热力学耦合问题的正则化耦合多尺度方法

Xiaofei Guan[a, b, c]、Lijian Jiang[a]、Yajun Wang[a, *]

[a]数学科学学院，同济大学，上海 *200092*，中国 *b*智能计算与应用重点实验室（同济大学），教育部，上海 *20092*，中国[c]数学研究所，河南省科学院，郑州 *450046*，中国

arXiv:2302.01674v2 [math.NA] 3 Jan 2024

摘要

多物理场过程中的耦合效应在多尺度方法设计中往往被忽略。耦合可由非正定算子描述，这反过来给多尺度模拟带来了重大挑战。本文基于广义多尺度有限元法（GMsFEM），提出了一种用于求解热力学耦合问题的正则化耦合多尺度方法，并将其称为耦合广义多尺度有限元法（CGMsFEM）。该方法通过在每个粗网格块中求解局部正则化耦合谱问题来定义耦合多尺度基函数，并可通过一种新颖的两个松弛参数设计加以实现。与标准 GMsFEM 相比，所提出的方法不仅能够准确捕捉多物理场问题中的多尺度耦合关联效应，还能以更少的多尺度基函数显著提高计算效率。此外，本文还建立了收敛性分析，并推导出最优误差估计，其中误差上界与松弛系数的大小无关。本文给出了周期性微结构、随机微结构和随机材料系数的若干数值算例，以验证理论分析。数值结果表明，与非耦合 GMsFEM 相比，CGMsFEM 展现出更好的稳健性和效率。

关键词： 热力学耦合问题、非均质介质、广义多尺度有限元法、耦合多尺度基函数、误差估计

1. 引言

非均质介质已广泛应用于实际工程，其在多个时空尺度上的物理和力学性质与其底层微观结构、性质、组成等密切相关。因此，高效的耦合多尺度建模对于非均质介质的性能预测 [1], 优化设计 [2, 3], 和安全评估 [4] 至关重要。在热力学过程中，除了微尺度非均质性之外，微尺度热膨胀特性也可能在多个空间尺度上发挥重要作用。例如，根据复杂的载荷条件（如高应力或极端温度环境），可能会因产生剧烈的热应力而出现损伤或裂纹 [5], ，而对此进行计算的成本可能高得难以承受。因此，应努力开发更高效的多尺度模型和数值方法，以预测非均质介质的耦合多物理场行为，满足工程实践需求。

基于热力学第一定律和动量守恒，对热力学过程进行数学建模可得到耦合偏微分方程（PDEs） [6], , 其中包括相互耦合的双曲型力学方程和抛物型热传导方程。对于准静态情形，文献 [7, 8], 分析了耦合偏微分方程解的存在性和唯一性，其中忽略了力学部分的惯性项。借助有限元法（FEM），研究人员还开发了数值方法，并获得了收敛性分析和误差

*通讯作者电子邮件地址：guanxf@tongji.edu.cn (Xiaofei Guan), ljjiang@tongji.edu.cn (Lijian Jiang), 1910733@tongji.edu.cn (Yajun Wang)

阶 [9, 10]。大量研究聚焦于二维和三维线性热力学问题 [11, 12] 以及非线性热力学问题 [13], , 包括耦合效应 [14],断裂分析 [15], 等。必须强调，尽管热力耦合方程与孔弹性方程背后的物理机制不同，但二者在数学上是等价的。众多方法和结论表明，这两类方程具有一致性。因此，本文不再深入探讨孔弹性方程。此外，非均质材料的多尺度特性使得采用直接数值方法求解热力学问题的成本极高，而且这类方法也不可靠，并且众所周知地存在严重病态[16]。这些问题促使我们开发稳健且高效的 多尺度方法，以降低耦合热力学问题的维数，同时尽可能纳入重要的微观物理信息。

多尺度方法在非均质介质的建模与数值计算中具有重要意义。由于能够充分描述复杂系统的内在物理过程，这一领域在工程实践中仍然十分活跃。人们采用多种策略解决多尺度问题，并取得了长足进展，其中包括受约束宏观模拟和广义有限元法（GFEM） [17]。受约束宏观模拟是一种微观—宏观耦合交互方法，通过求解特定的微观问题建立合适的宏观模型，相关方法包括均匀化方法 [18, 19], 、变分多尺度方法 [20], 、异质多尺度方法 [21], 、计算均匀化方法 [22], 等。广义有限元法最初由 [17] 提出，之后通过构造不同的有限元空间，被应用于解决各种多尺度问题。在多尺度有限元法（MsFEM） [23], 中，通过求解每个粗块上的局部问题，并结合局部化的微观物理信息，构造有限元空间的基函数；同时也发展了相应的数学理论，例如MsFEM的收敛性分析和误差缩减方法。随后，广义多尺度有限元法（GMsFEM） [24, 25] 通过在快照空间上求解局部谱问题，构造高精度多尺度基函数。类似地，多尺度谱广义有限元法（MS-GFEM） [26, 27] 也是一种重要的多尺度广义有限元法，其局部近似空间通过求解局部谱问题构造。此外，局部正交分解（LOD）方法 [28, 29] 源于变分多尺度方法 [20], 的思想，通过局部良好近似的基函数对粗空间进行修正。这些技术已拓展并应用于热—力耦合问题和孔隙弹性问题，例如均匀化方法 [30, 31, 32, 33], 、LOD [34, 35], 、GMsFEM [36, 37] 以及扩展多尺度有限元法 [38, 39], 等。

受以往研究启发，本文设计了一种高效的 GMs-FEM 正则化耦合形式，称为 CGMsFEM。对于传统 GMsFEM [36, 37] 或 LOD 方法 [34, 35], , 多尺度基函数分别通过将热力耦合方程中的力学部分和热学部分解耦后得到的相应椭圆算子构造。这些方法未考虑热膨胀系数的多尺度特性，因此存在一定局限性。将耦合系统视为统一算子，并在 GMsFEM 框架下构造局部谱问题，这一思路虽自然，却难以实现。这是因为耦合算子呈现非正定特性，尤其是在强耦合情况下，即耦合系数相对较大时，传统方法会因此失效。为克服这一挑战，我们在 CGMsFEM 中引入两个松弛系数，构造了正则化局部谱问题。借助正则化技术，无需将热力耦合方程解耦，即可通过统一算子求解局部谱问题。构造多尺度基函数时考虑了位移场和温度场的耦合效应，从而能够更准确地捕捉耦合信息。此外，我们还推广了 GMsFEM 方法 [24, 38, 39] 的理论结果，得到了 CGMsFEM 的收敛性分析并推导出误差估计，其中还获得了局部谱问题中特征值的衰减率，该结果与 [40] 类似。此外，本文给出了若干涉及周期性和随机微观结构材料系数的数值算例，以验证 CGMsFEM 的理论分析。在选取相同数量的基函数时，数值结果表明，在弱耦合情况下，CGMsFEM 的精度优于 GMsFEM；在强耦合情况下，其精度也具有明显优势。本文方法的创新性概括如下：

（1）多尺度　ALE 基函数通过耦合谱问题构造，并结合局部　1

多尺度物理信息，从而能够以更少的自由度更准确地逼近原始热力学问题的解。

(2) 创新地为每个粗网格块中的局部耦合谱问题设计了两个松弛系数，通过调整松弛系数的取值来确保适当的正则性。此外，当多尺度耦合关联效应消失时，该方法可简化为标准 GMsFEM；这也为弱耦合或强耦合多物理场问题的耦合多尺度基函数设计提供了一个广义框架。

(3) 通过收敛性分析可知，CGMsFEM 的误差与每个局部粗网格块中的特征值衰减密切相关，这与 GMsFEM 的情况一致。同时，还证明了误差上界与这两个松弛系数无关。

本文的组织结构如下。第 2 节给出了 CGMsFEM 的构造，包括问题描述、耦合多尺度基函数的构造以及相应的有限元法。第 3 节对 CGMsFEM 进行收敛性分析。第 4 节通过若干数值算例展示所提出的 CGMsFEM 的效率和精度，最后在第 4 节给出结论5。

2. CGMsFEM 的表述

2.1. 问题陈述

考虑一个热力学问题，用以描述区域 Ω 中非均质介质的准静态变形，其中 $\Omega \subset \mathrm{R}^d$，$d = 2, 3$ 是一个具有利普希茨连续边界 $\partial\Omega$ 的有界凸多边形或多面体区域，且 $T > 0$ 为给定时间。假设固相为线弹性固体，且变形与温度场 [4, 3]耦合。于是，平衡方程和热传导方程可写为如下标准形式

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \beta\theta\mathbf{I}\right) = \mathbf{f}, & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ \dot{\theta} - \nabla \cdot \left(\kappa\nabla\theta\right) + \beta\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = g, & \text{in } \Omega \times (0,T], \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量，$\mathbf{I}$ 为 d 维单位矩阵。$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) : \Omega \times (0,T] \to \mathrm{R}^d$ 以及$\theta(\mathbf{x},t) : \Omega \times (0,T] \to \mathrm{R}$ 分别表示位移场和温度场。这里，上标点表示对时间 t 的偏导数，$\mathbf{x}$ 表示空间坐标。$\kappa(\mathbf{x})$ 和$\beta(\mathbf{x})$ 分别为具有多尺度特征的热导率和膨胀系数，$\mathbf{f}$ 为体力，g 为热源。于是，初始条件和边界条件定义如下

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_D, & \text{on } \Gamma_D^u \times (0,T], \quad (\boldsymbol{\sigma}(u) - \beta\theta\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_N, \quad \text{on } \Gamma_N^u \times (0,T], \\ \theta = \theta_D, & \text{on } \Gamma_D^\theta \times (0,T], \quad (\kappa\nabla\theta(x,t)) \cdot \mathbf{n} = q_N, \quad \text{on } \Gamma_N^\theta \times (0,T], \\ \theta(x,0) = \theta_0, & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

其中，Ω 的边界被划分为表面 $\Gamma^u{}_D$ 和 $\Gamma^u{}_N$、$\Gamma^\theta{}_D$ 和 $\Gamma^\theta{}_N$，其中 $\Gamma^u{}_D \cap \Gamma^u{}_N = \emptyset$ 以及 $\Gamma^\theta{}_D \cap \Gamma^\theta{}_N = \emptyset$。$\mathbf{u}_D$ 和 θ_D 分别是给定的位移和温度，$\boldsymbol{\sigma}_N$ 和 q_N 分别表示表面载荷值和热通量。$\mathbf{n}$ 是表面 $\Gamma^u{}_N$ 和 $\Gamma^\theta{}_N$的外法向量。一般热弹性材料的应力与应变本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{I},$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$是应变张量，定义为

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T).$$

μ 和 λ 是 Lam´e 常数，定义为

$$.\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

其中，E 和 ν 分别为杨氏模量和泊松比。

这里首先给出一些定义和假设。令$H^1(\Omega)$表示赋予范数 $\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L(\Omega)}$的经典Sobolev空间，且$H^{-1}(\Omega)$表示$H^1$的对偶空间。然后定义$L^p([0,T]; V)$，表示赋予范数的Bochner空间

$$\|v\|_{L^p([0,T];V)} = \left(\int_0^T \|v\|_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|v\|_{L^\infty([0,T];V)} = \operatorname*{essinf}_{0\le t\le T} \|v\|_V,$$

其中V 是一个赋予范数 $\|\cdot\|_V$的Banach空间，例如$L^2(\Omega)$和$H^1(\Omega)$。为简便起见，将省略时间区间 $[0,T]$ 和区域Ω，例如，用$L^p(V)$表示$L^p([0,T];V)$。以下两个空间$V_u(\Omega)$和$V_\theta(\Omega)$也定义为

$$V_u(\Omega) := \left\{v | v \in \left(H^1(\Omega)\right)^d : v = 0 \text{ on } \Gamma_D^u\right\}, \quad V_\theta(\Omega) := \left\{v | v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_D^\theta\right\}.$$

下面给出另一个假设。

假设2.1。 材料参数 λ、μ、 κ和 $\beta \in L^\infty(\Omega)$ 满足

$$0 < \lambda_{min} := \operatorname*{essinf}_{\mathbf{x}\in\Omega} \lambda(\mathbf{x}) \le \operatorname*{esssup}_{\mathbf{x}\in\Omega} \lambda(\mathbf{x}) := \lambda_{max} < \infty,$$
$$0 < \mu_{min} := \operatorname*{essinf}_{\mathbf{x}\in\Omega} \mu(\mathbf{x}) \le \operatorname*{esssup}_{\mathbf{x}\in\Omega} \mu(\mathbf{x}) = \mu_{max} < \infty,$$
$$0 < \kappa_{min} := \operatorname*{essinf}_{\mathbf{x}\in\Omega} \kappa(\mathbf{x}) \le \operatorname*{esssup}_{\mathbf{x}\in\Omega} \kappa(\mathbf{x}) := \kappa_{max} < \infty,$$
$$0 < \beta_{min} := \operatorname*{essinf}_{\mathbf{x}\in\Omega} \beta(\mathbf{x}) \le \operatorname*{esssup}_{\mathbf{x}\in\Omega} \beta(\mathbf{x}) := \beta_{max} < \infty.$$

此外，问题（1）对应的变分公式是求弱解$\mathbf{u} \in V_u(\Omega)$和 $\theta \in V_\theta(\Omega)$使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_u) - b(\mathbf{v}_u, \theta) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_u \rangle, & \forall \mathbf{v}_u \in V_u(\Omega), \\ c(\dot{\theta}, v_\theta) + d(\theta, v_\theta) + b(\dot{\mathbf{u}}, v_\theta) = \langle g, v_\theta \rangle, & \forall v_\theta \in V_\theta(\Omega), \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_u) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_u), \quad b(\mathbf{v}_u, \theta) = \int_\Omega \beta\theta \nabla \cdot \mathbf{v}_u,$$
$$c(\theta, v_\theta) = \int_\Omega \theta v_\theta, \quad d(\theta, v_\theta) = \int_\Omega \kappa \nabla\theta \cdot \nabla v_\theta.$$

： 表示Frobenius内积，而 $\cdot,\cdot$ 表示L^2(Ω中的内积).

