcup_{j\ge q}\Lambda_{[j]}}\pi^{(\mathrm{t},1)}(\hat{\mathbf{v}})\|^2\right).$$

随后，我们完全按照 [6, 定理 8]的证明进行推导。最后，我们利用对角算子 $\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}$ 的矩阵元素有界于 $1+\delta$ 这一事实，因此 $\pi^{(1)}_{\nu_1}(\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}}) \le (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}(\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}})$。特别地，对于

$$\tilde{\mathbf{w}} = \sum_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}}}\left(\mathbf{e}_{\nu_{\mathrm{t}}}\otimes\Big(\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},2}\otimes\mathbf{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{I}_d\Big)\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}\tilde{\mathbf{v}}_{\nu_{\mathrm{t}}}\right)$$

我们有

$$\|\pi^{(\mathrm{t},1)}(\tilde{\mathbf{w}})\|_{\mathcal{A}^s} \le \frac{2^{3s+2}}{2^s-1}(1+\delta)^2\|\alpha(\mathbf{C}_2)\|^s_{\ell_1}(2\|\mathbf{C}_2\|)\|\pi^{(\mathrm{t},1)}(\tilde{\mathbf{v}})\|_{\mathcal{A}^s}.$$

结合这两个估计与命题3.8 可得

$$\|\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{x},J}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{A}^s} \le 2^s C_\delta(C+\check{C}_{\mathrm{x}})\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{v}})\|_{\mathcal{A}^s} \le 2^s C_\delta(C+\check{C}_{\mathrm{x}})\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s},$$

这里我们利用了对角矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\,\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}_1}$ 的每个元素都不超过 1。

现在讨论时间算子 $\mathrm{B}_{\mathrm{t},J}$ with $J = J(\eta;\mathrm{v})$。这里我们需要同时对所有变量中的指标子集施加限制，因此需要采用不同的方法。基本思路是用 v 各维收缩的 $\mathcal{A}^s$-范数之和来估计 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathrm{T}}_{\mathrm{t},J}[\mathrm{v}]\mathrm{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathrm{v}})$ 的 $\mathcal{A}^s$-范数。令 $\tilde{\mathrm{w}}_q = \mathrm{D}_{\mathcal{Y}}\mathrm{T}_{\mathrm{t},q}[\mathrm{v}]\mathrm{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathrm{v}}$。对于每个 $q = 0,\ldots,J$，我们定义

$$\hat{\Lambda}_q^{(i)} = \operatorname{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_q)\right), \quad q = 0,\ldots,J = J(\eta;\mathbf{v}).$$

根据（5.24），由引理5.10 可得

$$\#\hat{\Lambda}_q^{(i)} \le 2c2^q$$

对于每个 q。任取满足 $N \le \#\hat{\Lambda}_J^{(i)}$ 的 $N \in \mathbb{N}$。那么存在一个满足 $\#\hat{\Lambda}_q^{(i)} < N \le \#\hat{\Lambda}_{q+1}^{(i)}$ 的 $q < N$。我们注意到

$$\begin{aligned}
\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J) - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_q^{(i)}}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J)\right\|^2 &= \sum_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_i)\notin\hat{\Lambda}_q^{(i)}} \left(\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_i}(\tilde{\mathbf{w}}_J)\right)^2 \\
&= \sum_{(\nu_{\mathrm{t}},\nu_i)\notin\hat{\Lambda}_q^{(i)}} \left(\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_i}(\tilde{\mathbf{w}}_J - \tilde{\mathbf{w}}_q)\right)^2 \\
&\le \left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J - \tilde{\mathbf{w}}_q)\right\|^2 \\
&= \|\tilde{\mathbf{w}}_J - \tilde{\mathbf{w}}_q\|^2 .
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
(N+1)^s \inf_{\#\Lambda=N}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J) - \mathrm{R}_\Lambda\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J)\| &\le (2c2^{q+1}+1)^s\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J) - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_q^{(i)}}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J)\| \\
&\le (2c2^{q+1}+1)^s\|\tilde{\mathbf{w}}_J - \tilde{\mathbf{w}}_q\| \\
&\le 2^{3s}c^s2^{sq}\left(\|\tilde{\mathbf{w}}_J - \mathbf{B}_{\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}\| + \|\tilde{\mathbf{w}}_q - \mathbf{B}_{\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}\|\right)
\end{aligned}$$

仿照引理5.10 的论证并利用

$$\left\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[p]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{v}})\right\| \le (1+\delta)2^{-s(p-1)}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{v}})\|_{\mathcal{A}^s},$$

其中 $\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[p]}(\mathbf{v})$ 在 (5.9) 中定义，由此可得

$$\|\tilde{\mathbf{w}}_q - \mathbf{B}_{\mathrm{t}}\tilde{\mathbf{v}}\| \le (1+\delta)2^{-s(q-1)}(\|\beta^{(\mathrm{t})}\|_{\ell_1} + \|\mathbf{C}_{\mathrm{t}}\|)\sum_{i=1}^d\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{v}})\|_{\mathcal{A}^s}, \quad q = 0,\ldots,J.$$

由于 N 是任意选取的，并再次利用对角矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\,\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 的矩阵元素 n_1 均以一为上界，综上可得

$$\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_J)\|_{\mathcal{A}^s} \le 2\sqrt{C_\delta}c^s2^{4s}(\|\beta^{(\mathrm{t})}\|_{\ell_1} + \|\mathbf{C}_{\mathrm{t}}\|)\sum_{i=1}^d\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}.$$

再次利用命题 3.8(i) 可得 (5.31)。 □

与 [8], 中针对椭圆问题得到的类似上界相比，秩估计 $J(\eta;\mathbf{v})$ 中多了一个因子（5.32）。如第6节所示，该因子不会影响此方法的渐近计算复杂度。

注5.16。我们对自适应求解器计算复杂度的分析，基于对空间维数上支撑集大小之和以及$\mathcal{A}^s$范数的估计。因此，我们相应地改写估计式（5.31），对 $i=1,\ldots\ldots,\ d$ 求和可得

$$\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s}\le C(\delta,s,\mathbf{B}_1)d\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}. \tag{5.35}$$

接下来，我们估算计算近似$\mathbf{w}_\eta$所需的运算次数。

引理 5.17. 在满足定理 *5.14*的假设时，计算 $\mathrm{flops}(\mathbf{w}_\eta)$ 所需的浮点运算次数$\mathbf{w}_\eta$ 有如下上界：

$$\begin{aligned}\mathrm{flops}(\mathbf{w}_\eta)\lesssim\ &(8+c^4(J(\eta;\mathbf{v}))^4)\hat{M}^3(\mathbf{v},\eta)\,\mathrm{rank}_\infty^3(\mathbf{v})\sum_{i=1}^{d}\#\,\mathrm{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right)\\ &+d\eta^{-\frac{1}{s}}c^2\hat{\alpha}(\mathbf{B}_1)\,\mathrm{rank}_\infty(\mathbf{v})J(\eta;\mathbf{v})\hat{M}(\mathbf{v},\eta)\tilde{C}^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}},\end{aligned} \tag{5.36}$$

其中 $M(\mathbf{v},\eta)=\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\mathbf{v};\eta)\|_{\ell_\infty}\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{v};\eta)\|_{\ell_\infty}$，且隐藏常数与 η、$\mathbf{B}_1,\mathbf{v}$ 和 d 无关。

证明。下面分别分析空间算子和时间算子的复杂度。对于空间算子 $\mathbf{B}_\mathrm{x}$，我们可以仿照椭圆情形 [6, 8] 进行处理，并利用由构造可知 $\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\Lambda_{\nu_\mathrm{t}}^{(i)},_{[p]}\le 2^p$ 对每个 $p\in\mathbb{N}_0$ 均成立这一事实。设$\mathbf{v}\in\ell_2(\vee)=\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\mathbf{e}_{\nu_\mathrm{t}}\otimes\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}}$，其秩为 $\mathrm{rank}_\alpha(\mathbf{v}_{\nu_\mathrm{t}})=r_{\nu_\mathrm{t},\alpha}$ 其中 $\alpha\in\mathbb{T}_d\setminus\alpha^*$。那么，计算空间算子作用结果所需的浮点运算次数有一个固定倍数的上界：

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{T}_d\\ \#\alpha>1}}8(\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\mathbf{v};\eta))_{\nu_\mathrm{t}}^3(\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{v};\eta))_{\nu_\mathrm{t}}^3 r_{\nu_\mathrm{t},\alpha}\prod_{q=1}^{2}r_{\nu_\mathrm{t},c_q(\alpha)}\\ &\qquad+d\eta^{-\frac{1}{s}}\hat{\alpha}(\mathbf{B}_1)\,\mathrm{rank}_\infty(\mathbf{v})\hat{M}(\mathbf{v},\eta)\tilde{C}^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}},\end{aligned}$$

其中我们利用了拉普拉斯算子 $R=2$ 的秩。利用存在 $d-1$ 个传递张量这一事实，第一项还可以进一步估计为

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{T}_d\\ \#\alpha>1}}8(\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\mathbf{v};\eta))_{\nu_\mathrm{t}}^3(\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{v};\eta))_{\nu_\mathrm{t}}^3 r_{\nu_\mathrm{t},\alpha}\prod_{q=1}^{2}r_{\nu_\mathrm{t},c_q(\alpha)}\\ &\qquad\le 8\hat{M}^3(\mathbf{v},\eta)\,\mathrm{rank}_\infty^3(\mathbf{v})(d-1)\#\,\mathrm{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})\right)\\ &\qquad\le 8\hat{M}^3(\mathbf{v},\eta)\,\mathrm{rank}_\infty^3(\mathbf{v})\sum_{i=1}^{d}\#\,\mathrm{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right).\end{aligned}$$

接下来我们考察时间算子 $\mathbf{B}_\mathrm{t}$。首先计算 $\mathbf{v}_0,\ldots,\mathbf{v}_J$。根据 $\mathbf{v}_i$ 的定义，对于$\mathbf{v}_i$ 的模态框架，我们需要 $d2^i$ 秩$_\infty(\mathbf{v})$ 次运算；对于传递张量，最多需要 $\#\,\mathrm{supp}(\pi^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v}))d$秩$_\infty^3(\mathbf{v})$ 次运算。

我们将应用步骤的成本分析分为模态框架和传递张量两部分。由于$\mathbf{B}_\mathrm{t}$ 相对于空间变量是对角的，相应的低秩近似会被重新缩放，但除此之外保持不变。计算$\mathbf{w}_\eta$ 的模态框架所需的运算次数可由以下方式估计：

$\mathbf{w}_\eta$的模态框架中的矩阵元素数量，因为每个元素只需与缩放矩阵中相应的对角项相乘，其成本为常数。因此，模态框架所需的运算次数由一维支撑集大小之和乘以最大秩的某个固定倍数所上界，进而可进一步上界为

$$\begin{aligned}&2dc^2 2^{J(\eta;\mathbf{v})}\hat{M}(\mathbf{v},\eta)J(\eta;\mathbf{v})\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{v})\\&\qquad\lesssim d\eta^{-\frac{1}{s}}c^2\hat{\alpha}(\mathbf{B}_1)\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{v})J(\eta;\mathbf{v})\hat{M}(\mathbf{v},\eta)\tilde{C}^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

还需考虑传递张量的代价。由于时间算子的超压缩性，我们有 $\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t})}(\mathbf{w}_\eta)) \leq cJ(\eta;\mathbf{v})\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v}))$。算子的应用是将低秩表示乘以某个值，这同样通过应用缩放矩阵来完成。此外，由于其超压缩性，每一行至多有 $cJ(\eta;\mathbf{v})$ 个非零矩阵元素。因此，最大秩增长至多为因子 $cJ(\eta;\mathbf{v})\hat{M}(\mathbf{v},\eta)$ 的倍数。每个低秩近似包含 $d-1$ 个传递张量，因此运算次数可由某个固定倍数的

$$\begin{aligned}&cJ(\eta;\mathbf{v})\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v}))(d-1)c^3(J(\eta;\mathbf{v}))^3\hat{M}^3(\mathbf{v},\eta)\operatorname{rank}_\infty^3(\mathbf{v})\\&\qquad\leq c^4(J(\eta;\mathbf{v}))^4\hat{M}^3(\mathbf{v},\eta)\operatorname{rank}_\infty^3(\mathbf{v})\sum_{i=1}^{d}\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})).\end{aligned}$$

结合这些估计可得（5.36）。 □

接下来我们将更详细地考察近似秩的上界，尤其关注式（$\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\mathbf{v};\eta)\|_{\ell_\infty}$ 和 $\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\mathbf{v};\eta)\|_{\ell_\infty}$ 中的上界。5.32我们的基本思路是用容差 η 和最大一维层级来表示这些量。随后，在对正则性作出额外假设的条件下，我们将进一步估计后者。为了给出自适应算子应用结果的最大层级上界，我们将利用 层级衰减性质，该性质在 [8], 中引入，定义如下。

定义 5.18。 设 $\hat{\vee}$ 为一个可数集，且$\mathbf{M}\colon \ell_2(\hat{\vee}) \to \ell_2(\hat{\vee})$为 s^*-可压缩或超可压缩，其近似为 $\mathbf{M}_j$。若存在一个 $\gamma > 0$ 使得$\mathbf{M}_j$, $\nu_\mu = 0$ 对 $||\nu| - |\mu|| > \gamma j$成立，则称这些近似具有层级衰减 。

下文中，我们用 $L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})$表示$\mathbf{v}$的最大活跃一维空间小波层级，用 $L_{\mathrm{t}}(\mathbf{v})$表示最大活跃时间小波层级。根据(4.16)和(4.17)，我们需要求$\ln(\|\mathsf{K}\|_{\ell_\infty})$的一个上界，其中$\mathsf{K} = \mathsf{K}(J;\mathbf{v})$在(5.28)中定义。$\tilde{}$根据 [8, 第 6 节.2]， $\Lambda_{\hat{K}_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 如(4.11)中定义，若ν_{t} 满足条件，则包含$\operatorname{supp}(\mathsf{T}_{J(\eta;\mathbf{v})}[\mathbf{v}]\tilde{}\mathbf{v})$

$$L_{\mathrm{x}}\big((\tilde{\mathbf{T}}_{J(\eta;\mathbf{v})}[\mathbf{v}]\tilde{\mathbf{v}})_{\nu_{\mathrm{t}}}\big) \leq \tfrac{1}{2}\log_2(\hat{K}_{\nu_{\mathrm{t}}}) + \log_2(c^{-1}\hat{S}_{\min}^{-1})$$

其中 $\hat{}\ S_{\min} = \big(\min_{\nu\in\vee_1}\|\psi_\nu\|_{H_0^1(0,1)}\big)^{-1}$。由于 K 的最小性，可得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\log_2(\mathsf{K}_{\nu_{\mathrm{t}}}) &\leq L_{\mathrm{x}}((\tilde{\mathbf{T}}_{J(\eta;\mathbf{v})}[\mathbf{v}]\tilde{\mathbf{v}})_{\nu_{\mathrm{t}}}) + \log_2(c^{-1}\hat{S}_{\min}^{-1})\\&\leq L_{\mathrm{x}}(\tilde{\mathbf{T}}_{J(\eta;\mathbf{v})}[\mathbf{v}]\tilde{\mathbf{v}}) + \log_2(c^{-1}\hat{S}_{\min}^{-1})\\&\leq L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v}) + C_1(\mathbf{B}_1,s)J(\eta;\mathbf{v}) + \log_2(c^{-1}\hat{S}_{\min}^{-1}),\end{aligned}$$

其中最后一行使用了层级衰减性质。根据 [8, 第 6 节。2] 我们得到估计

$$|\ln(\min\{\delta/2, c(\mathbf{v})\eta\})| \leq C_2(\mathbf{B}_1,\delta) + |\ln\eta| + \max\{0,\ln\|\mathbf{v}\|\}.$$

将之前的所有估计与

$$J(\eta;\mathbf{v}) \le \frac{1}{s}\Big(|\ln\eta| + \ln\Big(C_3(\mathbf{B}_1,\delta)\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big) \tag{5.37}$$

由（5.33）可得

$$\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty} \le C_4(\delta,s,\mathbf{B}_1)\Big[1 + L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v}) + |\ln\eta| + \ln\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big]. \tag{5.38}$$

现在转向$\mathsf{m}_{\mathcal{X}}$，它不仅取决于$\mathbf{v}$ 在相应时间基指标处的空间支撑，还取决于每个时间基指标的范数。对于 $a_{\nu_{\mathrm{t}}}$ 定义于（4.10）中，我们有 $\ln(a_{\nu_{\mathrm{t}}}) \eqsim |\nu_{\mathrm{t}}|$。设 ν_{t} 为一个活跃时间指标。则

$$m_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}) \le C_5(\delta,s,\mathbf{B}_1)(1+|\nu_{\mathrm{t}}|)\Big[1 + L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v}) + |\ln\eta| + \ln\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big]$$

若 $K_{\nu_{\mathrm{t}}} > a_{\nu_{\mathrm{t}}}^2$，其中我们采用与 $\mathsf{m}_{\mathcal{Y}}$ 相同的估计，以及 $h_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}^{-1} \eqsim (1+|\nu_{\mathrm{t}}|)$。在 $K_{\nu_{\mathrm{t}}} \le a_{\nu_{\mathrm{t}}}^2$ 的情况下，我们有

$$m_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}) \le C_6(\delta,s,\mathbf{B}_1)(1+|\nu_{\mathrm{t}}|)\Big[1 + |\nu_{\mathrm{t}}| + |\ln\eta| + \ln\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big].$$

下一步，我们考虑最大时间层级 $L_{\mathrm{t}}(\mathbf{T}^{J(\eta;\mathbf{v})}\mathbf{v})$，因为$m_{\mathcal{X},\,\nu_{\mathrm{t}}}$ 可以在 $|\nu_{\mathrm{t}}| > L_{\mathrm{t}}(\mathbf{T}^{J(\eta;\mathbf{v})}\mathbf{v})$ 时取为零。与另一种情况一样，我们使用层级衰减性质，从而得到

$$\|\mathsf{m}_{\mathcal{X}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty} \le C_7(\delta,s,\mathbf{B}_1)\Big[1 + L(\mathbf{v}) + |\ln(\eta)| + \ln\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big]^2,$$

其中 $L(\mathbf{v}) = \max\{L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})\ L_{\mathrm{t}}(\mathbf{v})\}$ 是总体最大层级。与$\mathsf{m}_{\mathcal{Y}}$ 的情形相比，另一处不同是 $n^+_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ (δ也取决于时间小波。根据（ $n^+_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 式（4.6）中的$h_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 和（4.5）中的 $n^+_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 的定义可知，$n^+_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}$ 只与最大时间层级的平方成正比。因此，

$$\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty} \le C_8(\delta,s,\mathbf{B}_1)\Big[1 + L(\mathbf{v}) + |\ln(\eta)| + \ln\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big]^2. \tag{5.39}$$

注5.19。缩放矩阵$\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 的近似可直接应用于$\mathbf{v}$ 。因此，在此情形下，我们实际上不需要与最大时间层级$L_{\mathrm{t}}(\mathbf{T}_{J(\eta;\mathbf{v})}[\mathbf{v}]\mathbf{v})$ 的关系。不过，正如第6节将进一步详细讨论的，我们不仅应用算子$\mathbf{B}_1$, ，还应用其转置$\mathbf{B}_1^\intercal$ 。在这种情况下，缩放矩阵的阶顺序相反。因此，上述估计涵盖了由此产生的两种极端情形。

5.4. **初值算子**。本节考虑初值算子$\mathbf{B}_2 = \mathbf{T}_0\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 及其转置$\mathbf{B}_2^\intercal = \mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{T}_0^\intercal$ 。与第5.2节中的时间算子一样，算子$\mathbf{T}_0$ 的形式为

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_{0,\mathrm{t}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{x}},$$

其中，空间变量上的恒等算子为$\mathbf{T}_{0,\mathrm{t}}$: $\ell_2(\vee_{\mathrm{t}}) \to \mathbb{R}$ ，相应地$\mathbf{T}_0$: $\ell_2(\vee) \to \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$。

根据$\mathbf{T}_0$和 $\bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{X}}$的定义，以及$\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{H_0^1(\Omega)} \eqsim 2^{\max_i|\nu_{\mathrm{x},\,i}|}$对于 $\nu_{\mathrm{x}} \in \vee_{\mathrm{x}}$， $\bar{\mathbf{B}}_2$ 的元素满足

$$|(\bar{\mathbf{B}}_2)_{\nu_{\mathrm{x}},(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}})}| = \left|\frac{\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}(0)\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{H_0^1}}{\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{H_0^1}^2 + \|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|_{H^1}}\right| \eqsim \frac{\|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{H_0^1}}{\|\Psi_{\nu_{\mathrm{x}}}\|_{H_0^1}^2 + \|\theta_{\nu_{\mathrm{t}}}\|_{H^1}} \lesssim 2^{-\left|\frac{1}{2}|\nu_{\mathrm{t}}| - \max_i|\nu_{\mathrm{x},i}|\right|}.$$

