arXiv:2302.01670v2 [math.CO] 6 Jun 2023

图的逆特征值问题中的解放集

Jephian C.-H. Lin * Polona Oblak † Helena ˇSmigoc ‡

2023年6月7日

摘要

图的逆特征值问题 G 旨在刻画所有实对称矩阵的特征值列表，其中矩阵的非对角元素模式由 G的邻接关系决定。强谱性质是解决这一问题的有力工具，它能够识别出这样一类矩阵：其元素可以在控制模式并保持特征值不变的情况下进行扰动。Barrett等人在2020年提出的矩阵解放引理将这一概念推广到了更一般的情形。本文重新考察矩阵解放引理，并证明了一个等价表述，从而降低了应用该结果时的一些技术难度。

我们将该方法应用于形如 $M = A \oplus B$ 的矩阵，并展示这种新方法如何补充仅凭强谱性质所能获得的结果。将这一概念推广到图的直和时，我们发现它与图的笛卡尔积上的零迫游戏之间存在一种意想不到的联系。

在全文中，我们运用所得结果解决了六个顶点的图的逆特征值问题中的若干未决情形。

关键词：对称矩阵；逆特征值问题；强谱性质；矩阵解放引理；零迫。

AMS主题分类：05C50，15A18，15B57，65F18。

1 引言

设 G 是一个具有 n 个顶点的简单图。令集合 $\mathcal{S}(G)$ 表示由 $n \times n$ 个实对称矩阵构成的集合，其中当且仅当 $\{i, j\}$ 是 G 的一条边时，其 (i, j) 元素 $i \neq j$ 非零。

*应用数学系，国立中山大学，高雄 80424，台湾（jephianlin@gmail.com）

†计算机与信息科学学院，卢布尔雅那大学，Ve˘cna pot 113，SI-1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚；数学与物理学院，卢布尔雅那大学，以及数学、物理与力学研究所，Jadranska ulica19，1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚 (polona.oblak@fri.uni-lj.si)

‡数学与统计学院，都柏林大学学院，Belfield，爱尔兰都柏林 4 区 (helena.smigoc@ucd.ie)

对角线元素不受任何约束。图的逆特征值问题（简称 IEP-G）是求矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$ 的所有可能谱 spec(A)。

尽管这一问题引起了广泛关注，相关文献也十分丰富，但 IEP-G 目前仅针对少数特定的图族得到了解决，包括路径 [12–14], 圈图 [11], 广义星图 [17], 完全图 [6], 棒棒糖图和哑铃图 [20], 线性树 [16], 以及顶点数不超过五个的图 [4, 7]。关于这一问题的背景介绍，请参阅 [15]。

研究 IEP-G 涉及在 $\mathcal{S}(G)$ 中寻找具有指定特征值的矩阵，或证明这类矩阵不存在。当矩阵规模增大、模式变得更加复杂时，这些任务会变得困难，因此研究重点在于寻找方法，从较简单或较小的例子中提取信息，以应对更困难的情形。 [4,5] 引入强性质，是这一方向上的一项重要进展。特别是，如果矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$ 具有下文定义的强谱性质，那么对于 G 的任意生成超图 H，我们都可以推断存在一个与 A 余谱的矩阵 $A' \in \mathcal{S}(H)$。矩阵解放引理 [4] （另见引理 1.10）为研究不具有强谱性质的矩阵在何种情形下、以及在多大程度上能够得出类似结论，提供了理论基础。第 1.2 小节将详细介绍导出矩阵解放引理的强性质及其更严格的背景。

直接应用矩阵解放引理，首先需要构造验证矩阵 Ψ，然后在 Ψ 的列空间中找到具有某些性质的向量 x。这两项任务在技术上都颇具挑战性，也使人难以直观理解这一过程。为理清应用该引理时遇到的一些技术难点，我们在第 2 节引入矩阵的解放集。借助这一概念，我们得以建立一个与矩阵解放引理等价、但更易应用的结果。

有了这一新见解，我们得以提供一系列示例，展示如何运用我们的结果推进 IEP-G。具体而言，在第 3 节中，我们将该方法应用于矩阵的直和。 $M = A \oplus B$ 的特征值可由 A 和 B 的特征值直接确定。我们的方法可以对矩阵 M 进行扰动，使新矩阵对应于不同的连通图，同时保持谱不变；参见定理 3.5 和 3.7。强谱性质本身已能实现这一点，但仅限于 A 和 B 没有共同特征值的情形。

令人惊讶的是， [2] 中引入的零迫过程在确定具有强谱性质的矩阵有向和的解放集方面发挥着重要作用；参见第4节。在第5节中，我们沿着 [19] 开创的研究方向继续深入，并定义图 G的解放集，该解放集独立于 $A \in \mathcal{S}$（G）的选择。

本文始终提供大量示例，展示如何应用我们的理论。特别是， [1] 在解决六个顶点图的 IEP-G方面取得了巨大进展，只剩下选定重数的谱任意性问题有待解决。我们解决了其中一些尚未解决的情形，参见表1。

No.	图	有序重数列表	参考文献
G_{100}		(1, 2, 2, 1)	例3.9
G_{127}		(2, 1, 1, 2)	例 3.10
G_{129}		(1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1)	例4.9
G_{145}		(1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1)	例4.9
G_{151}		(1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1)	例 2.8
G_{153}		(1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1)	例4.9
G_{163}		(1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1)	例3.11
G_{169}		(1, 3, 2), (2, 3, 1)	例 3.10
G_{171}		(1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1)	例4.10
G_{175}		(1, 3, 2), (2, 3, 1)	例 4.8
G_{187}		(1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1)	例4.10

表1：本文证明具有谱任意性的六个顶点的图的可实现有序重数列表，[1, 附录 B], 。图的标记遵循 Atlas of Graphs [24] 中的标记。

1.1 符号与术语

由于本文的主题涵盖矩阵和图论，我们采用这两个领域中的一些标准符号。

对于矩阵空间，$\mathrm{Mat}_{m,\,n}(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$ 上的所有 $m \times n$ 矩阵组成的空间（其中 $m = n$ 情形缩写为$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$），$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$上的所有 n 阶对称矩阵组成的空间，而$\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$上的所有 n 阶反对称矩阵组成的空间。

虽然 $\mathcal{S}(G)$不是$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$的子空间，但 $\mathcal{S}(G)$的拓扑闭包（记作 $\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$）是。也就是说，$\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$是这样一个矩阵集合：其（$i$，$j$）-元素仅在 $i = j$ 或 $\{i, j\}$ 是 G 的一条边时才非零；它是$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$的一个维数为 $|V(G)| + |E(G)|$的子空间。$\mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(G)$中对角线为零的矩阵构成的集合 $\mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(G)$是另一个相关子空间，其维数为 $|E(G)|$。

对于任意正整数 n和 k，令 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$和 $k + [n] := \{k + 1, \ldots, k + n\}$。对于给定的向量 $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^n$，定义其支撑为 $\mathrm{supp}(\mathbf{v}) := \{i : v_i \neq 0\}$，它是 $[n]$的子集。矩阵 M 的列空间记为 $\mathrm{Col}(M) := \{M\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$，其核（或零空间）记为 $\ker(M) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : M\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$。对于 $\alpha \subseteq [m]$和 $\beta \subseteq [n]$，令 $M[\alpha, \beta]$为由 α 中的行和 β中的列诱导出的 M 子矩阵。表示行或列的整个索引集时，可以用符号 : 替换 α 或 β。写作 $\|M\|$时，它可以表示任意矩阵范数；不过，为了具体起见，我们可以始终取 $\|M\| := \sqrt{\mathrm{tr}(M^\top M)}$。

设 A和 B为矩阵。它们的直和记为 $A \oplus B$，$A \circ B$是 A和 B的 Hadamard（逐元素）乘积，而 $[A, B] := AB - BA$是交换子。在每种情况下，我们都假设 A 和 B 的尺寸与相应运算相容。

设 $E^{i,\,j} \in \mathrm{Mat}_{m,\,n}(\mathbb{R})$ 表示在位置 (i, j) 处为 1、其余位置均为 0 的矩阵，I_n 表示单位矩阵，$O_{m,\,n}$表示零矩阵。在所有情况下，若上下文已明确，均省略下标。此外，设 $K^{i,\,j} := E^{i,\,j} - E^{j,\,i}$以及 $X^{i,\,j} := E^{i,\,j} + E^{j,\,i}$。

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上的字典序定义为：$(i, j) \preceq (k, \ell)$ 当且仅当 $i < k$，或 $(i = k$ 且 $j \leq \ell)$。对于 $A \in \mathrm{Mat}_{m,\,n}(\mathbb{R})$，令 $\mathrm{vec}_\triangle(A)$ 表示 $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$ 中的向量，其按字典序记录 A 的上三角部分中的元素。类似地，$\mathrm{vec}_\wedge(A)$ 是 $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 中的向量，记录 A的严格上三角部分（不包括对角线元素）。最后，$\mathrm{vec}_\square(A)$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的向量，按字典序记录 A 的所有元素。

对于对称矩阵 A，我们将 λ 的特征值A的重数记为 $\mathrm{mult}_A(\lambda)$。设 $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 具有互异特征值 λ_1、……、λ_q，其重数为 $m_i = \mathrm{mult}_A(\lambda_i)$，其中 $i \in [q]$。A 的谱记为 $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1^{(m_1)}$、……、$\lambda^{(m_q)}{}_q\}$，其中 $\lambda^{(k)}$表示 k个 λ的副本。A 的无序重数列表定义为重数$\{m_1, \ldots, m_q\}$的列表，顺序任意。若对于任意互异的 λ_1、……、λ_q，谱 $\{\lambda_1^{(m_1)}$、……、$\lambda^{(m_q)}{}_q\}$ 都能由 $\mathcal{S}(G)$ 中的某个矩阵实现，则称无序重数列表 $\{m_1, \ldots, m_q\}$对于 G是谱任意的。若将 A的特征值按递增顺序 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_q$排列，则有序

A的有序重数列表定义为有序列表（m_1、……、m_q）。若对于任意 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_q$，谱 $\{\lambda_1^{(m_1)}$、……、$\lambda^{(m_q)}{}_q\}$ 都能由$\mathcal{S}(G)$中的某个矩阵实现，则称有序重数列表（m_1、……、m_q）对于 G 是谱任意的。

两个图 G 和 H 的不交并记作 $G \dot\cup H$，图 G 的补图记作 $\overline{G}$。若图 G 和 H 满足 $V(G) = V(H)$，且 $E(H) = E(G) \cup \{e_1, \ldots, e_k\}$，则称 H 是 G 的生成超图，并记为 $H = G + \{e_1, \ldots, e_k\}$。

1.2 预备知识

若对称矩阵 A 满足：$X = O$ 是唯一满足 $A \circ X = I \circ X = O$ 和 $[A, X] = O$的对称矩阵，则称其具有强谱性质（简称 SSP）。SSP 最早于 [5] 中提出，其动机源于 [9, 10] 中引入的强阿诺德性质。若对称矩阵 A 满足：$X = O$ 是唯一满足 $A \circ X = I \circ X = O$ 和 $AX = O$的对称矩阵，则称其具有强阿诺德性质（简称 SAP）。一旦已知一个具有强性质的矩阵，我们便可推断出其他具有相关谱性质的矩阵存在，具体见下述两个结果。