2.2. 耦合多尺度基函数的构造

CGMsFEM基函数的构造过程可分为两个步骤。首先，通过求解粗块上的正则化耦合局部谱问题，构造耦合多尺度特征函数；与局部近似空间构造相关的局部计算彼此独立，可以并行执行。然后，求得单位分解函数，并据此构造多尺度基函数。最终得到的全局刚度矩阵可能比直接应用有限元法得到的刚度矩阵小几个数量级。

假设区域 Ω 由网格族 T H 构成，其中 H $=\max K_i \in T^H H_{K_i}$ 为粗网格尺寸，H_{K_i} 为粗网格 K_i 的直径。T H 是 Ω 的协调剖分，且形状正则。T^h 是 T^H 的协调细化，h 为细网格的直径。N 表示 T^H 中单元的数量，N_v 表示粗网格顶点的数量。令 $\{x_i\}^{N_v}$ i=1 为 T H 中顶点的集合，并令 $\omega_i = \bigcup\{K_j \in T^H | x_i \in K_j\}$ 为节点 x_i 的邻域。图1展示了细网格、粗单元 K_i 以及节点 x_i 的粗邻域 ω_i。

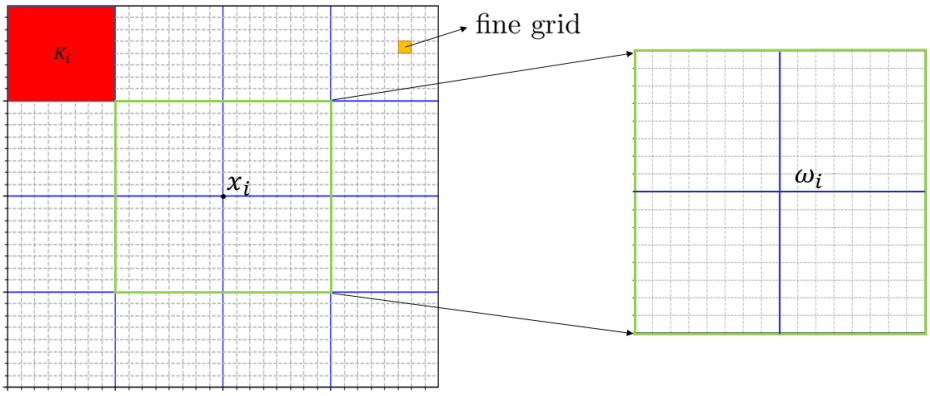

图1： 细网格 T_h、粗网格 T^H、粗单元 K_i 以及节点 x_i 的邻域 ω_i。

为构造耦合多尺度基函数，在每个粗网格邻域 ω_i 中给出如下正则化耦合谱问题，以求解特征对 $\{\Lambda^{\omega_i}, \psi^{\omega_i}\}$：

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}(\psi_u^{\omega_i}) - \gamma_1\beta\psi_\theta^{\omega_i}\mathbf{I}\right) = \dfrac{1}{H^2}\Lambda^{\omega_i}(\lambda+2\mu)\psi_u^{\omega_i}, & \text{in } \omega_i, \\ -\nabla\cdot\kappa\nabla\psi_\theta^{\omega_i} + \gamma_2\beta\nabla\cdot\psi_u^{\omega_i} = \dfrac{1}{H^2}\Lambda^{\omega_i}\kappa\psi_\theta^{\omega_i}, & \text{in } \omega_i, \\ \boldsymbol{\sigma}(\psi_u^{\omega_i})\cdot\mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial\omega_i, \\ \kappa\nabla\psi_\theta^{\omega_i}\cdot\mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial\omega_i. \end{cases} \tag{4}$$

$\psi^{\omega_i} = (\psi^{\omega_i}{}_u, \psi_\theta^{\omega_i})$，$\psi^{\omega_i}{}_u$ 和 $\psi_\theta^{\omega_i}$ 是问题（4）中位移场和温度场对应的特征函数。 γ_1 和 γ_2 是松弛系数，通过调整松弛系数的值，可确保其具有适当的正则性。具体而言，总是可以选择适当的 γ_1 和 γ_2，使该谱问题正定。在该谱问题右端引入 $^1{}_{H^2}$ 是为了确保 Λ^{ω_i} 独立于 H。这里需要强调的是，耦合物理特性自然地融入了多尺度基函数中，这显然可以降低全局刚度矩阵的阶数。

令 $V_{uh}(\Omega)$ 和 $V_{\theta h}(\Omega)$ 分别为 T^h 上 $V_u(\Omega)$ 和 $V_\theta(\Omega)$ 的经典仿射有限元空间，$V_{uh}(\omega_i)$ 和 $V_{\theta h}(\omega_i)$ 的定义也类似。问题（4）对应的变分公式是求弱解 $\psi^{\omega_i}{}_u \in V_{uh}(\omega_i)$ 和 $\psi_\theta^{\omega_i} \in V_{\theta h}(\omega_i)$，使得

$$\begin{cases} a^{\omega_i}(\psi_u^{\omega_i}, \mathbf{v}_{uh}) - \gamma_1 b^{\omega_i}(\mathbf{v}_{uh}, \psi_\theta^{\omega_i}) = \dfrac{1}{H^2}\Lambda^{\omega_i}\left\langle\psi_u^{\omega_i}, \mathbf{v}_{uh}\right\rangle_a^{\omega_i}, & \forall \mathbf{v}_{uh} \in V_{uh}(\omega_i), \\ d^{\omega_i}(\psi_\theta^{\omega_i}, v_{\theta h}) + \gamma_2 b^{\omega_i}(\psi_u^{\omega_i}, v_{\theta h}) = \dfrac{1}{H^2}\Lambda^{\omega_i}\left\langle\psi_\theta^{\omega_i}, v_{\theta h}\right\rangle_d^{\omega_i}, & \forall v_{\theta h} \in V_{\theta h}(\omega_i), \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$a^{\omega_i}(\psi_u^{\omega_i}, \mathbf{v}_{uh}) = \int_{\omega_i} \boldsymbol{\sigma}(\psi_u^{\omega_i}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_{uh}), \quad b^{\omega_i}(\mathbf{v}_{uh}, \psi_\theta^{\omega_i}) = \int_{\omega_i} \beta \psi_\theta^{\omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_{uh},$$

$$d^{\omega_i}(\psi_\theta^{\omega_i}, v_{\theta h}) = \int_{\omega_i} \kappa \nabla \psi_\theta^{\omega_i} \cdot \nabla v_{\theta h},$$

$$\langle \psi_u^{\omega_i}, \mathbf{v}_{uh} \rangle_a^{\omega_i} = \int_{\omega_i} (\lambda + 2\mu) \psi_u^{\omega_i} \cdot \mathbf{v}_{uh}, \quad \left\langle \psi_\theta^{\omega_i}, v_{\theta h} \right\rangle_d^{\omega_i} = \int_{\omega_i} \kappa \psi_\theta^{\omega_i} v_{\theta h}.$$

在下文中，将 ω_i 替换为K 表示其在区域K内保持相同的定义。因此，根据标准有限元离散，我们得到如下代数特征值问题，

$$\mathbf{A}^{\omega_i} \psi^{\omega_i} = \frac{1}{H^2} \Lambda^{\omega_i} \mathbf{M}^{\omega_i} \psi^{\omega_i}, \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{A}^{\omega_i} = \begin{bmatrix} A_1^{\omega_i} & -\gamma_1 A_2^{\omega_i} \\ \gamma_2 A_3^{\omega_i} & A_4^{\omega_i} \end{bmatrix}, \mathbf{M}^{\omega_i} = \begin{bmatrix} M_1^{\omega_i} & 0 \\ 0 & M_2^{\omega_i} \end{bmatrix},$$

and

$$(A_1)_{j_1 j_1}^{\omega_i} = a^{\omega_i}(\phi_{u,j_1}, \phi_{u,j_1}),\ (A_2)_{j_1 j_2}^{\omega_i} = b^{\omega_i}(\phi_{u,j_1}, \phi_{\theta,j_2}),\ A_3 = A_2^T,$$

$$(A_4)_{j_2 j_2}^{\omega_i} = d^{\omega_i}(\phi_{\theta,j_2}, \phi_{\theta,j_2}),\ (M_1)_{j_1 j_1}^{\omega_i} = \left\langle \phi_{u,j_1}, \phi_{u,j_1} \right\rangle_a^{\omega_i},\ (M_2)_{j_2 j_2}^{\omega_i} = \left\langle \phi_{\theta,j_2}, \phi_{\theta,j_2} \right\rangle_d^{\omega_i}.$$

$\phi_{u,\ j} \in V_{uh}(\omega_i)$ 和 $\phi_{\theta,\ j} \in V_{\theta h}(\omega_i)$，$1 \le j_1 \le dN(\omega_i)$，$1 \le j_2 \le N(\omega_i)$，且$N(\omega_i)$ 是区域 ω_i 中细网格节点的总数。

然后，选取与最小的L_i 个特征值相关的特征函数 $\{\psi^{\omega_i}{}_l\}^{L_i}{}_{l=1}$ 作为 CGMsFEM 空间的成员，该空间定义为

$$V_{cgm} = \text{span}\left\{\Phi_l^{\omega_i} | \Phi_l^{\omega_i} = \chi_i^T \mathbf{I}_{d+1} \psi_l^{\omega_i}, 1 \le i \le N_v \text{ and } 1 \le l \le L_i\right\},$$

其中，$\{\chi_i\}^{N_v}{}_{i=1}$ 是与区域 Ω 的开覆盖 $\{\omega_i\}^{N_v}{}_{i=1}$ 相关联的一组单位分解函数。耦合多尺度基函数集合 $\{\Phi^{\omega_i}{}_l\}$ 可排列成如下矩阵

$$\mathbf{R} = \left[\Phi_1^{\omega_1}, \Phi_2^{\omega_1} ..., \Phi_{L_1}^{\omega_1}, \Phi_1^{\omega_2}, \Phi_2^{\omega_2} ..., \Phi_{L_2}^{\omega_2}, ..., \Phi_1^{\omega_{N_v}}, \Phi_2^{\omega_{N_v}} ..., \Phi_{L_{N_v}}^{\omega_{N_v}}\right],$$

这里需要指出，矩阵$\mathbf{R}$ 只需构造一次，之后即可重复用于计算。

注 2.1. 对于多物理场问题，更适合为每个分量分别选取单位分解函数$\{\chi_i\}^{N_v}{}_{i=1}$。本文选用标准拉格朗日基函数作为单位分解函数。弹性算子和扩散算子的 *MsFEM* 基函数会带来略好的性能。

2.3. CGMsFEM 的算法流程

本文采用后向欧拉格式进行时间离散。设 $\mathbf{w}^n = (\mathbf{u}^n{}_h, \theta^n{}_h)$ 为第 n 个时间层 $t^n = \sum^n{}_{m=1} \tau_m, n \in \{0, 1, ..., N_T\}$上的解，其中 τ_m 为时间步长。于是，方程（3）的弱形式为：

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_{uh}) - b(\mathbf{v}_{uh}, \theta_h^n) = \langle \mathbf{f}^n, \mathbf{v}_{uh} \rangle, & \forall \mathbf{v}_{uh} \in V_{uh}(\Omega), \\ c\left(\dfrac{\theta_h^n - \theta_h^{n-1}}{\tau_n}, v_{\theta h}\right) + d(\theta_h^n, v_{\theta h}) + b\left(\dfrac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, v_{\theta h}\right) = \langle g^n, v_\theta \rangle, & \forall v_{\theta h} \in V_{\theta h}(\Omega), \end{cases} \tag{7}$$

因此，采用标准有限元离散后，方程（7）可改写如下 s

$$\mathbf{A}^n \mathbf{w}^n = \mathbf{B} \mathbf{w}^{n-1} + \mathbf{F}^n, \tag{8}$$

其中

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_3 & M' + \tau_n A_4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & M' \end{bmatrix}, \mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} F^n \\ \tau_n G^n \end{bmatrix},$$

and

$$(A_1)_{j_1 j_1} = a(\phi_{u,j_1}, \phi_{u,j_1}),\ (A_2)_{j_1 j_2} = b(\phi_{u,j_1}, \phi_{\theta,j_2}),\ A_3 = A_2^T,$$
$$(A_4)_{j_2 j_2} = d(\phi_{\theta,j_2}, \phi_{\theta,j_2}),\ (M')_{j_2 j_2} = c(\phi_{\theta,j_2}, \phi_{\theta,j_2}),$$
$$(F^n)_{j_1} = (\mathbf{f}^n, \phi_{u,j_1}),\ (G^n)_{j_2} = (g^n, \phi_{\theta,j_2}).$$

定义

$$\mathbf{A}_c^n = \mathbf{R}^T \mathbf{A}^n \mathbf{R},\ \mathbf{B}^c = \mathbf{R}^T \mathbf{B} \mathbf{R},\ \mathbf{w}_c^n = (\mathbf{R}^T\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{w}^n,\ \mathbf{F}_c^n = (\mathbf{R}^T\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{F}^n,$$

并结合式（8），可得以下代数系统:

$$\mathbf{A}_c^n \mathbf{w}_c^n = \mathbf{B}^c \mathbf{w}_c^{n-1} + \mathbf{F}_c^n. \tag{9}$$

然后，可通过迭代求得解$\mathbf{w}_c^n$，并利用耦合多尺度基函数获得细网格上的解,

$$\mathbf{w}^n = \mathbf{R}\mathbf{w}_c^n.$$

这里，CGMsFEM 与 GMsFEM 的关键区别在于构造了精度更高的耦合多尺度基函数。矩阵$\mathbf{R}$ 可离线计算，并可在所有时间步中重复使用。因此，CGMsFEM 求解的系统规模要小得多，从而显著提高计算效率。

