arXiv:2302.01698v1 [math.CA] 3 Feb 2023

与离散雅可比算子相关的半群的变差与振荡

J. J. BETANCOR 和 M. DE LEÓN-CONTRERAS*

摘要。本文证明了由与离散雅可比算子相关的算子半群定义的变差算子和振荡算子的带权 ℓ^p-不等式。此外，我们证明，涉及离散雅可比半群差分和的某些极大算子在带权 ℓ^p 空间上有界。所研究算子的 ℓ^p-有界性性质为其所定义的算子半群的收敛性提供了信息。

1. 引言

Lépingle 首先研究了有界鞅的 ρ-变差不等式，见 [24]。这些性质可视为 Doob 极大不等式的推广，并给出了鞅收敛定理的定量版本。Lépingle 结果的推广可见于 [10, 27] 和 [28]。

Bourgain ([10]) 首次研究了遍历理论中的变分不等式。他重新发现了 Lépingle 不等式，并用它证明了涉及多项式轨道的遍历平均逐点收敛。开创性论文 [10] 开启了调和分析和遍历理论中变分不等式的研究（[11, 12,18, 19, 21, 22, 25, 26] 和 [27]）。算子半群的振荡与变差估计可见于例如 [9, 16, 22, 30] 和 [36]。

设 $\rho > 0$ 和 $\{a_t\}_{t>0} \subset \mathbb{C}$。我们定义 $\{a_t\}_{t>0}$ 的 ρ-变差，记作 $V_\rho(\{a_t\}_{t>0})$, by

$$\mathcal{V}_\rho(\{a_t\}_{t>0}) = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_{t_j} - a_{t_{j+1}}|^\rho\right)^{1/\rho}.$$

设 $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ 是一个递减序列，满足 $t_j \to 0$，当 $j \to \infty$ 时。$\{a_t\}_{t>0}$ 的振荡 $O(\{a_t\}_{t>0},\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})$ 定义为

$$\mathcal{O}(\{a_t\}_{t>0}, \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t_{j+1}\le\epsilon_{j+1}<\epsilon_j\le t_j} |a_{\epsilon_j} - a_{\epsilon_{j+1}}|^2\right)^{1/2}.$$

令 $\lambda > 0$. 我们定义 $\{a_t\}_{t>0}$, $\Lambda(\{a_t\}_{t>0}, \lambda)$ 的 λ-跳为

$$\Lambda(\{a_t\}_{t>0}, \lambda) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists\, s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_n < t_n, \text{ such that } |a_{t_i} - a_{s_i}| > \lambda,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

变差、振荡和跳跃为我们提供了有关 $\{a_t\}_{t>0}$. 收敛性质的信息

设 $\{T_t\}_{t>0}$ 是 $L^p(X,\mu)$ 中的一族算子，且满足 $1 \le p < \infty$，其中 (X,μ) 是一个测度空间。对于每个 $f \in L^p(X,\mu)$，我们定义：

$$\mathcal{V}_\rho(\{T_t\}_{t>0})(f)(x) := \mathcal{V}_\rho(\{T_t(f)(x)\}_{t>0}),$$
$$\mathcal{O}(\{T_t\}_{t>0}, \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})(f)(x) := \mathcal{O}(\{T_t(f)(x)\}_{t>0}, \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})$$

2020 数学主题分类。42B25,42B30.