定理 1.1（超图引理 [5]）。设 G 是一个图，且 H 是 G 的生成超图。若 $A \in \mathcal{S}(G)$ 具有 SSP（分别为 SAP），则对任意 $\epsilon > 0$，存在具有 $\|A - A'\| < \epsilon$ 且满足 SSP（分别为 SAP）的 $A' \in \mathcal{S}(H)$，使得 spec(A) =spec(A')（分别为 rank(A) =rank(A'）。

定理1.2（直和引理 [5]）。设 G 和 H 是图，且 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$ 都具有 SSP（分别为 SAP）。那么，$A \oplus B$ 具有 SSP（分别为 SAP）当且仅当 spec(A) ∩spec(B) $= \emptyset$（分别为 spec($0 \notin$) ∩spec(B）。

例 1.3。设 $G = K_n \dot\cup K_1$，并将 G 的顶点 $V(G) = [n+1]$ 标记为使得 $n+1$ 是 G 的孤立顶点。此外，设

$$A = \begin{pmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(G),$$

其中 M $n \times n$ 是全一矩阵。要检查 A 是否具有 SSP，令 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$且

$$X = \begin{pmatrix} O_n & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

注意，$X \circ A = X \circ I = O$ 且条件 $[A, X] = O$ 等价于$M\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}$。因此，当且仅当 $\lambda \notin$spec(M) $= \{0^{(n-1)}, n\}$时，A具有 SSP。根据定理 1.1，对于 G 的任意生成超图 H 以及 $\lambda \notin \{0, n\}$，都存在一个具有 SSP 且谱为$\{0^{(n-1)}, n, \lambda\}$ 的矩阵 $A' \in \mathcal{S}(H)$。

从这个例子可以看出，有些矩阵可能不具有 SSP。不过，如果我们愿意施加更多限制，例如假设例 1.3 中的 $\mathbf{b}$ 只有一个非零元素，那么该矩阵就离具有 SSP 不远了。这引出了超图引理的推广。

定义 1.4. [20, 定义 3.2] 设 G 是 H 的生成子图。如果矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$ 满足以下条件，则称其相对于 H 具有 SSP： $X = O$ 是唯一满足 $X \in \mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{H})$ 和 $[A, X] = O$ 的对称矩阵。

若 $X = O$ 是满足 $X \in \mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{H})$和 $AX = O$的唯一对称矩阵，则矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$关于 H 具有 SAP。

注 1.5. 注意， $A \in \mathcal{S}(G)$关于其自身具有 SSP，当且仅当 A 具有 SSP，因为

$$\mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{G}) = \{X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) : A \circ X = I \circ X = O\}.$$

设 G、 H、 H' 是顶点集相同的图，且 $E(G) \subseteq E(H) \subseteq E(H')$。根据定义 1.4 以及事实 $\mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{H}) \supseteq \mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{H'})$， A 关于 H 具有 SSP 意味着 A关于 H'具有 SSP。特别地，若 A 具有 SSP，则 A 关于任意生成超图 H of$G$具有 SSP。本注中的结论对 SAP 也成立。

定理 1.6. [20, 定理 3.4] 设 G、 H和 H' 是图，满足 $V(G) = V(H) = V(H')$且 $E(G) \subseteq E(H) \subseteq E(H')$。若 $A \in \mathcal{S}(G)$关于 H具有 SSP（分别具有 SAP），则对任意 $\epsilon > 0$，存在 $A' \in \mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(H')$，使得 $\|A - A'\| < \epsilon$、$\mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}(A')$（分别地，$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$），且 A关于 H' 具有 SSP（分别具有 SAP），并且 A'中每个对应于 $E(H') \setminus E(H)$中一条边的元素均非零。

例 1.7. 我们重新考察例 1.3 中给出的 G、 A和 X。回忆一下，对于 $\lambda \in \{0, n\}$， A 不具有 SSP，因此我们选择 $\lambda = n$。设 $H := G + \{n+1, i\}$，其中 $i \in [n]$为某个值，并令 H' 为 H的任意超图，满足 $V(H') = [n+1]$。

假设 $\mathbf{b}$ 的第 i 个元素为零，经过简单计算可知，等式 $M\mathbf{b} = n\mathbf{b}$ 蕴含 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$。这意味着 A 相对于H具有 SSP。根据定理 1.6，存在一个相对于 H' 具有 SSP 的矩阵 $A' \in \mathcal{S}^{\mathrm{cl}}(H')$，使得 $\mathrm{spec}(A') = \{0^{(n-1)}, n^{(2)}\}$。此外， A' 在对应于 $E(H') \setminus E(H)$的位置上有非零元素；由于 A' 可以任意接近A，我们还可以假设 A 中的非零元素在 A'中仍保持非零。然而，定理 1.6 并未说明 A' 中对应于 $\{n+1, i\}$ 的元素是否为零。

正如上面的例子所示，应用定理 1.6 的缺点在于，矩阵 A' 中有些元素可以取任意实数值，因此图 A' 并未完全确定。为了解决这一缺点，我们借鉴了 [4, 5] 的研究。具体而言，我们采用验证矩阵的概念及相关结果，概述如下。

注意，子空间 $\mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{G})$ 的一组基为 $\mathcal{X} = \{X^{i,j} : \{i, j\} \in E(\overline{G})\}$，而子空间 $\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$ 的一组基为 $\mathcal{K} = \{K^{i,j} : i, j \in [n], i < j\}$。定义一个线性映射

$$f : \mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{G}) \to \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R}) \text{ with } f(X) = [A, X],$$

并令 Ψ 为 f 从基 $\mathcal{X}$ 到基 $\mathcal{K}$ 的矩阵表示，使得$[X]_{\mathcal{X}}^{\top}\Psi = [f(X)]_{\mathcal{E}}^{\top}$。（ Ψ的行和列按字典序排列。）这里， $[X]_{\mathcal{X}}$ 和 $[f(X)]_{\mathcal{K}}$ 分别表示相应向量

X 和 $f(X)$在基 $\mathcal{X}$ 和基 $\mathcal{E}$下的表示；我们采用左乘，以遵循文献 [4]中的约定。根据定义，可以通过检查 Ψ 的左核是否平凡来验证 A 是否具有 SSP。矩阵Ψ 称为 SSP 验证矩阵，并在定义 1.8 中正式定义。注意，对于任意斜对称矩阵 K，都有 $[K]_{\mathcal{K}} = \mathrm{vec}_{\wedge}(K)$。

定义 1.8. [5, 定理 31] 设 G 是一个具有 n 个顶点的图，$\overline{m} = |E(\overline{G})|$，且 $A \in \mathcal{S}(G)$。SSP 验证矩阵 $\Psi_{\mathrm{SSP}}(A)$ 是这样一个$\overline{m} \times \binom{n}{2}$ 矩阵：其行按字典序排列，对于所有满足 $1 \le i < j \le n$ 且$\{i,j\} \in E(\overline{G})$ 的数对 (i,j)，对应的行是 $\mathrm{vec}_{\wedge}([A, X^{i,j}])$。

SAP 验证矩阵 $\Psi_{\mathrm{SAP}}(A)$ 是这样一个 $\overline{m} \times n^2$ 矩阵：其行按字典序排列，对于所有满足 $1 \le i < j \le n$ 且 $\{i,j\} \in E(\overline{G})$ 的数对 (i,j)，对应的行是 $\mathrm{vec}_{\square}(AX^{i,\,j})$。

注 1.9. 不难看出（另见 [4]），A 具有 SSP（分别具有 SAP）当且仅当验证矩阵 $\Psi_{\mathrm{SSP}}(A)$（分别为 $\Psi_{\mathrm{SAP}}(A)$）的左核是平凡的。当且仅当$\Psi_{\mathrm{SSP}}(A)$（分别为 $\Psi_{\mathrm{SAP}}(A)$）中的行集是线性无关的。

事实上，类似的论证也适用于扩展强性质。也就是说，A 具有相对于 H 的 SSP（分别为 SAP），当且仅当 Ψ_{SSP}（A）（分别为Ψ_{SAP}（A））中与 E（$\overline{H}$）相对应的行集线性无关。

借助验证矩阵，我们可以陈述在 [4]中提出的矩阵解放引理。这里我们用定义 1.4 中的扩展强性质来重新表述这些结论。

引理 1.10（矩阵解放引理——向量版本 [4]）。设 G 是一个图，$A \in \mathcal{S}$（G），且 $\Psi = \Psi_{\mathrm{SSP}}$（$A$）（分别为$\Psi = \Psi_{\mathrm{SAP}}$（$A$））。假设存在一个向量 $\mathbf{x} \in \mathrm{Col}(\Psi)$，使得 A 具有相对于 G+supp(x)的 SSP（分别为 SAP）。那么，存在一个矩阵 $A' \in \mathcal{S}$（G+supp(x)），它具有 SSP（分别为 SAP），且 spec(A') = spec(A)（分别有 rank(A') = rank(A）。

例 1.11. 设 $G = K_4 \dot\cup K_1$ 如例 1.3 中关于 $n = 4$ 所述。则其 SSP 验证矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(G)$$

等于

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

其中， Ψ 的各行由非边 $\{1,5\}$、 $\{2,5\}$、 $\{3,5\}$ 和 $\{4,5\}$ 编号。令 $\alpha = \{\{1,5\},\{2,5\}\}$ 和 $\beta = \{\{3,5\},\{4,5\}\}$。向量 $\mathbf{x} = (0,0,1,-1)^\top$ 是 Ψ 最后两列的线性组合，因此 $\mathbf{x} \in \mathrm{Col}(\Psi)$。于是 $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) = \beta$。由于以 α 为索引的各行构成一个线性无关集， A 相对于 $G+\beta$ 具有 SSP。根据引理 1.10，存在一个具有 SSP 的矩阵 $A' \in \mathcal{S}(G+\beta)$，且 $\mathrm{spec}(A') = \mathrm{spec}(A) = \{0^{(3)}, 4^{(2)}\}$。

正如例 1.11 所示，矩阵解放引理（引理 1.10）的假设涉及向量 x，而结论只用到 x 的支撑。也就是说， x 的元素的具体取值并不起作用。由于实际应用中我们只需要 x 的支撑，因此在下一节中，我们将进一步探讨如何确定满足矩阵解放引理要求的向量 x 的所有可能支撑。特别地，例 2.7 将说明如何找到上例中的向量 x。

2 矩阵的解放集

为引出本节的工作，我们先给出主要定义和主要结果。

定义 2.1。设 G 是一个图，且 $A \in \mathcal{S}(G)$。非空边集 $\beta \subseteq E(\overline{G})$ 称为 A 的 SSP 解放集（或分别称为 A 的 SAP 解放集），当且仅当对于所有满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$ 的 $\beta' \subset \beta$， A 相对于 $G+\beta'$ 具有 SSP（或分别具有 SAP）。