3. CGMsFEM 的收敛性分析

3.1. 插值误差

在证明 CGMsFEM 的收敛性和误差估计之前，先给出一些定义和引理。设 $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \theta)$、$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_u, v_\theta) \in V_u(\Omega) \times V_\theta(\Omega)$。$b(\cdot,\cdot)$ 在 $V_u(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 上连续，并可假设存在常数 C_0，使得对于所有 $\mathbf{u} \in V_u(\Omega), \theta \in L_2(\Omega)$，有

$$b^K(\mathbf{u}, \theta) \le C_0 \|\mathbf{u}\|_{a,K} \|\theta\|_{L_d,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_H,$$

其中

$$\|\theta\|_{L_d,K}^2 = \int_K \kappa \theta^2.$$

另定义

$$\|\mathbf{u}\|_{L_a,K}^2 = \int_K (\lambda + 2\mu)\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

对于所有 $\mathbf{u} \in V_u(\Omega), \theta \in V_\theta(\Omega)$，能量范数可定义如下

$$\|\mathbf{u}\|_{a,K}^2 = a^K(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \|\theta\|_{d,K}^2 = d^K(\theta, \theta).$$

在下文中，用 ω_i 替换 K 表示其在区域ω_i内保持相同的定义。同时，局部双线性泛函可定义如下

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= a^{\omega_i}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_u) - \gamma_1 b^{\omega_i}(\mathbf{v}_u, \theta) + \gamma_2 b^{\omega_i}(\mathbf{u}, v_\theta) + d^{\omega_i}(\theta, v_\theta), \\ \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_{\omega_i} (\lambda + 2\mu)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_u + \kappa \theta v_\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

然后，局部特征值问题（4）可写为

$$\mathcal{A}^{\omega_i}(\psi^{\omega_i}, \mathbf{v}) = \frac{1}{H^2} \Lambda^{\omega_i} \mathcal{M}^{\omega_i}(\psi^{\omega_i}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_u(\omega_i) \times V_\theta(\omega_i). \tag{11}$$

所得特征值可按升序排列

$$\Lambda_1^{\omega_i} \le \Lambda_2^{\omega_i} \le \cdots \le \Lambda_L^{\omega_i} \le \cdots .$$

假设除 $d+1$ 个零特征值外，所有特征值均为大于 0 的实数，并且定义 $V(\omega_i) := V_u(\omega_i) \times V_\theta(\omega_i)$。

我们有

$$\mathbf{v} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{v}, \psi_l^{\omega_i})\psi_l^{\omega_i}, \quad \forall \mathbf{v} \in \widetilde{V}(\omega_i),$$

其中 $\{\psi^{\omega_i}{}_l\}^{\infty}{}_{l=1}$ 是 $V(\omega_i)$ 中的一组完备正交基函数，其内积为 $M^{\omega_i}(\cdot,\cdot)$。容易得到

$$\mathcal{A}^{\omega_i}(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \frac{1}{H^2}\sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{v}, \psi_l^{\omega_i})^2 \Lambda_l^{\omega_i}, \quad \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{v}, \psi_l^{\omega_i})^2. \tag{12}$$

受参考文献启发，我们定义该半范数为 [41],我们定义该半范数为

$$|||\mathbf{v}|||_{s,\omega_i}^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\Lambda_l^{\omega_i}}{H^2}\right)^s \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{v}, \psi_l^{\omega_i})^2 \text{ for } 0 \le s \le 2, \tag{13}$$

由此可得

$$|||\mathbf{v}|||_{0,\omega_i}^2 = \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{v},\mathbf{v}), \quad |||\mathbf{v}|||_{1,\omega_i}^2 = \mathcal{A}^{\omega_i}(\mathbf{v},\mathbf{v}).$$

需要强调的是，局部谱问题（4）的特征值为 $\left\{\Lambda^{\omega_i}{}_l H^2\right\}$。因此，半范数按此方式定义。根据上述定义，我们给出

引理 3.1. 假设 $\mathbf{w} \in V_u(\omega_i) \times V_\theta(\omega_i)$ 且 $|||\mathbf{w}|||_{s,\omega_i} < \infty$。对于 $0 \le t \le s \le 2, L_i \ge d+1$，有

$$|||\mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}|||_{t,\omega_i}^2 \le \left(\frac{\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}}{H^2}\right)^{t-s} |||\mathbf{w}|||_{s,\omega_i}^2, \tag{14}$$

其中 $\mathcal{I}^{\omega_i}{}_{L_i}$ 是由下式定义的局部插值算子

$$\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w} = \sum_{l=1}^{L_i} \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \psi_l^{\omega_i})\psi_l^{\omega_i}.$$

证明 3.1. 根据定义（15），可得

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}|||_{t,\omega_i}^2 &= \sum_{l=L_i+1}^{\infty} \left(\frac{\Lambda_l^{\omega_i}}{H^2}\right)^t \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \psi_l^{\omega_i})^2 \\
&= \sum_{l=L_i+1}^{\infty} \left(\frac{\Lambda_l^{\omega_i}}{H^2}\right)^{t-s} \left(\frac{\Lambda_l^{\omega_i}}{H^2}\right)^s \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \psi_l^{\omega_i})^2 \\
&\le \left(\frac{\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}}{H^2}\right)^{t-s} \sum_{l=L_i+1}^{\infty} \left(\frac{\Lambda_l^{\omega_i}}{H^2}\right)^s \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \psi_l^{\omega_i})^2 \\
&\le \left(\frac{\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}}{H^2}\right)^{t-s} |||\mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}|||_{s,\omega_i}^2 \\
&\le \left(\frac{\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}}{H^2}\right)^{t-s} |||\mathbf{w}|||_{s,\omega_i}^2 .
\end{aligned}$$

由此引理可得以下推论，其中 $t = 0, 1$。

推论 3.1. 对于所有 $\mathbf{w} \in V_u(\omega_i) \times V_\theta(\omega_i)$, $1 \le s \le 2$, $L_i \ge d+1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}, \mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}) &\le \frac{H^{2s}}{\left(\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}\right)^s} |||\mathbf{w}|||_{s,\omega_i}^2, \\ \mathcal{A}^{\omega_i}(\mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}, \mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}) &\le \frac{H^{2s-2}}{\left(\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}\right)^{s-1}} |||\mathbf{w}|||_{s,\omega_i}^2 . \end{aligned} \tag{15}$$

对于插值算子 I: $V_u(\Omega) \times V_\theta(\Omega) \to V_u(\Omega) \times V_\theta(\Omega)$ 以及所有 $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \theta) \in V_u(\Omega) \times V_\theta(\Omega)$，我们定义 $(\mathbf{Iw})_u$ 和 $(\mathbf{Iw})_\theta$，使得 $\mathbf{Iw} = ((\mathbf{Iw})_u, (\mathbf{Iw})_\theta)$。

引理 3.2. 对于所有$\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \theta) \in V_u(\Omega) \times V_\theta(\Omega)$，有

$$\begin{aligned} \int_K (\lambda + 2\mu)(\mathbf{u} - (\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_u) \cdot (\mathbf{u} - (\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_u) + \kappa(\theta - (\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_\theta)^2 \\ \le N_K \frac{H^4}{\Lambda_{K,L+1}} \sum_{y_i \in K} |||\mathbf{w}|||_{2,\omega_i}^2, \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $N_K = card\{y_i : y_i \in K\}$ 且 $\Lambda_{K,L+1} = \min_{y_i \in K} \Lambda^{\omega_i}{}_{L_i+1}$. $\mathcal{I}_{ms}$： $V_u(\Omega) \times V_\theta(\Omega) \to V^{cgm}$ 是全局插值算子，其定义如下

$$\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{l=1}^{L_i} \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \psi_l^{\omega_i}) \Phi_l^{\omega_i}.$$

证明 3.2. 根据$\mathcal{I}_{ms}$的定义，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{w} - \mathcal{I}_{ms}\mathbf{w} &= \mathbf{w} - \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{l=1}^{L_i} \mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}, \psi_l^{\omega_i}) \chi_i^T(x) I_{d+1} \psi_l^{\omega_i} \\ &= \mathbf{w} - \sum_{i=1}^{N_v} \chi_i^T I_{d+1} \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w} \\ &= \sum_{i=1}^{N_v} \chi_i^T(x) I_{d+1} \left(\mathbf{w} - \mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

结合式（17），式（16）的左侧给出

$$
\begin{aligned}
&\int_K (\lambda+2\mu)\left(\sum_{y_i\in K}\chi_{i,u}^T I_d\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right)\cdot\left(\sum_{y_i\in K}\chi_{i,u}^T I_d\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right)\\
&\quad+\kappa\left(\sum_{y_i\in K}\chi_{i,\theta}\left(\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)\right)^2\\
&\le N_K\sum_{y_i\in K}\int_K(\lambda+2\mu)\left(\chi_{i,u}^T I_d\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right)\cdot\left(\chi_{i,u}^T I_d\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right)\\
&\quad+\kappa\left(\chi_{i,\theta}\left(\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)\right)^2\\
&\le N_K\sum_{y_i\in K}\int_{\omega_i}(\lambda+2\mu)\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\cdot\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)+\kappa\left(\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)^2\\
&= N_K\sum_{y_i\in K}\mathcal{M}^{\omega_i}(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w})\\
&\le N_K\sum_{y_i\in K}\frac{H^4}{\left(\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}\right)^2}|||\mathbf{w}|||_{2,\omega_i}^2\\
&\le N_K\frac{H^4}{\left(\Lambda_{K,L+1}\right)^2}\sum_{y_i\in K}|||\mathbf{w}|||_{2,\omega_i}^2.
\end{aligned}
$$

引理 3.3. 对于所有 $\mathbf{w}=(\mathbf{u},\ \theta)\in V_u(\Omega)\times V_\theta(\Omega)$ 以及 $\mathcal{I}_{ms}$ 的定义，局部插值误差估计可表示为

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{u}-(\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_u\right\|_{a,K}+\left\|\theta-(\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_\theta\right\|_{d,K}\le 2N_K\sum_{y_i\in K}\Big(&C_2\mathcal{A}^K(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})\\
&+\left(\frac{2C_1^2}{H^2}+C_3\right)\left(\left\|\mathbf{u}-(\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_u\right\|_{L_a,K}+\left\|\theta-(\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_\theta\right\|_{L_d,K}\right)\Big),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

其中 $C_2=\dfrac{2}{2-|\gamma_1-\gamma_2|}C_0{}'$ $C_3=\dfrac{|\gamma_1-\gamma_2|}{2-|\gamma_1-\gamma_2|}C_0{}'$ 和 C_1 为满足以下条件的常数

$$
\max|\nabla\chi_i|\le\frac{C_1}{H},\quad\forall\, i\le N_v.
$$

该引理的证明见附录 A。

引理 3.3 直接给出全局插值误差的如下估计。

定理 3.1. 对于所有 $\mathbf{w}\in V_u(\Omega)\times V_\theta(\Omega)$ 以及 $\mathcal{I}_{ms}$ 的定义，全局插值误差可表示为

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathbf{u}-(\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_u\right\|_{a,\Omega}^2+\left\|\theta-(\mathcal{I}_{ms}\mathbf{w})_\theta\right\|_{d,\Omega}^2\\
&\quad\le 2N_{max}\left(C_2\frac{H^2}{\Lambda_{L+1}}+\left(2C_1^2H^2+C_3H^4\right)\frac{1}{\left(\Lambda_{L+1}\right)^2}\right)\sum_{\omega_i}|||\mathbf{w}|||_{2,\omega_i}^2,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中 $\Lambda_{L+1}=$ 最小$_{\omega_i}\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}$ 和 $N_{max}=$ 最大$_K N_K$。

证明 3.3。 由式（*18*），可得以下估计

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}^H}\sum_{y_i\in K}\mathcal{A}^K\left(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)&=\sum_{\omega_i}\mathcal{A}^{\omega_i}\left(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)\\&\leq\sum_{\omega_i}\frac{H^2}{\Lambda_{L_i+1}^{\omega_i}}\left|\!\left|\!\left|\mathbf{w}\right|\!\right|\!\right|_{2,\omega_i}^2,\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in\mathcal{T}^H}\sum_{y_i\in K}\left(\left\|\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right\|_{L_a,K}+\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{L_d,K}\right)\\&\quad=\sum_{\omega_i}\left(\left\|\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right\|_{L_a,\omega_i}+\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{L_d,\omega_i}\right)\\&\quad=\sum_{\omega_i}\left|\!\left|\!\left|\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right|\!\right|\!\right|_{0,\omega_i}^2\leq\sum_{\omega_i}\frac{H^4}{\left(\Lambda_{L+1}^{\omega_i}\right)^2}\left|\!\left|\!\left|\mathbf{w}\right|\!\right|\!\right|_{2,\omega_i}^2.\end{aligned}\tag{21}$$

然后结合对式(18)对所有 K 求和 $\in\mathcal{T}_H$，再结合式 *(20)* 和 *(21)*，证明完毕 .