与上文所考虑的算子不同，这些元素的衰减并不取决于单个维度，而是取决于所有维度。因此，这种情况在低秩可逼近性方面带来了一些额外困难。注意，初值算子$\mathbf{B}_2$ 和$\mathbf{B}_2$ 在每一列中仅有一个非零元素。

现在，我们定义一列关于$\mathbf{B}_2$的近似。与中的构造类似， [37], 我们定义 $\bar{\mathbf{T}}_{0,j}$ 如下：

$$(\bar{\mathbf{T}}_{0,j})_{\nu_{\mathrm{x}},(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}})} = \begin{cases} (\mathbf{T}_0)_{\nu_{\mathrm{x}},(\nu_{\mathrm{t}},\nu_{\mathrm{x}})}, & ||\nu_{\mathrm{t}}| - 2\max_i|\nu_{\mathrm{x},i}|| \le j, \\ 0, & ||\nu_{\mathrm{t}}| - 2\max_i|\nu_{\mathrm{x},i}|| > j, \end{cases}$$

也就是说，舍去所有满足 $||\nu_{\mathrm{t}}| - 2\max_i|\nu_{\mathrm{x},i}|| > j$ 的矩阵元素。对于每个层级，在时刻 $t = 0$ 只有常数个小波函数不为零。因此，根据定义，$\mathbf{T}_{0,j}$的每一行至多有 $2j\bar{c}$ 个非零元素。根据舒尔引理（例如参见 [16, (3.15)]），我们还得到 $\|(\mathbf{T}_0 - \bar{\mathbf{T}}_{0,j})\,\bar{\mathbf{D}}\,\mathcal{x}\| \lesssim 2^{-j/2}$。因此，算子$\mathbf{T}_0$ 是超可压缩的，其中可压缩性仍需结合缩放矩阵来理解。

接下来，我们定义初值算子作用的自适应近似。基于近似序列的定义（该定义使用最大层级），我们定义

$$\hat{\Lambda}_l^{(\mathrm{t})} = \vee_{\mathrm{t}} \times \bigtimes_{i=1}^{d} \hat{\Lambda}_l^{(1)} \quad \text{with} \quad \hat{\Lambda}_l^{(1)} = \{\nu \in \vee_1 : |\nu| \le l\}.$$

利用这个指标集，我们可以将给定的输入 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 划分为最大层级相同的若干部分

$$\mathbf{v} = \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_0^{(\mathrm{t})}}\mathbf{v} + \sum_{l=1}^{L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})} \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_l^{(\mathrm{t})}}\mathbf{v} - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{l-1}^{(\mathrm{t})}}\mathbf{v}.$$

给定 $s > 0$，设 $(\mathrm{T0},j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是超可压缩算子 T_0，的一个近似序列，这意味着 $\|(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T0},j)\mathrm{D}\mathcal{x}\| \le \beta_J^{(0)}2^{-sj}$，且算子 $\mathrm{T0},j+1 - \mathrm{T0},j$ 的每一行和每一列都只有 c 个非零元素。此外，我们假设 $\mathrm{T0},0 = 0$，因此 $\mathrm{T0},j$ 的每一行和每一列都只有 cj 个非零元素。鉴于注记 4.2，这类近似可以由 $(\mathrm{T0},j)$ 得到。

给定 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 和 $J \in \mathbb{N}_0$，我们定义近似

$$\tilde{\mathbf{B}}_{2,J}(\mathbf{v}) = \sum_{l=0}^{L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{T}_{0,J-j} - \mathbf{T}_{0,J-j-1})\mathbf{D}\mathcal{x}\left(\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_l^{(\mathrm{t})}}\mathbf{v}_j - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{l-1}^{(\mathrm{t})}}\mathbf{v}_j\right), \tag{5.40}$$

其中 $\mathbf{v}_j$ 由 (5.19) 定义。因此，我们将算子近似的差应用于具有固定最大空间层级的指标集上的限制。作为后续参考，我们还注意到

$$\tilde{\mathbf{B}}_{2,J}(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{T}}_{0,J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}\mathcal{x}\mathbf{v},$$

其中算子 $\mathbf{T}_{0,J}[\mathbf{v}]$ 由下式定义

$$\tilde{\mathbf{T}}_{0,J}[\mathbf{v}] = \sum_{l=0}^{L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})}\sum_{j=0}^{J-1}(\mathbf{T}_{0,J-j} - \mathbf{T}_{0,J-j-1})\mathbf{D}\mathcal{x}\left(\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_l^{(\mathrm{t})}} - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{l-1}^{(\mathrm{t})}}\right)\mathrm{R}_{\bar{\Lambda}_j^{(\mathrm{t})}(\mathbf{v})}.$$

引理 5.20. 设 B_2 由 *(4.3)* 定义，并假设 T_0 是超可压缩的。给定任意 $v, w \in \ell_2(\vee)$ 和 $J \in \mathbb{N}_0$，令 $B2,J(v)$ 由 *(5.40)* 定义。那么，只要$\pi^{(\mathrm{t},i)}(v) \in \mathcal{A}^s$ 对某些 $0 < s < s^*$ 和 $i = 1, \dots, d$成立，就有后验误差界

$$\|\mathbf{B}_2\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{T}}_{0,J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}\mathcal{x}\mathbf{w}\| \le e_{0,J}[\mathbf{v}](\mathbf{w}), \tag{5.41}$$

其中

$$e_{0,J}[\mathbf{v}](\mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{J} 2^{-s(J-j)}\beta^{(0)}_{J-j}\sum_{i=1}^{d}\left\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[j]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\right\| + \|\mathbf{B}_2\|\left\|\mathrm{R}_{\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[J+1]}(\mathbf{v})}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w})\right\|$$

其中 $\Lambda^{(\mathrm{t},i)}_{[j]}(\mathbf{v})$ 由(5.9)给出，以及先验误差界

$$\|\mathbf{B}_2\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{B}}_{2,J}(\mathbf{v})\| \le 2^s 2^{-sJ}(\|\beta^{(0)}\|_{\ell_1} + \|\mathbf{B}_2\|)\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}. \tag{5.42}$$

此外，还可得到如下支撑估计

$$\#\operatorname{supp}\left(\pi^{(i)}(\tilde{\mathbf{B}}_{2,J}(\mathbf{v}))\right) \le 2c2^J(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})+1), \quad i=1,\dots,d. \tag{5.43}$$

证明。对于误差界，可以按照引理 5.10 中类似的方法进行。再次令 $\Lambda^{(\mathrm{t})}_{-1}(\mathbf{v}) = \emptyset$。利用 $\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_l}\mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_j(\mathbf{v})}\mathbf{w} = 0$ 对于 $l > L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})$，可得

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{B}_2\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{T}}_{0,J}[\mathbf{v}]\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{w}\|\\ &\qquad\le \sum_{j=0}^{J}\|(\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_{0,J-j})\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\|\left\|\mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_j(\mathbf{v})}\mathbf{w} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_{j-1}(\mathbf{v})}\mathbf{w}\right\| + \|\mathbf{B}_2\|\left\|\mathbf{w} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}^{(\mathrm{t})}_J(\mathbf{v})}\mathbf{w}\right\|.\end{aligned}$$

利用$\mathbf{T}_0$ 的超压缩性以及（5.21），可得（5.41）。利用指标集的定义，可以像处理空间算子一样证明先验上界（5.42）。

如上所述，对于（5.40）中的每个加项，最大空间层级都是固定的；根据算子近似之差，我们只需考虑常数个时间基函数。然而，对于每个最大空间层级，根据近似 $\mathbf{T}_{0\text{的定义},j}$我们会得到不同的时间基函数集合。因此

$$\#\operatorname{supp}\left(\pi^{(i)}\left(\sum_{l=0}^{L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})}(\mathbf{T}_{0,J-j} - \mathbf{T}_{0,J-j-1})\mathbf{D}_{\mathcal{X}}(\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_l}\mathbf{v}_j - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{l-1}}\mathbf{v}_j)\right)\right) \le c2^j(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})+1),$$

从而得到（5.43）。 □

为简化记号，我们再次定义 $e_{0,J}(\mathbf{v}) = e_{0,J}[\mathbf{v}](\mathbf{v})$。请注意，与前述算子不同，支撑大小界还取决于最大活跃空间层级 $L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})$。这是由于空间基函数与时间基函数之间的耦合影响了$\mathbf{B}_2$矩阵元素的衰减。

备注 5.21。我们可以不基于收缩 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})$ 的最佳逼近来构造近似$\mathbf{v}_j$，而是构造与在 $t=0$ 处非零的时间基函数相关联的子集的最佳逼近。尽管这与上述估计和后续复杂度界无关，但在实际实现中可能会提高效率。

与第 5.3 节一样，我们还需要将缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 替换为低秩近似。我们得到引理 5.13 的以下简化变体。利用我们对缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$ 的了解，可以通过对 [8, 引理 32] 进行简化改写来完成证明。

引理 *5.22.* 令 T_0 如 *(2.11)* 中所定义，令 $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{\vee_{\mathrm{x}}\times\vee}$、$v \in \ell_2(\vee)$、$K \in \mathbb{N}_0^{\vee_{\mathrm{t}}}$满足$\tilde{supp}(v) \in \Lambda_K$，并令 $G = (T - T_0)D_{\mathcal{X}}$。那么，只要 $n \ge M_{\mathcal{X}}(\eta, K)$，就有

$$\left\|(\mathbf{T}_0\mathbf{D}_{\mathcal{X}} - \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}})\mathbf{v}\right\| \le \|\mathbf{G}\mathbf{v}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}})\mathbf{v}\| + \frac{\eta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_2\|\|\mathbf{v}\|.$$

对于给定的 $\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$ 和容差 $\eta > 0$，我们选择参数

$$J_0(\eta;\mathbf{v}) = \min\{J \in \mathbb{N}_0 : e_{0,J}(\mathbf{v}) \le \tfrac{\eta}{4}\}, \quad c_0(\mathbf{v})\eta = \tfrac{\eta(1-\delta)}{2\|\mathbf{B}_2\|\|\mathbf{v}\|}$$

and

$$\mathsf{m}_{\mathcal{X},0}(\eta;\mathbf{v}) = \mathsf{M}_{\mathcal{X}}(c_0(\mathbf{v})\eta; K_0(\mathbf{v})) \quad \text{with} \quad \mathsf{K}_0(\mathbf{v}) = \min\{\mathsf{K} : \operatorname{supp}(\mathbf{v}) \subseteq \Lambda_{\mathsf{K}}\}.$$

定理 *5.23.* 设 $v \in \ell_2(\vee)$ 且 $0 < \eta < 2\|B_2\|\|v\|$。令 $J = J_0(\eta;v)$ 和 $\tilde{n} = m_{\mathcal{X},0}(\eta; v)$。那么，对于 $w_\eta = T_{0,J}[v]D_{\mathcal{X},n}v$，有

$$\|\mathbf{B}_2\mathbf{v} - \mathbf{w}_\eta\| \le \eta.$$

该定理的证明与定理 5.14 类似，使用引理 5.22。基于此误差界，我们推导出近似的支撑集大小、层次秩以及 $\mathcal{A}^s$-范数的估计。

引理 5.24. 在定理 *5.23*的假设下，有

$$\#\operatorname{supp}(\pi^{(i)}(\mathbf{w}_\eta)) \le 2c4^{1+\frac{1}{s}}\tilde{C}_0^{\frac{1}{s}}(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})+1)\eta^{-\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{5.44}$$

其中 $\tilde{C}_0 = (\|\beta^{(0)}\|_{\ell_1} + \|\mathbf{B}_2\|)$，并且

$$\|\pi^{(i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s} \le 2c^s 2^{4s}\tilde{C}_0(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})+1)^s\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}.$$

此外，秩估计为

$$|\operatorname{rank}(\mathbf{w}_\eta)|_\infty \le \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty} cJ_0(\eta;\mathbf{v})(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})+1)\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{v}), \tag{5.45}$$

其中

$$\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0,\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}) = 1 + n^{+}_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}(\delta) + \mathsf{m}_{\mathcal{X},0,\nu_{\mathrm{t}}}(\eta;\mathbf{v}), \quad \nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}.$$

证明。我们首先证明秩估计。根据表示式（5.40），每个加项中的最大空间小波层级固定，因此只需考虑常数个相应的时间基函数，因为每个层级上，在时间 $t = 0$ 处非零的小波函数只有常数个。因此，加项至多有 $cJ_0(\eta;\mathbf{v})(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v}) + 1)$ 个。结合截断尺度矩阵即可得到（5.45）。

支撑大小估计（5.44）直接由 J_0 的定义以及引理5.43中的（5.20 ）得出，证明方法与定理5.14类似。

收缩的 $\mathcal{A}^s$-范数可以用与定理5.14中时间部分相同的方法估计。依赖于最大空间层级的额外因子 $(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v}) + 1)^s$ 基于支撑估计（5.44）。□

引理 5.25. 在定理 *5.23*的假设下，计算 $\operatorname{flops}(\mathbf{w}_\eta)$ 所需的浮点运算次数 $\mathbf{w}_\eta$ 有如下上界：

$$\begin{aligned}\operatorname{flops}(\mathbf{w}_\eta) \lesssim\ & dc^3(J_0(\eta;\mathbf{v}))^3(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})+1)^3\|\mathsf{m}_{\mathcal{X},0}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty}^3\operatorname{rank}_\infty^3(\mathbf{v})\\ &+ 8c4^{\frac{1}{s}}\tilde{C}_0^{\frac{1}{s}}d\eta^{-\frac{1}{s}}\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{v})J_0(\eta;\mathbf{v})\|\mathsf{m}_{\mathcal{X},0}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty}(L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})+1)^2\left(\sum_{i=1}^{d}\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}},\end{aligned}$$

其中，隐藏常数与 η、$\mathbf{v}$、$\mathbf{B}_2$ 和 d 无关。

上述引理可仿照时间算子的引理 5.17 来证明，因此省略证明。如上所述，我们还需要应用转置算子 $\mathbf{B}^\intercal$，因此还需要近似应用转置算子$\mathbf{B}_2^\intercal = \mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{T}_0^\intercal$。该过程与 $\mathbf{B}_2$ 的过程不同，因为我们从仅含空间变量的空间$\ell_2(\vee_{\mathrm{x}}$出发，并映射到 $\ell_2(\vee$。算子 $\mathbf{T}_0^\intercal$ 将输入复制为

不同的时间指标，其中输入会根据时间基函数在时刻 $t = 0$ 的取值进行缩放。尽管如此，我们仍可调整用于近似 $\mathbf{B}_2$ 的基本思路。

在定义近似之前，我们需要为不含时间变量的情形调整一些记号。我们令

$$\hat{\Lambda}_l = \bigtimes_{i=1}^{d} \hat{\Lambda}_l^{(1)} \quad \text{with} \quad \hat{\Lambda}_l^{(1)} = \{\nu \in \vee_1 : |\nu| \le l\}.$$

现在令 $\bar{\Lambda}_j^{(i)}(\mathbf{v})$ 为收缩 $\pi^{(i)}(\mathbf{v})$ 的最佳 2^j 项近似，并

$$\Lambda_{[p]}^{(i)}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \bar{\Lambda}_p^{(i)}(\mathbf{v}) \setminus \bar{\Lambda}_{p-1}^{(i)}(\mathbf{v}), & p = 0, \dots, J, \\ \vee_1 \setminus \bar{\Lambda}_J^{(i)}(\mathbf{v}), & p = J+1, \\ \emptyset, & p > J+1. \end{cases} \tag{5.46}$$

我们令

$$\bar{\Lambda}_j(\mathbf{v}) = \bar{\Lambda}_j^{(1)}(\mathbf{v}) \times \cdots \times \bar{\Lambda}_j^{(d)}(\mathbf{v}) \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_j = \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}_j(\mathbf{v})}\mathbf{v}. \tag{5.47}$$

类似于（5.21），我们有

$$\|\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j\| \le \sum_{i=1}^{d} \|\mathrm{R}_{\Lambda_{[j+1]}^{(i)}(\mathbf{v})}\pi^{(i)}(\mathbf{v})\|. \tag{5.48}$$

为定义近似，我们重用近似序列 $(\mathbf{T}_{0,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$。容易看出，$\mathbf{T}_0^\intercal$ 通过近似序列 $(\mathbf{T}_{0,j}^\intercal)_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是超可压缩的。我们令

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{0,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v}) &= \sum_{l=0}^{L_{\mathrm{x}}(\mathbf{v})} \sum_{j=0}^{J-1} (\mathbf{T}_{0,J-j}^\intercal - \mathbf{T}_{0,J-j-1}^\intercal)(\mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_l}\mathbf{v}_j - \mathrm{R}_{\hat{\Lambda}_{l-1}}\mathbf{v}_j), \\ \tilde{\mathbf{B}}_{2,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{T}}_{0,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{5.49}$$

这里我们再次将算子近似之差应用于具有固定最大层级的部分，因此每个求和项只会影响常数数量的时间基函数。

引理 *5.26.* 令 B_2 由 *(4.3)* 定义，并假设 B_2 是超可压缩的。给定任意 $v \in \ell_2(\vee_x)$ 和 $J \in \mathbb{N}_0$，令 $\tilde{B}_{2,J}^{\mathrm{ad}}(v)$ 由 *(5.49)* 定义。则当 $\pi^{(i)}(v) \in \mathcal{A}^s$ 对某个 $0 < s < s^*$ 和 $i = 1, \dots, d$ 成立时，有后验误差界

$$\|\mathbf{B}_2^\intercal\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{B}}_{2,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v})\| \le e_{0,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v}), \tag{5.50}$$

其中

$$e_{0,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v}) = \sum_{j=0}^{J} 2^{-s(J-j)}\beta_{J-j}^{(0)} \sum_{i=1}^{d} \left\|\mathrm{R}_{\Lambda_{[j]}^{(i)}}\pi^{(i)}(\mathbf{v})\right\| + \|\mathbf{B}_2\| \left\|\mathrm{R}_{\Lambda_{[J+1]}^{(i)}}\pi^{(i)}(\mathbf{v})\right\|$$

其中 $\Lambda_{[j]}^{(i)}$ 由 (5.46)给出，同时还有先验误差界

$$\|\mathbf{B}_2^\intercal\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{B}}_{2,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v})\| \le 2^s 2^{-sJ}\tilde{C}_0 \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}. \tag{5.51}$$

此外，还有支撑估计

$$\#\operatorname{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{B}}_{2,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v}))\right) \le 2c2^J(L(\mathbf{v}) + 1), \quad i = 1, \dots, d, \tag{5.52}$$

其中，$L(\mathbf{v})$ 是$\mathbf{v}$的最大一维空间层级。

证明与引理5.20的证明类似。我们再次需要将缩放矩阵$\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$替换为低秩近似。在本例中，缩放矩阵从左侧施加，这会导致修改后的误差估计；同样可以通过简化 [8,引理 32]的证明来证明这一点。

引理 *5.27*。设 T_0 如 *(2.11)* 中所定义，设 $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{\vee\times\vee_{\mathrm{x}}}$，$v \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$，$K \in \mathbb{N}_0^{\vee_{\mathrm{t}}}$满足 $\mathrm{supp}(D_{\mathcal{X}}\tilde{T}v) \in \Lambda_{\mathsf{K}}$，并令 $G = D_{\mathcal{X}}(\tilde{T} - T_0^{\intercal})$。那么，只要 $n \geq M_{\mathcal{X}}(\eta, K)$，就有

$$\left\|(\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\mathbf{T}_0^{\intercal} - \mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathsf{n}}\tilde{\mathbf{T}})\mathbf{v}\right\| \leq \left(1 + \frac{\eta}{1-\delta}\right)\|\mathbf{G}\mathbf{v}\| + \frac{\eta}{1-\delta}\|\mathbf{B}_2\|\|\mathbf{v}\|.$$

鉴于上述引理，我们选择近似参数

$$J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}) = \min\{J \in \mathbb{N}_0 : e_{0,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v}) \leq \tfrac{\eta}{4}\}, \quad c_0(\mathbf{v})\eta = \tfrac{\eta(1-\delta)}{2\|\mathbf{B}_2\|\|\mathbf{v}\|}$$

and

$$\mathsf{m}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}) = \mathsf{M}_{\mathcal{X}}(c_0(\mathbf{v})\eta; K_0^{\mathrm{ad}}(J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v});\mathbf{v})),$$

其中

$$\mathsf{K}_0^{\mathrm{ad}}(J;\mathbf{v}) = \min\{\mathsf{K} : \mathrm{supp}(\tilde{\mathbf{T}}_{0,J}^{\mathrm{ad}}(\mathbf{v})) \subseteq \Lambda_{\mathsf{K}}\}.$$

沿用定理 5.14 的推导思路，并利用引理 5.27，可得以下误差界。

定理 *5.28*。设 $v \in \ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$ 且 $0 < \eta < 2\|B_2\|\|v\|$。固定 $J = J_0^{\mathrm{ad}}(\eta; v)$，并令 $n = m_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta; v)$。那么，对于 $w_\eta = D_{\mathcal{X},\mathsf{n}}\tilde{T}_0^{\mathrm{ad},J}(v)$，有

$$\|\mathbf{B}_2^{\intercal}\mathbf{v} - \mathbf{w}_\eta\| \leq \eta.$$

引理 5.29。 在定理*5.28*的假设下，我们有

$$\#\,\mathrm{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)) \leq 2c4^{1+\frac{1}{s}}\tilde{C}_0^{\frac{1}{s}}(L(\mathbf{v})+1)\eta^{-\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{5.53}$$