引理 2.2（矩阵解放引理——集合版本）。设 A 是 $\mathcal{S}(G)$ 中的一个矩阵，且 β 是 A 的一个 SSP （分别为 SAP ）解放集。那么存在一个具有 SSP （分别为 SAP ）的矩阵 $A' \in \mathcal{S}(G+\beta)$，使得 $\mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}(A')$（或 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$，分别如此）。

例 2.3。设 G 是一个图，且 $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}(G)$。若 A 具有 SSP（相对于 G），则任何非空子集 $\beta \subseteq E(\overline{G})$ 都是 A 的 SSP 解放集，因为 A 相对于 G 的任意生成超图都具有 SSP。另一个极端是， $\beta = E(\overline{G})$ 是 A 的 SSP 解放集，除非存在 $\{i,j\} \in E(\overline{G})$ 使得 $[A, X^{i,j}] = O$。当且仅当 i 和 j 都是 G 中的孤立顶点时，这种情况才会发生，并且 $a_{i,i} = a_{j,j}$。

在下面的备注中，我们概述引理 2.2 的一种证明，该证明依赖于定理 1.6，并强调在解放集的定义中如何使用相对于某个图的 SSP。之后，我们将给出一个更详细的证明，该证明依赖于引理 1.10，并清楚地展示这两个结果之间的等价性。

注记 2.4. 可以将解放集理解为这样一个集合：其中每个元素都可以单独扰动为非零元素。设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 有一个解放集 β。令 $\beta = \{e_1, \ldots, e_k\}$ 和 $\beta_i := \beta \setminus \{e_i\}$, $i = 1, \ldots, k$。那么根据定义，对于所有 $i \in [k]$， A 相对于 $G+\beta_i$ 都具有 SSP。根据

超图引理（定理 1.6）的扩展版本，可以扰动 A，得到满足以下条件的 A_1：

- A_1 中与 e_1 对应的元素变为非零，
- A 中的每个非零元素在 A_1中也保持非零，
- E之外的 A_1 的非对角线元素（G）仍为零， $\cup \beta$
- A_1 与 A具有相同的谱，
- 新矩阵仍关于 $G + \beta_i$ 满足 SSP，对于每个 i，其中A_1 在 e_i的对应元素处为零。

如果 A_1 在 e_2的对应元素处非零，则令 $A_2 = A_1$。否则，由于 A_1 关于 $G + \beta_2$ 满足 SSP，我们可以用同样的方法将 A_1 扰动为 A_2；特别地， e_2 的对应元素变为非零。我们可以归纳地继续这一过程，得到 A_3、.....、 A_k。注意，一旦某个元素变为非零，在这一过程中它就会保持非零。因此，最终我们得到矩阵 $A' = A_k$，正如矩阵解放引理（引理 2.2）所要求的那样。

我们将在命题 2.6 中证明，在恰当的条件下，引理 2.2 等价于引理 1.10。为了理解给定矩阵列空间中向量的所有可能支撑，我们将借助下一条引理中回顾的基本线性代数方法。

引理 2.5. 对于 $M \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ 和 $\alpha \subsetneq [m],$，以下条件等价。

(1) 对所有 $k \in [m] \setminus \alpha$， $M[\alpha \cup \{k\}, :]$ 都是满行秩的。(2) 存在一个非零向量 $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(M)$，使得 $\mathrm{supp}(\mathbf{v}) = [m] \setminus \alpha$ 且 $M[\alpha, :]$ 是满行秩的。(3) 将 M 中标记为 α 的行置换到顶部后得到的矩阵具有列最简阶梯形

$$\begin{pmatrix} I_{|\alpha|} & O \\ ? & B \end{pmatrix},$$

其中 B 的每一行都是非零向量。

证明。为证明 (1) 蕴含 (2)，假设对于某个集合 $\alpha \subsetneq [m]$，矩阵 $M[\alpha \cup \{k\}, :]$ 对所有 $k \in [m] \setminus \alpha$ 都是满行秩的。这意味着 $\dim(\mathrm{Col}(M[\alpha \cup \{k\}, :])) = |\alpha| + 1$，因此 $\mathrm{Col}(M[\alpha \cup \{k\}, :]) = \mathbb{R}^{|\alpha|+1}$.。特别地，$\mathrm{Col}(M[\alpha \cup \{k\}, :])$ 包含一个在 α 上为零，且对应于 k 的元素为 1 的向量。因此，对于每个 $k \in [m] \setminus \alpha$，我们都可以找到一个向量 $\mathbf{v}_k \in \mathrm{Col}(M)$，满足 $\mathbf{v}_k[\alpha] = \mathbf{0}$，且 $\mathbf{v}_k$ 的第 k 个元素非零。因此，存在这些向量的线性组合

$$\mathbf{v} = \sum_{k \in [m] \setminus \alpha} c_k \mathbf{v}_k \in \mathrm{Col}(M),$$

使得 supp(v) $= [m] \setminus \alpha$，这就证明了我们的结论。

反之，假设 $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(M)$ 是一个非零向量，满足 $[m] \setminus$x的支撑集(v) $= \alpha$，且矩阵 $M[\alpha, :]$ 具有满行秩。令 $k \in [m] \setminus \alpha =$ x 的支撑集 (v) 且 $\alpha' = \alpha \cup \{k\}$。我们将证明 $M' = M[\alpha', :]$ 具有满行秩。为此，令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 为一个在 α' 之外消失且满足 $\mathbf{x}^\top M = \mathbf{0}$ 的向量。由于 $\mathbf{x}^\top M = \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(M)$，我们知道 $\mathbf{x}^\top \mathbf{v} = 0$。此外，supp(x) $\cap$ x的支撑集(v) $\subseteq \{k\}$ 意味着 x 在第 k 个元素处为零。因此，x 在 α之外消失，从而得到 x $= \mathbf{0}$，因为 $M[\alpha, :]$ 具有满行秩。总之，$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^m$中唯一一个在 α'之外消失且满足 $\mathbf{x}^\top M = \mathbf{0}$的向量，所以 M' 具有满行秩。

接下来我们将证明 (1) $\implies$ (3) $\implies$ (2)。设 $\alpha \subsetneq [m]$ 是一个集合，使得对于所有 $k \in [m] \setminus \alpha$， $M[\alpha \cup \{k\}, :]$ 具有满行秩。令 W 为通过将 M 中 α 的所有行置于顶部而得到的矩阵。回顾一下，列运算不会改变行的线性相关性。由于 $M[\alpha, :]$ 具有满行秩， W 的前 $|\alpha|$ 行构成一个线性无关集，其列最简阶梯形为

$$\begin{pmatrix} I_{|\alpha|} & O \\ ? & B \end{pmatrix}.$$

此外，由于对于 $k \in [m] \setminus \alpha$， W 中与 $\alpha \cup \{k\}$ 对应的行也是线性无关的，而 B 中与 k 对应的行为一个非零向量。这就证明了 (3)。利用这一性质，可以在 B 的列空间中找到一个处处非零向量，这意味着在 W 的列空间中存在一个支撑为 $[m] \setminus \alpha$ 的向量。因此，存在一个非零向量 $\mathbf{v} \in \mathrm{Col}(M)$，其支撑满足 supp(v) $= [m] \setminus \alpha$。同样，根据 W 的列最简阶梯形， α 中的 W 的行是线性无关的，因此 α 中的 M 的行也是线性无关的。 □

在应用引理 2.5 时，我们将令 M 为验证矩阵Ψ。结合引理 1.10，我们便可证明引理 2.2。引理 2.5 中的陈述 (3) 并非定理证明所必需，但它确实提供了一种算法性的方式来确定解放集。

命题 2.6. 设 G 为图， $A \in \mathcal{S}(G)$，且 Ψ 为 A的 SSP（分别为 SAP）验证矩阵。对于非空集合 $\beta \subseteq E(\overline{G})$，以下陈述等价：

(1) β 是 A的 SSP（分别为 SAP）解放集。

(2) 对所有 $e \in \beta$， $\Psi[\alpha \cup \{e\}, :]$ 都满行秩，其中 $\alpha = E(\overline{G}) \setminus \beta$。

(3) 存在一个非零向量 $\mathbf{x} \in \mathrm{Col}(\Psi)$，使得 supp(x) $= \beta$，且 A相对于 $G + \beta$具有 SSP（分别为 SAP）。

（4）将 Ψ 中的 β 置换行至底部后，其列最简阶梯形的形式为

$$\begin{pmatrix} I_{|\alpha|} & O \\ ? & B \end{pmatrix}$$

使得 B 的每一行都是非零向量，其中 $\alpha = E(\overline{G}) \setminus \beta$。

证明。根据定义和注 1.9，β 是 A 的解放集，当且仅当 $\Psi[E(\overline{G}) \setminus \beta'$，即：对所有满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$ 的 $\beta' \subset \beta$，] 都是满行秩的。将 $E(\overline{G}) \setminus \beta$ 写成 α，集合 $E(\overline{G}) \setminus \beta'$ 可写为 $\alpha \cup \{e\}$，其中 $e \in \beta$，由此可得 (1) 和 (2) 等价。根据引理 2.5 和注 1.9，陈述 (2)、(3) 和 (4) 等价。 □

引理 2.2 的证明。根据命题 2.6 中 (1) 与 (3) 的等价性，引理 2.2 中的断言等价于引理 1.10 中的断言。 □

例 2.7。设 G、A、Ψ、α 和 β 如例 1.11 中所示，并回顾一下，在 Ψ 的行标记中，前两行由 α 中的元素标记。让我们考察该例中命题 2.6 的所有等价条件。Ψ 的列最简阶梯形为

$$\Psi' = \left(\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ ? & B \end{pmatrix}.$$

由于 B 没有零行，Ψ 对于我们选取的 α 和 β 满足命题 2.6 中的条件 (4)。例如，对于 $\mathbf{x} = (0, 0, 1, -1)^\top \in \mathrm{Col}(\Psi) = \mathrm{Col}(\Psi')$，条件 (3) 成立，因为注意到 $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) = \beta$，并且 A 关于 $G + \beta$ 具有 SSP。由于列运算不会改变行之间的依赖关系，我们可以很容易地从 Ψ' 推出，$\Psi[\alpha \cup \{\{3,5\}\}, :]$ 和 $\Psi[\alpha \cup \{\{4,5\}\}, :]$ 都具有满行秩，因此条件 (1) 和 (2) 成立。

由这些等价条件可知，存在一个矩阵 $A' \in \mathcal{S}(G + \beta)$，其谱满足 $\mathrm{spec}(A') = \{0^{(3)}, 4^{(2)}\}$。

上例中的矩阵 A 足够小，因此我们能够写出 SSP 验证矩阵，并考察命题 2.6 中所有等价性质。然而，关于矩阵 A' 存在性的最终结论并不十分令人振奋。下一个例子只稍微复杂一些，但已经解决了 IEP-G 中的一个开放问题。