3.2. 稳态情形

首先给出问题 (1) 在稳态情形下的先验误差估计的一些结果。对于 $\bar{\mathbf{u}}\in V_u(\Omega)$ 和 $\theta\in V_\theta(\Omega)$, 可得

$$\begin{aligned}a(\bar{\mathbf{u}},\mathbf{v}_u)-b(\mathbf{v}_u,\bar{\theta})&=\langle\bar{\mathbf{f}},\mathbf{v}_u\rangle_a,\quad\forall\mathbf{v}_u\in V_u(\Omega),\\d(\bar{\theta},v_\theta)&=\langle\bar{g},v_\theta\rangle_d,\quad\forall v_\theta\in V_\theta(\Omega).\end{aligned}\tag{22}$$

定义 $\mathrm{V}_{uH}=\mathrm{span}\left\{\mathbf{\Phi}^{\omega_i}\mathrm{lu}\right\}$和 $\mathrm{V}_{\theta H}=\mathrm{span}\left\{\Phi^{\omega_i}\mathrm{l}\theta\right\}$，其中 $\mathbf{\Phi}^{\omega_i}\mathrm{l}(\mathrm{x})=\left(\mathbf{\Phi}^{\omega_i}\mathrm{lu}(\mathrm{x}),\ \Phi^{\omega_i}\mathrm{l}\theta(\mathrm{x})\right)$，$(1\leq\mathrm{i}\leq\mathrm{N}_v,1\leq\mathrm{l}\leq\mathrm{L}_i)$。式 (22) 的离散化形式为

$$\begin{aligned}a(\bar{\mathbf{u}}_H,\mathbf{v}_{aH})-b(\mathbf{v}_{uH},\bar{\theta}_H)&=\langle\bar{\mathbf{f}},\mathbf{v}_{uH}\rangle_a,\quad\forall\mathbf{v}_{uH}\in V_{uH},\\d(\bar{\theta}_H,v_{\theta H})&=\langle\bar{g},v_{\theta H}\rangle_d,\quad\forall v_{\theta H}\in V_{\theta H}.\end{aligned}\tag{23}$$

于是，对于所有 $\mathbf{w}=(\mathbf{u},\theta)\in V_u(\Omega)\times V_\theta(\Omega)$，定义 Riesz 投影算子 $\mathscr{R}_H=(\mathscr{R}_{Hu}(u,\theta),\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)):V_u(\Omega)\times V_\theta(\Omega)\to V_{uH}\times V_{\theta H}$，使得

$$\begin{aligned}a(\mathbf{u}-\mathscr{R}_{Hu}(\mathbf{u},\theta),\mathbf{v}_{uH})-b(\mathbf{v}_{uH},\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta))&=0,\quad\forall\,\mathbf{v}_{uH}\in V_{uH},\\d(\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta),v_{\theta H})&=0,\quad\forall\,v_{\theta H}\in V_{\theta H}.\end{aligned}$$

以下引理可参见 [10]。

引理 3.4. 对于所有 $\mathbf{w}=(\mathbf{u},\theta)\in V_u(\Omega)\times V_\theta(\Omega)$，根据 $\mathscr{R}_H$ 的定义，有

$$\|\mathbf{u}-\mathscr{R}_{Hu}(\mathbf{u},\theta)\|_a\leq\inf_{\mathbf{v}_{uH}\in V_{uH}}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_{uH}\|_a+C_0\|\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)\|_c,\tag{24}$$

$$\|\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)\|_d\leq\inf_{v_{\theta H}\in V_{\theta H}}\|\theta-v_{\theta H}\|_d.\tag{25}$$

引理 *3.5.* 对所有 $r\in L_d$，设 $\phi\in V_\theta(\Omega)$ 为对偶问题 $d(\phi,v_\theta)=c(r,v_\theta),\forall\,v_\theta\in V_\theta(\Omega)$ 的解，并设 $\phi_H\in V_{\theta H}$ 为离散问题 $d(\phi_H,v_\theta)=c(r,v_\theta),\forall v_\theta\in V_{\theta H}$ 的解。则有

$$\left\|\phi-\phi_H\right\|_d\leq C_4\|r\|_c.\tag{26}$$

1 1其中 $C_4=C_p^2\kappa^{-2}min$，且 C_p 是 *Poincaré* 常数。

证明 3.4. 下面的方程可以先进行估计，

$$\left\|\phi-\phi_H\right\|_d^2=d\left(\phi,\phi-\phi_H\right)=c\left(r,\phi-\phi_H\right)\leq\|r\|_c\left\|\phi-\phi_H\right\|_c.\tag{27}$$

$$C_p^{-1}\kappa_{min}\left\|\phi-\phi_H\right\|_c^2 \le \kappa_{min}\left\|\nabla\left(\phi-\phi_H\right)\right\|_c^2 \le \left\|\phi-\phi_H\right\|_d^2. \tag{28}$$

结合式（27）与式（28），可得

$$\left\|\phi-\phi_H\right\|_d^2 \le C_p^{\frac{1}{2}}\kappa_{min}^{-\frac{1}{2}}\left\|r\right\|_c\left\|\phi-\phi_H\right\|_d.$$

引理 3.6. 对于所有$\mathbf{w}=(\mathbf{u},\theta)\in V_u(\Omega)\times V_\theta(\Omega)$，根据 $\mathscr{R}_H$ 的定义，可得

$$\left\|\mathbf{u}-\mathscr{R}_{Hu}(\mathbf{u},\theta)\right\|_a \le max\{1,C_4C_0\}C\left(H,\Lambda_{L+1}^{\omega_i}\right)|||\mathbf{w}|||_{2,\Omega}, \tag{29}$$

$$\left\|\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)\right\|_d \le C\left(H,\Lambda_{L+1}^{\omega_i}\right)|||\mathbf{w}|||_{2,\Omega}, \tag{30}$$

$$\left\|\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)\right\|_c \le C_4C\left(H,\Lambda_{L+1}\right)|||\mathbf{w}|||_{2,\Omega}, \tag{31}$$

其中

$$C\left(H,\Lambda_{L+1}\right)=\left[C_2\frac{H^2}{\Lambda_{L+1}}+\left(2C_1^2H^2+C_3H^4\right)\frac{1}{\left(\Lambda_{L+1}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{32}$$

且 $|||\mathbf{w}|||_{s,\Omega}^2=\sum_{\omega_i\in\Omega}|||\mathbf{w}|||_{s,\omega_i}^2$。

证明 3.5. 对于所有 $\theta\in V_\theta(\Omega)$，令 $r:=\theta-\mathscr{R}_{Hd}(\theta)$，则可得

$$\begin{aligned}\left\|\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)\right\|_c^2 &= c(r,r)=d(\phi,r)=d(\phi-\phi_H,r)\\ &\le \left\|\phi-\phi_H\right\|_d\left\|r\right\|_d \le C_4\left\|r\right\|_c\left\|r\right\|_d.\end{aligned}$$

于是可得

$$\left\|\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)\right\|_c \le C_4\left\|\theta-\mathscr{R}_{H\theta}(\theta)\right\|_d. \tag{33}$$

此外，将式（24）与式（33）结合，可得

$$\left\|\mathbf{u}-\mathscr{R}_{Hu}(\mathbf{u},\theta)\right\|_a \le \inf_{\mathbf{v}_{uH}\in V_{uH}}\left\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_{uH}\right\|_a + C_4C_0\inf_{v_{\theta H}\in V_{\theta H}}\left\|\theta-v_{\theta H}\right\|_d.$$

根据 $|||\mathbf{w}|||_{s,\Omega}$的定义，证明完毕。

3.3. CGMsFEM 的先验误差估计

对于$\mathbf{f}$和g，在问题（1）中，有

$$\langle\tilde{\mathbf{f}},v_u\rangle_a=\langle\mathbf{f},v_u\rangle,\forall\, v_u\in V_u(\Omega),\quad \langle\tilde{g},v_\theta\rangle_d=\langle g,v_\theta\rangle,\forall\, v_\theta\in V_\theta(\Omega),$$

其中 $\tilde{\mathbf{f}}\in V_u(\Omega)$ 且 $\tilde{g}\in V_\theta(\Omega)$。定义

$$C^n(\mathbf{f},g)=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{f}}^n-\tilde{\mathbf{f}}_H^n\right\|_a^2+\tau_n\left\|\tilde{g}^n-\tilde{g}_H^n\right\|_d^2,\quad \forall\, n\in 1,\cdots,N_T.$$

为简化记号，令

$$C_1^n(\mathbf{w})=4C_4^2\left(C_4^2+C_0^2\max\{1,C_4^2C_0^2\}\right)\|\partial_t\mathbf{w}\|_{L^\infty\left(T_n,|||\cdot|||_{2,\Omega}\right)},$$

$$C_2^n(\mathbf{w})=2C_4^2\left(\|\partial_{tt}\theta\|_{L^\infty(T_n,\|\cdot\|_c)}+C_0^2\|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{L^\infty(T_n,\|\cdot\|_a)}\right).$$

那么我们得到以下 CGMsFEM 的先验误差估计。

定理 3.2. 设 $\mathbf{w}=(\mathbf{u},\theta)$ 和 $\mathbf{w}_H=(\mathbf{u}_H,\theta_H)$ 分别为问题 *(1)* 的唯一解和 *CGMsFEM* 解，

有如下结论

$$\frac{1}{4}\left\|\mathbf{u}^n-\mathbf{u}_H^n\right\|_a^2+\frac{1}{4}\left\|\theta^n-\theta_H^n\right\|_c^2\leq\sum_{m=1}^{n}\Big[C^m(\mathbf{f},g)+\tau_m C^2(H,\Lambda_{L+1})C_1^m(\mathbf{w})+\tau_m^3C_2^m(\mathbf{w})\Big]+\frac{1}{2}\left(C_4^2+max\left\{1,C_4^2C_0^2\right\}\right)C^2(H,\Lambda_{L+1})\left|\left|\left|\mathbf{w}^n\right|\right|\right|_{2,\Omega}^2, \tag{34}$$

and

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{8}\tau_m\left\|\theta^m-\theta_H^m\right\|_d^2\leq\sum_{m=1}^{n}\Big[C^m(\mathbf{f},g)+\tau_m C^2(H,\Lambda_{L+1})C_1^m(\mathbf{w})+\tau_m^3C_2^m(\mathbf{w})\Big]+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{4}\tau_m C^2(H,\Lambda_{L+1})\left|\left|\left|\mathbf{w}^n\right|\right|\right|_{2,\Omega}^2. \tag{35}$$

其中 $n\in\{1,2,\cdots,N_T\}$。

该定理的证明与参考文献 [10] 中的定理 3.1 类似。有兴趣的读者可参阅原始文献，或在附录 B中查看简要的仿写。排除与H 和 Λ_{L+1}无关的项后，可以得出，CGMsFEM 解的能量误差主要由式（32）中定义的$C^2(H,\Lambda_{L+1})$控制。若为每个子区域 ω_i选取足够多的基函数，即 Λ_{L+1} 足够大，则有$C^2(H,\Lambda_{L+1})=O(H_{\Lambda_{L+1}}^2)$。

---

4. 数值实验

本节给出若干数值算例，以评估所提出的 CGMsFEM 在热力学问题（1）中的性能，并主要验证 CGMsFEM 的准确性和效率。计算区域为 $\Omega=[0,1]^2$，时间区间为 $(0,1]$。位移场和温度场的狄利克雷条件及诺伊曼边界条件分别在 $\Gamma^u_D=\Gamma^\theta_D=[0,1]\times 0$ 和 $\Gamma^u_N=\Gamma^\theta_N=\partial\Omega\backslash\Gamma^u_D$ 上定义为 0。随后，将 CGMsFEM 的解 $(\mathbf{u}^{cgm},\theta^{cgm})$ 与标准有限元法的参考解 $(\mathbf{u}^{ref},\theta^{ref})$ 以及 GMsFEM 的解 $(\mathbf{u}^{gm},\theta^{gm})$ 进行比较。接着，根据定理 3.2，定义各解的相对能量误差及总相对能量误差如下

$$\begin{aligned}\|E_u\|_e&=\frac{\left(\int_\Omega\sigma(E_u):\epsilon(E_u)dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_\Omega\sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})dx\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \|E_\theta\|_e=\frac{\left(\int_\Omega\kappa\nabla E_\theta\cdot\nabla E_\theta dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_\Omega\kappa\nabla\theta\cdot\nabla\theta dx\right)^{\frac{1}{2}}},\\ \|E_w\|_e&=\frac{\left(\int_\Omega\sigma(E_u):\epsilon(E_u)+\kappa\nabla E_\theta\cdot\nabla E_\theta dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_\Omega\sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})+\kappa\nabla\theta\cdot\nabla\theta dx\right)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{36}$$

E_u表示位移误差 $E^{cgm}{}_u=\mathbf{u}^{cgm}-\mathbf{u}^{ref}$或 $E^{gm}{}_u=\mathbf{u}^{gm}-\mathbf{u}^{ref}$，而 E_θ表示温度误差 $E_\theta^{cgm}=\theta^{cgm}-\theta^{ref}$或 $E_\theta^{gm}=\theta^{gm}-\theta^{ref}$。数值实验在一台配备 16 GB 内存和 3.4 GHz Core i7 CPU 的台式工作站上进行。

4.1. 周期性微结构下 *CGMsFEM* 的验证

在本例中，我们验证 CGMsFEM 对具有周期性微结构的非均质介质的效率和精度。体力$\mathbf{f}$ 和热源 g 选取为

$$\mathbf{f}(x,y)=0,\quad g(x,y)=10.$$

初始边界条件定义为

$$\theta_0(x,y)=500x(1-x)y(1-y).$$

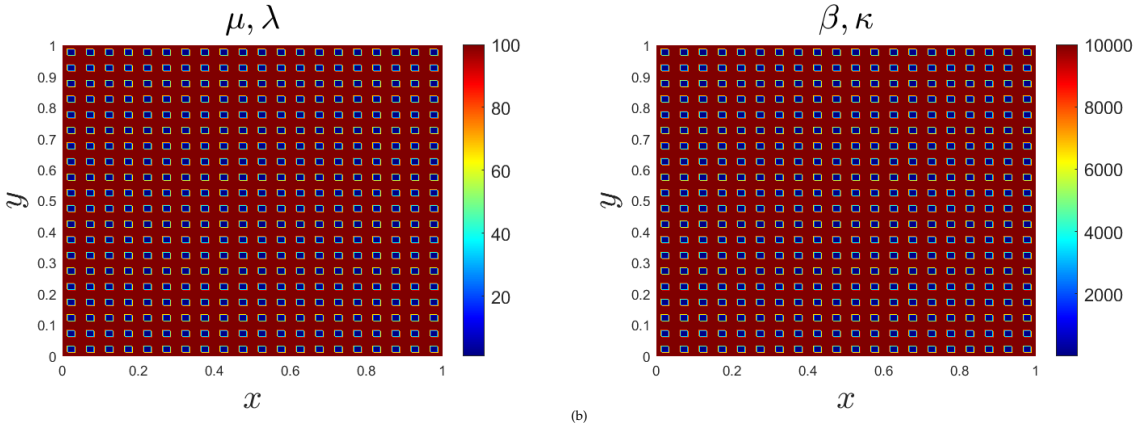

图 2：周期性微结构中材料系数的等高线图 of 材料系数。(a) Lam´e 系数 μ，以及 λ；(b) 热导率系数 κ，以及膨胀系数 β。

然后，图 2 展示了 Lam´e 系数 μ、λ、热导率系数 κ 和膨胀系数 β，其中对比度选为 $\lambda_{\max} : \lambda_{\min} = 10^2 : 1$、$\mu_{\max} : \mu_{\min} = 10^2 : 1$、$\kappa_{\max} : \kappa_{\min} = 10^4 : 1$、$\beta_{\max} : \beta_{\min} = 10^4 : 1$。相应的松弛系数为 $\gamma_1 = 0.4$、$\gamma_2 = 0.04$，时间步长为 $\tau = 0.02$。这里，参考解采用 200×200 细网格，而所提出的 CGMsFEM 和 GMsFEM 采用 20×20 粗网格。CGMsFEM 的局部耦合多尺度基函数数量固定为 8，位移 u 和 θ 对应的 GMsFEM 多尺度基函数总数也选为 8。