以及

$$\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s} \leq 2c^s 2^{4s}\tilde{C}_0(L(\mathbf{v})+1)^s\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}. \tag{5.54}$$

此外，我们有如下秩估计

$$\mathrm{rank}_\infty(\mathbf{w}_\eta) \leq \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty} J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})(L(\mathbf{v})+1)\,\mathrm{rank}_\infty(\mathbf{v}), \tag{5.55}$$

其中

$$\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0,\nu_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}) = 1 + n_{a_{\nu_{\mathrm{t}}}}^{+}(\delta) + \mathsf{m}_{\mathcal{X},0,\nu_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}), \quad \nu_{\mathrm{t}} \in \vee_{\mathrm{t}}.$$

证明。(5.53) 和 (5.54) 中的估计可用与引理 5.24 类似的方法证明。根据近似的表示以及 $\mathbf{B}_2^{\intercal}$ 及其近似的结构，每个时间索引至多有 $\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty} J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})(L(\mathbf{v})+1)$ 个加项。每个加项的秩均以上界 $\mathrm{rank}_\infty(\mathbf{v})$ 为限，由此得到 (5.55)。□

注记 5.30. 由于算子$\mathbf{T}_0^{\intercal}$ 的结构，应用它不会增加最大秩，因为输入会被缩放并分配到不同的时间指标上。然而，在上界（5.55）中，近似应用 $\mathbf{B}_2^{\intercal}$ 可能会导致秩增加。虽然可以构造秩不会增加的近似，但这会导致难以控制支撑集大小和 $\mathcal{A}^s$-拟范数。

引理 5.31. 在定理 5.28的假设下，对于计算 flops($\mathbf{w}_\eta$) 所需的浮点运算次数$\mathbf{w}_\eta$，其上界为(5.56)flops(

$$\mathbf{w}_\eta) \lesssim$$
$$d(J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}))^3(L(\mathbf{v})+1)^3(C(s,\mathbf{B}_2)J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})+L(\mathbf{v}))\|\mathsf{m}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty}^3|\mathrm{rank}(\mathbf{v})|_\infty^3$$
$$+8c4^{\frac{1}{s}}\tilde{C}_0^{\frac{1}{s}}d\eta^{-\frac{1}{s}}|\mathrm{rank}(\mathbf{v})|_\infty J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})\|\mathsf{m}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty}(L(\mathbf{v})+1)^2\left(\sum_{i=1}^d\left\|\pi^{(i)}(\mathbf{v})\right\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}},$$

其中，隐藏常数与 η、$\mathbf{v}$ 和 d 无关。

证明。 该引理可用与时间算子引理 5.17 相同的方法证明。唯一的区别在于$\mathbf{w}_\eta$的时间支撑集大小。根据近似的构造，我们得到

$$L_{\mathrm{t}}(\mathbf{w}_\eta) \le C_1(s,\mathbf{B}_2)J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v})+L(\mathbf{v}).$$

此外，我们可以利用这样一个事实：每个层级上在时刻 $t=0$不为零的小波函数只有常数个。然后，按照引理5.17的思路，我们得到（5.56）。□

最后，我们通过估计 $\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty}$（其中 $\mathbf{v}\in\ell_2(\vee)$）以及 $\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}_{\mathrm{x}})\|_{\ell_\infty}$（其中 $\mathbf{v}_{\mathrm{x}}\in\ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$），结束本节。对于初值算子 $\mathbf{B}_2$，，缩放矩阵直接作用于输入。对于转置算子 $\mathbf{B}_2^\intercal$，给定 $\eta>0$ 和 $\mathbf{v}_{\mathrm{x}}\in\ell_2(\vee_{\mathrm{x}})$，令 $J=J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}_{\mathrm{x}})$。于是，根据空间变量中恒等算子对应的算子定义，我们有 $L_{\mathrm{x}}(\tilde{\mathbf{T}}_0^{\mathrm{ad}}$

$$,J\mathbf{v}_{\mathrm{x}}) \le L(\mathbf{v}_{\mathrm{x}}).$$

按照第5.3节中的相同步骤，我们得到

$$J_0(\eta;\mathbf{v}) \le \frac{1}{s}\left(|\ln\eta|+\ln\left(C_2(\mathbf{B}_2)\sum_{i=1}^d\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\right)\right), \tag{5.57}$$

$$J_0^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}_{\mathrm{x}}) \le \frac{1}{s}\left(|\ln\eta|+\ln\left(C_2(\mathbf{B}_2)\sum_{i=1}^d\|\pi^{(i)}(\mathbf{v}_{\mathrm{x}})\|_{\mathcal{A}^s}\right)\right), \tag{5.58}$$

and

$$\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}(\eta;\mathbf{v})\|_{\ell_\infty} \le C_3(s,\mathbf{B}_2)\left[1+L(\mathbf{v})+|\ln(\eta)|+\ln\left(\sum_{i=1}^d\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{A}^s}\right)\right]^2, \tag{5.59}$$

$$\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\eta;\mathbf{v}_{\mathrm{x}})\|_{\ell_\infty} \le C_4(s,\mathbf{B}_2)\left[1+L(\mathbf{v}_{\mathrm{x}})+|\ln(\eta)|+\ln\left(\sum_{i=1}^d\|\pi^{(i)}(\mathbf{v}_{\mathrm{x}})\|_{\mathcal{A}^s}\right)\right]^2. \tag{5.60}$$

6. Space-Time Adaptive Method for Parabolic Problems

6.1. **收敛求解器。** 在构造自适应低秩格式时，我们遵循 [6], 基于扰动 Richardson 迭代的策略。根据 [8,算法 1], 该迭代格式在算法 6.1中给出。本文与该算法模板先前实例的主要区别在于，对子程序 RECOMPRESS, COARSEN和 APPLY进行了修改后的实现，它们分别是算子 P_η, C_η（在第3.2 节中引入）以及第5节所述自适应算子近似的数值实现。

如 [37], 问题（4.2）中的非对称算子 $\mathbf{B}$ 具有不同的定义域和陪域，我们转而采用等价的最小二乘形式

$$\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}\mathbf{u}=\mathbf{B}^\intercal\mathbf{f}, \tag{6.1}$$

这仍然是一个椭圆问题：令 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}$，算子 $\mathbf{A}$ 在 $\ell_2(\vee)$ 上是对称、有界且椭圆的。根据定义，s^*-可压缩算子的伴随算子也是 s^*-可压缩的，超可压缩算子也同样如此。可以像 [17,37] 中那样定义用于 APPLY 近似应用 $\mathbf{A}$ 的例程：

$$\begin{aligned}\mathrm{APPLY}_{\mathbf{A}}(\mathbf{w},\eta) &= \mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}^\intercal}\big(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}}\big(\mathbf{w},\tfrac{\eta}{2\|\mathbf{B}\|}\big),\tfrac{\eta}{2}\big)\\ &= \mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1^\intercal}\big(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1}\big(\mathbf{w},\tfrac{\eta}{4\|\mathbf{B}\|}\big),\tfrac{\eta}{4}\big)\\ &\quad+\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_2^\intercal}\big(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_2}\big(\mathbf{w},\tfrac{\eta}{4\|\mathbf{B}\|}\big),\tfrac{\eta}{4}\big),\end{aligned}\tag{6.2}$$

其中，第二行用到了算子 $\mathbf{B}$ 的结构。用于近似右端项的例程如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}_{\mathbf{B}^\intercal\mathbf{f}}(\eta) &= \mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}^\intercal}\big(\mathrm{RHS}_{\mathbf{f}}\big(\tfrac{\eta}{2\|\mathbf{B}\|}\big),\tfrac{\eta}{2}\big)\\ &= \mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1^\intercal}\big(\mathrm{RHS}_{\mathbf{f}_1}\big(\tfrac{\eta}{4\|\mathbf{B}\|}\big),\tfrac{\eta}{4}\big)+\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_2^\intercal}\big(\mathrm{RHS}_{\mathbf{f}_2}\big(\tfrac{\eta}{4\|\mathbf{B}\|}\big),\tfrac{\eta}{4}\big).\end{aligned}\tag{6.3}$$

下文中，我们用 APPLY 表示 $\mathrm{APPLY}_{\mathbf{A}}$，用 RHS 表示$\mathrm{RHS}_{\mathbf{B}^\intercal\mathbf{f}}$。现在我们有满足以下条件的例程：

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{B}^\intercal\mathbf{B}\mathbf{v}-\mathrm{APPLY}(\mathbf{v},\eta)\|\le\eta, &&\|\mathbf{B}^\intercal\mathbf{f}-\mathrm{RHS}(\eta)\|\le\eta,\\ &\|\mathbf{v}-\mathrm{RECOMPRESS}(\mathbf{v},\eta)\|\le\eta, &&\|\mathbf{v}-\mathrm{COARSEN}(\mathbf{v},\eta)\|\le\eta.\end{aligned}$$

算法6.1 的基本收敛性质总结如下命题所示；证明见 [6, 命题 5]。

算法 6.1： 求解$(\mathbf{A},\ \mathbf{f}\ \varepsilon)=\mathbf{u}_\varepsilon$

输入： $\omega>0$和 $\rho\in(0,\ 1)$使得 $\|\mathbf{I}-\omega\mathbf{A}\|\le\rho$，
$c_{\mathbf{A}}\ge\|$一个$^{-1}\|$，$\varepsilon_0\ge c_{\mathbf{A}}\|\mathbf{f}\|$，
$\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3\in(0,\ 1)$，其中 $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\le1$和 $\beta_1\ge0,\ \beta_2>0$。

输出： $\mathbf{u}_\varepsilon$满足 $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\varepsilon\|\le\varepsilon$。

开始
- $\mathbf{u}_0=0$
- $k=0$
- $I=$最小化 $\{j:\ \rho^j(1+(\omega+\beta_1+\beta_2)j)\ \le\tfrac{1}{2}\kappa_1\}$
- **当** $2^{-k}\varepsilon_0>\varepsilon$ **时执行**
  - $\mathbf{w}_{k,0}=\mathbf{u}_k$
  - $j=0$
  - **重复**
    - $\eta_{k,j}=\rho^{j+1}2^{-k}\varepsilon_0$
    - $\mathbf{r}_{k,j}=\mathrm{APPLY}\left(\mathbf{w}_{k,j},\tfrac{1}{2}\eta_{k,j}\right)-\mathrm{RHS}\left(\tfrac{1}{2}\eta_{k,j}\right)$
    - $\mathbf{w}_{k,j+1}=\mathrm{COARSEN}(\mathrm{RECOMPRESS}\left(\mathbf{w}_{k,j}-\omega\mathbf{r}_{k,j},\beta_1\eta_{k,j}\right)\ \beta_2\eta_{k,j})$
    - $j\mathrel{+}=1$
  - **直到** $j\ge I\ \vee\ c_{\mathbf{A}}\rho\|\mathbf{r}_{k,\ j-1}\|+(c_{\mathbf{A}}\rho+\omega+\beta_1+\beta_2)\eta_{k,\ j-1}\le\kappa_1 2^{-(k+1)}\varepsilon_0$;
  - $\mathbf{u}_{k+1}=\mathrm{COARSEN}\left(\mathrm{RECOMPRESS}\left(\mathbf{w}_{k,j},\kappa_2 2^{-(k+1)}\varepsilon_0\right),\kappa_3 2^{-(k+1)}\varepsilon_0\right)$
  - $k\mathrel{+}=1$
- **end**
- $\mathbf{u}_\varepsilon=\mathbf{u}_k$

结束

命题 6.1。 设算法 *6.1* 满足其条件，特别是设 $\omega>0$满足 $\|\mathbf{I}-\omega\mathbf{A}\|\le\rho<1$。则中间结果 $\mathbf{u}_k$满足 $\|\mathbf{u}_k-\mathbf{u}\|\le2^{-k}\varepsilon_0$，特别是 $\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}\|\le\varepsilon$。

注记 6.2。 转置算子 $\mathbf{B}_1^\intercal$ 的 APPLY 例程可以仿照 $\mathbf{B}_1$的实现方式来实现。由于拉普拉斯算子的对称性，转置算子的空间部分与$\mathbf{T}$的空间部分相同。因此我们有

$$\mathbf{T}^\intercal = \mathbf{I}_\mathrm{t} \otimes \mathbf{T}_\mathrm{x} + \mathbf{T}_\mathrm{t}^\intercal \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x}.$$

如上所述，超可压缩算子的转置仍然是超可压缩的。此外，可以证明，转置后的时间算子也满足与第 5.2 节和第5.3节相同的估计。此时，缩放矩阵的顺序相反。然而，正如第 4 节所示，这两个缩放矩阵的估计相同。总之，对于 $\mathrm{APPLY}^{\mathbf{B}_1^\intercal}$，我们得到的结果与对于 $\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1}$ 完全相同。

6.2. **计算复杂度**。 本节分析算法 6.1 的计算复杂度。此类估计需要对问题数据和解的可逼近性作出某些假设，据此我们再评估该方法的计算成本。但请注意，该方法的可行性和收敛性并不依赖这些假设。

假设 1。 关于缩放矩阵表示 $\mathbf{B}$ 和右端项$\mathbf{f}$，我们要求它们满足以下性质，其中某些参数 s^*, $\tau > 0$ 为固定值。

(i) 一维算子 $C_2 = \hat{D}T_2\hat{D}$ 是 s^*-可压缩的，具有层级衰减ˆ ˆ性质，且其近似为 $C_{2,j} = DT_{2,j}D$。此外，该算子具有阶为 τ 的索оболев稳定性，这意味着对于某个常数 $C_{\tau,2}$，有 $\|\hat{D}^{-\tau}(C_2 - C_{2,j})\hat{D}^{\tau}\| < C_{\tau,2}\beta_j(C_2)$。*(ii)* 一维算子 $C_\mathrm{t} = B_\mathrm{t}\hat{D}_\mathrm{t}$ 是超可压缩的，具有层级衰减ˆ性质，且其近似为 $C_{\mathrm{t},j} = T_{\mathrm{t},j}D$。此外，该算子具有阶为 τ 的索оболев稳定性，即对于某个常数$C_{\tau,\mathrm{t}} > 0$，有 $\|\hat{D}_\mathrm{t}^{-\tau}(C_\mathrm{t} - C_{\mathrm{t},j})\hat{D}_\mathrm{t}^{\tau}\| < C_{\tau,\mathrm{t}}\beta_j(C_\mathrm{t})$。*(iii)* 算子 $B_2 = T_0 D_\mathcal{X}$ 是超可压缩的，其近似为 $B_{2,j} = T_{0,j}D_\mathcal{X}$。此外，该算子具有阶为 τ 的索оболев稳定性，即存在 $C_{\tau,0} > 0$，使得 $\|\bar{D}^{-2\tau}(B_2 - B_{2,j})(\hat{D}_\mathrm{t}^{\tau} \otimes I_\mathrm{x})\| \le C_{\tau,0}\beta_j(B_2)$，且 $\|(\hat{D}_\mathrm{t}^{-\tau} \otimes I_\mathrm{x})(B_2^\intercal - B_{2,j}^\intercal)\bar{D}^{2\tau}\| \le C_{\tau,0}\beta_j(B_2)$。*(iv)* 计算近似 $T_{2,j}$ 和 $T_{\mathrm{t},j}$ 中每个元素所需的运算次数均有统一上界。*(v)* 我们有估计 $c_\mathbf{A} \ge \|A^{-1}\|$，其中 $c_\mathbf{A} \lesssim \|A^{-1}\|$，且初始误差估计$\varepsilon_0$ 满足 $\varepsilon_0 \eqsim \|A^{-1}\|\|B^\intercal f\|$。*(vi)* f_1 和 f_2 的收缩是可压缩的，即对于任意满足 $0 < s < s^*$ 的 s，有 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(f_1) \in \mathcal{A}^s(\vee_\mathrm{t} \times \vee_1)$ 和$\pi^{(i)}(f_2) \in \mathcal{A}^s(\vee_1)$，$i = 1, \dots, d$。

(vii) 对于$\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_\mathrm{t}$ 和$\mathbf{f} = [\mathbf{D}_\mathcal{Y}\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$,，我们假设

$$\|\hat{\mathbf{D}}^{1-\tau}\mathbf{T}_2\hat{\mathbf{D}}^{1+\tau}\| < \infty, \quad \|\mathbf{D}_\mathcal{Y}^{1-\tau}\mathbf{g}_1\| + \|\mathbf{D}^{-2\tau}\mathbf{g}_2\| < \infty,$$
$$\|\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\mathbf{T}_\mathrm{t}\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{1+\tau}\| < \infty, \qquad \|\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{1-\tau}\mathbf{T}_\mathrm{t}^\intercal\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{\tau}\| < \infty,$$

我们将其称为 阶为 τ 的超额正则性。

注 6.3. 若小波 Ψ_ν 具有足够的正则性，使其也构成 $H^{1+s}(\Omega)$ 的 Riesz 基（某个 $s > \tau > 0$），并经过适当的重整化，且若 $g \in L_2(0,T; H^{-1+\tau}(\Omega))$ 和 $h \in H^{2\tau}(\Omega)$，则满足假设 1

引理 6.4. 对于所有 $0 < \tau < \frac{1}{2}$，我们有

$$\left\|\left(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x}\right)\mathbf{B}_2^\intercal\bar{\mathbf{D}}^{2\tau}\right\| \le (1+\delta), \quad \left\|\bar{\mathbf{D}}^{-2\tau}\mathbf{B}_2\left(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{\tau} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x}\right)\right\| \le (1+\delta).$$

证明。 根据矩阵的定义和杨氏不等式，我们有

$$\left|\left((\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau} \otimes \mathbf{I}_\mathrm{x})\bar{\mathbf{D}}_\mathcal{X}\mathbf{T}_0^\intercal\bar{\mathbf{D}}^{2\tau}\right)_{(\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}),\nu_\mathrm{x}}\right| \le 1.$$

结合注 4.2，我们得到第一个结论。第二个结论同理可得。□

接下来，我们陈述关于用于近似右端项 $\mathbf{f}$ 的过程 RHS 的假设，该过程将在后续的复杂度分析中使用。

假设 2。 假定过程 $\mathrm{RHS}_{\mathbf{f}}(\eta) = [\mathrm{RHS}_{\mathbf{f}_1}(\frac{\eta}{2})\ \mathrm{RHS}_{\mathbf{f}_2}(\frac{\eta}{2})]^{\intercal}$ 具有以下性质。

(viii) 存在一个近似 $\mathbf{f}_{1,\eta} = \mathrm{RHS}_{\mathbf{f}_1}(\eta)$ 使得 $\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_{1,\eta}\| \le \eta$ 并且

$$\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_{1,\eta})\|_{\mathcal{A}^s} \le C^{\mathrm{sparse}}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_1)\|_{\mathcal{A}^s},$$

$$\sum_i \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_{1,\eta})) \le C^{\mathrm{supp}}\, d\, \eta^{-\frac{1}{s}} \Big(\sum_i \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_1)\|_{\mathcal{A}^s}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

$$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{f}_{1,\eta}) \le C^{\mathrm{rank}}_{\mathbf{f}}\,(1+|\ln\eta|)^{b_{\mathbf{f}}},$$

此外，还存在一个近似 $\mathbf{f}_{2,\eta} = \mathrm{RHS}_{\mathbf{f}_2}(\eta)$ 使得 $\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_{2,\eta}\| \le \eta$ 并且

$$\|\pi^{(i)}(\mathbf{f}_{2,\eta})\|_{\mathcal{A}^s} \le C^{\mathrm{sparse}}\|\pi^{(i)}(\mathbf{f}_2)\|_{\mathcal{A}^s},$$

$$\sum_i \#\operatorname{supp}(\pi^{(i)}(\mathbf{f}_{2,\eta})) \le C^{\mathrm{supp}}\, d\, \eta^{-\frac{1}{s}} \Big(\sum_i \|\pi^{(i)}(\mathbf{f}_2)\|_{\mathcal{A}^s}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

$$|\operatorname{rank}(\mathbf{f}_{2,\eta})|_\infty \le C^{\mathrm{rank}}_{\mathbf{f}}\,(1+|\ln\eta|)^{b_{\mathbf{f}}},$$

$$L(\mathbf{f}_{2,\eta}) \le C^{\mathrm{lvl}}(|\ln\eta| + \ln d), \tag{6.4}$$

其中 C^{sparse}、C^{supp}、$C^{\mathrm{rank}}_{\mathbf{f}} > 0$、$b_{\mathbf{f}} \ge 1$ 均与 η 无关，而 C^{sparse}、C^{supp} 均与 $\mathbf{f}$ 无关。