例 2.8。考虑如下形式的一族矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} b & t & t & t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(K_{1,3} \dot{\cup} K_2),$$

其中 $a, b, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。注意到矩阵 A 的特征值等于 $\{0^{(3)}, 2a, \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 + 12t^2}), {}_{1\,2}(b + \sqrt{b^2 + 12t^2})\}$，不难验证，这族矩阵及其平移在谱任意意义下实现了有序重数列表 (1, 3, 2)、(2, 3, 1)、(1, 1, 3, 1) 和 (1, 3, 1, 1)。我们声称，$\beta = \{\{3,5\}, \{4,5\}, \{2,6\}, \{4,6\}\}$ 是

这族中的所有矩阵的解放集。利用 $(K_{1,3} \dot\cup K_2) + \beta$ 的对称性，只需检验 A 相对于 $\beta_1 = \{\{3,5\},\{4,5\},\{4,6\}\}$ 和 $\beta_2 = \{\{3,5\},\{4,5\},\{2,6\}\}$具有 SSP，这是一项直接（尽管繁琐）的计算练习。还要注意，β 并非 $\mathcal{S}(K_{1,3} \dot\cup K_2)$中每个矩阵的解放集。由此我们得出结论：如图1所示，上述重数列表可在 $\mathsf{G}_{151} = (K_{1,3} \dot\cup K_2) + \beta$上以谱任意的方式实现。

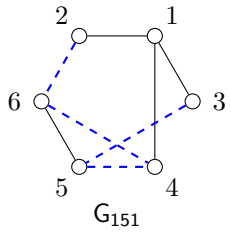


图1：具有 $\beta = \{\{3,5\},\{4,5\},\{2,6\},\{4,6\}\}$ 的六顶点图 $\mathsf{G}_{151} = (K_{1,3} \dot\cup K_2) + \beta$。

3 具有 SSP 的矩阵直和

作为引理 2.2 的应用，我们考虑形如 $A \oplus B$ with$A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$ 的矩阵。

定义 3.1. 设 G 和 H 分别是具有 m 和 n 个顶点的图，β 是连接 G 与 H 的边集，且 Y 是一个 $m \times n$ 矩阵。如果将 Y 的行标记为 $V(G)$，将 Y 的列标记为$V(H)$，并且对所有 $\{u,v\} \in \beta$ 都有$Y_{u,v} = 0$，则称 Y 在 β 上消失。我们将此记为 $Y|_\beta = 0$。

命题 3.2. 设 G和 H 分别是具有 m 和 n 个顶点的图，$A \in \mathcal{S}(G)$、$B \in \mathcal{S}(H)$，且 β 是连接 G 与 H 的边集。

1. 假设 A 和 B 具有 SSP，并且 $Y = O$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中唯一满足 $AY - YB = O$ 且具有 $Y|_\beta = 0$ 的矩阵。那么 $A \oplus B \in \mathcal{S}(G \dot\cup H)$ 相对于 $(G \dot\cup H) + \beta$ 具有 SSP。2. 假设 A 和 B 具有 SAP，并且 $Y = O$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中唯一满足 $AY = YB = O$ 且具有 $Y|_\beta = 0$ 的矩阵。那么 $A \oplus B \in \mathcal{S}(G \dot\cup H)$ 相对于 $(G \dot\cup H) + \beta$ 具有 SAP。

证明。令

$$X = \begin{pmatrix} X_A & Y \\ Y^\top & X_B \end{pmatrix}$$

是一个对称矩阵，使得 $X \in \mathcal{S}_0^{\mathrm{sl}}(\overline{G \dot\cup H + \beta})$。为证明第一项，我们假设 $[A \oplus B, X] = O$。根据 A 和 B 上的 SSP 条件，这可化简为 $AY - YB = O$，结论由此得出。同理，为证明

第二项，我们假设 $(A \oplus B)X = O$。对 A 和 B的 SAP假设将该等式化简为 $AY = YB = O$，这意味着 $Y = O$，第二个陈述得证。 □

以下标准线性代数结果将有助于我们理解方程 $AY - YB = O$ 的解集 Y。为完整起见，现附上证明。对于任意两个矩阵 $A \in \mathsf{Mat}_m(\mathbb{R})$ 和 $B \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{R})$，我们用 $\mathcal{R}(A, B)$ 表示方程 $AY - YB = O$ 的解集 $Y \in \mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$。以下命题描述了 $\mathcal{R}(A, B)$。

命题 3.3。设 A 和 B 分别为 m 阶和 n 阶对称矩阵。假设 A 和 B 有 k 个不同的公共特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，且对于 $i = 1, \ldots, k$，$\mathsf{mult}_A(\lambda_i) = a_i$，$\mathsf{mult}_B(\lambda_i) = b_i$。则

$$\mathcal{R}(A, B) = \mathrm{span}\{\mathbf{u}\mathbf{v}^\top : A\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{u},\ B\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v} \text{ for some } i \in [k]\},$$

且其维数为 $\sum_{i \in [k]} a_i b_i$。

证明。设 Q_A 和 Q_B 为分别将 A 和 B 对角化的正交矩阵：$Q_A^\top A Q_A = D_A$ 和 $Q_B^\top B Q_B = D_B$。则方程 $AY - YB = O$ 等价于 $D_A Y' - Y' D_B = O$，其中 $Y' = Q_A^\top Y Q_B$。我们推得，若 D_A 的 $(D_A)_{i,i}$ 元素不同于 D_B 的 $(D_B)_{j,j}$ 元素，则 Y' 的 (i, j) 元素必为零。令 $\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{f}_i$ 分别表示 I_m 和I_n 的第 i 列。采用此记号，我们有

$$\mathcal{R}(D_A, D_B) = \mathrm{span}\{\mathbf{e}_i \mathbf{f}_j^\top : (D_A)_{i,i} = (D_B)_{j,j}\}.$$

由于 $\mathcal{R}(A, B) = Q_A \mathcal{R}(D_A, D_B) Q_B^\top$，结论得证。 □

若 A 和 B 都具有 SSP，且它们没有任何共同特征值，则根据定理 1.1，$A \oplus B$ 具有 SSP。然而，若 A 和 B 有一个相同的不同特征值，这一结论便不再成立；在这种情况下，我们旨在理解$A \oplus B$ 的解放集。为此，我们将对 A 和 B的特征子空间施加一些条件。

定义3.4. 设 $\mathcal{W}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 d维子空间，且 W 是一个 $n \times d$矩阵，其列构成 $\mathcal{W}$的一组基。当且仅当 W 的每个 $d \times d$ 子矩阵都可逆时，才称 $\mathcal{W}$ 为一般的。

上文定义的一般位置子空间是良定义的，因为它不依赖于 W的选取。事实上，若 W_1 和 W_2 是 $n \times d$ 矩阵，且 W_1的列和 W_2 的列分别构成 $\mathcal{W}$的基，则对于某个可逆的$Q \in$，有 $W_2 = W_1 Q$ $\mathsf{Mat}_d(\mathbb{R})$。因此，$W_1$ 中的 $d \times d$ 子矩阵 B 可逆，当且仅当 W_2 中对应的子矩阵 BQ 可逆。例如，当 $\mathcal{W}$ 是 $\mathbb{R}^n$的一个一维子空间时，它是一般位置子空间，当且仅当它由一个处处非零向量张成。

定理 3.5. 设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$ 具有 SSP。假设 $\mathsf{spec}(A) \cap \mathsf{spec}(B) = \{\lambda\}$，且 $\mathsf{mult}_A(\lambda) = k$ 和 $\mathsf{mult}_B(\lambda) = \ell$，其中 $\ker(A - \lambda I)$ 和 $\ker(B - \lambda I)$ 是一般的。那么对于任意满足以下条件的 $V_G \subseteq V(G)$ 和 $V_H \subseteq V(H)$，

- $|V_G| = k$ *and* $|V_H| = \ell + 1$ *or*
- $|V_G| = k + 1$ *and* $|V_H| = \ell$,

集合

$$\beta = \{\{u, v\} : u \in V_G \text{ and } v \in V_H\}$$

是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。特别地，存在一个具有 SSP 的矩阵 $C \in \mathcal{S}(G \dot\cup H + \beta)$，使得 $\mathrm{spec}(C) = \mathrm{spec}(A) \cup \mathrm{spec}(B)$。

证明。设 U_A 和 U_B 分别为 $|V(G)| \times k$ 和 $|V(H)| \times \ell$ 矩阵，其列分别构成 $\ker(A - \lambda I)$ 和 $\ker(B - \lambda I)$ 的基。设定理陈述中的 $\beta \subset V(G) \times V(H)$，并令 $\beta' \subset \beta$ 满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$。注意，根据关于 V_G 和 V_H 的假设，β' 包含一个 $k \times \ell$ 网格，记为 $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$，无论如何选择 β'。

由命题 3.3,

$$\mathcal{R}(A, B) = \{U_A S U_B^\top : S \in \mathrm{Mat}_{k,\ell}(\mathbb{R})\}.$$

假设 $Y \in \mathcal{R}(A, B)$ 满足 $Y|_{\mathcal{I}\times\mathcal{J}} = 0$。那么，对某个 $S_Y \in$，有 $Y = U_A S_Y U_B$ $\mathrm{Mat}_{k,\ \ell}(\mathbb{R})$，并且

$$U_A[\mathcal{I}, :] S_Y U_B[\mathcal{J}, :]^\top = O.$$

由于假设 $\ker(A - \lambda I)$ 和 $\ker(B - \lambda I)$ 都是一般的，因此 $U_A[\mathcal{I}, :]$ 和 $U_B[\mathcal{J}, :]$ 可逆，所以 $S_Y = O$。这意味着 $Y = O$，并由命题 3.2 证明 $A \oplus B$ 关于 $G \dot\cup H + \beta'$ 具有 SSP。由于我们对 β' 的选择是任意的，这也证明 β 是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。由引理 2.2 可得结论。 □

应用定理 3.5 时，特征子空间一般性的假设可能难以证明。不过，对于小维数的具体矩阵，这一条件很容易检验。

例 3.6。设 $A \in \mathcal{S}(C_6)$ 和 $B \in \mathcal{S}(C_8)$ 为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{3}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

分别。于是

$$\mathrm{spec}(A) = \left\{-\sqrt{3}^{(2)}, 0^{(2)}, \sqrt{3}^{(2)}\right\} \text{ and}$$

$$\mathrm{spec}(B) = \left\{-2^{(2)}, -\sqrt{\frac{2}{3}}^{(2)}, \sqrt{\frac{2}{3}}^{(2)}, 2^{(2)}\right\}.$$