*通讯作者。

and

$$\Lambda(\{T_t\}_{t>0},\lambda)(f)(x) := \Lambda(\{T_t(f)(x)\}_{t>0},\lambda).$$

这里一个重要的问题是这些新函数的可测性。关于这一性质的说明可见于 [11, 定理 1.2] 之后。我们的目标是获得变差、振荡和跳跃算子的 L^p-有界性。通常，为了得到 L^p-变差算子的 ρ-有界性，我们需要考虑 $\rho > 2$。在处理鞅时就是如此，参见 [22] 和 [29]。指数为 2 的振荡算子可以很好地替代 2–变差算子。根据 [25, (1.15)], ，我们可以将一致的 λ-跳跃估计视为 ρ-变差的端点估计， $\rho > 2$。此外，[25,定理 1.9] 证明，振荡算子不能按照不等式 [25, (1.15)] 的意义，被解释为 ρ-变差的端点， $\rho > 2$。

设 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $(0,\infty)$ 中的一个递增序列，$\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个有界实数序列。根据 [7] 和 [20], ，对于任意满足 $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$、 $N_1 < N_2$ 的 $N = (N_1, N_2)$，我们定义算子 S_N 如下：

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{T_t\}_{t>0})(f) = \sum_{j=N_1}^{N_2} b_j(T_{a_{j+1}}f - T_{a_j}f),$$

相应的极大算子 S_* 定义如下：

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*}(\{T_t\}_{t>0})(f) = \sup_{\substack{N=(N_1,N_2)\\ N_1,N_2\in\mathbb{Z},\, N_1<N_2}} \left|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{T_t\}_{t>0})(f)\right|.$$

这些算子有助于我们全面了解 $\{T_t\}_{t>0}$ 的收敛性质。根据 [20, 注释 1], ，为了获得算子 S_* 的 L^p-有界性性质，我们需要假设序列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足某些额外条件（例如具有稀疏性）。

我们的目标是为上述所有算子建立 L^p-不等式，其中 $\{T_t\}_{t>0}$ 是离散 Jacobi 热半群。

现在回顾一些关于雅可比多项式的定义和性质，这些内容将在全文中使用。

设 $\alpha, \beta > -1$。对于每个 $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$，定义第 n– 个雅可比多项式$P_n^{(\alpha,\beta)}$ 为

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}), \quad x \in (-1,1),$$

参见 [35, 第 67 页，公式 (4.3.1)]。

我们还考虑 $p_n^{(\alpha,\beta)} = w_n^{(\alpha,\beta)}P_n^{(\alpha,\beta)}$、 $n \in \mathbb{N}_0$，其中

$$w_n^{(\alpha,\beta)} = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

and

$$w_0^{(\alpha,\beta)} = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}}.$$

序列 $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 $L^2((-1,1)\mu_{\alpha,\beta})$ 中的正交归一基，其中 $d\mu_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$.

我们将差分算子 $J^{(\alpha,\beta)}$ 定义如下，

$$J^{(\alpha,\beta)}(f)(n) = a_{n-1}^{(\alpha,\beta)} f(n-1) + b_n^{(\alpha,\beta)} f(n) + a_n^{(\alpha,\beta)} f(n+1), \quad n \in \mathbb{N},$$

and

$$J^{(\alpha,\beta)}(f)(0) = b_0^{(\alpha,\beta)} f(0) + a_0^{(\alpha,\beta)} f(1),$$

其中

$$a_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_0^{(\alpha,\beta)} = \frac{2}{\alpha+\beta+2}\sqrt{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha+\beta+3}},$$

$$b_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} - 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

and

$$b_0^{(\alpha,\beta)} = -\frac{2\alpha+2}{\alpha+\beta+2}.$$

算子 $J^{(\alpha,\beta)}$ 的谱为 $[-2,0]$，且对任意 $x \in [-1,1]$,

$$J^{(\alpha,\beta)} p_n(x) = (x-1)p_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

对任意 $1 \le p \le \infty$，算子 $J^{(\alpha,\beta)}$ 是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到其自身的有界算子。此外，算子 $J^{(\alpha,\beta)}$ 在 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 上自伴，且 $-J^{(\alpha,\beta)}$ 是 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 中的正算子。我们将由 $J^{(\alpha,\beta)}$ 生成的算子半群记为 $\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0} := \{e^{tJ^{(\alpha,\beta)}}\}_{t>0}$。