(ix) 计算 $\mathrm{RHS}_{\mathbf{f}}(\eta)$ 所需的运算次数有上界，存在常数 $C^{\mathrm{ops}}{}_{\mathbf{f}}(d)$，使得其不超过 $\mathrm{flops}(\mathbf{f}^{\eta}) \le C^{\mathrm{ops}}{}_{\mathbf{f}}(d)\big[(1+|\ln\eta|)^{3b_{\mathbf{f}}} + (1+|\ln\eta|)^{b_{\mathbf{f}}}\eta^{-\frac{1}{s}}\big]$.(x)

RHS 保留了问题的超额正则性，也就是说，存在 $C^{\mathrm{reg}}{}_{\mathbf{f}} >$，其与 η 无关，使得 0

$$\big\|\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}^{-\tau}\mathbf{f}_{1,\eta}\big\| + \big\|\mathbf{D}^{-2\tau}\mathbf{f}_{2,\eta}\big\| \le C^{\mathrm{reg}}_{\mathbf{f}}\Big(\big\|\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}^{-\tau}\mathbf{f}_1\big\| + \big\|\mathbf{D}^{-2\tau}\mathbf{f}_2\big\|\Big). \tag{6.5}$$

备注 6.5. 在正规方程（6.1）中，$\mathbf{B}_2^{\intercal}$ 应用于 $\mathbf{f}_2$。根据第5.4节中的估计，基于输入的最大层级，我们还需要对 $\mathbf{f}_{2,\eta} = \mathrm{RHS}_{\mathbf{f}_2}(\eta)$ 的最大层级进行估计。先以较低容差应用该例程，再对单个低秩表示执行粗化步骤，即可得到此类估计。随后应用 [8,引理 37] 并结合超额正则性假设，即可得到估计（6.4）。

在满足上述数据及其处理条件的情况下，我们现在主要关注的是：如果精确解允许低秩稀疏近似，那么自适应算法是否会生成低秩稀疏近似解。现在，我们给出关于解的基准假设 $\mathbf{u}$的精确定义。

假设 3。 关于解$\mathbf{u}$的可逼近性，我们作如下假设：

(xi) $\mathbf{u} \in \mathcal{A}(\gamma_{\mathbf{u}})$，其中 $\gamma_{\mathbf{u}}(n) = e^{d_{\mathbf{u}} n^{1/b_{\mathbf{u}}}}$ 对某些 $d_{\mathbf{u}} > 0$、$b_{\mathbf{u}} \ge 1$成立。

(xii) $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}^s$ 对于 $i = 1, \ldots\ldots, d$，对任意满足 $0 < s < s^*$的 s 成立。

为了分析我们算法复杂度的维数依赖性，理想情况下，我们需要一个参考问题族，其中每个 d 对应的问题难度相同。尽管这并非完全可行，但不同 d 值对应的问题仍有一些可比较之处，例如拉普拉斯算子的结构。因此，接下来明确说明相关量与空间维度 d 的关系十分重要。

假设4。在比较不同 d 值对应的问题时，我们作如下假设。

(xiii) 以下各项均与 d 无关：常数 $d_{\mathbf{u}}$, $b_{\mathbf{u}}$, C^{sparse}, C^{supp}, $C_{\mathbf{f}}^{\mathrm{rank}}$, $C_{\mathbf{f}}^{\mathrm{lvl}}$；超额正则性指标 τ；以及 *(6.5)* 中的 C^{reg} *f*。*(xiv)* 以下各量均有界，且与 d 无关： $\|B\|$, $\|B^{-1}\|$，以及 $\|D_{\mathcal{Y}}^{1-\tau} g_1\| + \|D^{-\tau} g_2\|$；假设 *3* 中的量 $\|u\|_{\mathcal{A}(\gamma_{\mathbf{u}})}$ 和 $\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(u)\|_{\mathcal{A}^s}$，以及假设 *2(viii)* 中的量 $\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(f_1)\|_{\mathcal{A}^s}$, $\|\pi^{(i)}(f_2)\|_{\mathcal{A}^s}$，每项均对应 $i = 1, \ldots, d$。*(xv)* 此外，我们假设假设 *3(ix)* 中的 C^{ops} *f (d)* 随 $d \to \infty$ 的增长至多为多项式级。

注6.6。由于 d无关的 $\|\mathbf{B}\|$ 和 $\|\mathbf{B}^{-1}\|$上界存在，因此$\|\mathbf{A}\|$ 和 $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ 也有与 d 无关的界，从而约化参数ρ 满足 $\rho < \hat{\rho} < 1$，其中$\hat{\rho}$ 与 d无关。

在上述基准假设下，我们得到所计算近似的复杂度以及该方法总计算成本的如下上界。

定理 6.7。假设 *1*、*2*成立，且假设 *3* 对解 $\mathbf{u}$ 满足，其中 $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$。设 $\alpha > 0$ 并设 $\kappa_{\mathrm{P}} = \sqrt{2d-3}$, $\kappa_{\mathrm{C}} = \sqrt{d}$。令算法$\kappa_1$、$\kappa_2$、$\kappa_3$ 中的常数*6.1* 取为

$$\kappa_1 = \big(1 + (1+\alpha)(\kappa_{\mathrm{P}} + \kappa_{\mathrm{C}} + \kappa_{\mathrm{P}}\kappa_{\mathrm{C}})\big)^{-1},$$
$$\kappa_2 = (1+\alpha)\kappa_{\mathrm{P}}\kappa_1, \qquad \kappa_3 = \kappa_{\mathrm{C}}(\kappa_{\mathrm{P}}+1)(1+\alpha)\kappa_1,$$

并令 $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 > 0$ 为任意但固定的值。则算法 $\mathbf{u}_\varepsilon$ *6.1* 对 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 产生的近似解满足

$$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{u}_\varepsilon) \leq \gamma_{\mathbf{u}}^{-1}\big(2(\alpha\kappa_1)^{-1}\rho_{\gamma_{\mathbf{u}}}\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}(\gamma_{\mathbf{u}})}\varepsilon^{-1}\big) \tag{6.6}$$

$$\sum_{i=1}^{d} \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}_\varepsilon)) \lesssim d^{1+s^{-1}}\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)^{\frac{1}{s}}\varepsilon^{-\frac{1}{s}}, \tag{6.7}$$

以及

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathcal{A}(\gamma_{\mathbf{u}})} \lesssim \sqrt{d}\,\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}(\gamma_{\mathbf{u}})}, \tag{6.8}$$

$$\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}_\varepsilon)\|_{\mathcal{A}^s} \lesssim d^{1+\max\{1,s\}}\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s}. \tag{6.9}$$

式 (6.8) 中的乘法常数 α仅取决于，而 (6.7) 和 (6.9) 中的常数仅取决于 α 和 s。

此外，若假设 *4* 成立，则所需运算次数 $\mathrm{flops}(\mathbf{u}_\varepsilon)$满足以下估计

$$\text{浮点运算次数}(\mathbf{u}_\varepsilon) \leq C d^a\, d^{2cs^{-1}} \ln^d(\ln d)^{102c} \ln^d(\ln d)^b (1 + |\ln\varepsilon|)^{16+34c} \ln^{d+4\text{最大值}\{b_{\mathbf{u}},b_{\mathbf{f}}\}}\varepsilon^{-\frac{1}{s}} - \tag{6.10}$$

其中 C, a, b 是与 ε和 d无关的常数，并且 c是满足以下条件的最小 d无关值：$I \leq c\ln d$，当 I时，如算法 *6.1*第 *4*行所示。特别地， c不取决于 ε 和 s。

证明此定理需要一些准备工作。回顾一下，我们的目标是求解正规方程（6.1）。为简化记号，我们记

$$\mathbf{z}_{k,j}^{(1)} = \mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1}\Big(\mathbf{w}_{k,j}, \tfrac{\eta_{k,j}}{8\|\mathbf{B}\|}\Big), \quad \mathbf{z}_{k,j}^{(2)} = \mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_2}\Big(\mathbf{w}_{k,j}, \tfrac{\eta_{k,j}}{8\|\mathbf{B}\|}\Big)$$

在$\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}$的近似应用中产生的中间结果。与 [8], 中所述的单个低秩表示情形不同，由于第5.4节考虑的初值算子的近似应用，例程 APPLY 的结果的支撑集和 $\mathcal{A}^s$范数还取决于输入的最大空间层级。

6.2.1.迭代项的最大层级和支撑集。以下引理估计了 COARSEN(**v** η)输出中的当前最大空间和时间小波层级。它取决于超额正则性假设，以及时间变量与第 i个空间变量组合后的混合低维支撑集 $\operatorname{supp}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})$。

引理 6.8。 对于给定的$\mathbf{v} \in \ell_2(\vee)$，我们将$\mathbf{p} = (\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t}},\nu_i(\mathbf{v}))_{i,\nu_\mathrm{t},\nu_i}$ 视为 $\{1,\dots,d\}\times\vee_\mathrm{t}\times\vee_1$上的一个向量。假设

$$\#\operatorname{supp}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{d}\#\operatorname{supp}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v}) < \infty$$

并且对于某个 $\tau>0$，有 $\|(\hat{}\mathbf{D}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|<\infty$ 且 $\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{}\mathbf{D}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|<\infty$对所有 $i=1,\dots,d$ 均成立。令 $\eta>0$，令$\mathbf{p}^\eta$为在 $\{1,\dots,d\}\times\vee_\mathrm{t}\times\vee_1$ 中具有最小支撑集的向量，使得 $\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_\eta\|\le\eta$，并令

$$C_{\vee_\mathrm{t}} = \sup_{\nu\in\vee_\mathrm{t}}\|\theta_{\vee_\mathrm{t}}\|^{-\tau}_{H^1(0,T)}2^{\tau|\nu|},\quad C_{\vee_1} = \sup_{\nu\in\vee_1}\|\psi_\nu\|^{-\tau}_{H^1_0(0,1)}2^{\tau|\nu|}.$$

那么，对于所有$(i,\nu_\mathrm{t},\nu_i)\in\operatorname{supp}\mathbf{p}^\eta$，我们有

$$|\nu_\mathrm{t}| \le \tau^{-1}\log_2\left(\eta^{-1}C_{\vee_\mathrm{t}}\|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|\sqrt{\#\operatorname{supp}\mathbf{p}}\right),$$
$$|\nu_i| \le \tau^{-1}\log_2\left(\eta^{-1}C_{\vee_1}\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|\sqrt{\#\operatorname{supp}\mathbf{p}}\right).$$

证明与 [8, 引理 37] 中的证明完全相同，因此此处不再重复。该引理将用于算法 6.1 的第 11 行，其中 $\eta=\beta_2\eta_{k,j}$ 和 $\mathbf{p}^\eta$ 是 COARSEN的结果。根据通过指标集 $\Lambda(\mathbf{u};N$定义的例程（该指标集基于所有收缩的全序 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})$），并且由于 $\beta_2>0$，引理 6.8的假设均成立。

根据引理 6.8，只需估计 $\|(\hat{}\mathbf{D}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|$ 和$\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{}\mathbf{D}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|$，即可得到迭代项 $\mathbf{w}_{k,j}$ 的最大小波层级的适当上界。为此，我们改写 [8,引理 38]，得到以下关于基粗化和秩截断下收缩稳定性的结果。

引理 6.9。 对于任意 τ、$\eta>0$和 $i=1,\dots,d$，我们有

$$\|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\hat{C}_\eta\mathbf{v})\| \le \|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|,$$
$$\|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\hat{P}_\eta\mathbf{v})\| \le \|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|,$$
$$\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\hat{C}_\eta\mathbf{v})\| \le \|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|,$$
$$\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\hat{P}_\eta\mathbf{v})\| \le \|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{v})\|,$$

对于任意 $\mathbf{v}\in\ell_2(\vee)$。

接下来，我们考察迭代过程中 $\|(\hat{}\mathbf{D}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|$ 和 $\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{}\mathbf{D}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|$的演变。这里提到，由于 B 满足超额正则性假设 1(vii)，且 f 满足假设 2(x)，因此有

$$\zeta = \max\left\{\left\|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_\mathrm{x})\mathbf{g}_1\right\|,\left\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\mathbf{D}^{-\tau})\mathbf{g}_1\right\|,\left\|\mathbf{D}^{-\tau}\mathbf{g}_2\right\|\right\}<\infty,$$
$$\xi = \max\left\{\left\|\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\mathbf{C}_\mathrm{t}\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{\tau}\right\|,\left\|\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\mathbf{C}_\mathrm{t}^\intercal\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{\tau}\right\|,\left\|\hat{\mathbf{D}}^{-\tau}\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{D}}^{\tau}\right\|\right\}<\infty. \tag{6.11}$$

由于空间算子 $\mathbf{C}_2$ 是对称的，我们有 $\|\hat{}\mathbf{D}^{-\tau}\mathbf{C}_2^\intercal\hat{}\mathbf{D}^{\tau}\|\le\xi$。

命题 6.10。 在定理 *6.7*的假设下，算法 **6.1**的迭代项 $\mathbf{w}_{k,j}$ 满足

$$\max\left\{\|(\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{t}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|,\|(\mathbf{I}_\mathrm{t}\otimes\hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|\right\} \le \frac{\gamma^{kI+j+1}-1}{\gamma-1}\bar{C}_\mathbf{f},$$

其中

$$\gamma = 1 + \omega \max\left\{\gamma_{\mathrm{t},1}^2 + \gamma_{\mathrm{t},2}^2, \gamma_{\mathrm{x},1}^2 + \gamma_{\mathrm{x},2}^2\right\}, \quad \bar{C}_{\mathbf{f}} = \omega C_{\mathbf{f}}^{\mathrm{reg}} \zeta \max\left\{\gamma_{\mathrm{t},1} + \gamma_{\mathrm{t},2}, \gamma_{\mathrm{x},1} + \gamma_{\mathrm{x},2}\right\}$$

with

$$\gamma_{\mathrm{x},1} = (1+\delta)^2(\check{C}_{\mathrm{x}} + 2\|\mathbf{C}_{\mathrm{t}}\| + \xi + C_{\tau,2}\|\beta(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1}), \quad \gamma_{\mathrm{x},2} = 2\|\mathbf{B}_2\|$$
$$\gamma_{\mathrm{t},1} = (1+\delta)^2(\check{C}_{\mathrm{x}} + 2\|\mathbf{C}_2\| + \xi + C_{\tau,\mathrm{t}}\|\beta(\mathbf{C}_{\mathrm{t}})\|_{\ell_1}), \quad \gamma_{\mathrm{t},2} = C_{\tau,0}\|\beta(\mathbf{B}_2)\|_{\ell_1} + (1+\delta).$$

证明。 证明思路沿用 [8, 命题 39], , 并针对额外的时间分量和正规方程的结构作了相应调整。我们给出$\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|$的证明；对于 $\|(\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^{-\tau} \otimes \mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|$，我们只说明应用$\mathbf{B}_2$, 的部分，其余部分可用类似的方法处理。在外层循环 k 中，每个内层循环步骤 j 的形式为

$$\mathbf{w}_{k,j+1} = \hat{C}_{\beta_2\eta_{k,j}}\left(\hat{P}_{\beta_1\eta_{k,j}}((\mathbf{I} - \omega\tilde{\mathbf{A}}_{k,j})\mathbf{w}_{k,j} + \omega\mathbf{f}_{k,j})\right).$$

根据 $\mathbf{u}_0$ 在算法 6.1中的定义，我们有 $\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}_0)\| = 0$ 对于 $i = 1, \ldots, d$。利用引理 6.9 可得

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j+1})\| &= \|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\hat{C}_{\beta_2\eta_{k,j}}(\hat{P}_{\beta_1\eta_{k,j}}((\mathbf{I} - \omega\tilde{\mathbf{A}}_{k,j})\mathbf{w}_{k,j} + \omega\mathbf{f}_{k,j})))\| \\ &\le \|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\| + \omega\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{A}}_{k,j}\mathbf{w}_{k,j})\| \\ &\quad + \omega\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_{k,j})\|.\end{aligned}$$

˜考虑到$\mathbf{A}_{k,j}$的定义，我们需要估计

$$\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{A}}_{k,j}\mathbf{w}_{k,j})\| \le \|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{A}}_{k,j}^{(1)}\mathbf{w}_{k,j})\| + \|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{A}}_{k,j}^{(2)}\mathbf{w}_{k,j})\|,$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}_l^{(l)}$, $_j$ 对于 $l = 1$，2 定义为

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{A}}_{k,j}^{(l)}\mathbf{w}_{k,j})\| &= \left\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}\left(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_l^{\intercal}}\left(\mathbf{z}_{k,j}^{(l)}, \tfrac{\eta_{k,j}}{8}\right)\right)\right\| \\ &= \left\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}\left(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_l^{\intercal}}\left(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_l}\left(\mathbf{w}_{k,j}, \tfrac{\eta_{k,j}}{8\|\mathbf{B}\|}\right), \tfrac{\eta_{k,j}}{8}\right)\right)\right\|.\end{aligned}$$

我们从 $l = 1$ 开始。接下来进行逐步估计

$$\begin{aligned}\left\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}\left(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1^{\intercal}}\left(\mathbf{z}_{k,j}^{(1)}, \tfrac{\eta_{k,j}}{8}\right)\right)\right\| &\le \gamma_{\mathrm{x},1}\left\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{z}_{k,j}^{(1)})\right\|, \\ \left\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{z}_{k,j}^{(1)})\right\| &\le \gamma_{\mathrm{x},1}\left\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\right\|.\end{aligned}$$

这两个估计可以用相同的方法证明，因此我们仅给出第二个估计的证明。

– ˆ 下文中，我们记 $\mathrm{D}_i = \mathrm{I}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{I}_{i-1} \otimes \mathrm{D} \otimes \mathrm{I}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{I}_{d\circ}$ 根据定义，我们有 $\mathrm{z}_k^{(1)},_j = \mathrm{D}_{\mathcal{Y},\mathrm{n}_2}\tilde{\mathrm{T}}_{k,j}\mathrm{D}_{\mathcal{X},\mathrm{n}_1}\mathrm{w}_{k,j}$，其中 $\tilde{\mathrm{T}}_{k,j} = \tilde{\mathrm{T}}_{J(\eta;\mathrm{w}_{k,j})}[\mathrm{w}_{k,j}]$, $\eta = \eta_k$, $_{8\|}{}^{j}\mathrm{B}\|$、$\mathrm{n}_1 = \hat{\mathrm{m}}_{\mathcal{X}}(\eta; \mathrm{w}_{k,j})$ 和 $\mathrm{n}_2 = \hat{\mathrm{m}}_{\mathcal{Y}}(\eta; \mathrm{w}_{k,j\circ}$ 我们定义 $\tilde{\mathrm{w}}_{k,j} = \mathrm{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\tilde{\mathrm{D}}_{\mathcal{X},\mathrm{n}_1}\mathrm{w}_{k,j\circ}$ 利用对角矩阵 $\mathrm{D}_{\mathcal{Y},\mathrm{n}_2}\mathrm{D}_{\mathcal{Y}}^{-1}$ 的每个元素均不超过 1，且对角算子彼此可交换这一点，我们得到

$$\left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}\left((\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_i^{-\tau})\mathbf{D}_{\mathcal{Y},\mathrm{n}_2}\tilde{\mathbf{T}}_{k,j}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\mathrm{n}_1}\mathbf{w}_{k,j}\right)\right\| \le \left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}\left((\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_i^{-\tau})\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_{k,j}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{w}}_{k,j}\right)\right\|.$$

接下来，我们利用$\mathbf{T}$ 的结构，如（5.34）所示，并进一步考虑时间算子。为简化记号，从这里开始我们只讨论 $i = 1\tilde{}$ $\tilde{}$。对于 $\mathbf{T}_{\mathrm{t}} = \mathbf{T}_{\mathrm{t},J(\eta;\mathbf{w}_{k,j})}[\mathbf{w}_{k,j}]$, 我们有

$$\left\|\pi^{(\mathrm{t},1)}\left((\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau})\mathbf{D}_{\mathcal{Y}}\tilde{\mathbf{T}}_{k,j}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{w}}_{k,j}\right)\right\| \le \|\mathbf{d}_{\mathrm{x}}\| + \left\|\pi^{(\mathrm{t},1)}\left((\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau})\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{t}}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{w}}_{k,j}\right)\right\| \tag{6.12}$$

其中 $\mathbf{d}_{\mathrm{x}} = \left(D_{1,\nu_{\mathrm{t}},\nu_1} + D_{2,\nu_{\mathrm{t}},\nu_1}\right)_{\nu_{\mathrm{t}}\in\vee_{\mathrm{t}},\nu_1\in\vee_1}$，其中

$$D_{1,\nu_{\mathrm{t}},\nu_1} = \pi^{(1)}_{\nu_1}\Big(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}\mathbf{D}(\mathbf{I}_1 \otimes \sum_{\mathsf{n}\in \mathrm{K}_d(1,2,\ldots,2)} c_{\mathsf{n}} \bigotimes_{i=2}^{d} \tilde{\mathbf{T}}^{(i)}_{\nu_{\mathrm{t}},n_i}[\mathbf{w}_{k,j}])\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\Big),$$

$$D_{2,\nu_{\mathrm{t}},\nu_1} = \pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},2}[\mathbf{w}_{k,j}] \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\right).$$