分别将 A 和 B 的互异特征值记为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ 和 $\mu_1 < \cdots < \mu_4$。直接计算可得，A 和 B 的每个特征子空间都是一般的，唯有 ker(A) 例外；它是 A 关于 $\lambda_2 = 0$ 的特征子空间。对于任意 s，A 和 $A + sI$ 的特征子空间相同。因此，通过选择 $s = -\lambda_1 + \mu_1$，矩阵 $A + sI$ 和 B 有唯一的公共特征值 μ_1，并满足定理 3.5 的要求。由此，我们可以选择一个图 H，它由 $C_6 \dot\cup C_8$ 得到：将 V（C_6）中的两个顶点与 V（C_8）中的三个顶点相连，或将 V（C_6）中的三个顶点与 V（C_8）中的两个顶点相连。（图 2 展示了此类图的一些例子。）于是，定理 3.5 保证存在一个具有 SSP 且有序重数列表为 (4, 2, 2, 2, 2, 2) 的矩阵 $M \in \mathcal{S}$（H）。事实上，选择 s 为 $-\lambda_1 + \mu_2$、$-\lambda_1 + \mu_3$、$-\lambda_3 + \mu_1$、$-\lambda_3 + \mu_1$ 或 $-\lambda_3 + \mu_1$，即可由 $\mathcal{S}$（H）中的一个具有 SSP 的矩阵实现无序重数列表为 $\{4, 2, 2, 2, 2, 2\}$ 的每个有序重数列表。

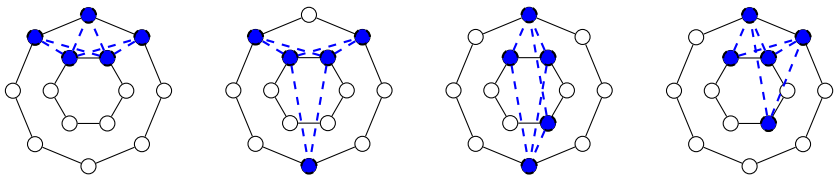


图 2：图中的所有图都有 14 个顶点、20 条边，并且与无序重数列表 $\{4, 2, 2, 2, 2, 2\}$ 对应的每个有序重数列表都可以由具有 SSP 的矩阵实现。

定理 3.5 中确定的所有解放集都是矩形网格。对于 $\ell = 1$ 的情形，我们还能得到更强的结果，见下一个定理。

定理3.7. 设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$ 具有 SSP。假设 spec(A) ∩spec(B) $= \{\lambda\}$，其中 mult$_A$(λ) $= k$，且 mult$_B$(λ) $= 1$，并且 ker($A - \lambda I$) 和 ker($B - \lambda I$) 是一般的。若满足以下任一条件

- $|\beta \cap (\{u\} \times V(H))| = 2$ *for* k *distinct* $u \in V(G)$, *or*
- $|\beta \cap (V(G) \times \{v\})| = k + 1$ *for some* $v \in V(H)$,

则集合 β 是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。特别地，存在一个具有 SSP 的矩阵$C \in S($ $G \dot\cup H + \beta$), 使得 spec(C) $=$ spec(A) ∪spec(B)。

此外，当 $k = 1$ 时，任何满足 $|\beta| = 2$ 的 $\beta \subseteq V(G) \times V(H)$ 都是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。

证明。当 $|\beta \cap (V(G) \times \{v\})| = k+1$ 对某个 $v \in V(H)$ 成立时，由定理 3.5 可知结论成立，因此我们着重考虑 $|\beta \cap (\{u\} \times V(H))| = 2$ 对 k 个互异的 $u \in V(G)$ 成立的情形。注意，任何满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$ 的 $\beta' \subset \beta$，对于 k 个互异的 $u \in V(G)$，都满足 $|\beta' \cap (\{u\} \times V(H))| = 1$。

设 U_A 是一个 $n \times k$ 矩阵，其列构成 ker($A - \lambda I$) 的一组基，且 ker($B - \lambda I$) $=$ 张成 {v}，其中 v 是某个向量。现在，$Y \in \mathcal{R}(A, B)$ 可以写为

$$Y = U_A \mathbf{s}_Y \mathbf{v}^\top$$

其中某个 $\mathbf{s}_Y \in \mathrm{Mat}_{k,\,1}(\mathbb{R})$。若 $Y|_{\beta'} = 0$，则 Y 至少有 k 行含有零元素。然而，由于根据 $\ker(B - \lambda I)$ 的一般性，$\mathbf{v}$ 处处非零，因此 Y 的每一行要么是零向量，要么是处处非零向量。因此，Y 至少包含 k 个零行。U_A 的一般性现在意味着 $\mathbf{s}_Y = \mathbf{0}$ 和 $Y = O$。由于这一论证适用于任意满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$ 的 $\beta' \subset \beta$，我们证明了 β 是 $A \oplus B$ 的一个 SSP 解放集。

对于 $k = 1$ 的情形，我们还可以假设 $\ker(A - \lambda I) = \mathrm{span}\{\mathbf{u}\}$，其中 $\mathbf{u}$ 是某个处处非零向量，且 $Y = \mathbf{u} s_Y \mathbf{v}^\top$，其中 s_Y 是某个标量。只要 Y 含有一个零元素，我们就知道 $s_Y = 0$ 和 $Y = O$。因此，任何满足 $|\beta| = 2$ 的 $\beta \subseteq V(G) \times V(H)$ 都是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。 □

注3.8. 下面列出一些可以证明特征子空间具有一般性的情形：

- 设 T 是一棵树，且 $A \in \mathcal{S}(G)$。根据 Perron–Frobenius定理，A 的最小和最大特征值必定是单重的，并且它们的特征子空间是一般的。

- 设 G 是一个有 n 个顶点的连通图，且 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$。那么存在一个矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$，其谱满足 $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，使得每个特征值对应的特征子空间都是一般的 [22]。
- 设 G 为完全图 K_n，且 $A \in \mathcal{S}(G)$。通过选择适当的正交矩阵 Q，我们可以用 $Q^\top A Q$ 替换 A，并假设每个特征值的特征子空间都是一般的。

例3.9. 设 T_1 和 T_2 为树，H 为从 $T_1 \dot\cup T_2$得到的图：在 $V(T_1)$ 和 $V(T_2)$ 之间添加两条任意边。设 $A \in \mathcal{S}(T_1)$ 和 $B \in \mathcal{S}(T_2)$ 为具有 SSP 的矩阵，其有序重数列表分别为 $(1, m_2, \ldots, m_{q_1-1}, 1)$ 和 $(1, r_2, \ldots, r_{q_2-1}, 1)$。那么，以下两个

$$(2, m_2, \ldots, m_{q_1-1}, 1, r_2, \ldots, r_{q_2-1} 1) \text{ and } (1, m_{q_1-1}, \ldots, m_2, 2, r_2, \ldots, r_{q_2-1}, 1,)$$

都是可由 $\mathcal{S}(H)$ 中具有 SSP 的矩阵实现的有序重数列表，此结论由定理3.7得出。

尤其是，已知 $K_{1,\,3}$ 和 P_2 是 SSP图，且每个可实现的有序重数都具有谱任意性；参见 [4]。因此，对于任意选取的实数 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$，设 $A \in \mathcal{S}(K_{1,\,3})$ 为具有 SSP 且谱为 $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2^{(2)}, \lambda_3\}$ 的矩阵，并设 $B \in \mathcal{S}(P_2)$ 为具有 SSP 且谱为 $\mathrm{spec}(B) = \{\lambda_3, \lambda_4\}$ 的矩阵。那么，由定理 3.7 可知，有序重数列表 (1, 2, 2, 1) 具有谱任意性，且可由图 G_{100} 上的一个具有 SSP 的矩阵实现，该图如图3所示。这解决了附录 B]中的一个重数列表问题。

例 3.10. 设 G 和 H 是图。假设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$ 都具有 SSP，且 $\mathrm{spec}(A)$ 为 $= \{\theta\} \cup \sigma$，$\mathrm{spec}(B)$ 为 $= \{\theta\} \cup \tau$，其中$\theta \notin \sigma \cup \tau$ 和 $\sigma \cap \tau = \emptyset$。此外，假设 A 和 B中对应于 θ 的特征子空间都是一般的。

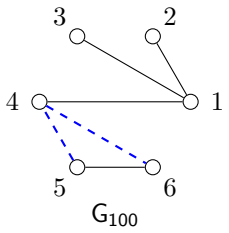


图3：六个顶点的图 $\mathsf{G}_{100} = K_{1,\ 3} \dot{\cup} P_2 + \{\{4,5\},\{4,6\}\}$ 。

根据注3.8，对于任意连通图G 和 H，只要 σ 和 τ 是大小适当且由互不相同的实数构成的集合，这样的矩阵 A 和 B 就存在。此外，如果 G 是完全图，那么对于大小适当的实数多重集 σ ， A 存在； H 和 B也有类似结论。令 $\beta \subseteq V(G) \times V(H)$，其中 $|\beta| = 2$。根据定理3.7，在 $\mathcal{S}(G \dot{\cup} H + \beta)$ 中存在一个具有 SSP 且谱为 $\{\theta^{(2)}\} \cup \sigma \cup \tau$的矩阵。

特别地，对于以下 G、 H 和 β 的取值，该设置适用于图4中的图 G_{127} 和 G_{169}：

- 令 $G = K_3$ 满足 $V(G) = [3]$， $H = P_3$ 满足 $V(H) = 3 + [3]$，且 $\beta = \{\{1,6\},\{3,4\}\}$。由于 $\mathsf{G}_{127} = K_3 \dot{\cup} P_3 + \beta$，我们现在知道，无序重数列表 $\{2,2,1,1\}$ 对图 G_{127} 是谱任意的。
- 取 $G = K_4$、 $V(G) = [4]$、 $H = K_2$、 $V(H) = 4 + [2]$，以及 $\beta = \{\{4,5\},\{2,6\}\}$，我们有 $\mathsf{G}_{169} = K_4 \dot{\cup} K_2 + \beta$，因此无序重数列表 $\{3,2,1\}$ 对图 G_{169} 是谱任意的。

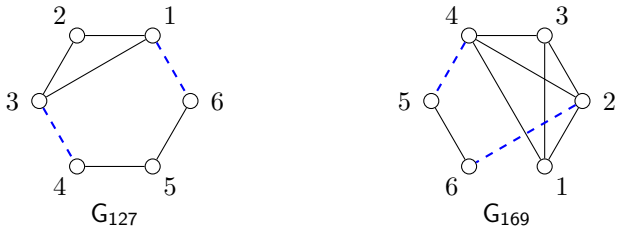


图4：具有六个顶点的图 $\mathsf{G}_{127} = K_3 \dot{\cup} P_3 + \{\{1,6\},\{3,4\}\}$ 和 $\mathsf{G}_{169} = K_4 \dot{\cup} K_2 + \{\{2,6\},\{4,5\}\}$ 。

这些结果解决了附录 B] 中列出的 G_{127} 和 G_{169} 的有序重数列表的谱任意性问题 [1, 。

例3.11. 令 $G = K_3$, $V(G) = [3]$, $H = P_3$, $V(H) = 3 + [3]$,

$$\beta = \{\{1,6\},\{1,5\},\{3,5\},\{3,4\}\},$$

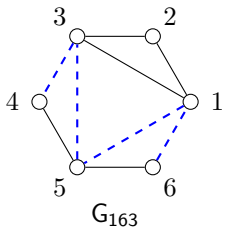


图5：具有集合 $\beta = \{\{1,6\},\{1,5\},\{3,5\},\{3,4\}\}$ 的六个顶点的图 $G_{163} = K_3 \dot\cup P_3 + \beta$。