我们将 (α,β)-傅里叶变换定义如下

$$\mathcal{F}^{(\alpha,\beta)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) p_n^{(\alpha,\beta)}, \quad f \in \ell^2(\mathbb{N}_0).$$

因此，$\mathrm{F}^{(\alpha,\beta)}$ 是从 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 到 $L^2((-1,1)\,\mu_{\alpha,\beta})$ 的等距映射。
对于每个 $t>0$，我们可以写成，

$$W_t^{(\alpha,\beta)}(f)(n) = \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)} \mathcal{F}^{(\alpha,\beta)}(f)(x) p_n^{(\alpha,\beta)}(x) d\mu_{\alpha,\beta}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

可以看出，对于每个 $t>0$,

$$W_t^{(\alpha,\beta)}(f)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

其中

$$(1) \qquad K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m) = \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)} p_n^{(\alpha,\beta)}(x) p_m^{(\alpha,\beta)}(x) d\mu_{\alpha,\beta}(x), \quad n,m \in \mathbb{N}_0.$$

Gasper（[6, 14] 和 [15]）建立了雅可比多项式乘积的线性化性质，其结果可以推广到多项式 $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$。然后，可以在经 $\mathrm{F}^{(\alpha,\beta)}$ 变换后成为逐点乘积的 $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 中定义一个卷积算子。对于每个 $t>0$, $W_t^{(\alpha,\beta)}$ 都可以视为一个卷积算子。

Askey（[5]）证明了一个关于雅可比系数的幂加权迁移定理。最近，Arenas、Ciaurri 和 Labarga（[2]）将迁移算子视为奇异积分，并考虑了（$\mathbb{N}_0$，$\mathrm{P}(\mathbb{N}_0)$ μ_d）的 Muckenhoupt类权，从而推广了 Askey 的结果。受 Ciaurri、Gille- spie、Roncal、Torrea 和 Varona（[13]）对与离散拉普拉斯算子相关的调和分析算子的研究启发

，Betancor、Castro、Fariña 和 Rodríguez-Mesa（[8]）在离散超球面情形下，为调和分析算子建立了加权 L^p-不等式。他们利用了离散情形下与超球多项式相关的离散卷积算子（[17]）。当 $\alpha = \beta$ 时，雅可比多项式可化为超球多项式。Arenas、Ciaurri 和 Labarga（[1, 3, 4]）将 [8] 中的结果推广到了雅可比情形。由于无法使用卷积算子，他们不得不采用不同于 [8] 中超球面情形所用的方法。此外，与 [8] 和 [13]，中一样，奇异积分的标量及向量值 Calderón-Zygmund 理论也是一项主要工具。$W_t^{(\alpha,\beta)}\,_{t>0}$ 热半群所定义的极大算子和 Littlewood-Paley 函数分别在 [3] 和 [1]，中得到了研究。

文献 [4] 研究了与离散雅可比算子 $J^{(\alpha,\beta)}$ 相关的 Riesz 变换。

现在陈述我们的结果。若实数序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足$v_n > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$，则称其为权。若 $1 < p < \infty$, 则称权 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 属于 $A_p(\mathbb{N}_0)$，当且仅当

$$\sup_{\substack{0\le n\le m\\ n,m\in\mathbb{N}_0}} \frac{1}{(m-n+1)^p}\sum_{k=n}^{m} v_k\left(\sum_{k=n}^{m} v_k^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1} < \infty.$$

权 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 属于类 $A_1(\mathbb{N}_0)$，当且仅当

$$\sup_{\substack{0\le n\le m\\ n,m\in\mathbb{N}_0}} \frac{1}{m-n+1}\left(\sum_{k=n}^{m} v_k\right)\max_{n\le k\le m}\frac{1}{v_k} < \infty.$$