¯为了估计$D_{1,\ \nu_{\mathrm{t}},\ \nu_1}$，我们可以利用对角矩阵可交换这一性质，并且根据定义，$(\mathbf{D}_1^{-\tau})$与 ¯$\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{M}$ 对每个 $\mathbf{M}$ 也可交换。因此，我们得到

$$D_{1,\nu_{\mathrm{t}},\nu_1} \le \check{C}_{\mathrm{x}}(1+\delta)^2\pi^{(\mathrm{t},1)}_{\nu_{\mathrm{t}},\nu_1}((\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau})\mathbf{w}_{k,j}).$$

为了估计$D_{2,\ \nu_{\mathrm{t}},\ \nu_1}$，我们可以仿照 [8, 命题 39] 和引理5.15。我们定义 ˜$\mathbf{C}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},\ 2}$ = ˆ$\mathbf{D}$ ˜$\mathbf{T}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},\ 2}[\mathbf{w}_{k,\ j}]$ ˆ$\mathbf{D}$。利用对角矩阵$\mathbf{D}$ ¯$\mathbf{D}_1^{-1}$和 ¯$\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\ \nu_{\mathrm{t}}}$ 的矩阵元素均由$(1+\delta)$给出上界这一点，我们得到

$$\begin{aligned}
D_{2,\nu_{\mathrm{t}},\nu_1} &\le (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}\bar{\mathbf{D}}_1(\tilde{\mathbf{T}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},2}[\mathbf{w}_{k,j}] \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d)\bar{\mathbf{D}}_1\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\right)\\
&= (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}(\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},2} \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d)\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\right)\\
&\le (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}(\mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d)\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\right)\\
&\quad + (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}((\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}_{\nu_{\mathrm{t}},2} - \mathbf{C}_2) \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d)\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\right)\\
&\le (1+\delta)\pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}(\mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_d)\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}\mathbf{D}_{\mathcal{X},\nu_{\mathrm{t}}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\right)\\
&\quad + (1+\delta)^2 C_{\tau,2}\|\beta(\mathbf{C}_2)\|_{\ell_1}\pi^{(1)}_{\nu_1}\left(\bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})_{\nu_{\mathrm{t}}}\right),
\end{aligned}$$

其中最后一行用到了假设1(i)。

对于(6.12)中的第二项，我们可以利用对角矩阵可交换这一性质，并且˜由于算子$\mathbf{T}_{\mathrm{t}}$，¯的特殊结构仅在空间部分施加了限制，我们得到$(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{D}_1^{-\tau})\mathbf{T}_{\mathrm{t}}\mathbf{D}_{\mathcal{X}} = \mathbf{T}_{\mathrm{t}}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{D}_1^{-\tau})$。因此，我们得到

$$\left\|\pi^{(\mathrm{t},1)}\left((\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau})\tilde{\mathbf{T}}_{\mathrm{t}}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}\tilde{\mathbf{w}}_{k,j}\right)\right\| \le 2(1+\delta)^2\|\mathbf{C}_{\mathrm{t}}\|\left\|\pi^{(\mathrm{t},1)}((\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \bar{\mathbf{D}}_1^{-\tau})\mathbf{w}_{k,j})\right\|.$$

为了得到 $\|\mathbf{d}_{\mathrm{x}}\|$的上界，我们对所有 $D_{1,\ \nu_{\mathrm{t}},\ \nu_1}$ 和 $D_{2,\ \nu_{\mathrm{t}},\ \nu_1}$ 的估计求和，并 ν_{t}，ν_1再使用（6.11），得到

$$\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{z}^{(1)}_{k,j})\| \le \gamma_{\mathrm{x},1}\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w}_{k,j})\|.$$

对于 $\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes$ ˆ$\mathbf{D}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}($ ˜$\mathbf{A}^{(2)}_{k\ ,j}\mathbf{w}_{k,j})\|$，我们可以像处理时间算子那样进行，因为我们只在空间变量上施加限制。因此，

$$\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}_{k,j}\mathbf{w}_{k,j})\| \le \gamma^2_{\mathrm{x},2}\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w}_{k,j})\|.$$

对于 $\mathbf{f}_{k,\ j} = \mathrm{RHS}(\frac{1}{2}\eta_{k,\ j})$，其中 RHS定义见（6.3），我们可以采用类似的方法，并将结果与假设2(x)中的（6.5）结合。因此得到

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w}_{k,j+1})\| &\le (1+\omega(\gamma^2_{\mathrm{x},1}+\gamma^2_{\mathrm{x},2}))\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w}_{k,j})\| + \bar{C}_{\mathbf{f}}\\
&\le \gamma\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w}_{k,j})\| + \bar{C}_{\mathbf{f}}.
\end{aligned}$$

这一估计在外层循环末尾的重新压缩和粗化步骤中保持不变。考虑到 $j \le I$ 和 $\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes$ ˆ$\mathbf{D}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{u}_0)\| = 0$，我们由此得到

$$\|(\mathbf{I}_{\mathrm{t}} \otimes \hat{\mathbf{D}}^{-\tau})\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w}_{k,j})\| \le \frac{\gamma^{kI+j+1}-1}{\gamma-1}\bar{C}_{\mathbf{f}}.$$

对于量 $\|($ˆ$\mathbf{D}_{\mathrm{t}}^{-\tau} \otimes \mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},1)}(\mathbf{w}_{k,j})\|$，利用此时（ˆ$\mathbf{D}_{\mathrm{t}}^{-\tau} \otimes \mathbf{I}_i$）与空间算子可交换这一事实，我们可以类似地对算子$\mathbf{B}_1$, 进行处理。然而，

对于算子 $\mathbf{B}_2$，我们需要采用不同的方法。我们再次使用逐步估计，此处形式如下：

$$\begin{aligned}\left\|(\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}\big(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}}\big(\mathbf{z}_{k,j}^{(2)},\tfrac{\eta_{k,j}}{8}\big)\big)\right\| &\le \gamma_{\mathrm{t},2}\left\|\bar{\mathbf{D}}^{-2\tau}\mathbf{z}_{k,j}^{(2)}\right\|,\\ \left\|\bar{\mathbf{D}}^{-2\tau}\mathbf{z}_{k,j}^{(2)}\right\| &\le \gamma_{\mathrm{t},2}\left\|(\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\right\|.\end{aligned}\tag{6.13}$$

根据定义，我们有 $\mathbf{z}_k^{(2)},_j = \tilde{}\mathrm{T0},_J\mathrm{D}\mathcal{x},_n\mathrm{w}_k,_j$ with $\tilde{}\mathrm{T0},_J = \tilde{}\mathrm{T0},_{J_0}(\eta;\mathrm{w}_k,_j)[\mathrm{w}_k,_j]$, $\eta = {}^{\eta_k}\!,_{8\|}{}^{j}\mathrm{B}\|$ and $\mathrm{n} = \hat{}\mathrm{m}\mathcal{x},0(\eta;\mathrm{w}_k,_j)$. 令 $\tilde{}\mathrm{w}_k,_j = \mathrm{D}_{\mathcal{X}}^{-1}\mathrm{D}\mathcal{x},_n\mathrm{w}_k,_{j_0}$。于是

$$\begin{aligned}\left\|\bar{\mathbf{D}}^{-2\tau}\mathbf{z}_{k,j}^{(2)}\right\| &= \left\|\bar{\mathbf{D}}^{-2\tau}\tilde{\mathbf{T}}_{0,J}\mathbf{D}_{\mathcal{X}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})\right\|\\ &\le \left\|\bar{\mathbf{D}}^{-2\tau}(\mathbf{T}_0-\tilde{\mathbf{T}}_{0,J})\mathbf{D}_{\mathcal{X}}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})\right\| + \left\|\bar{\mathbf{D}}^{-2\tau}\mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{w}}_{k,j}\right\|\\ &\le (C_{\tau,0}\|\beta(\mathbf{B}_2)\|_{\ell_1}+(1+\delta))\|(\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\tilde{\mathbf{w}}_{k,j})\|,\end{aligned}$$

其中最后一行用到了假设 1(iii) 和引理 6.4 。对于 (6.13)，我们可以采用同样的方式进行。因此得到

$$\begin{aligned}\|(\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j+1})\| &\le (1+\omega(\gamma_{\mathrm{t},1}^2+\gamma_{\mathrm{t},2}^2))\|(\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|+\bar{C}_{\mathbf{f}}\\ &\le \gamma\|(\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{t}}^{-\tau}\otimes\mathbf{I}_i)\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|+\bar{C}_{\mathbf{f}}.\end{aligned}$$

其余结论可由上述结果推出。 □

由引理6.8，我们得到一个关于最大层级的上界，该上界还取决于逐模态支撑大小。然而，根据第5.4节，迭代项的支撑集取决于前一个迭代项的最大层级以及 $\mathcal{A}^s$-范数，而后者也取决于最大层级。因此，我们逐步联合估计这三个量。引理5.15给出了$\mathbf{B}_1$ 下 APPLY 结果的支撑集估计；对于$\mathbf{B}_2$，则由引理5.24和引理5.29 给出。现在，我们希望利用这些估计以及引理6.8 ，推导迭代项$\mathbf{w}_{k,j}$的支撑集和最大层级的上界。特别地，我们关注其对 d的依赖关系。在相应引理的陈述中，我们使用如下记号

$$C_{\mathbf{u},\mathbf{f}} = \max\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)^{\frac{1}{s}},\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_1)\|_{\mathcal{A}^s}\Big)^{\frac{1}{s}},\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(i)}(\mathbf{f}_2)\|_{\mathcal{A}^s}\Big)^{\frac{1}{s}}\Big\}.$$

引理6.11。 设 $\mathbf{w}_{k,\,j}$ 由算法 *6.1* 定义。在定理*6.7*的假设下，有

$$\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s}\le\bar{C}_1(\tilde{C}d)^{2j}d^{p_0}\big((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3\big)^{2js}C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}^s,\tag{6.14}$$

$$\sum_{i=1}^{d}\#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j}))\le\bar{C}_2(\tilde{C}d)^{\frac{2j}{s}}d^{p_1}\big((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3\big)^{2j}\eta_{k,j}^{-\frac{1}{s}}C_{\mathbf{u},\mathbf{f}},\tag{6.15}$$

$$L(\mathbf{w}_{k,j})\le\bar{C}_3((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3).\tag{6.16}$$

其中 $p_0 = 1+$最大值$\{1,s\}$，$p_1 =$最大值$\{2+2s^{-1},1+3s^{-1}\}$，且 $\bar{C}_1,\bar{C}_2,\bar{C}_3,\tilde{C}$ 相互 d-独立。

证明。 令 $\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon_0$。根据算法的定义以及（3.21），我们有

$$\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,0})\|_{\mathcal{A}^s} \le C_1 d^{p_0} \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s},$$

$$\sum_{i=1}^{d} \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,0})) \le C_2 d^{1+s^{-1}} (\eta_{k,0})^{-\frac{1}{s}} \Big(\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} \Big)^{\frac{1}{s}}.$$

其中，我们考虑了 κ_{C} 和 κ_{P} 的定义，以及 d相对于 ρ的独立性，因此常数 C_1， C_2 与 d无关。此外，根据算法的定义，我们知道$\mathbf{w}_{0,\,0} = 0$。因此，(6.14)和(6.15)对$\mathbf{w}_{k,\,0}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}_0$均成立。

证明结构如下。第一步，我们证明：如果该陈述对$\mathbf{w}_{k,\,j}$成立，则对$\mathbf{w}_{k,\,j+1}$ 也成立。然后我们证明：如果估计式(6.16)对$\mathbf{w}_{k,\,I}$成立，则对$\mathbf{w}_{k+1,\,0}$ 也成立。

设命题(6.14)、(6.15)和(6.16)对$\mathbf{w}_{k,\,j}$成立。这里我们引用一次假设4 ，以回顾哪些参数与维数 d无关。根据备注5.16，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}}(\mathbf{z}_{k,j}^{(1)}; \tfrac{1}{8}\eta_{k,j}))\|_{\mathcal{A}^s} &\le C_3 d \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_1}(\mathbf{w}_{k,j}; \tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j}))\|_{\mathcal{A}^s} \\ &\le (C_3 d)^2 \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s}.\end{aligned}$$

根据 $\mathbf{B}_2$ 的结构以及空间变量上的恒等算子，我们有 $L(\mathbf{z}_k^{(2)}{}_{,j}) \le L_{\mathrm{x}}(\mathbf{w}_{k,j})$。引理 5.24 和引理5.29 给出

$$\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{APPLY}_{\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}}(\mathbf{z}_{k,j}^{(2)}; \tfrac{1}{8}\eta_{k,j}))\|_{\mathcal{A}^s} \le (C_4 d)^2 (L_{\mathrm{x}}(\mathbf{w}_{k,j}) + 1)^{2s} \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s}.$$

结合这两个结果与命题3.8(i)，我们得到

$$\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{APPLY}(\mathbf{w}_{k,j}; \tfrac{1}{2}\eta_{k,j}))\|_{\mathcal{A}^s} \le 2^{1+s} (C_5 d)^2 (L_{\mathrm{x}}(\mathbf{w}_{k,j}) + 1)^{2s} \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s}.$$

此外，根据右端项（6.3）的定义，以及命题 3.8(i)、注5.16、引理 5.24、引理 5.29 和假设 2(viii)，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathrm{RHS}(\tfrac{\eta_{k,j}}{2}))\| &\le C_6 d \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_1)\|_{\mathcal{A}^s} + C_7 d((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3)^s \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(i)}(\mathbf{f}_2)\|_{\mathcal{A}^s} \\ &\le C_8 d((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3)^s C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}^s.\end{aligned}$$

根据$\mathbf{w}_{k,j+1}$的定义、前述估计以及关于$\mathbf{w}_{k,j}$的假设，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j+1})\|_{\mathcal{A}^s} &\le \bar{C}_1 C_9 \bar{C}_3^{2s} (C_5 d)^2 \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3\big)^{2s(j+1)} (\tilde{C} d)^{2j} d^{p_0} C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}^s \\ &\le \bar{C}_1 \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big)^{2s(j+1)} (\tilde{C} d)^{2(j+1)} d^{p_0} C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}^s,\end{aligned}$$

其中我们假设 $\tilde{C}$ 的选取满足 $C_9 \bar{C}_3^{2s} C_5 \le \tilde{C}$ ，且不失一般性地，$\eta_{k,j} < 1$ 对每个 k, j均成立。若情况并非如此，我们可以改为求解一个经过缩放的$\bar{\ }$ $\tilde{\ }$问题。参数 C_1 和 C 与 d无关。

我们估计迭代项的支撑集大小。这里可以采用与 $\mathcal{A}^s$-范数类似的方法。设 $\bar{\mathbf{w}}_{k,\,j+1} = \mathbf{w}_{k,\,j} - \omega \mathbf{r}_{k,\,j}$。在重新压缩和粗化

步骤中，$\mathbf{w}_{k,\,j+1}$ 的支撑集大小不会增加。因此，只需给出 $\bar{\mathbf{w}}_{k,\,j+1}$的支撑界。根据 (6.2) 中的定义以及引理5.15、备注 5.16、引理 5.24 和引理 5.29，可得

$$\sum_{i=1}^{d} \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\operatorname{APPLY}(\mathbf{w}_{k,j};\tfrac{\eta_{k,j}}{2}))) \le C_{10} d^{1+\frac{1}{s}} (L(\mathbf{w}_{k,j})+1)^2 \eta_{k,j}^{-\frac{1}{s}} \Big(\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s} \Big)^{\frac{1}{s}}$$

根据假设 2(viii)，我们有

$$\sum_{i=1}^{d} \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\operatorname{RHS}(\tfrac{1}{2}\eta_{k,j}))) \le C_{11} d^{1+s^{-1}} ((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3) \eta_{k,j}^{-\frac{1}{s}} C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}$$

利用我们对 $\mathbf{w}_{k,\,j}$ 的了解，得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} \#\operatorname{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\bar{\mathbf{w}}_{k,j+1})) &\le \bar{C}_2 (\tilde{C}d)^{\frac{2j}{s}} d^{p_1} \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3\big)^{2j} \eta_{k,j}^{-\frac{1}{s}} C_{\mathbf{u},\mathbf{f}} \\ &\quad + C_{12} \bar{C}_3^2 \bar{C}_1^{\frac{1}{s}} (\tilde{C}d)^{\frac{2j}{s}} d^{p_1} \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3\big)^{2(j+1)} \eta_{k,j}^{-\frac{1}{s}} C_{\mathbf{u},\mathbf{f}} \\ &\le \bar{C}_2 (\tilde{C}d)^{\frac{2(j+1)}{s}} d^{p_1} \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big)^{2(j+1)} \eta_{k,j+1}^{-\frac{1}{s}} C_{\mathbf{u},\mathbf{f}},\end{aligned}$$

其中，我们取 C 充分大，使其取值取决于其他常数，并再次使用 $\eta_{k,\,j} < 1$。

现在我们估计迭代项的最大秩。应用引理 6.8 于 $\bar{\mathbf{w}}_{k,\,j}$ 并利用命题 6.10 以及算法 $\beta_2 > 0$ 中的要求 6.1，可得估计

$$L_{k,j+1} \le \tau^{-1} \log_2 \Big(C_{13} d^{\frac{p_1}{2}} \eta_{k,j}^{-1} \gamma^{kI+j} \bar{C}_{\mathbf{f}} \eta_{k,j+1}^{-\frac{1}{2s}} (\tilde{C}d)^{\frac{(j+1)}{s}} \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big)^{(j+1)} C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}^{\frac{1}{2}} \Big),$$

其中 $L_{k,\,j+1} = L(\mathbf{w}_{k,\,j+1})$。此处我们注意到，$C_{\mathbf{u},\,\mathbf{f}}$ 可能依赖于 d，但 $C_{\mathbf{u},\,\mathbf{f}} \le d^{\frac{1}{s}} \hat{C}_{\mathbf{u},\,\mathbf{f}}$其中 $\hat{C}_{\mathbf{u},\,\mathbf{f}} = \max_i \{ \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s}^{\frac{1}{s}}, \ \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{f}_1)\|_{\mathcal{A}^s}^{\frac{1}{s}}, \ \|\pi^{(i)}(\mathbf{f}_2)\|_{\mathcal{A}^s}^{\frac{1}{s}} \}$，根据假设4，它与 d 无关。此外，根据 $\eta_{k,\,j}$的定义，可得

$$\log_2 \gamma^k \le (|\log_2 \eta_{k,j+1}| + j|\log_2 \rho| + |\log_2(\rho^2 \varepsilon_0)|) \log_2(\gamma).$$

我们知道，γ 仅通过 C_{x}依赖于 d，且其关于 d至多呈线性增长。因此，存在常数 c, C_γ 使得

$$j+1 \le I \le c \ln d, \quad \gamma \le C_\gamma d^2. \tag{6.17}$$

将此与 $\log_2(x) \le x$ 结合，可得

$$\log_2 \Big(\big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big)^{(j+1)} \Big) \le c \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big).$$

定义 $C_{14}(d) = C_{13} C_{\mathbf{f}} C_{\mathbf{u},\,\mathbf{f}} \rho$ 并结合前面的估计，我们得到

$$\begin{aligned}\tau L_{k,j+1} &\le \log_2(C_{14}(d)) + \tfrac{j+1}{s} \log_2(\tilde{C}d) + \tfrac{p_1}{2} \log_2 d + (1 + \tfrac{j}{2s}) |\log_2 \eta_{k,j+1}| + I \log_2 \gamma^k \\ &\quad + j \log_2 \gamma + \log_2 \Big(\big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big)^{(j+1)} \Big) \\ &\le \log_2(C_{14}(d)) + \tfrac{j+1}{s} \log_2(\tilde{C}d) + \tfrac{p_1}{2} \log_2 d + (1 + \tfrac{j}{2s} + I \log_2 \gamma) |\log_2 \eta_{k,j+1}| \\ &\quad + (\log_2 \gamma)(j + jI|\log_2(\rho)| + I|\log_2(\rho^2 \varepsilon_0)|) + c\big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big) \\ &\le \tau \bar{C}_3 \big((\ln d)^2 |\ln \eta_{k,j+1}| + (\ln d)^3\big)\end{aligned}$$

当 C_3 足够大时，其中我们利用了不失一般性地令 $\ln d > 1$。因此，我们已经证明：如果命题对 $\mathbf{w}_{k,j+1}$ 成立，那么对 $\mathbf{w}_{k,j}$ 也成立。