图 3 展示了 CGMsFEM 与 GMsFEM 特征函数之间的差异。可以看出，CGMsFEM 局部耦合谱问题的前三或四个特征函数，比 GMsFEM 的特征函数更能体现微观振荡信息。这是因为对于 CGMsFEM，只需较少的特征函数就能表征微结构的物理性质。

表 1： CGMsFEM 与 CGMsFEM 能量误差的比较

L	特征值	$\|\|E_\theta^{cgm}\|\|_e$	$\|\|E_\theta^{gm}\|\|_e$	$\|\|E^{cgm}{}_u\|\|_e$	$\|\|E^{gm}{}_u\|\|_e$	$\|\|E^{cgm}{}_w\|\|_e$	$\|\|E^{gm}{}_w\|\|_e$
4	14.80	0.1630	0.4611	0.2048	0.3226	0.1922	0.3734
6	35.56	0.1316	0.4221	0.1687	0.2914	0.1576	0.3395
8	37.54	0.1275	0.4212	0.1420	0.2897	0.1374	0.3382
10	40.86	0.0793	0.4045	0.0790	0.2325	0.0791	0.2995
12	43.65	0.0687	0.3972	0.0728	0.2134	0.0715	0.2865
14	70.87	0.0634	0.3880	0.0543	0.2046	0.0574	0.2779
16	77.68	0.0590	0.3785	0.0383	0.1768	0.0461	0.2602

图4展示了参考解 (u^{ref}, θ^{ref})、CGMsFEM解 (u^{cgm}, θ^{cgm}) 和 GMsFEM解 (u^{gm}, θ^{gm}) 的等高线图。可以得出结论：在多尺度基函数数量相同的情况下，所提出的 CGMsFEM 比 GMsFEM 精度更高。为便于比较，我们根据公式（36）计算 CGMsFEM 和 CGMsFEM 的能量误差。表 1 给出了多尺度基函数数量 L $= 4, 6, \cdots,$ 16 时的数值结果，其中标记为“特征值”的列指的是 CGMsFEM 的 Λ_{L+1}。从表中可以观察到，CGMsFEM 的总相对能量误差 $\|E^{cgm}\, w\|_e$ 随着 L 的增大而减小；对于能量误差 $\|E_\theta^{cgm}\|_e$ 和 $\|E^{cgm}\, u\|_e$，也可得出类似结果。此外，从图5中还可以清楚地发现，L $= 4$ 时 CGMsFEM 的能量误差明显小于 L $= 16$ 时 GMsFEM 的能量误差，这表明 CGMsFEM 是

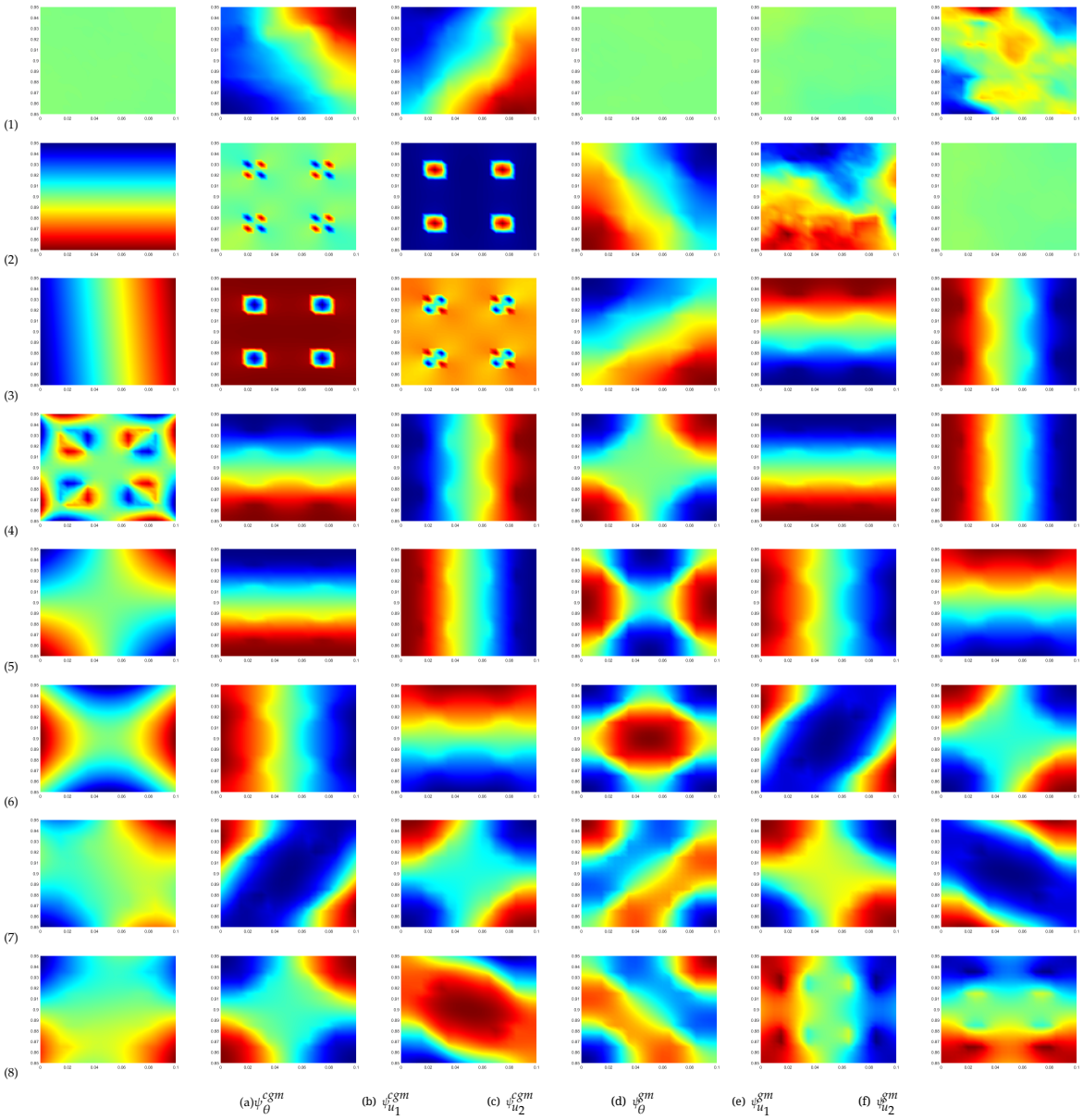

图 3： 第 4.1 节中使用的 CGMsFEM 和 GMsFEM 的 8 个特征函数的等高线图4.1。CGMsFEM：(a) ψ_{θ}^{cgm} (b) $\psi^{cgm}{}_{u1}$ 和 (c)$\psi^{cgm}{}_{u2}$；GMsFEM：(d) ψ_{θ}^{gm} (e) $\psi^{gm}{}_{u1}$ 和 (f)$\psi^{gm}{}_{u2}$；

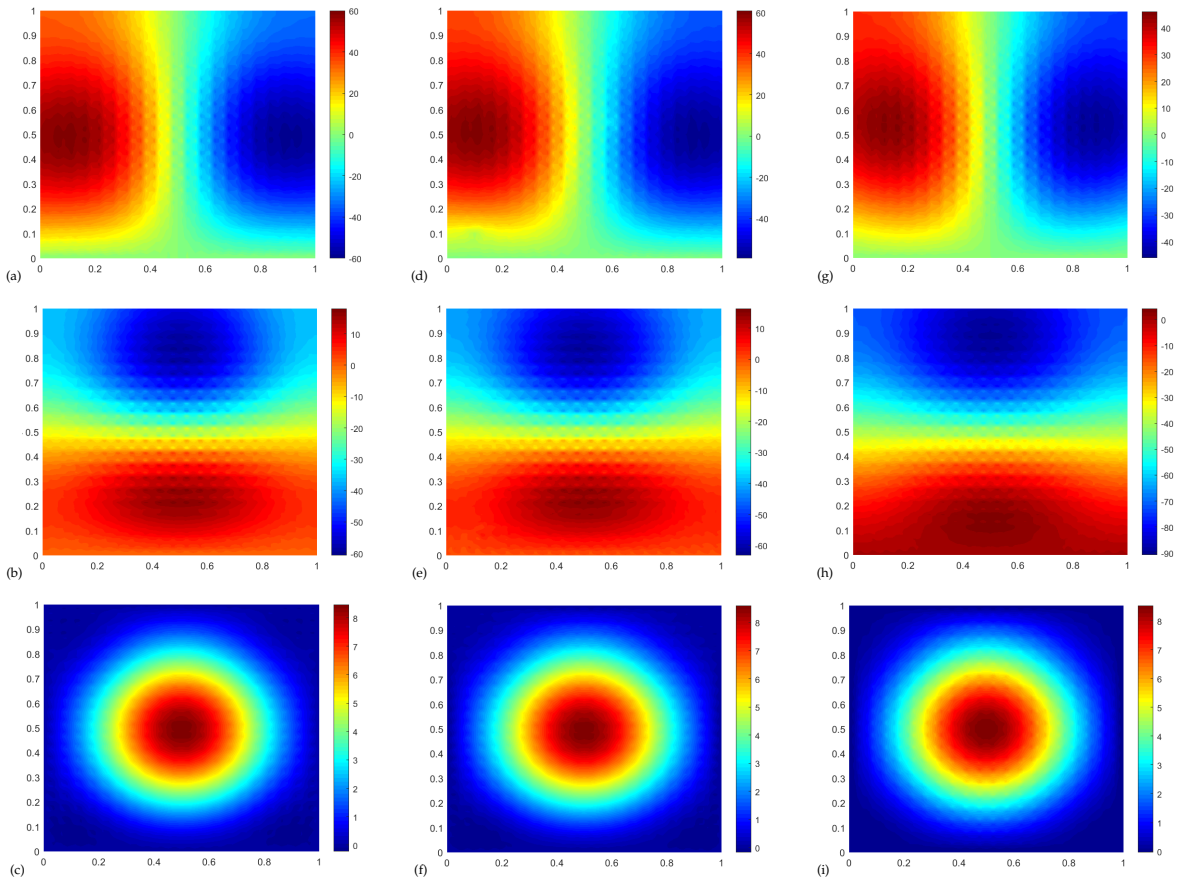

图4： 周期性微结构的解的等高线图。参考解：(a) u_1^{ref} (b) u_2^{ref} 和 (c) θ^{ref}；CGMsFEM解：(d) u_1^{cgm} (e) u_2^{cgm} 和 (f) θ^{cgm}；GMsFEM解：(g) u_1^{gm} (h) u_2^{gm} 和 (i) θ^{gm}。

比 GMsFEM 更高效。

4.2. 随机微结构材料系数

为验证 CGMsFEM 的良好适用性，本小节进行了两类测试（测试A、测试B）。在测试A中，非均质介质具有随机微结构和确定性系数；在测试B中，材料的微结构和系数均为随机的。

测试A： 具有随机微结构和确定性系数的非均质介质。 在此模拟中，体力 **f**和热源 g 选取为

$$\mathbf{f}(x,y)=\mathbf{0},\quad g(x,y)=10\times exp\Big(-\frac{(x-0.2)^2+(y-0.4)^2}{2*0.2^2}\Big).$$

初始边界条件定义为

$$\theta_0(x,y)=cos(\pi x)cos(\pi y)+1.5.$$

随后，拉梅系数 μ、 λ、导热系数 κ 和热膨胀系数 β 显示于图6左侧，其中对比度选为 $\lambda_{\max}:\lambda_{\min}=10^2:1$、$\mu_{\max}:\mu_{\min}=10^2:1$、 $\kappa_{\max}:\kappa_{\min}=10^3:1$、$\beta_{\max}:\beta_{\min}=5。0\times10^4:1$。给出了相应的松弛系数 $\gamma_1=0.75$、$\gamma_2=7.0\times10^{-2}$，时间步长为 $\tau=0.01$。这里， 100×100 细网格用于获得参考解，10×10粗网格用于所提出的 CGMsFEM 和 GMsFEM。CGMsFEM 的局部耦合多尺度基函数数量固定为 10，位移 u 和 θ 对应的局部 GMsFEM 多尺度基函数总数也取为 10。