对于定义在 $\mathbb{N}_0$ 上的每个权 v 以及 $1 \le p < \infty$，我们用 $\ell^p(\mathbb{N}_0, w)$ 表示定义在 $(\mathbb{N}_0, \mathrm{P}(\mathbb{N}_0)\ \mu_d)$ 上的加权 p-勒贝格空间，用 $\ell^{1,\infty}(\mathbb{N}_0, w)$ 表示定义在 $(\mathbb{N}_0, \mathrm{P}(\mathbb{N}_0)\ \mu_d)$ 上的 $(1,\infty)$-加权 Lorentz 空间。

定理 1.1。 设 $\alpha, \beta \ge -\frac{1}{2}$, $\rho > 2$ *and* $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛于0的$(0,\infty)$内的递减序列。

a) 变差算子 $V_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 和振荡算子 $O(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0}, \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})$ 对每个 $1 < p < \infty$ 和 $v \in A_p(\mathbb{N}_0)$，均从 $\ell^p(\mathbb{N}_0, v)$ 有界映射到其自身；并且对每个 $v \in A_1(\mathbb{N}_0)$，均从 $\ell^1(\mathbb{N}_0, v)$ 有界映射到 $\ell^{1,\infty}(\mathbb{N}_0, v)$。*b)* 族 $\{\lambda(\Lambda(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0}, \lambda))^{1/\rho}\}_{\lambda>0}$ 对每个 $1 < p < \infty$ 和 $v \in A_p(\mathbb{N}_0)$，均从 $\ell^p(\mathbb{N}_0, v)$ 一致有界地映射到其自身；并且对每个 $v \in A_1(\mathbb{N}_0)$，均从 $\ell^1(\mathbb{N}_0, v)$ 一致有界地映射到 $\ell^{1,\infty}(\mathbb{N}_0, v)$。

定理 1.1 中的结果此前尚未针对由离散拉普拉斯算子和超球面算子生成的半群得到证明。现在，当 $\alpha = \beta$ 时，可以从定理 1.1 推导出超球面情形下的结果。此外，我们将在第 2 节说明，定理 1.1 的证明中所采用的方法使我们能够证明由离散拉普拉斯算子生成的半群的相应结果。

向量值奇异积分的 Calderón-Zygmund 理论（[31]and [32]）将是我们证明定理 1.1 的主要工具。我们无法像 [1] 中那样使用转移定理，因为与 Littlewood-Paley 函数不同，变差算子和振荡算子与希尔伯特范数无关。我们需要利用雅可比多项式和贝塞尔函数的渐近性质，完善 [3] 中提出的论证。

定理 *1.2.* 设 $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$。假设 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是区间 $(0,\infty)$ 内的一个 ρ-稀疏序列，且满足 $\rho > 1$；$\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个实数有界序列。对于每个 $1 < p < \infty$ 和 $w \in A_p(\mathbb{N}_0)$，极大算子 $S^{\{b_j\}}\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z},*}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 从 $\ell^p(\mathbb{N}_0, w)$ 到其自身有界；对于每个 $w \in A_1(\mathbb{N}_0)$，它还从 $\ell^1(\mathbb{N}_0, w)$ 到 $\ell^{1,\infty}(\mathbb{N}_0, w)$ 有界。

Ben Salem（[33]）求解了一个初值问题，该问题与涉及雅可比算子分数阶幂（$J^{(\alpha,\beta)}$）$^\gamma$以及时间 Caputo 分数阶导数的分数阶扩散方程相关。利用从属原理，根据定理 1.1 和定理 1.2，我们可以推导出相应结果，其中 $\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0}$ 由（$J^{(\alpha,\beta)}$）$^\gamma$, $\gamma > 0$生成的算子半群取代。

下一节中，我们将证明定理 1.1 和定理 1.2。本文中，我们始终用 C 和 c 表示正常数，这些常数在不同出现处可以取不同值。

2. 定理 1.1 的证明

2.1. 定理 1.1 在 $\mathcal{V}_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 上的证明。