最后一步，我们需要证明：若 (6.16) 对 $\mathbf{w}_{k+1,0}$ 成立，则对 $\mathbf{w}_{k,I}$ 也成立。根据引理 6.8、命题 6.10 以及 $\mathbf{w}_{k+1,0}=\mathbf{u}^{k+1}$，我们有

$$\begin{aligned}L_{k+1,0} &\le \tau^{-1}\log_2\Big(C_{15}d^{\frac{p_1}{2}}(\kappa_3 2^{-k+1}\varepsilon_0)^{-1}\gamma^{kI+I}\bar{C}_{\mathbf{f}}\eta_{k,I}^{-\frac{1}{2s}}(\tilde{C}d)^{\frac{I}{s}}\big((\ln d)^2|\ln\eta_{k,I}|+(\ln d)^3\big)^I C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}^{\frac{1}{2}}\Big)\\ &= \tau^{-1}\log_2\Big(C_{16}(d)d^{\frac{p_1}{2}}\eta_{k+1,0}^{-1-\frac{1}{2s}}\rho^{\frac{I}{2s}}\gamma^{kI+I}(\tilde{C}d)^{\frac{I}{s}}\big((\ln d)^2|\ln\eta_{k,I}|+(\ln d)^3\big)^I\Big)\end{aligned}$$

其中 $C_{16}(d)=C_{15}\kappa_3^{-1}2^{-\frac{1}{2s}}\rho\bar{C}_{\mathbf{f}}C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}^{\frac{1}{2}}$。此外，根据 $I\le c\ln d$，我们有如下估计

$$\log_2\Big(\big((\ln d)^2|\ln\eta_{k,I}|+(\ln d)^3\big)^I\Big)\le C_{17}\big((\ln d)^2|\ln\eta_{k+1,0}|+(\ln d)^3\big).$$

像之前一样继续推导，可得

$$L(\mathbf{w}_{k+1,0})\le \bar{C}_3((\ln d)^2|\ln\eta_{k+1,0}|+(\ln d)^3),$$

这里我们再次假设，C_3 的取值足够大，具体取决于其他常数。□

在本引理中，我们得到了时间和空间小波层级最大值的上界；而对于支撑集大小和 $\mathcal{A}^s$-拟范数的估计，我们只需要空间最大层级的上界。然而，对于秩估计，也需要总体最大层级的上界。

6.2.2. 迭代量的层次秩。为了利用引理 5.15、引理 5.24和引理 5.29给出的秩界，下一步我们估计这些界中出现的量，即

$$J(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j}),\quad J_0(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j}),\quad J(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j},\mathbf{z}_{k,j}^{(1)}),\quad J_0^{\mathrm{ad}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j},\mathbf{z}_{k,j}^{(2)})$$

以及与缩放矩阵相关的量

$$\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j})\|_{\ell_\infty},\quad \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j})\|_{\ell_\infty},\quad \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j})\|_{\ell_\infty},$$

以及

$$\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(1)})\|_{\ell_\infty},\quad \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(2)})\|_{\ell_\infty},\quad \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(1)})\|_{\ell_\infty}.$$

秩估计取决于已激活基指标的最大小波层级，其上界由引理 6.11给出。此外，正如第 5.38 节的式子（5.39）以及第 5.3 节的式子（5.59）和（5.60）所示，基于缩放矩阵的量可以利用迭代项中处于激活状态的基指标的最大小波层级来界定。

引理 6.12。 令 $\mathbf{w}_{k,\,j}$ 由算法 *6.1*定义。在定理*6.7*的假设下，有

$$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_{k,j})\le Cd^{p_2}(\ln d)^{b+4}\big((\ln d)^2|\ln\eta_{k,0}|+(\ln d)^3\big)^{8j}(1+|\ln\eta_{k,0}|)^{b+4}$$

其中 $b=\max\{b_{\mathbf{u}},b_{\mathbf{f}}\}$, $p_2=(\ln C+8\ln(1+c|\ln\rho|))c$, 且 $C,C>0$是与 d无关的常数。

证明。 本证明的基本思路与 [8, 第 6 节5]类似。差异在于采用了新的缩放矩阵 $\mathbf{D}_{\mathcal{X}}$、J 应用时间算子时引入的额外因子，以及应用初值算子时对小波层级的依赖。

首先，我们推导非转置算子的基于缩放矩阵的量的估计。二者都取决于$\mathbf{w}_{k,\,j}$ 的最大活跃层级，以及 $\mathcal{A}^s$-范数下的收缩。结合（6.14）和（6.17）可得

$$\ln\Big(\sum_{i=1}^d\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\le C_1((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3).$$

因此，由（5.38）、（5.39）和（5.59），可得

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}\big(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j}\big)\|_{\ell_\infty} &\le C_2((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3),\\ \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}\big(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j}\big)\|_{\ell_\infty} &\le C_3\left((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3\right)^2\\ \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}\big(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j}\big)\|_{\ell_\infty} &\le C_4\left((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3\right)^2\end{aligned}$$

以及由（5.37）和（5.57）可得估计

$$\begin{aligned}J\big(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j}\big) &\le C_5((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3),\\ J_0\big(\tfrac{1}{8\|\mathbf{B}\|}\eta_{k,j};\mathbf{w}_{k,j}\big) &\le C_6((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3)\end{aligned}$$

此外，我们还需要对中间结果$\mathbf{z}_k^{(1)}$、$_j$和$\mathbf{z}_k^{(2)}$、$_j$相关的量进行估计。我们得到

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(1)})\|_{\ell_\infty} &\le C_7\Big[1+L_{\mathrm{x}}(\mathbf{z}_{k,j}^{(1)})+|\ln\tfrac{\eta_{k,j}}{8}|+\ln\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{z}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big]\\ &\le C_8\Big[1+L_{\mathrm{x}}(\mathbf{w}_{k,j})+|\ln\eta_{k,j}|+\ln d+\ln\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_{k,j})\|_{\mathcal{A}^s}\Big)\Big]\\ &\le C_9((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3),\end{aligned}$$

其中，第二行再次使用了估计（5.38）、注释5.16以及 L_{x}($\mathbf{z}_k^{(1)}$、$_j$) 的层级衰减性质。类似地，我们有

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(1)})\|_{\ell_\infty} &\le C_{10}\left((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3\right)^2,\\ \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(2)})\|_{\ell_\infty} &\le C_{11}\left((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3\right)^2,\\ J\left(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(1)}\right) &\le C_{12}((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3),\\ J_0^{\mathrm{ad}}\left(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\mathbf{z}_{k,j}^{(2)}\right) &\le C_{13}((\ln d)^2|\ln\eta_{k,j}|+(\ln d)^3),\end{aligned}$$

其中我们使用 L(z$_k^{(2)}$,$_j$) $\le$ L_{x}(w$_{k,j}$)。此外，我们还需要估计 f$_{k,j}$ =f (1) $_{k,j}$ $^+$f (2) $_k$ 的秩。我们有 ˜f (1) $_{k,j}$ = RHS$_{\mathbf{f}_1}$($\frac{\eta_{k,j}}{8\|}$, B$\|$) 和 f (1) $_{k,j}$ = APPLY$_{\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}}$(˜f$_k^{(1)}$ $_{,j}$, $\frac{\eta_{k}}{8}$ $_{,j}$)。不失一般性，我们可以将引理 6.8 应用于 ˜f$_k^{(1)}$ $_{,j}$，因为与注释 6.5 类似， RHS$_{\mathbf{f}_1}$ 例程可以通过在最后执行一个粗化步骤来实现。结合引理 6.8、假设 2(viii) 和假设 2(x)，可得

$$L(\tilde{\mathbf{f}}_{k,j}^{(1)}) \le C_{14}(\ln d+|\ln\eta_{k,j}|).$$

再次利用假设 2(viii)，我们得到

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{Y}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\tilde{\mathbf{f}}_{k,j}^{(1)})\|_{\ell_\infty}, J\left(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\tilde{\mathbf{f}}_{k,j}^{(1)}\right) &\le C_{16}(\ln d+|\ln\eta_{k,j}|),\\ \|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\tilde{\mathbf{f}}_{k,j}^{(1)})\|_{\ell_\infty} &\le C_{17}(\ln d+|\ln\eta_{k,j}|)^2.\end{aligned}$$

对于 ˜f$_k^{(2)}$ $_{,\ j}$ = RHS$_{\mathbf{f}_2}$($\frac{\eta_{k,j}}{8\|}$ $_{,}$ B$\|$) 和 f$_k^{(2)}$ $_{,\ j}$ = APPLY$_{\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}}$(˜f(2)$_{k,\ j}$, $\frac{\eta_{k}}{8}$ $_{,j}$)，同理可得

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathsf{m}}_{\mathcal{X},0}^{\mathrm{ad}}(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\tilde{\mathbf{f}}_{k,j}^{(2)})\|_{\ell_\infty} &\le C_{18}(\ln d+|\ln\eta_{k,j}|)^2,\\ J_0^{\mathrm{ad}}\left(\tfrac{1}{8}\eta_{k,j};\tilde{\mathbf{f}}_{k,j}^{(2)}\right) &\le C_{19}(\ln d+|\ln\eta_{k,j}|).\end{aligned}$$

同时考虑假设 2(viii)，以及引理 5.15 和引理 5.29，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{f}_{k,j}) &\le C_{20}(\ln d + |\ln \eta_{k,j}|)^4\big(\operatorname{rank}_\infty(\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}_{k,j}) + |\operatorname{rank}(\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}_{k,j})|_\infty\big)\\ &\le C_{21}(1+|\ln \eta_{k,j}|)^{b_{\mathbf{f}}}(\ln d + |\ln \eta_{k,j}|)^4.\end{aligned}$$

因此，通过应用引理 5.15 两次，以及引理5.24 和引理 5.29，我们得到

$$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_{k,j+1}) \le C_{22}((\ln d)^2|\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3)^8 \operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_{k,j}) + C_{17}(\ln d + |\ln \eta_{k,j}|)^{b_{\mathbf{f}}+4}. \tag{6.18}$$

此外，根据定理6.7中的（6.8）以及假设3(xi)，我们有

$$\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_{k,0}) \le (d_{\mathbf{u}}^{-1}\ln[2(\alpha\kappa_1)^{-1}\rho_{\gamma_{\mathbf{u}}}\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}(\gamma_{\mathbf{u}})}\eta_{k,0}^{-1}\rho])^{b_{\mathbf{u}}} \le C(\mathbf{u})(|\ln \eta_{k,0}| + \ln d)^{b_{\mathbf{u}}},$$

其中用到了 $\kappa_1^{-1} \lesssim d$。回顾 $j \le I \le c\ln d$，可得

$$|\ln \eta_{k,j}| \le |\ln \eta_{k,0}| + c\ln d|\ln \rho|, \quad j = 0,\dots,I. \tag{6.19}$$

反复代入（6.18），得到

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_{k,j}) &\le C_{23}d^{c\ln C_{18}}((\ln d)^2(|\ln \eta_{k,0}| + c\ln d|\ln \rho|) + (\ln d)^3)^{8j}\\ &\quad\times(|\ln \eta_{k,0}| + c\ln d|\ln \rho| + \ln d)^{b+4}\\ &\le C_{24}d^{p_2}(\ln d)^{b+4}\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k,0}| + (\ln d)^3\right)^{8j}(1+|\ln \eta_{k,0}|)^{b+4},\end{aligned}$$

其中 $b = \max\{b_{\mathbf{u}}, b_{\mathbf{f}}\}$。 □

6.2.3. 算法的复杂度 *6.1.* 完成上述准备后，我们便可以证明定理6.7中的复杂度界。

定理 *6.7*的证明。 估计式（6.6）和（6.8）直接由（3.20）推出，而（6.7）和（6.9）则是（3.21）的中间结果。

现在我们转而证明关于所需运算次数的估计式（6.10）。根据假设2(ix)、引理 5.17、引理 5.25、引理5.31和注3.14，每个内迭代步的复杂度由层次奇异值分解主导；对于 RECOMPRESS 和 COARSEN例程，都需要进行这种分解。因此，根据注3.14 以及引理 6.15）中的（6.11，对于每个 k 和 j，其复杂度有如下上界：

$$C_1 d^q \operatorname{rank}_\infty^4(\mathbf{w}_{k,j})d^{p_1}(\tilde{C}d)^{\frac{2j}{s}}C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}\eta_{k,j}^{-\frac{1}{s}}\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3\right)^{2j},$$

其中 d^q 对应于 $C^{\mathrm{ops}}{}_{\mathbf{f}}(d)$ 的增长，根据假设 4，其至多为多项式级。利用 (6.19)，可得

$$\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k,j}| + (\ln d)^3\right)^{2j} \le d^{p_3}\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k,0}| + (\ln d)^3\right)^{2j}$$

其中 $p_3 = 2c\ln(1 + c|\ln \rho|)$。因此，外层循环 k 的复杂度上界为

$$C_2 d^{q+p_1+p_3}\operatorname{rank}_\infty^4(\mathbf{w}_{k,I})(\tilde{C}d)^{\frac{2(I+1)}{s}}C_{\mathbf{u},\mathbf{f}}\eta_{k,I}^{-\frac{1}{s}}\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k,0}| + (\ln d)^3\right)^{2I}.$$

此外，达到 $\mathbf{u}_k$ 所需的总工作量上界为

$$C_3 d^{q+p_1+p_3}\operatorname{rank}_\infty^4(\mathbf{w}_{k-1,I})(\tilde{C}d)^{\frac{2c\ln d+2}{s}}d^{\frac{1}{s}}\hat{C}_{\mathbf{u},\mathbf{f}}\eta_{k-1,I}^{-\frac{1}{s}}\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k-1,0}| + (\ln d)^3\right)^{2I}. \tag{6.20}$$

下一步，我们将上界表示为容差 ε_k 的形式。成立 $\eta_{k-1,0} = 2\rho\varepsilon_k$且 $\eta_{k-1,I} = 2\rho^{I+1}\varepsilon_k$。利用 $\rho \in (0, 1)$ 和 $I \le c\ln d$，得到 $\eta_{k-1,I}^{-\frac{1}{s}} \le (2\rho)^{-\frac{1}{s}}d^{cs^{-1}|\ln \rho|}\varepsilon_k^{-\frac{1}{s}}$。因此，我们得到

$$\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k-1,0}| + (\ln d)^3\right)^I \le (\ln d)^{c\ln(1+|\ln(2\rho)|)+3c\ln d}(1+|\ln \varepsilon_k|)^{c\ln d}. \tag{6.21}$$

将此结果与引理 6.12 结合可得

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}_\infty(\mathbf{w}_{k-1,I}) &\le C_4 d^{p_2}(\ln d)^{b+4}\left((\ln d)^2|\ln \eta_{k-1,0}| + (\ln d)^3\right)^{8I}(1+|\ln \eta_{k-1,0}|)^{b+4}\\ &\le C_5 d^{p_2}(\ln d)^{b+4+8c\ln(1+|\ln 2\rho|)+24c\ln d}(1+|\ln \varepsilon_k|)^{b+4+8c\ln d}.\end{aligned}$$

将这个上界代入秩的（6.20）式，可得

$$\operatorname{flops}(\mathbf{u}_\varepsilon) \le C_6 d^{p_4}(\ln d)^{4b+16+34c_{\ln(1+|\ln 2\rho|)}}(\ln d)^{102c_{\ln d}} d^{2cs^{-1}\ln d}\varepsilon_k^{-\frac{1}{s}}(1+|\ln \varepsilon_k|)^{4b+16+34c_{1\ln d}}$$

其中 $p_4 = q + p_1 + 4p_2 + p_3 + \frac{3}{s} + cs^{-1}|\ln\rho| + 2cs^{-1}\ln \tilde{C}$，这表明（6.10）。 □

7. Numerical Experiments

7.1. **基本考量。** 在我们对算法6.1的实现中，所有层级张量表示都使用线性维数树

$$\mathbb{T}_d = \alpha^* \cup \bigcup_{i=1}^{d-1}\left\{\{i\},\{i+1,\dots,d\}\right\}.$$

我们使用 L_2-正交归一、连续可微的分段多项式 Donovan-Geronimo-Hardin 多小波 [23]，其多项式次数为 6，且 L_2- 逼近阶为 7。这些小波满足 2.2 中所述的假设，并用于第 5.1 节和 5.2节，尤其是要求所得空间乘积基满足 $L_2(\Omega)$-正交归一性；根据命题2.3，这一点至关重要。特别是，经过适当的重缩放，我们得到一维算子 s^*的可压缩性$\mathbf{T}_2$，以及$\mathbf{T}_t$的超压缩性，详见注释 5.8。

此外，我们采用 [8, 第 7 节2] 中介绍的技术来提高 apply 的实际计算效率。其基本思路是，系统地将 recompress例程应用于 apply中生成的中间结果。该策略在实践中显著降低了计算成本。

7.2. 高维热方程。 作为一个测试案例，我们考虑热方程的两个版本

$$\partial_t u - \Delta u = g \quad \text{in } \Omega = (0,1)^d, \qquad u|_{t=0} = h, \tag{7.1}$$

空间变量满足狄利克雷边界条件，其中一个版本具有 $\|g\|_{L_2} = 1$ ，且初值为零 $h = 0$；另一个版本具有 $\|h\|_{L_2} = 1$ ，且源项为零 $g = 0$。在数据按此方式归一化后，以下我们考虑绝对残差范数。正如注 5.1 中所述，此时算子 $\mathbf{T}_x$ 的层次张量表示具有简单结构，其秩为二。

7.2.1. 零初始条件。 我们首先考虑初始条件为零的情形。请注意，这类情形无法直接采用基于动态低秩近似的其他方法处理，例如 [9]中所述的方法。为简单起见，我们采用函数 g ，该函数可表示为时间维度及各空间维度上的单个小波基元素的张量积。算法 6.1 中的参数取值与收敛性分析中相同。

图2 展示了空间维数为 $\mathcal{X}$时，残差以及相应的误差 $d \in \{8, 32, 128\}$范数估计随迭代次数的变化。该方法的表现符合预期：由于重新压缩和粗化程序，每次外层循环步骤后，两种估计都会增加。由于参数 d对 κ_1的依赖性，内层循环所需的内层步数会随着 d的增加而增加。图3展示了一维支撑集之和以及最大秩随计算得到的残差范数估计的变化；这些估计与 $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_{k,\,j}\|$成正比。随着迭代进行，可以观察到明显的预渐近区间；只有当残差范数较小时，才会呈现定理6.7所预期的收敛速率，而这些较小的残差范数是

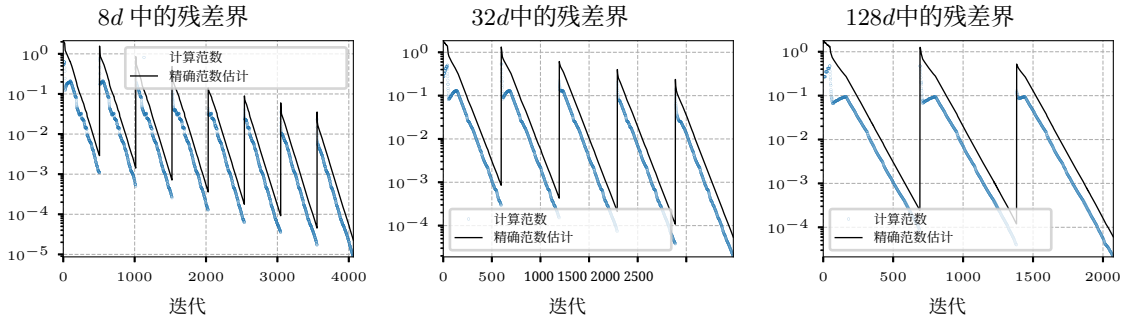

FIGURE 2. 热方程含源项时，计算所得误差估计的范数及误差上界随迭代次数的变化，其中$d = 8$，32，128。

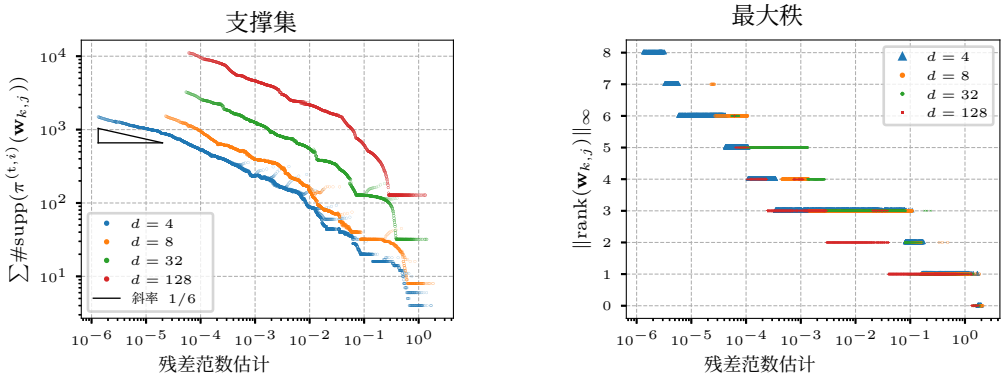

FIGURE 3. 热方程含源项时，支撑集大小与每次迭代的最大秩之和相对于当前残差范数估计的变化，其中 $d = 4$，8，32，128。

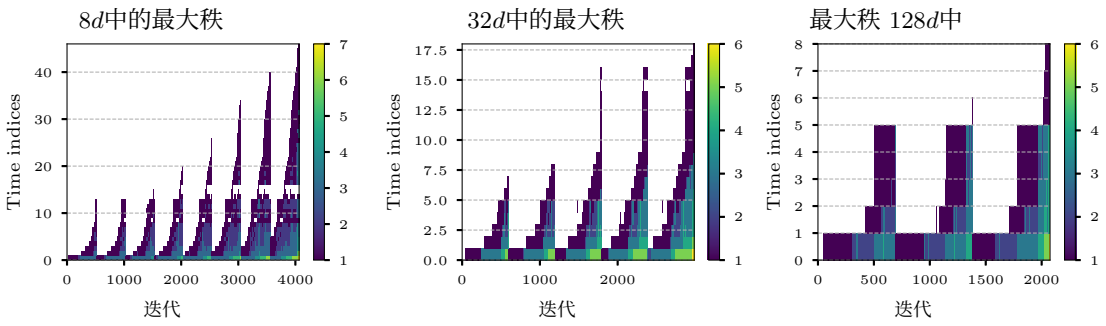

FIGURE 4. 热方程含源项时，各时间索引对应的最大秩随迭代次数的变化，其中 $d = 8$，32，128。

在针对 $d = 4$ 的额外测试中达到。此外，以半对数图绘制的最大秩 $\mathrm{rank}_\infty(\mathbf{w}_{k,j})$ 与残差范数估计呈对数依赖关系。