且 $\theta, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1 \in \mathbb{R}$ 为互不相同的实数。根据注3.8，存在具有 SSP 的矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$，其谱 $\text{spec}(A) = \{\theta^{(2)}, \mu_1\}$ 以及 $\text{spec}(B) = \{\theta, \lambda_1, \lambda_2\}$，使得 A 和 B 关于 θ 的特征子空间都是一般的。

那么，图5中的图 G_{163} 同构于 $G \dot\cup H + \beta$。注意，β 包含两个形如 $\{1,\cdot\}$ 的元素和两个形如 $\{3,\cdot\}$ 的元素，因此根据定理 3.7，$\mathcal{S}(G_{163})$ 中存在一个具有 SSP 且谱为 $\{\theta^{(3)}, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1\}$ 的矩阵。由于 θ、λ_1、λ_2 和 μ_1 是任意互不相同的数，无序重数列表 $\{3,1,1,1\}$ 是谱任意的，这解决了附录 B] 中 G_{163} 的一些先前尚未解决的有序重数列表的谱任意性问题。

本节最后给出一些特征子空间不是一般的例子。

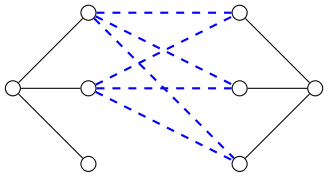


图 6：一个解放集不依赖于一般特征子空间的例子。

例3.12。考虑 $K_{1,\,3}$，其中 $V(K_{1,\,3}) = [4]$，其中 1 是度为 3 的顶点。设 $A, B \in \mathcal{S}(K_{1,\,3})$，使得 $\text{spec}(A) = \{\lambda_1, \theta^{(2)}, \lambda_2\}$ 且 $\text{spec}(B) = \{\mu_1, \theta^{(2)}, \mu_2\}$，其中 $\lambda_1 < \theta < \lambda_2$ 且 $\mu_1 < \theta < \mu_2$。例如，根据 [4],，对于任意互不相同的实数 λ_1, λ_2, μ_1,μ_2 和 θ，这样的谱都可以由具有 SSP 的矩阵实现。

于是，根据交错定理和 [23, 引理 5.1]，我们有

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} & \theta I_3 \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} b & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & \theta I_3 \end{pmatrix}.$$

令 U_A 为一个 4×2 矩阵，其列构成 $\ker(A - \theta I)$ 的一组基。该

A 的结构意味着 U_A 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix},$$

其中，$\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 的任意线性组合都与 a 正交。特别地，对于任意 c_1、$c_2 \in \mathbb{R}$，除非 $c_1 = c_2 = 0$，否则 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$ 必须至少有两个非零元素。如果对于某个满足 $|\mathcal{I}| = 2$ 的 $\mathcal{I} \subseteq \{2,3,4\}$，$U_A[\mathcal{I},:]$ 是奇异的，那么必定存在非零的 c_1 和 c_2，使得 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$ 只有一个非零元素，这是不可能的。因此，每个满足 $\mathcal{I} \subseteq \{2,3,4\}$ 和 $|\mathcal{I}| = 2$ 的子矩阵 $U_A[\mathcal{I},:]$ 都必须可逆。这意味着 ker($A - \theta I$) 在 $\{2,3,4\}$ 上“局部地”一般，同样的性质也出现在 ker($B - \theta I$) 上。

按照定理 3.5 中相同的论证，对于任意满足 $|V_G| = 2$ 的 $V_G \subseteq \{2,3,4\}$ 以及满足 $|V_H| = 3$ 的 $V_H \subseteq \{6,7,8\}$，集合 $\beta = V_G \times V_H$ 是 $A \oplus B$ 的解放集。图 $K_{1,\ 3} \dot{\cup} K_{1,\ 3} + \beta$ 如图 6 所示。因此，在 $\mathcal{S}(K_{1,\ 3} \dot{\cup} K_{1,\ 3} + \beta)$ 中存在一个具有 SSP 和有序重数列表 (1, 1, 4, 1, 1) 的矩阵，并且它是谱任意的。

4 零迫

下文将聚焦于非连通图，并构建一种依赖于（经典）零迫游戏的技术，以确定相应矩阵的 SSP 解放集。本节末尾将给出关于 SAP 的类似结论。

我们首先回顾 [2] 中引入的零迫游戏。设 G 为一个图。在零迫游戏的每个阶段，所有顶点都被赋予一种颜色：蓝色或白色。游戏开始时，选定一个初始蓝色顶点集 $F \subseteq V(G)$。游戏通过反复应用以下颜色变换规则进行：如果 v 是蓝色顶点 u 的唯一白色邻点，那么 v 在下一步变为蓝色。此操作称为一次迫使，记作 $u \to v$。如果从初始蓝色顶点集 F 开始，反复应用颜色变换规则后成功将所有顶点变为蓝色，那么 F 称为 G 的零强迫集。

图 G 的零迫数是零强迫集的最小大小，记作 $Z(G)$。例如，叶顶点是 P_n 的零强迫集，且 $Z(P_n) = 1$；而在 C_n 中，任意两个相邻顶点构成一个零强迫集，且 $Z(C_n) = 2$。已知，$Z(G)$ 是 $\mathcal{S}(G)$ [2] 中任意矩阵的任意特征值重数的上界。

定义 4.1. 设 G 是一个图。若对于任意满足 $|F'| = |F| - 1$ 的 $F' \subset F$，F' 都是 G 的零强迫集，则集合 $F \subseteq V(G)$ 是 G 的零强迫覆盖。

如果 F 是 G 的零强迫覆盖，那么显然 F 的任何超集也都是 G 的零强迫覆盖。一般而言，两个或更多互不相交的零强迫集的并集是一个零强迫覆盖。然而，下面的例子表明，零强迫覆盖不一定具有这种形式。

例 4.2. 不难验证，图 7 中 G_{30} 和 G_{36} 的顶点着色集都是零强迫覆盖的例子。更一般地，广义星图 G 中所有叶节点组成的集合是 G 的零强迫覆盖。



图 7：以蓝色标示的 G_{30} 和 G_{36}, 的零强迫覆盖。

我们将在下文看到，图G 和 H 的笛卡尔积的零强迫覆盖，有助于我们找到$\mathcal{S}(G\dot\cup H)$中某些矩阵的 SSP 解放集。回想一下，两个图 G 和 H 的笛卡尔积是定义在顶点集上的图 $G\,\square\, H$

$$V(G\,\square\, H)=\{(u,v):u\in V(G),v\in V(H)\}$$

当且仅当以下任一条件成立时，两个顶点(u_1,v_1)和(u_2,v_2)相邻：

- $u_1=u_2$ 和 $\{v_1,v_2\}\in E(H)$，或
- $v_1=v_2$ 和 $\{u_1,u_2\}\in E(G)$。

已知 [2]， $Z(P_s\,\square\, P_t)=\min\{s,t\}$，且 $Z(C_s\,\square\, P_t)=\min\{s,2t\}$。对于$s\le t$，已知 [8]

$$Z(C_s\,\square\, C_t)=\begin{cases}2s-1 & \text{if } s=t \text{ and } s \text{ is odd},\\ 2s & \text{otherwise.}\end{cases}$$

引理 4.3. 设 G和 H是图，且 β'是 $G\,\square\, H$的零强迫集。那么，对于任意均具有 SSP 的 $A\in\mathcal{S}(G)$ 和 $B\in\mathcal{S}(H)$，$A\oplus B$相对于 $G\dot\cup H+\beta'$ 具有 SSP。

证明。记 $\Gamma:=G\dot\cup H+\beta'$，并设 $A\in\mathcal{S}(G)$、 $B\in\mathcal{S}(H)$具有 SSP。此外，假设 $X\in\mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{\Gamma})$ 满足 $[A\oplus B,X]=O$。我们可以写成

$$X=\begin{pmatrix}X_A & Y\\ Y^\top & X_B\end{pmatrix}$$

与 $A\oplus B$ 的划分相符，使得 $X_A\in\mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{G})$、 $X_B\in\mathcal{S}_0^{\mathrm{cl}}(\overline{H})$，且 $Y|_{\beta'}=0$。由于 A和 B都具有 SSP，条件 $[A\oplus B,X]=O$等价于 $AY-YB=O$. 接下来考察 $AY-YB$的元素，并使用记号 $A=\left(a_{i,\ j}\right)$, $B=\left(b_{i,\ j}\right)$和 $Y=\left(y_{i,\ j}\right)$。

令 (i_0,j_0)、$(i_1,j_1)\in V(G\,\square\, H)$，并令 $F\subset V(G\,\square\, H)$ 为一组蓝色顶点，它们可通过一次应用颜色变换规则，在 $G\,\square\, H$ 上实施迫使 $(i_0,j_0)\to(i_1,j_1)$。首先证明，若 $y_{i,\ j}=0$ 对所有 $(i,j)\in F$ 均成立，并且

$(AY - YB)_{i_0,\ j_0} = 0$，则 $y_{i_1,\ j_1} = 0$。方程 $(AY - YB)_{i_0,\ j_0} = 0$ 可写为：

$$\sum_{k \in N_G[i_0]} a_{i_0,k} y_{k,j_0} - \sum_{k \in N_H[j_0]} b_{k,j_0} y_{i_0,k} = 0.$$

由 $(i_0, j_0) \to (i_1, j_1)$，我们知道 (i_0, j_0) 及其在 $G \square H$ 中除 (i_1, j_1) 以外的所有邻点都属于 F。这意味着，假设上面的方程中出现的所有变量 $y_{i,\ j}$ 均为零，唯独 $y_{i_1,\ j_1}$除外。此外，由于 (i_1, j_1) 是 (i_0, j_0) 的一个邻点，因此 $i_1 = i_0$ 或 $j_1 = j_0$。若 $i_1 = i_0$，则方程可化简为 $-b_{j_1,\ j_0} y_{i_0,\ j_1} = 0$。若 $j_1 = j_0$，则可化简为 $a_{i_0,\ i_1} y_{i_1,\ j_0} = 0$。无论哪种情况，我们都可得出 $y_{i_1,\ j_1} = 0$。

假设 $Y|_{\beta'} = 0$ 和 $AY - YB = O$，通过反复应用上述论断，现在可以得出 $Y = 0$。因此，根据命题 3.2，若 β' 是 $G \square H$ 的零强迫集，则 $A \oplus B$ 相对于 $G \dot\cup H + \beta'$ 具有 SSP，正如所声称的那样。 □

定理 4.4. 设 G 和 H 是图。假设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$ 具有 SSP。若 β 是 $G \square H$ 的零强迫覆盖，则 β 是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。

证明. 若 β 是零强迫覆盖，则任何满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$ 的 $\beta' \subset \beta$ 都是零强迫集。因此，根据引理 4.3 β，对于任意具有 SSP 的 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$，$A \oplus B$ 都是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。 □