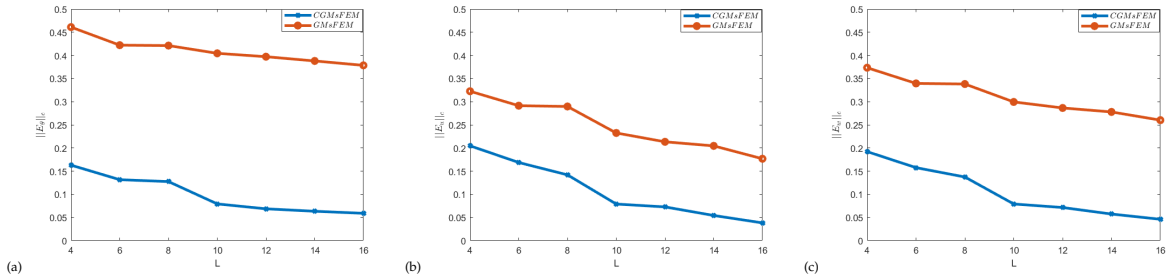

图5： 比较 周期性微结构中 CGMsFEM 和 GMsFEM 的相对能量误差。(a)E_θ (b) E_u，以及 (c) E_w ；

测试B： 具有随机微结构和系数的非均质介质。在该测试中，初始条件、边界条件和源项与第4.1节中的相同。材料系数 $\kappa(\mathbf{x};\ \xi)$ 、 $\lambda(\mathbf{x};\ \xi)$ 、$\mu(\mathbf{x};\ \xi)$ ，以及 $\beta(\mathbf{x};\ \xi)$ 满足以下对数高斯随机场

$$\exp\Big(\mathcal{GP}\Big(b_0(\mathbf{x}), \mathrm{Cov}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\Big)\Big),$$

其中，$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \sigma^2\exp(-\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|^2/l^2)$，$\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是 Ω 中的空间坐标，σ^2 是总体方差，l 是相关长度。接着，我们取 $l = 0.01, \sigma = 10$，$b_0(\mathbf{x}) = 0$ 用于 $\kappa(\mathbf{x};\xi)$、$\beta(\mathbf{x};\xi)$；取 $l = 0.01, \sigma = 10$，$b_0(\mathbf{x}) = 0$ 用于$\lambda(\mathbf{x};\xi)$、$\mu(\mathbf{x};\xi)$。为简便起见，样本通过 Karhunen-Lo´eve 展开（KLE）获得，其中包含 50 个截断项。图6右侧展示了 $\kappa(\mathbf{x};\ \xi)$、 $\lambda(\mathbf{x};\ \xi)$、$\mu(\mathbf{x};\ \xi)$和 $\beta(\mathbf{x};\ \xi)$的一个样本。取时间步长为 $\tau_n = 0.01$。模拟采用细网格尺寸 $h = \frac{1}{100}$、粗网格尺寸 $H = \frac{1}{10}$以及松弛系数$\gamma_1 = 0.7, \gamma_2 = 8.0\times10^{-6}$。CGMsFEM 的局部耦合多尺度基函数数量固定为 8，位移 u 和 θ 对应的 GMsFEM 局部多尺度基函数总数也取 8。

表2： 表 A：不同对比度 $\beta_{\max}$ 和 $\beta_{\min}$ 下 CGMsFEM 和 GMsFEM 的相对能量误差 .

比率	$\|E_\theta^{cgm}\|_e$	$\|E_\theta^{gm}\|_e$	$\|E^{cgm}\ u\ \|_e$	$\|E^{gm}\ u\ \|_e$	$\|E^{cgm}\ w\ \|_e$	$\|E^{gm}\ w\ \|_e$
1×10^1	0.0474	0.0946	0.0838	0.2682	0.0474	0.0947
1×10^2	0.0638	0.0946	0.1197	0.2538	0.0638	0.0947
1×10^3	0.0805	0.1647	0.1364	0.5539	0.0822	0.1828
5×10^3	0.1306	0.8367	0.1311	0.7455	0.1308	0.7926
1×10^4	0.1512	0.5599	0.1519	0.5171	0.1512	0.5360

表3： 测试B：不同方差下 CGMsFEM 和 GMsFEM 的相对能量误差 σ 的 β。

σ	$\|E_\theta^{cgm}\|_e$	$\|E_\theta^{gm}\|_e$	$\|E^{cgm}\ u\ \|_e$	$\|E^{gm}\ u\ \|_e$	$\|E^{cgm}\ w\ \|_e$	$\|E^{gm}\ w\ \|_e$
2	0.2075	0.3259	0.2124	0.2916	0.0474	0.0947
3	0.2336	0.3410	0.2478	0.2871	0.2072	0.3116
4	0.2739	0.4202	0.2119	0.2665	0.2371	0.3152
5	0.2656	0.4194	0.2135	0.2677	0.2225	0.3048
6	0.4144	0.5782	0.1492	0.2250	0.1781	0.2728

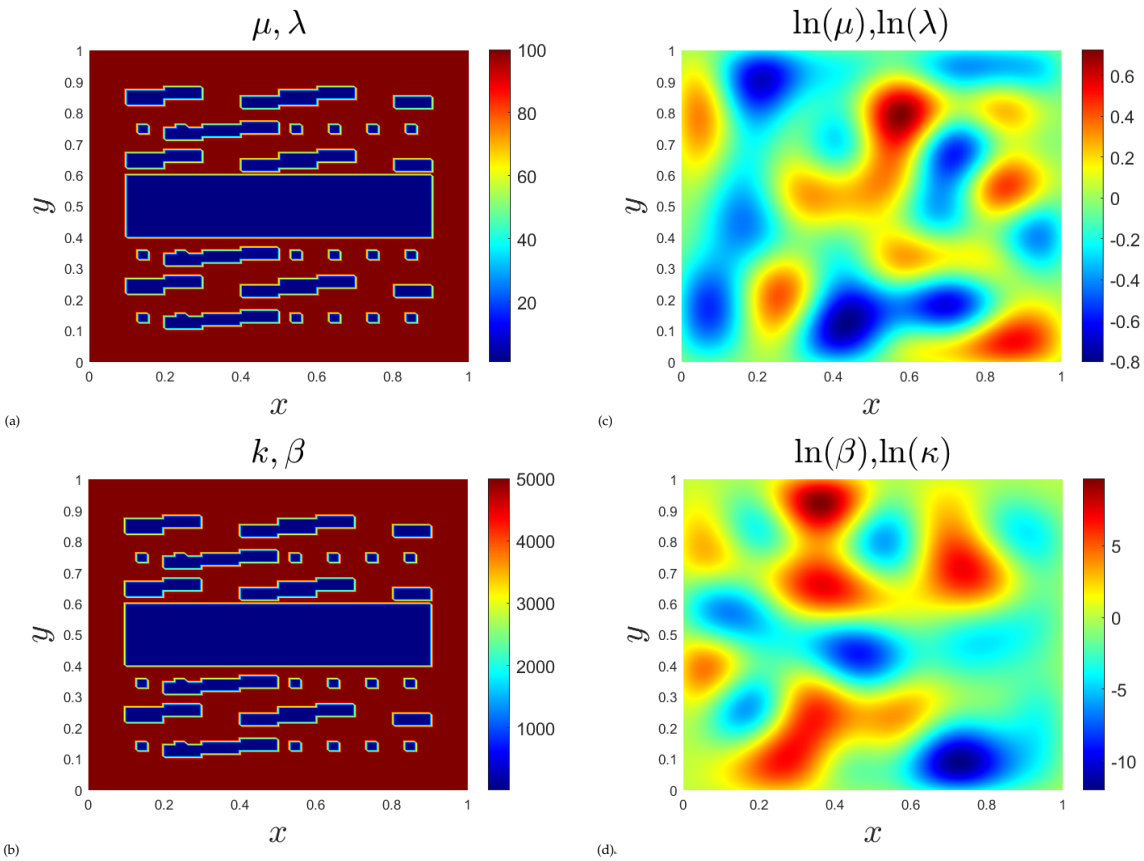

图6： 材料系数的一个样本的等高线图。Lam´e 系数 μ 和 λ：（a）测试A和（c）测试B；热导率系数 κ 和膨胀系数 β：（b）测试A和（d）测试B。

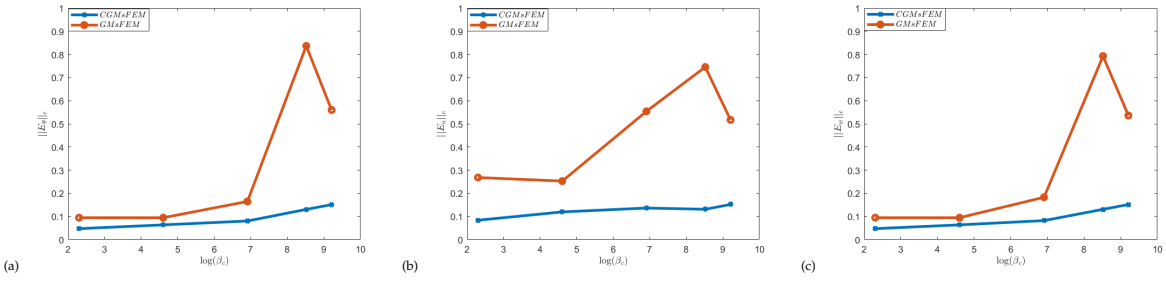

图9： 测试A：比较 CGMsFEM 和 GMsFEM 在 $\beta_{\max}$ 和 $\beta_{\min}$具有不同对比度时的相对能量误差：（a）E_θ（b）E_u，以及（c）E_w，其中 $\beta_c = {}^{\beta}{}_{\max}\beta_{\min}$。

测试A和测试B的参考解 (u^{ref}, θ^{ref})、CGMsFEM解 (u^{cgm}, θ^{cgm}) 和 GMsFEM解 (u^{gm}, θ^{gm}) 分别展示于图7和图8。通过与参考解比较可以发现，CGMsFEM解比 GMsFEM解精度更高，这与周期情形一致。此外，为了探究不同系数对结果的影响，我们比较了 CGMsFEM 和 GMsFEM 的能量误差随 β变化的情况。在测试A中，$\beta_{\max}$ 和 $\beta_{\min}$ 的对比度不断变化；在测试B中，方差 σ 也不断变化。表2和表3详细报告了测试A和测试B中 CGMsFEM 和 GMsFEM 的能量误差 E_θ、E_u和 (c) E_w。为更清楚地说明这一点，我们还在图9中展示了测试A的能量误差随对比度 $\beta_{\max}$ 和 $\beta_{\min}$的变化趋势，并在图10中展示了测试B的能量误差随 ln(β) 的方差 σ 变化的趋势。对于 CGMsFEM 和 GMsFEM，我们观察到 CGMsFEM 的能量误差几乎处于相同

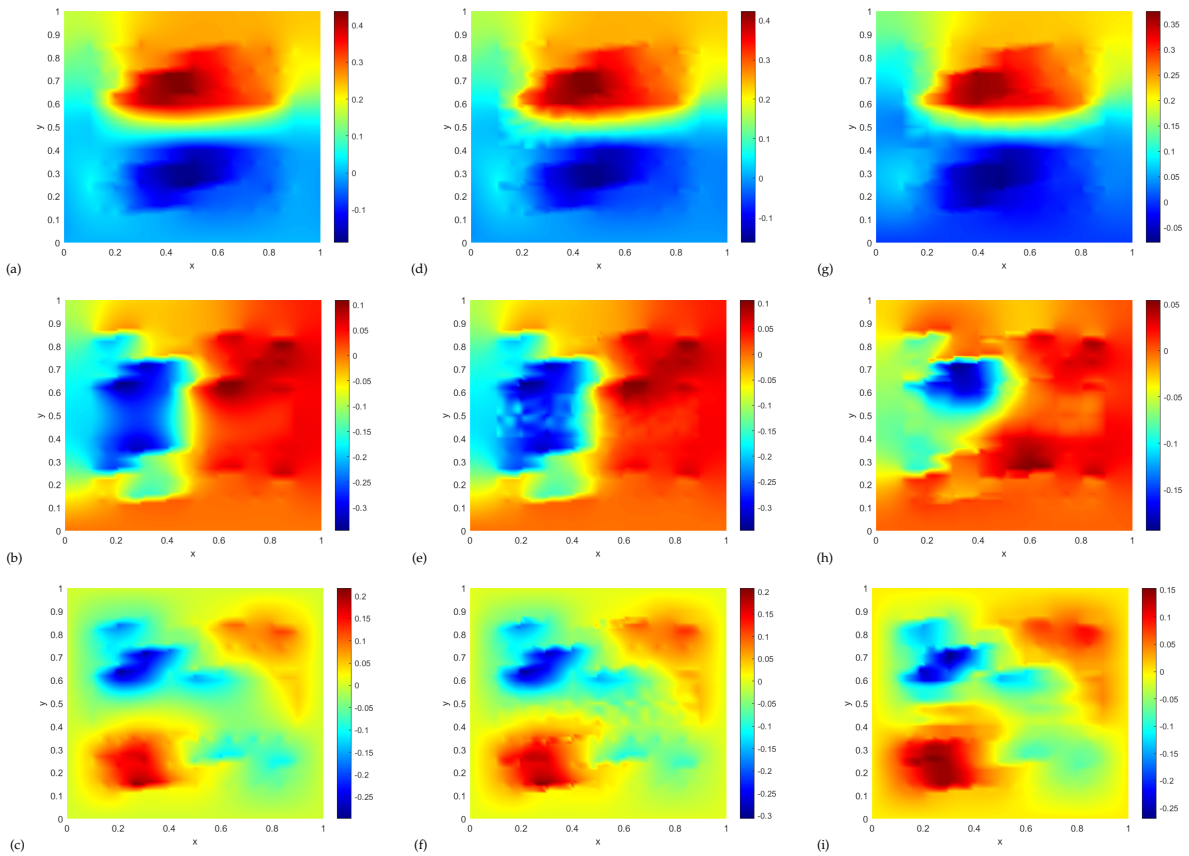

图7： 测试A的解的等高线图。参考解：(a) u_1^{ref} (b) u_2^{ref} 和 (c) θ^{ref}；CGMsFEM解：(d) u_1^{cgm} (e) u_2^{cgm} 和 (f) θ^{cgm}；GMsFEM解：(g) u_1^{gm} (h) u_2^{gm} 和 (i) θ^{gm}。

水平，而 GMsFEM 的结果则发生了显著变化。尽管随着对比度或两种材料系数方差的增大，整个系统变得极其复杂，但整个系统的能量误差仍保持稳定，几乎不受系统复杂性的影响。这也与第 4.1 节的结果一致。此外，对于测试 A 和 B，即使在更复杂的情形下，CGMsFEM 的精度也始终优于 GMsFEM。数值结果表明，CGMsFEM 计算效率高、精度高，在许多场景中具有广泛的适用性。