对于相同的 d，图4 展示了各时间索引中独立低秩近似的最大秩随迭代次数的变化。可以看出，在相当的外层迭代次数下，较大的 d 对应的秩会更早增加。

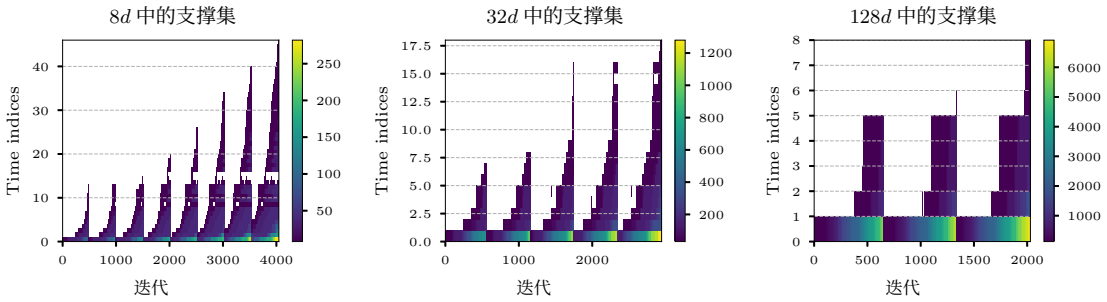

FIGURE 5. 热方程中，带源项时各时间索引对应的一维支撑集之和与迭代次数无关，$d = 8$，32，128。

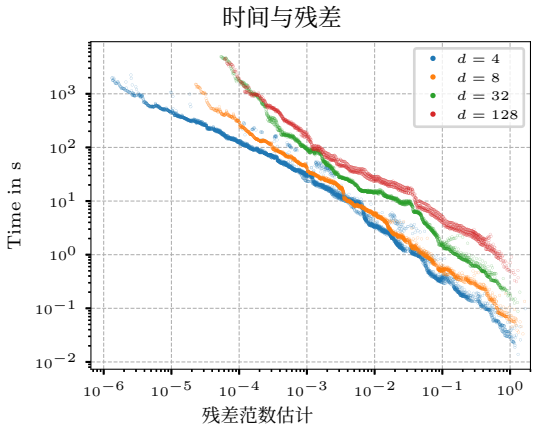

FIGURE 6. 热方程中带源项时，$d = 4$，8，32，128 的每个内迭代步所需时间与达到的残差估计之间的关系。

类似地，图5展示了每个时间索引的一维支撑集之和。总体而言，我们观察到，对于大多数已激活的时间基索引，仅需少量活跃空间基函数和相对较低的最大秩。

图6 展示了每个内迭代步所需时间与该步完成后达到的残差范数估计之间的关系，其中时间以秒为单位，可作为运算次数的衡量标准。我们观察到残差范数估计呈现代数行为，但与图3相比可见，这仍处于预渐近区间。成本对 d的依赖也受到相同因素的影响，但结果与在可观测范围内对 d 呈多项式依赖一致。

7.2.2. 零源项。 作为第二个测试案例，我们考虑源项为零的情形 $g = 0$ （7.1）。与前一个测试案例类似，为简便起见，我们采用函数 h 作为初始条件，该函数可表示为每个空间维度上一个小波基元素的张量积。

随着迭代推进，近似的时间支撑集增长得更快，因此该测试案例的计算成本更高。因此，此处我们将空间维数限制为 $d = 4$、8、16。此外，我们在 APPLY、COARSEN 和 RECOMPRESS 中采用比收敛性分析中更大的误差容限；事实证明，这些误差容限在实际应用中比必要的更严格。具体而言，在算法

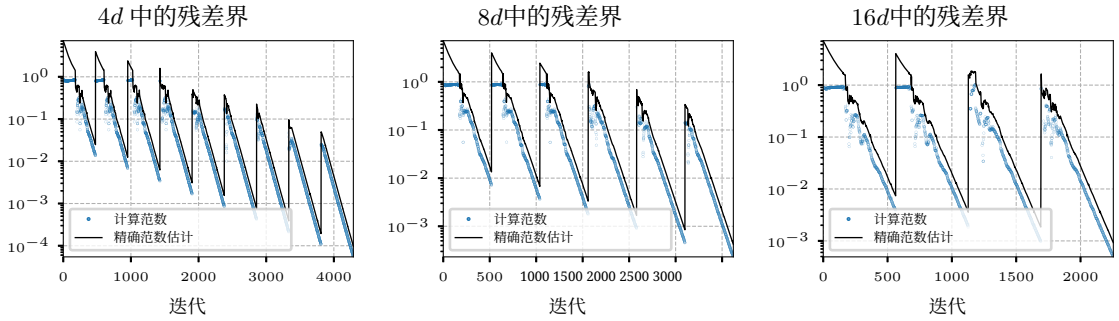

FIGURE 7. 热方程（给定初值）中计算得到的误差估计范数和误差上界随迭代次数的变化，针对$d = 4$，8，16。

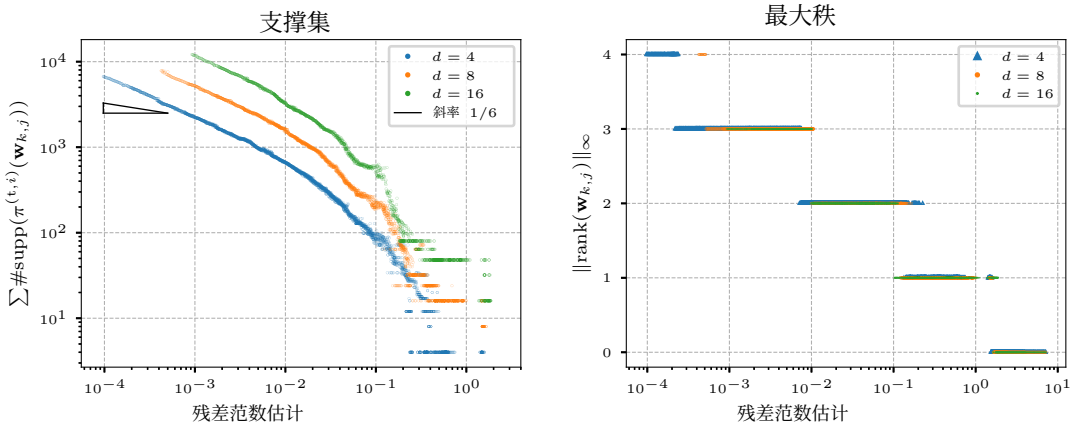

FIGURE 8. 热方程（给定初值）中支撑集之和及每次迭代的最大秩随当前残差范数估计值的变化，针对 $d = 4$，8，16。

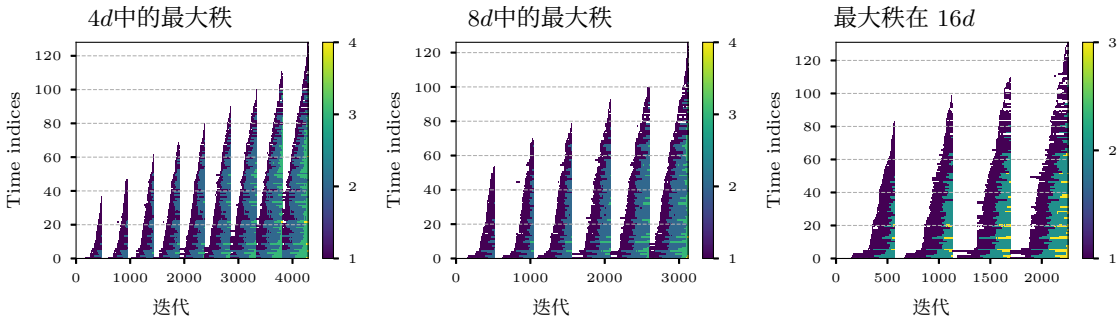

FIGURE 9. 热方程（给定初值）中各时间索引对应的最大秩随迭代次数的变化，针对 $d = 4$，8，16。

6.1 中，我们将第 10 行的$\eta_{k,\,j}$ 替换为 $10\eta_{k,\,j}$，并将第 11 行替换为 $2\eta_{k,\,j}$，而未观察到这对该方法的收敛性产生影响。

下文呈现与第7.2.1节相同的量。图7 展示了三种不同空间维数 $\mathcal{X}$下，相对于迭代次数的残差以及相应的估计 $d \in \{4, 8, 16\}$，同样具有

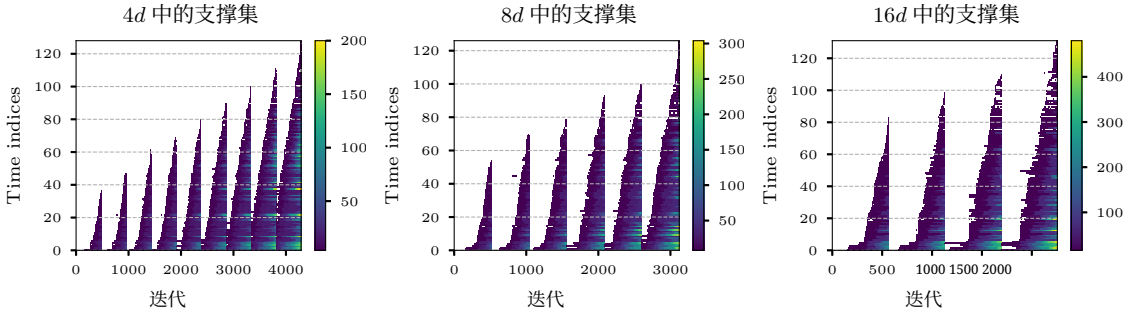

FIGURE 10. 热方程中每个时间索引对应的一维支撑集之和随迭代次数的变化，初值为 $d = 4$，8，16。

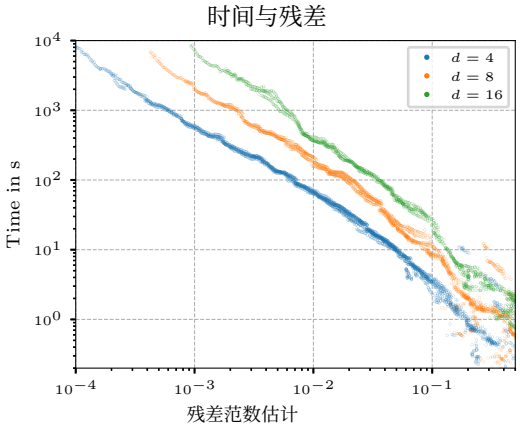

FIGURE 11. 对于热方程，初值为 $d = 4$，8，16 时，每个内迭代步所需的时间随所得残差估计的变化。

预期的行为。图8、9和10 展示了一维支撑集以及最大秩的结果。图8比较了一维支撑集大小之和与计算得到的残差范数估计，可以看出，前渐近行为仍然存在。图11 展示了不同空间维数下，每个内迭代步的耗时与残差估计之间的关系。与前一个测试案例一样，我们观察到计算成本对问题维数呈多项式依赖。总的来说，这些结果与初值为零的前一个测试案例一致。然而，由于计算成本较高，在当前案例中，一维支撑集大小尚未进入渐近区间。

8. CONCLUSION AND OUTLOOK

我们构建了一种用于抛物型偏微分方程的时空自适应求解器，该求解器将时间方向上的稀疏小波近似与空间变量方向上的低秩层次张量近似相结合。对于相对于精确解的自然范数，该方法可给出有保证的误差界： $L_2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))$。此外，我们还根据精度相近的最佳近似所对应的层次秩和离散化规模，获得了近乎最优的层次秩与离散化规模上界；并据此给出了该方法的总计算复杂度关于相对于方程精确解的总误差的相应上界。

本文展示了如何构造此类方法，以及它们如何适用于高维问题 d。在此基础上，后续研究有多个方向。关于该方法的定量效率，基于本文构造的自适应残差近似，还有若干进一步改进的可能。特别是，可以用逐步细化的伽辽金离散（如 [1]中所述）取代概念上简单但定量上代价较高的、作用于整个序列空间的近似理查森迭代。对于由此产生的伽辽金子问题，可以考虑采用针对稀疏与低秩近似相结合这一特定结构而优化的求解器。此外，将该方法推广到对流扩散问题也值得研究。

未来工作的另一个方向，是研究解在我们的自适应方案所利用的特定意义下的可逼近性，尤其是在 d较大的情形。一方面，方法的性能取决于低维收缩$\mathbf{u}$的最佳 n项近似 $\pi^{(\mathrm{t},i)}$，其中 $i=1,\dots,d$；这可以解释为：利用自适应张量积小波逼近解关于时间变量和单个空间变量的密度。另一方面，方法的性能取决于对每个固定时间基指标 $\nu_\mathrm{t}\in\vee_\mathrm{t}$，系数张量$\mathbf{u}_{\nu_\mathrm{t}}$的空间层次低秩近似的秩。

由于我们的方法并未明确利用关于解的可逼近性的任何假设，却能保证自动生成近最佳近似，因此可将其视为对此类可逼近性的数值检验。数值结果表明，层次秩相对于解的总误差呈（多项式）对数增长。这使我们推测，对于这类抛物型问题，如果数据（例如初值和源项）的最佳逼近秩呈多项式对数增长，那么这种多项式对数秩增长也会传递到解上。此类结果已针对 [19], 中的椭圆问题得到，但据我们所知，抛物型问题尚无可比结果。需要注意的是，低秩近似的这种指数型收敛通常是解的一种结构性特征，因此，光滑性类一般元素的奇异值衰减估计并未涵盖这一点。例如， [10, 26] 中关于具有主导混合光滑性的函数的估计，只能得到秩意义下的代数收敛。结合本文的数值结果以及 [1, 8], 中椭圆情形的结果来看，这对所研究偏微分方程问题的解而言通常远非锐利估计。

AppendixA. Exponential Sum Approximations

本节给出定理 4.1 的证明。获得指数和近似的出发点是基于逆拉普拉斯变换的积分表示。通过梯形公式对经过适当变换的形式进行近似。我们首先给出一个关于道森函数在复平面中特定直线上的导数值的辅助结论。

引理 A.1. 有

$$\left|1-2c(\sqrt{3}\pm i)F\big(c(\sqrt{3}\pm i)\big)\right|\le 1+\sqrt{\frac{2\pi}{e}}+\frac{2}{\sqrt{3}}x_{\min}F(x_{\min})=:c_{\mathrm{daw}}$$

对每个 $c\ge 0$，其中 $x_{\min}$ 是 $\frac{dF}{dx}$ *[47]*的全局极小点。 —

证明。我们将给出“+”情形的证明。另一种情形可以用相同的方法证明。令 $c\ge 0$ 为任意值，并设 $z=c(\sqrt{3}+i)$。首先，我们从估计 $|F(z)|$开始。

选取一条轴平行轮廓，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^z e^{\xi^2}d\xi &= \int_0^{\operatorname{Im} z} e^{(iy)^2}dy + \int_0^{\operatorname{Re} z} e^{(x+i\operatorname{Im}(z))^2}dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(c) + e^{-c^2}\int_0^{\sqrt{3}c} e^{x^2}e^{2icx}dx.\end{aligned}$$

Usi根据道森函数的定义以及三角不等式，我们得到

$$|F(z)| = \left|e^{-z^2}\right|\left|\int_0^z e^{\xi^2}d\xi\right| \le e^{-2c^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(c) + F(\sqrt{3}c).$$

接下来注意到，道森函数 $\frac{dF}{dx} = 1 - 2xF$ 的导数在 $x_{\min}$ 处取得全局最小值。因此，

$$\begin{aligned}|1 - 2zF(z)| &\le 1 + 2|z||F(z)| \\ &\le 1 + 2ce^{-2c^2}\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(c) + 2cF(\sqrt{3}c) \\ &\le 1 + \sqrt{\frac{2\pi}{e}} + \frac{2}{\sqrt{3}}x_{\min}F(x_{\min}) = c_{\mathrm{daw}}.\end{aligned}$$

□

我们采用以下定义及其逼近误差界，出自 [40]。

定义 A.2. 对于 $\zeta > 0$，令 $D_\zeta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \zeta\}$，对于 $0 < \varepsilon < 1$，令

$$D_\zeta(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \varepsilon^{-1}, |\operatorname{Im} z| < \zeta(1-\varepsilon)\}.$$

对于在 D_ζ 中解析的 v，令

$$N_1(v, D_\zeta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\zeta(\varepsilon)} |v(z)||\mathrm{d}z|.$$

定理 A.3 (参见 [40, 定理 3.2。1])。 设 g 在 D_ζ 中解析，且满足 $N_1(g, D_\zeta) < \infty$，则

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(kh)\right| \le \frac{e^{-\pi\zeta/h}}{2\sinh(\pi\zeta/h)}N_1(g, D_\zeta).$$

定理 *4.1* 的证明。 我们的出发点是如下表示

$$\frac{\sqrt{s}}{s+\tilde{a}} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{y}}\Big(1 - 2\sqrt{ya}F\big(\sqrt{ya}\big)\Big)e^{-ys}\,\mathrm{d}y,$$

这里我们利用道森函数的性质 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) + 2xF(x) = 1$，该函数由 F（4.4）给出。代入 $ya = e^x$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{s}}{s+a} &= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(1 - 2e^{\frac{x}{2}}F\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\right)e^{\frac{x}{2} - \frac{1}{a}e^x s}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\tfrac{dF}{dx}(e^{x/2})e^{-\frac{1}{a}e^x s}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

被积函数在条带 $\{x+iy:\ x\in\mathbb{R},\ |y|<\pi/3\}$内全纯。为了应用定理A.3，我们需要估计以下量

$$N_1(g,D_\zeta)=\int_{\mathbb{R}}|g(x+i\zeta)|\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}|g(x-i\zeta)|\,\mathrm{d}x$$

其中 $g(x)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}\big(1-2e^{x/2}F(e^{x/2})\big)e^{\frac{x}{2}-\frac{1}{a}e^{x}s}$。由引理A.1，可得

$$\left|1-2e^{\frac{x\pm yi}{2}}F\left(e^{\frac{x\pm yi}{2}}\right)\right|\le c_{\mathrm{daw}}$$

对于 $y=\pi/3$ 以及所有 $x\in\mathbb{R}$。此外，

$$\begin{aligned}\left|e^{\frac{x+yi}{2}-\frac{1}{a}e^{x+yi}t}\right|&=e^{\mathrm{Re}(\frac{x+yi}{2}-\frac{1}{a}e^{x+yi}t)}\\&=e^{\frac{x}{2}-\frac{1}{a}e^{x}\cos(y)t}.\end{aligned}$$

对于负虚部，使用 $\cos(y)=\cos(-y)$ 也可以进行相同的变换。综合以上结果，对于 $\zeta\in(0,\frac{\pi}{3})$，这保证了 $\cos(\zeta)>0$，从而得到

$$N_1(g,D_\zeta)\le 2\frac{c_{\mathrm{daw}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{\frac{x}{2}-\frac{1}{a}e^{x}\cos(\zeta)s}\,\mathrm{d}x=\frac{2c_{\mathrm{daw}}}{\sqrt{s\ \cos(\zeta)}},$$

其中我们用到了 $\sqrt{\pi}$误差函数$(\sqrt{c}\ e^{x/2})/\sqrt{c}$是 $e^{\frac{x}{2}-ce^{x}}$在 $c>0$的原函数。定理A.3 由此可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{s}}{s+a}-\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_a w_a(kh_a)e^{-\alpha_a(kh_a)s}\right|&\le\frac{e^{-\frac{\pi^2}{3h_a}}}{2\sinh(\frac{\pi^2}{3h_a})}2c_{\mathrm{daw}}\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{s}}\\&\le\frac{e^{-\frac{\pi^2}{3h_a}}}{2\sinh(\frac{\pi^2}{3h_a})}10(1+a)\frac{\sqrt{s}}{s+a}\le\delta\frac{\sqrt{s}}{s+a}\end{aligned}$$