首先，我们将证明 $V_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 到自身的有界算子。我们有 $J^{(\alpha,\beta)}p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (x-1)p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$，$x \in (-1,1)$ 和 $n \in \mathbb{N}_0$。因此，$J^{(\alpha,\beta)}p_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 0$，$n \in \mathbb{N}_0$。考虑由以下式子定义的算子 $\tilde{J}^{(\alpha,\beta)}$

$$\tilde{J}^{(\alpha,\beta)}(f)(n) = \frac{1}{p_n^{(\alpha,\beta)}(1)} J^{(\alpha,\beta)}(p_\cdot^{(\alpha,\beta)} f)(n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

以及权 $v^{(\alpha,\beta)} = \{p_n^{(\alpha,\beta)}(1)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$。

令 $t > 0$。我们定义算子 $\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}$ 于 $\ell^p(\mathbb{N}_0, v^{(\alpha,\beta)})$ 上，$1 \leq p \leq \infty$ 为

$$\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}(f)(n) = \frac{1}{p_n^{(\alpha,\beta)}(1)} W_t^{(\alpha,\beta)}(p_\cdot^{(\alpha,\beta)} f)(n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

对于每个 $f \in \ell^p(\mathbb{N}_0, v^{(\alpha,\beta)})$，$1 \leq p < \infty$，我们可以写成

$$\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}(f)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\tilde{K}_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)(p_m^{(\alpha,\beta)}(1))^2, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

其中

$$\tilde{K}_t^{(\alpha,\beta)}(n,m) = \frac{K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)}{p_n^{(\alpha,\beta)}(1)p_m^{(\alpha,\beta)}(1)}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

由于 $\alpha \geq \beta \geq -1/2$，参见 [15, 定理 1]，，根据 [3, 定理 3.2]，，我们有$K_t^{(\alpha,\beta)}(n, m) \geq 0$，因此 $\tilde{K}_t^{(\alpha,\beta)}(n, m) \geq 0, n, m \in \mathbb{N}_0$。

族 $\{\tilde{W}_{(\alpha,\beta)s}\}_{s>0}$ 是由 $\tilde{J}^{(\alpha,\beta)}$ 在 $\ell^p(\mathbb{N}_0, v^{(\alpha,\beta)})$ 中生成的算子半群，$1 \leq p \leq \infty$。由于 $J^{(\alpha,\beta)}p_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 0$，$n \in \mathbb{N}_0$，我们推得 $\tilde{W}_{(\alpha,\beta)s}(1)(n) = 1, n \in \mathbb{N}_0$，也就是说，半群 $\{\tilde{W}_s^{(\alpha,\beta)}\}_{s>0}$ 是马尔可夫的。此外，通过使用 Jensen 不等式，我们推得

$$|\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}(f)(n)|^p \leq \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{K}_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)(p_m^{(\alpha,\beta)}(1))^2|f(m)|^p, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ and } t > 0,$$

对每个 $1 \leq p < \infty$ 都成立。由于 $\tilde{K}_t^{(\alpha,\beta)}(n, m) = \tilde{K}_t^{(\alpha,\beta)}(m, n)$，$n, m \in \mathbb{N}_0$，因此 $\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}$ 是 $\ell^p(\mathbb{N}_0, v^{(\alpha,\beta)})$ 上的压缩算子，对每个 $1 \leq p \leq \infty$ 都成立，并且它在 $\ell^2(\mathbb{N}_0, v^{(\alpha,\beta)})$ 上是自伴的。

我们已证明，$\{\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0}$ 是 Stein 意义下的扩散半群（[34]）。

根据 [23, 推论 4.5] （另见 [19, 定理 3.3]），对于每个 $1 < p < \infty$， ρ-变差算子 $\mathcal{V}_\rho(\{\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 都是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0,\ v^{(\alpha,\beta)})$ 到其自身的有界算子。考虑到

$$\mathcal{V}_\rho(\{\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) = \frac{1}{p_n^{(\alpha,\beta)}(1)}\mathcal{V}_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(p_\cdot^{(\alpha,\beta)}(1)(f))(n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