5. 结论

本文提出了一种新颖的 CGMsFEM，可高效模拟非均质介质的热力学行为，适用于弱耦合和强耦合情形。据我们所知，本文首次针对多物理场问题的 GMsFEM 设计并分析了耦合多尺度基函数。我们为局部正则化耦合谱问题创新性地设计了两个松弛系数。所构造的多尺度基函数能够更准确地捕捉原始热力学问题中的多物理场耦合信息，从而显著降低全局刚度矩阵的阶数。此外，本文详细推导了相应的收敛性分析，其中 CGMsFEM 的误差与各局部粗网格块中的特征值衰减密切相关，而误差上界独立于这两个松弛系数。数值实验表明，所提出的 CGMsFEM 稳定有效，且能够提供足够的数值精度，从而支持本文的理论结果。

尽管本研究采用了一些简化假设，但本文提出的 CGMsFEM 具有相当的通用性，为设计极限荷载下全耦合多物理场多尺度问题的耦合基函数提供了一个广义框架。值得注意的是，这种正则化技术

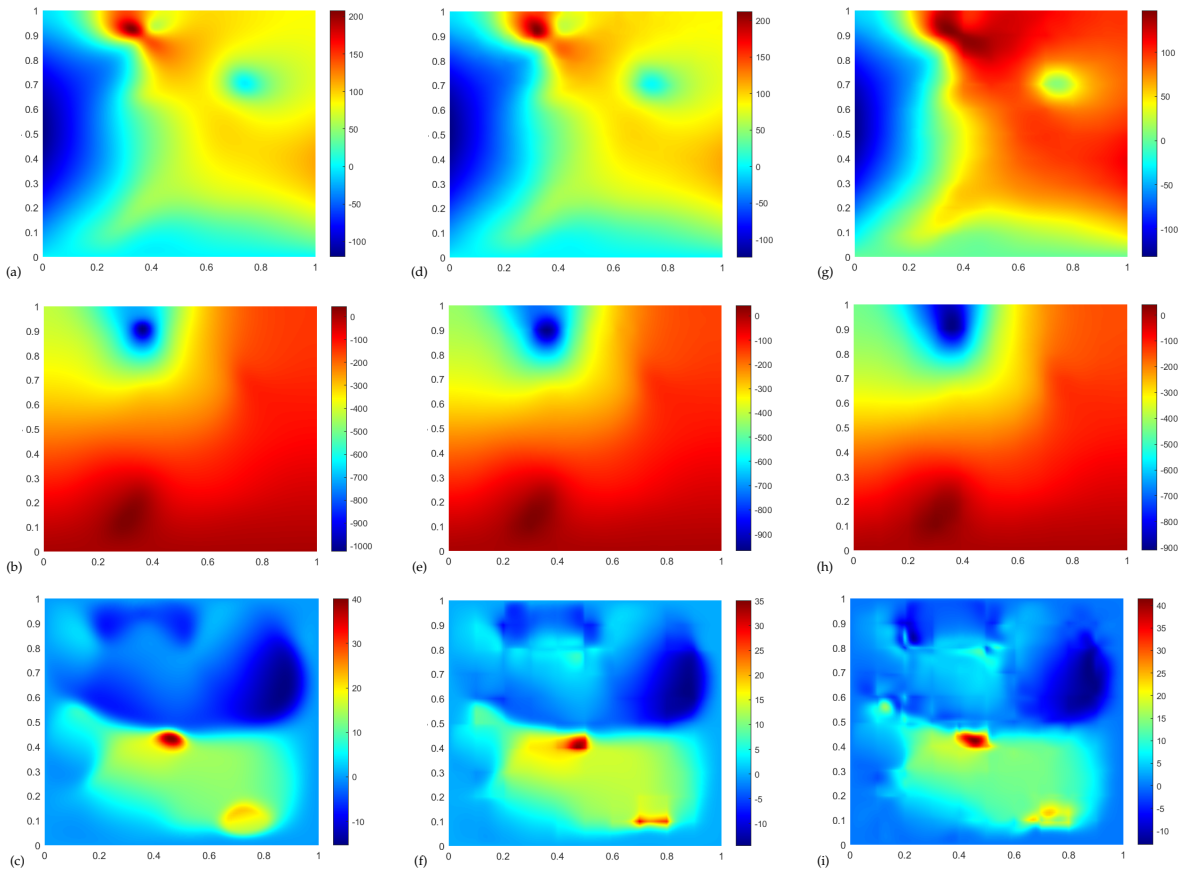

图 8： 测试B的解的等高线图。参考解：(a) u_1^{ref} (b) u_2^{ref} 和 (c) θ^{ref}；CGMsFEM解：(d) u_1^{cgm} (e) u_2^{cgm} 和 (f) θ^{cgm}；GMsFEM解：(g)u_1^{gm} (h) u_2^{gm} 和 (i) θ^{gm}。

不仅在 GMsFEM 框架内有效，也适用于其他多尺度方法。未来的工作将重点分析求解局部耦合谱问题时的最优松弛系数，尽管通过数值实验我们发现，松弛系数可以灵活选取，而不会影响 CGMsFEM 的效率和准确性。

致谢

作者受到国家自然科学基金（项目编号：12271409 和 12271408）、上海市自然科学基金（项目编号：21ZR1465800）、同济大学海洋研究跨学科项目以及中央高校基本科研业务费的资助。

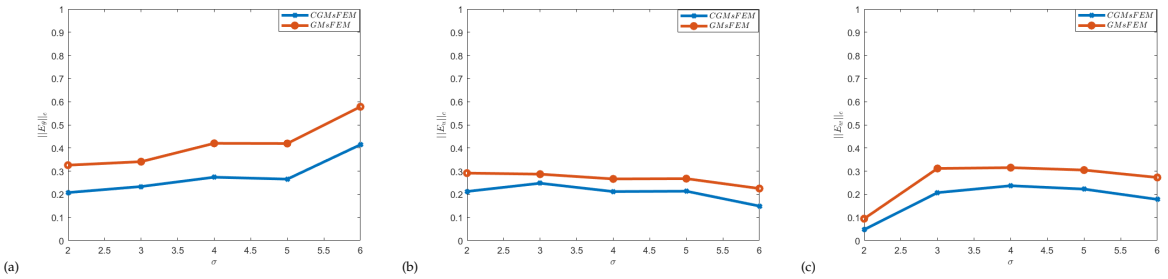

图10： 测试B：比较 不同方差 σ 下，CGMsFEM 与 GMsFEM 的相对能量误差 β。（a）E_θ（b）E_u，和（c）E_w;

附录 A. 引理3.3的证明

首先，插值算子 I_{ms} 的局部能量误差可表示为

$$\begin{aligned} & a^K\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_u, \mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_u\right)+d^K\left(\theta-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_\theta, \theta-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_\theta\right) \\ & \quad=\int_K 2\mu\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_u\right):\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_u\right)+\int_K \lambda\nabla\cdot\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_u\right) \\ & \qquad \nabla\cdot\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_u\right)+\int_K \kappa\nabla\left(\theta-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_\theta\right)\cdot\nabla\left(\theta-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_\theta\right) \\ & \quad\equiv I_1+I_2+I_3. \end{aligned} \tag{A.1}$$

定义$E(u)$：$\mathrm{R}^d\to\mathrm{R}^{d\times d}$，其中$E(u)\mid_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_i+u_j\right)$，对所有$u\in V_u(\Omega)$均成立。记 $\circ$ 为 Hadamard积。对于任意$K\in\mathrm{T}_H$，我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w}\right)_u\right) &= \boldsymbol{\epsilon}\left(\sum_{y_i\in K}\chi_{i,u}^T I_d\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right) \\ &= \sum_{y_i\in K}\left(E(\chi_{i,u})\circ\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)+E\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\circ\boldsymbol{\epsilon}\left(\chi_{i,u}\right)\right). \end{aligned}$$

然后I_1 可估计如下

$$\begin{aligned} I_1 &\le 2N_K\sum_{y_i\in K}\left(\int_K 2\mu E(\chi_{i,u})\circ\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right):E(\chi_{i,u})\circ\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right. \\ &\quad\left.+\int_K 2\mu E\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\circ\boldsymbol{\epsilon}\left(\chi_{i,u}\right):E\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\circ\boldsymbol{\epsilon}\left(\chi_{i,u}\right)\right) \\ &\le 2N_K\sum_{y_i\in K}\left(\int_K 2\mu\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right):\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right. \\ &\quad\left.+\frac{C_1^2}{H^2}\int_K 2\mu E\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right):E\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right), \\ &\le 2N_K\sum_{y_i\in K}\left(\int_K 2\mu\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right):\boldsymbol{\epsilon}\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right. \\ &\quad\left.+\frac{C_1^2}{H^2}2\int_K 2\mu\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\cdot\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right). \end{aligned} \tag{A.2}$$

接下来，对于任意I_2和$K \in \mathrm{T}_H$，可估计如下

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{u} - (\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w})_u) &= \sum_{y_i \in K} \nabla \cdot \left(\chi_{i,u}^T I_d \left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right) \\ &= \sum_{y_i \in K} \left(\mathrm{diag}(\chi_{i,u}) : \nabla\left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right) + \mathrm{diag}\left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right) : \nabla(\chi_{i,u})\right),\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{diag}(\cdot)$表示方阵的主对角线元素。因此，

$$\begin{aligned}I_2 &\le 2N_K \sum_{y_i \in K} \left(\int_K \lambda \left(\mathrm{diag}(\chi_{i,u}) : \nabla\left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathrm{diag}(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u) : \nabla(\chi_{i,u})\right)^2 \right) \\ &\le 2N_K \sum_{y_i \in K} \left(\int_K \lambda \left(\nabla \cdot \left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right)\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2C_1^2}{H^2} \left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right) \cdot \left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right) \right).\end{aligned} \tag{A.3}$$

结合式（A.2）与（A.3），可得

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 \le 2N_K \sum_{y_i \in K} \left(\left\| \mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u \right\|_{a,K}^2 \right. \\ \left. + \frac{2C_1^2}{H^2} \int_K (2\mu + \lambda) \left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right) \cdot \left(\mathbf{u} - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right) \right).\end{aligned} \tag{A.4}$$

对I_3进行估计的方法类似，可得

$$\begin{aligned}\nabla(\theta - (\mathcal{I}_{\mathrm{ms}}\mathbf{w})_\theta) &= \sum_{y_i \in K} \nabla\left(\chi_{i,\theta}\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)\right) \\ &= \sum_{y_i \in K} \left(\chi_{i,\theta} \nabla\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right) + \left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right) \nabla\chi_{i,\theta}\right).\end{aligned}$$

将其代入I_3，，可得

$$\begin{aligned}I_3 &\le 2N_K \sum_{y_i \in K} \left(\int_K \kappa \left(\chi_{i,\theta} \nabla\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)\right) \cdot \left(\chi_{i,\theta} \nabla\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_K \kappa \left(\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right) \nabla\chi_{i,\theta}\right) \cdot \left(\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right) \nabla\chi_{i,\theta}\right) \right) \\ &\le 2N_K \sum_{y_i \in K} \left(\int_K \kappa \nabla\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right) \cdot \nabla\left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2C_1^2}{H^2} \int_K \kappa \left(\theta - \left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)^2 \right).\end{aligned} \tag{A.5}$$

结合式（A.4）和（A.5），可得

$$I_1+I_2+I_3 \le 2N_K \sum_{y_i\in K}\left(\left\|\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right\|_{a,K}^2+\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{d,K}^2+\frac{2C_1^2}{H^2}\left(\left\|\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right\|_{L_a,K}+\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{L_d,K}\right)\right). \tag{A.6}$$

此外，定义 $J=\left\|\mathbf{u}-\left(\mathrm{I}^{\omega_i}{}_{L_i}\mathbf{w}\right)_u\right\|_{a,K}^2+\left\|\theta-\left(\mathrm{I}^{\omega_i}{}_{L_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{d,K}^2$，则

$$\begin{aligned}
J&=\mathcal{A}^K\left(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)+(\gamma_1-\gamma_2)\,b^K\left(\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u,\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right)\\
&\le\mathcal{A}^K\left(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)+|\gamma_1-\gamma_2|C_0\left\|\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right\|_{a,K}\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{L_d,K}\\
&\le\mathcal{A}^K\left(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)+\frac{|\gamma_1-\gamma_2|C_0}{2}\\
&\quad\left(\left\|\mathbf{u}-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_u\right\|_{a,K}^2+\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{L_d,K}^2\right)\\
&\le\mathcal{A}^K\left(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)+\frac{|\gamma_1-\gamma_2|C_0}{2}\left(J+\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{L_d,K}^2\right).
\end{aligned}$$

令 $C_2=\dfrac{2}{2-|\gamma_1-\gamma_2|C_0}$，$C_3=\dfrac{|\gamma_1-\gamma_2|C_0}{2-|\gamma_1-\gamma_2|C_0}$，并假设 $|\gamma_1-\gamma_2|C_0<1$，可得

$$J\le C_2\mathcal{A}^K\left(\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w},\mathbf{w}-\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)+C_3\left\|\theta-\left(\mathcal{I}_{L_i}^{\omega_i}\mathbf{w}\right)_\theta\right\|_{L_d,K}^2. \tag{A.7}$$

最后，结合公式（A.1）、（A.6）与（A.7），证明完毕。

附录 B. 定理3.2的证明

根据 Riesz 投影算子的定义 $\mathscr{R}_H$，并定义

$$\eta_{Hu}^n=\mathscr{R}_{Hu}\left(\mathbf{u}^n,\theta^n\right)-\mathbf{u}_H^n,\quad \eta_{H\theta}^n=\mathscr{R}_{H\theta}\left(\theta^n\right)-\theta_H^n.$$