取 h_a 于 (4.5) 中，其中用到了 $s\ge1$ 以及 $2c_{\mathrm{daw}}\sqrt{2}\le10$ （在第二行中）。

接下来，我们将双无限和从上方截断于指标 n_a^+，其最大误差为 δ。我们利用

$$\frac{2}{c+1}e^{-ce^{x}}F(e^{x/2})+\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{c}}{c+1}\,\mathrm{erf}\big(\sqrt{c}e^{x/2}\big)$$

是 $(1-2e^{\frac{x}{2}}F(e^{\frac{x}{2}}))e^{\frac{x}{2}-ce^{x}}$ 的原函数。令 $u_a(x)=w_a(x)e^{-\alpha_a(x)s}$ 和 $c=s/a$，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k>n_a^+}h_a u_a(kh_a)&\le\int_{n_a^+}^{\infty}h_a w_a(xh_a)\,e^{-\alpha_a(xh_a)s}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}}\int_{n_a^+h_a}^{\infty}\left(1-2e^{\frac{x}{2}}F\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\right)e^{\frac{x}{2}-ce^{x}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}}\left(\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{c}}{c+1}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{c}e^{\frac{n_a^+h_a}{2}}\right)-\frac{2}{c+1}e^{-ce^{n_a^+h_a}}F\left(e^{\frac{n_a^+h_a}{2}}\right)\right)\\&\le\frac{\sqrt{s}}{s+a}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{n_a^+h_a}{2}}\right)<\delta\frac{\sqrt{s}}{s+a}\end{aligned}$$

其中 n_a^+ 根据（4.6）选取。最后一行中，我们利用互补误差函数 $\mathrm{erfc}=1-\mathrm{erf}$ 单调递减，且 $s\ge1$。

最后，我们截断指标负值范围内的求和。为此，对于固定的 $K>1$，我们将 s 的可能取值区间限制为 $[1,K]$。我们利用这样一个事实：当 $c>0$时，$(1-2e^{-\frac{x}{2}}F(e^{-\frac{x}{2}}))e^{-\frac{x}{2}-ce^{-x}}$的原函数为

$$-\frac{2}{c+1}e^{-ce^{-x}}F\big(e^{-\frac{x}{2}}\big)-\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{c}}{c+1}\,\mathrm{erf}\big(\sqrt{c}e^{-\frac{x}{2}}\big).$$

像之前一样令 $c = s/a$，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k<-n} h_a u_a(kh_a) &= \sum_{k>n} h_a u_a(-kh_a)\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}} \int_{nh_a}^{\infty} \left(1 - 2e^{-\frac{x}{2}F\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)}\right) e^{-\frac{x}{2}-ce^{-x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}}\left(\frac{2}{c+1}e^{-ce^{-nh_a}}F\left(e^{-\frac{nh_a}{2}}\right) + \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{c}}{c+1}\operatorname{erf}\left(\sqrt{c}e^{-\frac{nh_a}{2}}\right)\right)\\ &= \frac{\sqrt{s}}{s+a}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{nh_a}{2}}\right) + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{s}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{s}{a}e^{-nh_a}}F\left(e^{-\frac{nh_a}{2}}\right)\right)\\ &= \frac{\sqrt{s}}{s+a} f_a(s, nh_a).\end{aligned}$$

如果假设 n 足够大，以确保 $F(e^{-(nh_a)/2})\ e^{-(nh_a)/2} < \frac{1}{2}$，则不难验证，函数 $f_a(s,\ x)$ 在某个区间 $s \in [0, z]$ 上单调递减，而在剩余区间 $s \in (z,\ \infty)$ 上单调递增。因此，我们得出结论：对于给定的 x 和时间区间 $[1, K]$，函数 $f_a(s,\ x)$ 的最大值必定位于某个边界值处。□

Appendix B. Auxiliary proofs

引理 *3.4*的证明。对于 $\mathbf{u} \in \ell_2(\vee)$ 和 $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^{\vee_t}$，令 $\tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{u},\mathbf{r}}\colon \ell_2(\vee) \to \mathcal{F}(\mathbf{r})$ 定义为 $\mathbf{b}$ y

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{u},\mathbf{r}}\mathbf{u}\| = \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}(\mathbf{r})} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|.$$

该算子具有如下表示

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{u},\mathbf{r}} = \sum_{\nu_t \in \vee_t} \mathbf{E}_{\nu_t} \otimes \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{x},\mathbf{u}_{\nu_t},\mathbf{r}_{\nu_t}}$$

其中 $\mathrm{E}_{\nu_t} = \mathrm{e}_{\nu_t}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}_{\nu_t}$，并且 $\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{x},\mathbf{u}_{\nu_t},\mathbf{r}_{\nu_t}}\colon \ell_2(\vee_{\mathrm{x}}) \to \mathcal{H}(r_{\nu_t})$ 是线性投影，使得 $\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{x},\mathbf{u}_{\nu_t},\mathbf{r}_{\nu_t}}\mathbf{u}_{\nu_t}$ 是 $\mathcal{H}(\mathbf{r}_{\nu_t})$ 中的最佳逼近，如 [6, 引理 1] 所示。该表示的一个直接推论是算子 $\tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{u},\mathbf{r}}$ 也是线性投影。根据命题 3.3，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathrm{P}_{\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u},\alpha\eta)}\mathbf{v}\| &\leq \kappa_P \inf_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}(\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u},\alpha\eta))} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|\\ &\leq \kappa_P \|\mathbf{v} - \tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{u},\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u},\alpha\eta)}\mathbf{v}\|\\ &\leq \kappa_P \left(\|(\mathbf{I} - \tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{u},\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u},\alpha\eta)})(\mathbf{v} - \mathbf{u})\| + \|\mathbf{u} - \tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{u},\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u},\alpha\eta)}\mathbf{u}\|\right)\\ &\leq \kappa_P(1+\alpha)\eta.\end{aligned}$$

根据秩的定义 $_\infty\left(\hat{}\mathrm{P}_{\kappa_P(1+\alpha)\eta}(\mathbf{v})\right)$ 被选为最小值，以达到上界 $\kappa(1+\alpha)\eta$，由此得到（3.6）。此外，由三角不等式可立即推出（3.5）。□

定理 *3.13* 的证明。将引理 3.5 中的（3.4）与（3.18）中粗化算子的定义结合起来，再应用三角不等式，即可得到关系式（3.19）。

式（3.20）中的结论可直接由定理3.6推出。额外的粗化算子至多会降低秩，不会影响这些估计。

ˆ主要部分是对估计式（3.21）的证明。令 ˆ$\mathbf{w} = \mathbf{P}_{\kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha)\eta}(\mathbf{v})$。令$N \in \mathbb{N}$ 为满足 $\|\mathbf{u} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{u},N)}\mathbf{u}\| \leq \alpha\eta$的最小值。于是

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{w}} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{u},N)}\hat{\mathbf{w}}\| &\leq \|(\mathbf{I} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{u},N)})(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})\| + \|\mathbf{u} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{u},N)}\mathbf{u}\| \\ &\leq \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}\| + \|\mathbf{u} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{u},N)}\mathbf{u}\| \leq (1 + \kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha) + \alpha)\eta,\end{aligned}$$

其中，我们使用引理 3.4 对右端的第一项求上界。因此，由（3.17），可得

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{w}} - \mathrm{R}_{\Lambda(\hat{\mathbf{w}},N)}\hat{\mathbf{w}}\| &\leq \kappa_{\mathrm{C}}\|\hat{\mathbf{w}} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\hat{\mathbf{w}},N)}\hat{\mathbf{w}}\| \\ &\leq \kappa_{\mathrm{C}}\|\hat{\mathbf{w}} - \mathrm{R}_{\bar{\Lambda}(\mathbf{u},N)}\hat{\mathbf{w}}\| \leq \kappa_{\mathrm{C}}(1+\alpha)(\kappa_{\mathrm{P}}+1)\eta.\end{aligned} \tag{B.1}$$

不失一般性，设 $N \geq d$。考虑到最佳粗化算子具有最优性（3.16），性质（3.9）给出

$$\begin{aligned}\alpha\eta < \|\mathbf{u} - \mathrm{R}_{\Lambda(\mathbf{u},N-1)}\mathbf{u}\| &\leq \inf_{\sum_i \#\Lambda^{(t,i)} \leq N-1} \left(\sum_{i=1}^{d} \left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}) - \mathrm{R}_{\Lambda^{(t,i)}}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{d} \inf_{\#\Lambda^{(t,i)} \leq (N-1)/d} \left\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}) - \mathrm{R}_{\Lambda^{(t,i)}}\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\right\| \\ &\leq \left(\frac{N-1}{d}\right)^{-s} \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} \\ &\leq 2^s \left(\frac{N}{d}\right)^{-s} \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s}\,.\end{aligned}$$

ˆ 注意到，根据（B.1），粗化算子$\mathsf{C}_{\kappa_{\mathrm{C}}(\kappa_{\mathrm{P}}+1)(1+\alpha)\eta}$ 至多保留 N 项。将这一事实与前面的估计结合，可得

$$\sum_{i=1}^{d} \#\operatorname{supp}\left(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\right) \leq N \leq 2d\alpha^{-\frac{1}{s}}\eta^{-\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{B.2}$$

由此证明了（3.21）中的第一个结论。现在令 ˆ $N_i = \#\mathrm{supp}(\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}))$，其中 $i = 1, \ldots, d$ˆ ˆ ˆ 且 $N = \sum_i N_i$。不失一般性，可假设 $N_i > 0$，其中 $i = 1, \ldots, d$。对 B.2）关于 η 求解并代入（3.19），可得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\eta\| \leq \hat{N}^{-s} C(\alpha) d^s \sum_{i=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} \tag{B.3}$$

其中 $C(\alpha) = 2^s\alpha^{-1}(1 + \kappa_{\mathrm{P}}(1+\alpha) + \kappa_{\mathrm{C}}(\kappa_{\mathrm{P}}+1)(1+\alpha))$.

令 ˆ$\mathbf{u}_i$ 为最佳 ˆ N_i项近似 $\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})$，则利用命题 3.8 的性质可得

$$\begin{aligned}\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s} &\leq 2^s \left(\|\hat{\mathbf{u}}_i\|_{\mathcal{A}^s} + \|\hat{\mathbf{u}}_i - \pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s}\right) \\ &\leq 2^s \left(\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} + (2\hat{N}_i)^s \|\hat{\mathbf{u}}_i - \pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|\right) \\ &\leq 2^s \left(\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} + (2\hat{N}_i)^s \left(\|\hat{\mathbf{u}}_i - \pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\| + \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}) - \pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|\right)\right) \\ &\leq 2^s \left((1+2^s)\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\| + (2\hat{N}_i)^s \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}) - \pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|\right),\end{aligned}$$

其中，第二行中我们利用了 $\#\,\mathrm{supp}(\hat{\mathbf{u}}_i - \pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}\eta)) \leq 2\hat{N}_i$。由柯西-施瓦茨不等式可得如下逐分量估计

$$|\pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}(\mathbf{u}) - \pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}(\mathbf{w}_\eta)| \leq \pi^{(\mathrm{t},i)}_{\nu_\mathrm{t},\nu_\mathrm{x}}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\eta),$$

由此得到

$$\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u}) - \pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\| \le \|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\eta)\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\eta\|.$$

结合这一事实与（B.3），我们得到

$$\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{w}_\eta)\|_{\mathcal{A}^s} \le 2^s(1+2^s)\|\pi^{(\mathrm{t},i)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} + 2^s C(\alpha) d^s \hat{N}^{-s} (2\hat{N}_i)^s \left(\sum_{k=1}^{d} \|\pi^{(\mathrm{t},k)}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{A}^s} \right).$$

对 $i = 1, \ldots, d$ 求和，并注意到 $\hat{N}^{-s} \sum_{i=1}^{d} (2\hat{N}_i)^s \le 2^s d^{\max(0,1-s)}$，我们得到（3.21）中的第二个结论。□

References

1. M. Ali 和 K. Urban, *HT-AWGM: a hierarchical Tucker-adaptive wavelet Galerkin method for high-dimensional elliptic problems* **46** 2020 4, 59, 34 , 《Adv. Comput. Math.》() 。第 Paper No. 期。2. R. Andreev, *Stability of sparse space-time finite element discretizations of linear parabolic evolution equations* **33** 2013 1, 242 260 , 《IMA J. Numer. Anal.》（），第 – 期。3. , *Wavelet-in-time multigrid-in-space preconditioning of parabolic evolution equations*, 《SIAM J. Sci. Comput.》**38** （2016），第 1 期，A216–A242。4. R. Andreev 和 C. Tobler, *Multilevel preconditioning and low-rank tensor iteration for space-time simultaneous discretizations of parabolic PDEs* **22** 2015 2, 317 , 《Numer. Linear Algebra Appl.》（），第 – 337 期。5. M. Bachmayr, *Low-rank tensor methods for partial differential equations*, 《Acta Numer.》**32** （2023），1–121。MR 4586820。6. M. Bachmayr 和 W. Dahmen, *Adaptive near-optimal rank tensor approximation for high-dimensional operator equations* **15** 2015 4, 839 898 , 《Found. Comput. Math.》（），第 – 期。7. , *Adaptive low-rank methods for problems on Sobolev spaces with error control in* L_2, , 《ESAIM Math. Model. Numer. Anal.》**50** （2016），第 4 期，1107–1136。8. , *Adaptive low-rank methods: problems on Sobolev spaces*, 《SIAM J. Numer. Anal.》**54** （2016），第 2 期，744–796。9. M. Bachmayr、H. Eisenmann、E. Kieri 和 A. Uschmajew, *Existence of dynamical low-rank approximations to parabolic problems* **90** 2021 330, 1799 1830 , 《Math. Comp.》（），第 – 期。10. M. Bachmayr 、A. Nouy 和 R. Schneider, *Approximation by tree tensor networks in high dimensions: Sobolev and compositional functions* **8** 2023 405 428 , 《Pure and Applied Functional Analysis》（），–。11. A. Barinka, *Fast evaluation tools for adaptive wavelet schemes*, 博士论文，亚琛工业大学，2005。12. C. Beck、S. Becker、P. Grohs、N. Jaafari 和 A. Jentzen, *Solving the Kolmogorov PDE by means of deep learning* **88** 2021 3, 73, 28 , 《J. Sci. Comput.》（），第 Paper No. 期。13. T. Boiveau 、V. Ehrlacher 、A. Ern 和 A. Nouy, *Low-rank approximation of linear parabolic equations by space-time tensor Galerkin methods* **53** 2019 2, 635 658 , 《ESAIM Math. Model. Numer. Anal.》（），第 – 期。14. N. Chegini 和 R. Stevenson, *Adaptive wavelet schemes for parabolic problems: sparse matrices and numerical results* **49** 2011 1, 182 212 , 《SIAM J. Numer. Anal.》（），第 – 期。15. H. Cho、D. Venturi 和 G. E. Karniadakis, *Numerical methods for high-dimensional probability density function equations* **305** 2016 817 837 , 《J. Comput. Phys.》（），–。16. A. Cohen 、W. Dahmen 和 R. DeVore, *Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations: convergence rates* **70** 2001 233, 27 75 , 《Math. Comp.》（），第 – 期。17. , *Adaptive wavelet methods. II. Beyond the elliptic case*, 《Found. Comput. Math.》**2** 3，203 2002 245 （），第 – 期。18. D. Conte, *Dynamical low-rank approximation to the solution of parabolic differential equations*, 《Appl. Numer. Math.》**156** （2020），377–384。19. W. Dahmen、R. DeVore、L. Grasedyck 和 E. Süli, *Tensor-sparsity of solutions to high-dimensional elliptic partial differential equations* **16** 2016 , 《Foundations of Computational Mathematics》（），第 4 期，813 874–。20. R. Dautray 和 J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology.* , Springer-Verlag，柏林，*Vol. 5* 1992, 《演化问题》I。Michel Artola、Michel Cessenat 和 Hélène Lanchon 合作撰写，Alan Craig 从法文译出。21. T. J. Dijkema, C. Schwab 和 R. Stevenson, *An adaptive wavelet method for solving high-dimensional elliptic PDEs* **30** 2009 3, 423 455 , 《Constr. Approx.》（），第 – 期。

22. S. V. Dolgov、B. N. Khoromskij 和 I. V. Oseledets, *Fast solution of parabolic problems in the tensor train/quantized tensor train format with initial application to the Fokker-Planck equation*, 《SIAM J. Sci. Comput.》34（2012），第 6 期，A3016–A3038。23. G. C. Donovan、J. S. Geronimo 和 D. P. Hardin, *Orthogonal polynomials and the construction of piecewise polynomial smooth wavelets* **30** 1999 5, 1029 1056, 《SIAM J. Math. Anal.》（），第 – 期。24. Th. F¨uhrer 和 M. Karkulik, *Space-time least-squares finite elements for parabolic equations*, 《Comput. Math. Appl.》92（2021），27–36。25. G. Gantner 和 R. Stevenson, *Further results on a space-time FOSLS formulation of parabolic PDEs*, 《ESAIM Math. Model. Numer. Anal.》55（2021），第 1 期，283–299。26. M. Griebel、H. Harbrecht 和 R. Schneider, *Low-rank approximation of continuous functions in sobolev spaces with dominating mixed smoothness* **92** 2023 342, 1729 1746, 《Mathematics of Computation》（），第 – 期。27. M. Griebel 和 D. Oeltz, *A sparse grid space-time discretization scheme for parabolic problems*, 《Computing》81（2007），第 1 期，1–34。28. W. Hackbusch, *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, 《施普林格计算数学丛书》第 42 卷，Springer，海德堡，2012。29. W. Hackbusch 和 S. K¨uhn, *A new scheme for the tensor representation*, 《J. Fourier Anal. Appl.》15（2009），第 5 期，706–722。30. Y. Kazashi、F. Nobile 和 E. Vidli˘ckov´a, *Stability properties of a projector-splitting scheme for dynamical low rank approximation of random parabolic equations* **149** 2021, 《Numer. Math.》（），第 4 期，973 1024–。31. S. Kestler、K. Steih 和 K. Urban, *An efficient space-time adaptive wavelet Galerkin method for time-periodic parabolic partial differential equations* **85** 2016 299, 1309 1333, 《Math. Comp.》（），第 – 期。32. O. Koch 和 C. Lubich, *Dynamical low-rank approximation*, 《SIAM J. Matrix Anal. Appl.》29（2007），第 2 期，434–454。33. S. Larsson 和 M. Molteni, *Numerical solution of parabolic problems based on a weak space-time formulation* **17** 2017 1, 65 84, 《Comput. Methods Appl. Math.》（），第 – 期。34. C. Lubich、T. Rohwedder、R. Schneider 和 B. Vandereycken, *Dynamical approximation by hierarchical Tucker and tensor-train tensors* **34** 2013 2, 470 494, 《SIAM J. Matrix Anal. Appl.》（），第 – 期。35. A. Metselaar, *Handling wavelet expansions in numerical methods*, 博士论文，屯特大学，2002。36. N. Rekatsinas 和 R. Stevenson, *An optimal adaptive tensor product wavelet solver of a space-time FOSLS formulation of parabolic evolution problems* **45** 2019 2, 1031 1066, 《Adv. Comput. Math.》（），第 – 期。37. Ch. Schwab 和 R. Stevenson, *Space-time adaptive wavelet methods for parabolic evolution problems*, 《Math. Comp.》78（2009），第 267 期，1293–1318。38. Ch. Schwab 和 E. S¨uli, *Adaptive Galerkin approximation algorithms for Kolmogorov equations in infinite dimensions* **1** 2013 1, 204 239, 《Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.》（），第 – 期。39. O. Steinbach 和 H. Yang, *Space-time finite element methods for parabolic evolution equations: dis-cretization, a posteriori error estimation, adaptivity and solution*, 《时空方法——偏微分方程应用》，Radon Ser. Comput. Appl. Math.，第 25 卷，De Gruyter，柏林，2019，第 207–248 页。40. F. Stenger, *Numerical methods based on Sinc and analytic functions*, 《Springer 计算数学丛书》，Springer，纽约，1993。41. R. Stevenson, *On the compressibility of operators in wavelet coordinates*, 《SIAM Journal on Mathematical Analysis》35（2004），第 5 期，1110–1132。42. R. Stevenson、R. van Veneti¨e 和 J. Westerdiep, *A wavelet-in-time finite element-in-space adaptive method for parabolic evolution equations* **48** 2022 3, 17, 43, 《Adv. Comput. Math.》（），第 Paper No. 期。43. R. Stevenson 和 J. Westerdiep, *Stability of Galerkin discretizations of a mixed space-time variational formulation of parabolic evolution equations* **41** 2021 1, 28 47, 《IMA J. Numer. Anal.》（），第 – 期。44. F. Tantardini 和 A. Veeser, *The L 2 -projection and quasi-optimality of galerkin methods for parabolic equations* **54** 2016 317 340, 《SIAM Journal on Numerical Analysis》（），–。45. T. von Petersdorff 和 Ch. Schwab, *Numerical solution of parabolic equations in high dimensions*, 《M2AN Math. Model. Numer. Anal.》38（2004），第 1 期，93–127。46. E. Wasserstein 和 OEIS 基金会, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, https: // oeis.org/A133841，2022。47. , *The on-line encyclopedia of integer sequences*, https://oeis.org/A133843，2022。