在定理 4.4 中，我们要求 A 和 B 都具有 SSP，但不要求 $A \oplus B$ 也具有 SSP，因此允许 A 和 B 有一些共同的特征值。

例 4.5. 设 $2 \le s \le t$、$G = P_s$ 和 $H = P_t$。设 u_1、…、u_s 和 v_1、…、v_t 分别为 G 和 H 的顶点，按路径顺序排列。设

$$\beta = \{\{u_i, v_1\} \colon i \in [s]\} \cup \{\{u_i, v_2\} \colon i \in [s],\ i \equiv 2, 3 \pmod 4\} \cup \{\{u_{s-1}, v_2\}\}.$$

注意，边 $\{u_{s-1}, v_2\}$ 可能已经属于上述并集中的第二个集合。因此，β是 $G \square H$ 的零强迫覆盖。根据定理 4.4，对于任意具有 SSP 的 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(H)$，β 都是 $A \oplus B$ 的 SSP 解放集。由于路径的每个矩阵都具有 SSP，β 实际上是$G \dot\cup H$的 SSP 解放集。由于路径可以实现任意离散谱（所有特征值均不相同的谱），$P_s \dot\cup P_t + \beta$可以实现由至多 s 个重数为 2 的特征值以及若干单特征值组成的任意谱。

注意，当 $H = mK_1$ 时，笛卡尔积 $G \square H$ 同构于 m 个 G的不交并。因此，可以利用 G 的零强迫覆盖来构造 $G \square mK_1$的零强迫覆盖。

推论 4.6. 设 G 是一个有 n 个顶点的图，$m \in \mathbb{N}$，且 $A \in \mathcal{S}(G)$ 具有 SSP。若 F_j 是 G、$j \in [m]$ 的零强迫覆盖，则

$$\beta = \bigcup_{j \in [m]} \{\{u, i\} \colon u \in F_j, i \in [m]\}$$

对于任意互不相同的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$，它是 $A \oplus \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 的 SSP 解放集。

例 4.7. 令 P_{n-1} 的顶点 u_1、……、u_{n-1} 按路径顺序排列。那么，$\beta = \{u_1, u_{n-1}\}$ 是 P_{n-1}的一个零强迫覆盖。根据推论 4.6，$\beta = \{\{u_1, u_n\}, \{u_{n-1}, u_n\}\}$ 是任意形如 $A \oplus (\lambda) \in \mathcal{S}(P_{n-1} \dot{\cup} K_1)$ 的矩阵的 SSP 解放集，其中 $A \in \mathcal{S}(P_{n-1})$ 具有 SSP，$\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $V(K_1) = \{u_n\}$。根据 [19]，再次可以忽略 A 具有 SSP 这一假设。由于 $(P_{n-1} \dot{\cup} K_1) + \widehat{\beta} \cong C_n$，且任意互不相同的实数都可以作为某个 $A \in \mathcal{S}(P_{n-1})$ 的谱，定理 2.2 保证无序重数列表 $\{2, 1, \ldots, 1\}$ 对 C_n 是具有 SSP 的谱任意列表。这与 [4,推论 7.6] 相符。

例 4.8。由 [4, 图 1] 可知，有序重数列表 (1, 2, 1) 对 $K_{1,3}$ 是谱任意的，且可由 SSP 实现；由 [21, 引理 2.2]，存在一个具有互异特征值 λ_1、λ_2 且满足 SSP 的矩阵 $B \in \mathcal{S}(2K_1)$。注意，$K_{1,3}$ 的三个叶节点构成了 $K_{1,3}$的一个零强迫覆盖。因此，由推论 4.6 和引理 2.2，有序重数列表 (1, 3, 2) 和 (2, 3, 1) 可在 $G_{175} = K_{3,3}$ 中实现，见图 9。至此，附录 B] 中 G_{175} 的有序可实现重数列表已全部列出。

下面给出一些 $m = 1$ 属于推论 4.6 时的例子。

例4.9。根据 [4, 图 1]，有序重数列表 (1,2,1,1) 和 (1,1,2,1) 对 G_{30}，来说是谱任意的，且可由具有 SSP 的矩阵实现。因此，根据推论 4.6 和例 4.2，有序重数列表 (1,3,1,1) 和 (1,1,3,1) 对 G_{129} 来说是谱任意的，且具有 SSP，见图 8。

由于 G_{145} 和 G_{153} 是 G_{129}，的超图，根据定理 1.1，有序重数列表 (1,3,1,1) 和 (1,1,3,1) 对于 G_{145} 和 G_{153} 而言是具有 SSP 的谱任意列表。或者，也可以将推论 4.6 和例 4.2 应用于 G_{36} 及图 7 所示的零强迫覆盖，从而得出相同的结论。这就回答了附录 B] 中关于 G_{129}，、G_{145} 和 G_{153} 的 (1,3,1,1) 和 (1,1,3,1) 的谱任意性问题。

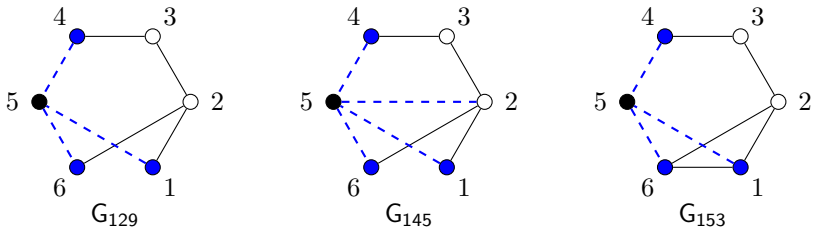


图 8：G_{30} 和 G_{36} 的蓝色顶点给出了它们的零强迫覆盖。添加带有标签 5 的黑色顶点后，我们得到图 $G_{129} = G_{30} \cup K_1 + \beta_{30}$ 和 $G_{153} = G_{36} \cup K_1 + \beta_{36}$。注意，$G_{145}$ 是 G_{129} 的超图。

例4.10。由 [4, 图 1] 可知，有序重数列表 (1, 2, 2)、(2, 2, 1)、(1, 1, 2, 1) 和 (1, 2, 1, 1) 均可实现为具有 SSP 的列表，且对于 C_5 而言是谱任意的。由于 C_5 的任意四个顶点都是 C_5 的零强迫覆盖，根据推论 4.6，有序重数列表 (1, 2, 3)、(1, 3, 2)、(3, 2, 1)、(3, 1, 2)、(1, 1, 3, 1) 和 (1, 3, 1, 1) 对于 G_{171} 而言是具有 SSP 的谱任意列表，见图 9。此外，由于 G_{187} 是 G_{171}，的超图，同样的有序重数列表对于 G_{187} 也具有 SSP 且谱任意。因此，我们已经彻底解决了附录 B] 中列出的 G_{171} 和 G_{187} 其余有序重数列表的谱任意性问题。

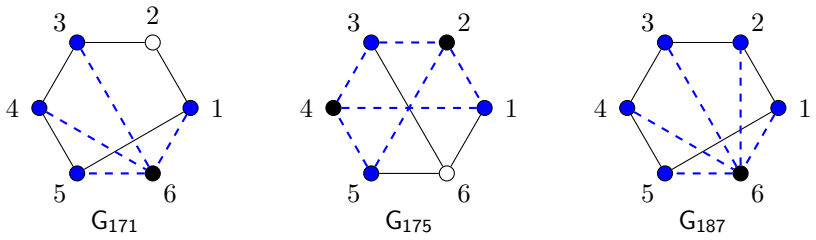


图 9： C_5 和$K_{1,\ 3}$ 中的蓝色顶点分别给出了它们的零强迫覆盖。将黑色的 K_1 和 $2K_1$ 分别添加到 C_5 和$K_{1,\ 3}$中，我们得到图 G_{171}，$G_{175}$$G_{187}$。

虽然我们能够利用图的笛卡尔积上的经典零迫来构造 SSP 解放集，但对于 SAP，我们需要定义一种新的颜色变换规则。设 G 和 H 为图，并将 $G \square H$ 的每个顶点染成蓝色或白色。如果 u 和 v 位于 G 的同一个副本中，并且只考察这个与 G 同构的导出子图时，颜色变换规则允许执行操作 $u \to v$，则称 $u \xrightarrow{G} v$。 $u \xrightarrow{H} v$ 的概念定义类似。如果可以先将一组顶点 F 染成蓝色，然后反复应用 $u \xrightarrow{G} v$或 $u \xrightarrow{H} v$，使 V（$G \square H$）变成蓝色，那么 F称为$G \square H$ 的局部零迫集。

定义 4.11. 设 G 为一个图。若对于任意满足 $|\beta'| = |\beta| - 1$ 的 $\beta' \subset \beta$， β'都是 G 的局部零迫集，则称集合 $\beta \subseteq V(G)$ 是 G的局部零迫覆盖。

通过修改定理 4.4 的证明，我们可以得到 SAP 的类似结果。

定理 4.12. 设 G 和 H 为图。假设 $A \in \mathcal{S}(G)$ 和 $B \in \mathcal{S}(G)$ 具有 SAP。若 β 是 $G \square H$的局部零迫覆盖，则 β 是 $A \oplus B$的 SAP 解放集。

注 4.13. 注意，当 $H = K_1$ 时，集合 F 是$G \square H$ 的零强迫覆盖，当且仅当 F 是 $G \square H$ 的局部零迫覆盖。这是合理的，因为 SSP 解放集允许在 spec(λ) 上额外添加任意一个特征值

，而 SAP 解放集允许增加 spec(A) 中某个特征值的重数——二者效果相同。

例 4.14. 设 $G = C_4$ 和 $H = P_2$，并设 $V(G) = [4]$ 和 $V(H) = \{5, 6\}$。任何形如 $\{(i, 5), (i+1, 5)\}$ 或 $\{(i, 6), (i+1, 6)\}$ 的集合都是 $G \square H$ 的局部零迫集，其中当 $i = 4$ 时，$i+1$ 替换为 1。因此，

$$F = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 6)\}$$

是 $G \square H$的局部零迫覆盖。设 β 为与F对应的边集。由定理 4.12，β 对于任意具有 SAP 的 $A \oplus B$（$A \in \mathcal{S}$、G）和$B \in \mathcal{S}$（H）都是一个解放集。取零化度为 2 的 A 和零化度为 1 的 B，我们证明了存在一个属于 $\mathcal{S}$（$G \dot{\cup} H + \beta$）、零化度为 3 且具有 SAP 的矩阵。注意，$G \dot{\cup} H + \beta$ 是图 10 所示的棱柱图。

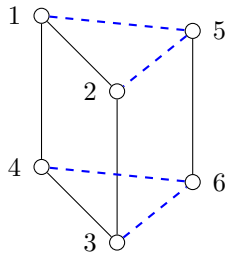


图 10：例 4.14 中的棱柱图 $C_4 \dot{\cup} P_2 + \beta$。

5 图的解放集

本节研究对于 $\mathcal{S}(G)$ 中任意矩阵都是解放集的集合，因此这些集合不依赖于 $\mathcal{S}(G)$ 中矩阵的选择。一般来说，确定图的解放集可能很困难。然而，[19] 中引入的 SSP 序列以及 [18] 中引入的 SAP 零迫提供了有助于解决这一问题的组合工具。