结合式（7），可得

$$\begin{aligned}
&a\left(\eta_{Hu}^n,\mathbf{v}_{uH}\right)-b\left(\mathbf{v}_{uH},\eta_{H\theta}^n\right)+c\left(\eta_{H\theta}^n-\eta_{H\theta}^{n-1},v_{\theta H}\right)+b\left(\eta_{Hu}^n-\eta_{Hu}^{n-1},v_{\theta H}\right)\\
&\quad+\tau_n d\left(\eta_{H\theta}^n,v_{\theta H}\right)=\langle\tilde{\mathbf{f}}^n-\tilde{\mathbf{f}}_H^n,\mathbf{v}_{uH}\rangle_a+\tau_n\langle\tilde{g}^n-\tilde{g}_H^n,v_{\theta H}\rangle_d\\
&\quad+c\left(\delta_{H\theta}^n,v_{\theta H}\right)+b\left(\delta_{Hu}^n,v_{\theta H}\right),\quad\forall\ \left(\mathbf{v}_{uH},v_{\theta H}\right)\in V_{\mathrm{cgm}},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\delta_{H\theta}^n&=\mathscr{R}_{H\theta}\left(\theta^n\right)-\mathscr{R}_{H\theta}\left(\theta^{n-1}\right)-\tau_n\partial_t\theta^n\\
\delta_{Hu}^n&=\mathscr{R}_{Hu}\left(\mathbf{u}^n,\theta^n\right)-\mathscr{R}_{Hu}\left(\mathbf{u}^{n-1},\theta^{n-1}\right)-\tau_n\partial_t\mathbf{u}^n.
\end{aligned}$$

定义 $v^{uH}=\eta^n{}_{Hu}-\eta^{n-1}{}_{Hu}\in V_{uH}$ 和 $v^{\theta H}=\eta^n{}_{H\theta}$，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\eta_{Hu}^n\right\|_a^2+\frac{1}{2}\left\|\eta_{Hu}^n-\eta_{Hu}^{n-1}\right\|_a^2+\frac{1}{2}\left\|\eta_{H\theta}^n\right\|_c^2+\frac{1}{2}\left\|\eta_{H\theta}^n-\eta_{H\theta}^{n-1}\right\|_c^2+\tau_n\left\|\eta_{Hd\theta}^n\right\|_d^2\\
&\quad=\frac{1}{2}\left\|\eta_{Hu}^{n-1}\right\|_a^2+\frac{1}{2}\left\|\eta_{H\theta}^{n-1}\right\|_c^2+\langle\tilde{\mathbf{f}}^n-\tilde{\mathbf{f}}_H^n,\eta_{Hu}^n-\eta_{Hu}^{n-1}\rangle_a\\
&\quad+\tau_n\langle\tilde{g}^n-\tilde{g}_H^n,\eta_{H\theta}^n\rangle_d+c\left(\delta_{H\theta}^n,\eta_{H\theta}^n\right)+b\left(\delta_{Hu}^n,\eta_{Hu}^n\right).
\end{aligned}\tag{B.1}$$

与式（28）类似，利用 $\left\|\eta^{n}{}_{H\theta}\right\|_{c} \leq C_{4}\left\|\eta^{n}{}_{H\theta}\right\|_{d}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\eta_{Hu}^{n}\right\|_{a}^{2}+\frac{1}{2}\left\|\eta_{H\theta}^{n}\right\|_{c}^{2}+\frac{1}{4}\tau_{n}\left\|\eta_{H\theta}^{n}\right\|_{d}^{2} \leq \frac{1}{2}\left\|\eta_{Hu}^{n-1}\right\|_{a}^{2}+\frac{1}{2}\left\|\eta_{H\theta}^{n-1}\right\|_{c}^{2}+C^{n}(\mathbf{f}, g)\\ +4C_{4}^{2}\tau_{n}^{-1}\left\|\delta_{H\theta}^{n}\right\|_{c}^{2}+4C_{4}^{2}\tau_{n}^{-1}C_{0}^{2}\left\|\delta_{Hu}^{n}\right\|_{a}^{2}.\end{aligned}$$

根据问题的正则性假设和式（31），可得

$$\begin{aligned}\left\|\delta_{H\theta}^{n}\right\|_{c} &= \left\|-\int_{T_{n}}\left[\partial_{t}\theta(s)-\mathscr{R}_{H\theta}\left(\partial_{t}\theta(s)\right)\right]ds-\int_{T_{n}}\left(s-t_{n-1}\partial_{tt}\theta(s)\right)dt\right\|_{c},\\ &\leq \tau_{n}C_{4}C\left(H,\Lambda_{L+1}\right)\left\|\partial_{t}\mathbf{w}\right\|_{L^{\infty}\left(T_{n},|||\cdot|||_{2,\Omega}\right)}+\frac{1\!}{2}\tau_{n}^{2}\left\|\partial_{tt}\theta\right\|_{L^{\infty}(T_{n},\|\cdot\|_{c})}.\end{aligned} \tag{B.2}$$

类似地，利用式（29），可得

$$\left\|\delta_{Hu}^{n}\right\|_{a} \leq \tau_{n}\max\{1, C_{4}C_{0}\}C\left(H,\Lambda_{L+1}\right)\left\|\left(\partial_{t}\mathbf{w}\right)\right\|_{L^{\infty}\left(T_{n},|||\cdot|||_{2,\Omega}\right)}+\frac{1}{2}\tau_{n}^{2}\left\|\partial_{tt}\mathbf{u}\right\|_{L^{\infty}(T_{n},\|\cdot\|_{a})}. \tag{B.3}$$

结合式（B.2）与式（B.3），可得

$$4C_{4}^{2}\tau_{n}^{-1}\left\|\delta_{H\theta}^{n}\right\|_{c}^{2}+4C_{4}^{2}\tau_{n}^{-1}C_{0}^{2}\left\|\delta_{Hu}^{n}\right\|_{a}^{2} \leq \tau_{n}C^{2}\left(H,\Lambda_{L+1}\right)C_{1}^{n}(\mathbf{w})+\tau_{n}^{3}C_{2}^{n}(\mathbf{w}).$$

令 $u^{0}{}_{H}=\mathscr{R}_{Hu}\left(\mathbf{u}^{0},\theta^{0}\right)$ 且 $\theta^{0}{}_{H}=\mathscr{R}_{H\theta}\left(\theta^{n}\right)$，则 $\eta^{0}{}_{Hu}=0$ 且 $\eta^{0}{}_{H\theta}=0$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\eta_{Hu}^{n}\right\|_{a}^{2}+\frac{1}{2}\left\|\eta_{H\theta}^{n}\right\|_{c}^{2}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{4}\tau_{m}\left\|\eta_{H\theta}^{m}\right\|_{d}^{2} \leq \sum_{m=1}^{n}\left[C^{m}\left(\mathbf{f}, g\right)\right.\\ \left.+\tau_{m}C^{2}\left(H,\Lambda_{L+1}\right)C_{1}^{m}(\mathbf{w})+\tau_{m}^{3}C_{2}^{m}(\mathbf{w})\right].\end{aligned} \tag{B.4}$$

最后，利用三角不等式即可完成证明。

参考文献

[1] H. Dong, Z. Yang, X. Guan, J. Cui，基于细观力学分析的复合材料结构随机高阶三尺度强度预测模型，计算物理学杂志 465 (2022) 111352。[2] R. Chiba, Y. Sugano，基于多尺度热弹性分析的功能梯度材料组分优化，力学学报 223 (2012) 891–909。[3] P. Pedersen, N. L. Pedersen，热弹性结构的强度优化设计，结构与多学科优化 42 (2010) 681–691。[4] P. Duchene, S. Chaki, A. Ayadi, P. Krawczak，聚合物复合材料机械损伤评估所用无损检测技术综述，材料科学杂志 53 (2018) 7915–7938。[5] W. H. Ng, P. P. Friedmann, A. M. Waas，受损热防护系统的热力学行为：有限元模拟，航空航天工程杂志 25 (2012) 90–102。[6] C. M. Dafermos，关于线性热弹性方程解的存在性与渐近稳定性，理性力学与分析档案 29 (1968) 241–271。[7] S. Peter, S. Meir，N维热弹性接触问题解的存在性，偏微分方程通讯 17 (1992) 1597–1618。[8] A. Ženíšek，耦合热弹性与黏土耦合固结的有限元方法，RAIRO 数值分析 18 (1984) 183–205。

[9] J. P. Carter, J. R. Booker，耦合热弹性的有限元分析，Computers & Structures 31 (1989) 73–80。[10] A. Ern, S. Meunier，耦合椭圆–抛物问题 Euler-Galerkin 近似的后验误差分析，ESAIM：数学建模与数值分析 - 数学建模与数值分析 43 (2009) 353–375。[11] N. Strömberg，二维热弹性磨损问题的有限元处理，计算机方法在应用力学与工程中的应用 177 (1999) 441–455。[12] S. Eberle，具有透明边界条件的三维热弹性波动方程有限元法–边界元法耦合，Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 73 (2022) 163。[13] H. C. Yoon, K. K. Vasudeva, S. M. Mallikarjunaiah，非线性应变限制热弹性体中耦合热力学系统的有限元模型，非线性科学与数值模拟通讯 108 (2022) 106262。[14] A. Entezari, M. Filippi, E. Carrera，三维梁型结构广义耦合热弹性分析的统一有限元方法，第1部分：方程与公式，热应力期刊 40 (2017) 1386–1401。[15] M. Duflot，热弹性断裂力学中的扩展有限元法，国际工程数值方法期刊 74 (2008) 827–847。[16] R. Butler, T. Dodwell, A. Reinarz, A. Sandhu, R. Scheichl, L. Seelinger，用于求解大型强各向异性椭圆问题的高性能 DUNE 模块及其在航空航天复合材料中的应用，计算机物理通讯 249 (2020) 106997。[17] I. Babuska, J. Osborn，广义有限元方法：其性能及其与混合方法的关系，SIAM 数值分析期刊 20 (1983) 510–536。[18] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou，《周期结构的渐近分析》，Elsevier North-Holland，1978。[19] G. Allaire，均匀化与双尺度收敛，SIAM 数学分析期刊 23 (1992) 1482–1518。[20] T. J. Hughes, G. R. Feijóo, L. Mazzei, J. B. Quincy，变分多尺度方法——计算力学的一种范式，计算机方法在应用力学与工程中的应用 166 (1998) 3–24。《计算力学稳定化方法进展》。[21] W. E, B. Engquist, X. Li, W. Ren, E. Vanden-Eijnden，异质多尺度方法：综述，计算物理通讯 2 (2007) 367–450。[22] I. Öszdemir, W. Brekelmans, M. Geers，有限元^2 用于非均质固体热力学分析的计算均匀化，计算机方法在应用力学与工程中的应用 198 (2008) 602–613。[23] T. Hou, Y. Efendiev，《多尺度有限元法：理论与应用》，Springer，纽约，NY，2009。[24] Y. Efendiev, J. Galvis, T. Y. Hou，广义多尺度有限元方法（GMsFEM），计算物理学杂志 251 (2013) 116–135。[25] F. Chen, E. Chung, L. Jiang，最小二乘混合广义多尺度有限元法，计算机方法在应用力学与工程中的应用 311 (2016) 764–787。[26] I. Babuška, R. Lipton, P. Sinz, M. Stuebner，多尺度谱广义有限元法与最优过采样，计算机方法在应用力学与工程中的应用 364 (2020) 112960。

[27] C. Ma、R. Scheichl、T. Dodwell, 《基于局部最优谱近似的广义有限元方法的新型设计与分析》, SIAM 数值分析期刊 60 (2022) 244–273。[28] P. Henning、A. Målqvist, 《边值问题的局部正交分解技术》, SIAM 科学计算杂志 36 (2014) A1609–A1634。[29] A. Målqvist、D. Peterseim, 《椭圆多尺度问题的局部化》, 计算数学 83 (2014) 2583–2603。[30] Y. Feng、M. Deng、J. Cui、X. Guan, 《复合材料中热弹性效应的双尺度有限元分析》, 国际计算方法杂志 11 (2014) 1350066。[31] G. A. Francfort, 《均匀化与线性热弹性》, SIAM 数学分析期刊 14 (1983) 696–708。[32] X. Wang、L. Cao、Y. Wong, 《复合材料耦合热弹性系统的多尺度计算与收敛性》, 多尺度建模与仿真 13 (2015) 661–690。[33] X. Guan、H. Yu、X. Tian, 《用于混凝土材料强度预测的随机二阶双尺度热力学模型》, 国际工程数值方法期刊 108 (2016) 885–901。[34] A. Målqvist、A. Persson, 《线性热弹性的广义有限元法》, ESAIM：数学建模与数值分析 51 (2017) 1145–1171。[35] R. Altmann、E. Chung、R. Maier、D. Peterseim、S. M. Pun, 《线性非均质孔弹性的计算多尺度方法》, 计算数学杂志 38 (2020) 41–57。[36] D. L. Brown、M. Vasilyeva, 《孔弹性问题的广义多尺度有限元法 I：线性问题》, 计算与应用数学杂志 294 (2016) 372–388。[37] M. Vasilyeva、D. Stalnov, 《热弹性问题的广义多尺度有限元法》, 载于：数值分析及其应用, 《计算机科学讲义》, 施普林格国际出版，Cham，2017，第 713–720 页。[38] S. Zhang、D. S. Yang、H. W. Zhang、Y. G. Zheng, 《非均质多相材料热弹性分析的耦合扩展多尺度有限元方法》, Computers & Structures 121 (2013) 32–49。[39] Y. Zheng、H. Zhang、J. Lv、H. Zhang, 《具有多边形微结构的热弹性问题的任意多节点扩展多尺度有限元方法》, 国际力学与材料设计杂志 16 (2020) 35–56。[40] E. T. Chung、Y. Efendiev、G. Li, 《用于高对比度流动问题的自适应广义多尺度有限元法》, 计算物理学杂志 273 (2014) 54–76。[41] E. Abreu、C. Díaz、J. Galvis, 《广义多尺度有限元方法的收敛性分析》, 计算物理学杂志 396 (2019) 303–324。