定义 5.1. 设 G 是一个图。若子集 $\beta \in E(\overline{G})$ 对于所有 $A \in \mathcal{S}(G)$ 都是 G（分别是 G）的 SSP（分别是 SAP）解放集，则称其为 G 的 SSP 解放集（分别称为 G 的 SAP 解放集）。

由引理 2.2 可立即得到以下结果。

定理 5.2. 设 G 为一个图，β 为 G的一个 SSP（分别为 SAP）释放集。那么，在 $\mathcal{S}$（G）中可实现的任意谱（或秩，分别）都能在 $\mathcal{S}$（$G + \beta$）中以 SSP（分别以 SAP）实现。

例5.3. 考虑 G 为一个星图$K_{1,\,4}$ 其中 $v = 5$ 是唯一的非叶顶点，并设

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & a_{1,5} \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & a_{2,5} \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & a_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & d_5 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(K_{1,4}),$$

其中，假设 $a_{i,\,j}$均非零，而 d_i可以取任意实数。 A 的 SSP 验证矩阵 Ψ 等于

$$\begin{pmatrix} d_1-d_2 & 0 & 0 & -a_{2,5} & 0 & 0 & -a_{1,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1-d_3 & 0 & -a_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{1,5} & 0 \\ 0 & 0 & d_1-d_4 & -a_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{1,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2-d_3 & 0 & -a_{3,5} & 0 & -a_{2,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2-d_4 & -a_{4,5} & 0 & 0 & -a_{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3-d_4 & -a_{4,5} & -a_{3,5} \end{pmatrix},$$

其中，各行由非边 $\{1,2\}$、 $\{1,3\}$、 $\{1,4\}$、 $\{2,3\}$、 $\{2,4\}$、$\{3,4\}$索引。令 $\beta' = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ 和 γ 表示不含形如 $d_i - d_j$、 $i \neq j$的元素的列的集合。因此，

$$\Psi := \Psi[E(\overline{G}) \setminus \beta', \gamma] = \begin{pmatrix} -a_{4,5} & 0 & 0 & -a_{1,5} \\ 0 & -a_{3,5} & -a_{2,5} & 0 \\ 0 & -a_{4,5} & 0 & -a_{2,5} \\ 0 & 0 & -a_{4,5} & -a_{3,5} \end{pmatrix}.$$

由于 $\det(\Psi) = -2a_{2,\,5}a_{3,\,5}a_{4,\,5}^2$，可知对于任意取值为非零的 $a_{i,\,j}$， Ψ 均具有满行秩。根据注 1.9， A 关于 $K_{1,\,4} + \beta'$具有 SSP。由对称性，对于任意形如 $\{\{i,j\},\{i,k\}\}$ 且满足 i、 j、 $k \in [4]$的 β'，同样的论证也成立。因此，二者均

$$\beta_1 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}, \text{ and}$$
$$\beta_2 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$$

$K_{1,4}$ 的 SSP 解放集，如图11所示。

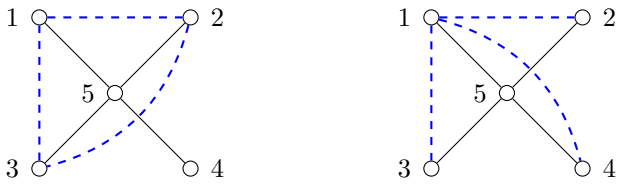


图11：$K_{1,4}$ 的两个 SSP 解放集。

因此，根据定理 5.2， $\mathcal{S}(K_{1,\,4})$ 中出现的任何谱，也会在具有 SSP 的 $\mathcal{S}(K_{1,\,4}+\beta_1)$ 和 $\mathcal{S}(K_{1,\,4} + \beta_2)$ 中出现。另一方面，众所周知，并非所有 $A \in \mathcal{S}(K_{1,\,4})$ 都具有 SSP。特别是，任何具有重数3的特征值的矩阵$A \in \mathcal{S}(K_{1,\,4})$ 都不具有 SSP；例如参见 [4]。

上述理论有助于研究依赖于矩阵谱的各种参数。下面给出两个例子。回顾一下，$M(G)$ 是 $\mathcal{S}(G)$ 中矩阵的最大零化度，而 $\xi(G)$ 表示具有 SAP [3] 的 $\mathcal{S}(G)$ 中矩阵的最大零化度。此外，令 $q(G)$ 表示 $\mathcal{S}(G)$ 中矩阵的最小互异特征值个数，令$q_S(G)$ 表示具有 SSP [5] 的 $\mathcal{S}(G)$ 中矩阵的最小互异特征值个数。由定理 5.2 可得以下不等式。

推论 5.4. 设 G 是一个图。

1. 如果 β 是 G的 SSP 解放集，那么 $q(G+\beta) \leq q_S(G+\beta) \leq q(G) \leq q_S(G)$。
2. 如果 β 是一个 SAP 解放集，那么 $M(G+\beta) \geq \xi(G+\beta) \geq M(G) \geq \xi(G)$。

6 结论

强谱性质的提出对图的逆特征值问题及相关问题产生了深远影响。本文提出的 SSP 解放集概念，通过研究对给定矩阵模式的哪些扰动能够保证谱或秩保持不变，进一步推进了这一问题的研究方法。本文列举了一些应用 SSP 解放集的实例，但并不旨在详尽罗列所有可能从中受益的研究方向。研究矩阵的直和与图的不交并是一个自然的起点，尤其是因为在此背景下，标准谱性质的应用已得到充分理解。即便是在这一特殊情形下，本文也为未来研究奠定了基础，并仅提供了一些可进一步拓展的初步实例。特别是，本文提出并阐明了一个纯组合问题：确定图的笛卡尔积的零强迫覆盖。

致谢

Jephian C.-H. Lin 获得台湾国家科学及技术委员会青年学者奖助计划（资助编号：NSTC-111-2628-M-110-002）的支持。Polona Oblak 获得斯洛文尼亚研究机构的资助（核心研究经费编号：P1-0222，项目编号：J1-3004）。

参考文献

[1] John Ahn、Christine Alar、Beth Bjorkman、Steve Butler、Joshua Carlson、Audrey Goodnight、Haley Knox、CasandraMonroe 和 Michael C. Wigal。《六个顶点图的有序重数逆特征值问题》。《电子线性代数期刊》，37:316–358，2021年。

[2] AIM 最小秩特殊图工作组。《零强迫集与图的最小秩》。《线性代数及其应用》，428(7):1628–1648，2008年。[3] Francesco Barioli、Shaun Fallat 和 Leslie Hogben。《Colin de Verdi`ère 图参数的一种变体：对图的最小秩的影响》。《电子线性代数期刊》，13:387–404，2005年。[4] Wayne Barrett、Steve Butler、Shaun M. Fallat、H. Tracy Hall、Leslie Hog- ben、Jephian C.-H. Lin、Bryan L. Shader 和 Michael Young。《图的逆特征值问题：重数与子式》。《组合论杂志 B 辑》，142:276–306，2020年。[5] Wayne Barrett、Shaun Fallat、H. Tracy Hall、Leslie Hogben、Jephian C.-H. Lin 和 Bryan L. Shader。《强阿诺德性质的推广与图的不同特征值的最小数量》。《电子组合学杂志》，24(2):论文编号 2.40，28，2017年。[6] Wayne Barrett、Anne Lazenby、Nicole Malloy、C urtis Nelson、William Sex- ton、Ryan Smith、John Sinkovic 和 Tianyi Yang。《组合逆特征值问题：完全图及满足严格不等式的小图》。《电子线性代数期刊》，26:656–672，2013年。[7] Wayne Barrett、Curtis Nelson、John Sinkovic 和 Tianyi Yang。《组合逆特征值问题 II：小图的所有情形》。《电子线性代数期刊》，27:742–778，2014年。[8] Katherine F. Benson、Daniela Ferrero、Mary Flagg、Veronika Furst、Leslie Hogben、Violeta Vasilevska 和 Brian Wissman。《图乘积的零迫与幂支配》。《澳大利亚组合学杂志》，70:221–235，2018年。[9] Yves Colin de Verdi`ère。《关于图的一个新不变量及一个平面性判据》。《组合论杂志 B 辑》，50(1):11–21，1990年。[10] Yves Colin de Verdi`ère。《关于一个新的图不变量及平面性判据》。载于《图结构理论》（华盛顿州西雅图，1991年），《当代数学》第147卷，第137–147页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1993年。[11] Warren E. Ferguson, Jr.。《具有指定谱的 Jacobi 矩阵与周期 Jacobi 矩阵的构造》。《数学计算》，35(152):1203–1220，1980年。[12] L. J. Gray 和 D. G. Wilson。《由谱数据构造 Jacobi 矩阵》。《线性代数及其应用》，14(2):131–134，1976年。[13] Ole H. Hald。《Jacobi 矩阵的逆特征值问题》。《线性代数及其应用》，14(1):63–85，1976年。[14] Harry Hochstadt。《关于由谱数据构造 Jacobi 矩阵》。《线性代数及其应用》，8:435–446，1974年。

[15] Leslie Hogben、Jephian C.-H. Lin 和 Bryan L Shader。《图的逆问题与零迫》。美国数学会，普罗维登斯，2022年。[16] C. R. Johnson 和 T. Wakhare。线性树的逆特征值问题。《离散数学》，345(4)：第112737号论文，17页，2022年。[17] Charles R. Johnson、Ant´onio Leal Duarte 和 Carlos M. Saiago。树图对应矩阵的逆特征值问题与特征值重数列表：广义星图和双重广义星图的情形。《线性代数及其应用》，373：311–330，2003年。组合矩阵理论会议（浦项，2002年）特刊。[18] Jephian C.-H. Lin。使用新的零迫过程来保证强阿诺德性质。《线性代数及其应用》，507：229–250，2016年。[19] Jephian C.-H. Lin、Polona Oblak 和 Helena ˇSmigoc。图的强谱性质。《线性代数及其应用》，598：68–91，2020年。[20] Jephian C.-H. Lin、Polona Oblak 和 Helena ˇSmigoc。关于块图的逆特征值问题。《线性代数及其应用》，631：379–397，2021年。[21] Keivan Hassani Monfared 和 Bryan L. Shader。构造具有给定图和指定交错谱数据的矩阵。《线性代数及其应用》，438(11)：4348–4358，2013年。[22] Keivan Hassani Monfared 和 Bryan L. Shader。图的处处非零特征向量基问题。《线性代数及其应用》，505：296–312，2016年。[23] Polona Oblak 和 Helena ˇSmigoc。图所约束模式的对称矩阵的特征值最小重数的最大值。《线性代数及其应用》，512：48–70，2017年。[24] Ronald C. Read 和 Robin J. Wilson。《图集》。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1998年。