我们推导出 $\mathcal{V}_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 到其自身的有界算子

。现在我们将对向量值奇异积分使用 Calderón-Zygmund 理论（见[8, 定理 2.1]）。若 g 是定义在 $(0,\infty)$ 上的复值函数，我们定义

$$\|g\|_\rho = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1\\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |g(t_j) - g(t_{j+1})|^\rho\right)^{1/\rho},$$

以及线性空间 E_ρ，它由所有满足 $\|g\|_\rho < \infty$. 的 $g : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ 组成。显然，$\|g\|_\rho = 0$ 当且仅当 g 为常数。将相差一个常数的函数视为相同后，$\|\cdot\|_\rho$ 是 E_ρ 上的一个范数，并且 $(E_\rho, \|\cdot\|_\rho)$ 是一个巴拿赫空间。我们可以写成

$$\mathcal{V}_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) = \|W_t^{(\alpha,\beta)}(f)(n)\|_\rho, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

$\|\cdot\|_\rho$ 不是希尔伯特范数。因此，与 [1] 中讨论的 Littlewood-Paley 函数的情形不同，无法应用转移定理。我们将看到

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_\rho \leq \frac{C}{|n-m|}, \quad n,m \in \mathbb{N}_0,\ n \neq m, \tag{2}$$

and

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_t^{(\alpha,\beta)}(l,m)\|_\rho \leq C\frac{|n-l|}{|n-m|^2}, \quad |n-m| > 2|n-l|,\ \frac{m}{2} \leq n,l \leq \frac{3m}{2}. \tag{3}$$

首先，我们证明 (2)。根据 [3, 引理 5，1], 有

$$K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m) = w_n^{(\alpha,\beta)}w_m^{(\alpha,\beta)}\frac{(n+\alpha+\beta+1)(m+\alpha+\beta+1)}{2(n-m)(n+m+\alpha+\beta+1)}t\left(\frac{1}{m+\alpha+\beta+1}H_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{n+\alpha+\beta+1}H_t^{(\alpha,\beta)}(m,n)\right), \quad n,m \in \mathbb{N},\ n \neq m \text{ and } t > 0,$$

其中，对于 $k,l \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ 和 $t > 0$,

$$H_t^{(\alpha,\beta)}(k,l) = \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)}P_{k-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)P_l^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx.$$

由于 $w_n^{(\alpha,\beta)} \sim \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$，为了证明当 $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ 时的 (2)，只需证明

$$\|tH_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_\rho \leq \frac{C}{\sqrt{nm}}, \quad n,m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$$

设 $n,m \in \mathbb{N},\ n \neq m$. 我们将其分解为

$$H_t^{(\alpha,\beta)}(n,m) = H_{t,1}^{(\alpha,\beta)}(n,m) + H_{t,2}^{(\alpha,\beta)}(n,m), \quad t > 0,$$

其中

$$H_{t,1}^{(\alpha,\beta)}(n,m) = \int_0^1 e^{-t(1-x)}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \quad t > 0.$$

假设 $g:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ 是一个可微函数。我们可以写成

$$\begin{aligned}\|g\|_\rho &= \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1\\ n\in\mathbb{N}}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}|g(t_j)-g(t_{j+1})|^\rho\right)^{1/\rho}\\ &\le \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1\\ n\in\mathbb{N}}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left|\int_{t_{j+1}}^{t_j}g'(t)\,dt\right|^\rho\right)^{1/\rho}\\ &\le \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1\\ n\in\mathbb{N}}}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\int_{t_{j+1}}^{t_j}g'(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty |g'(t)|\,dt. \qquad (4)\end{aligned}$$

在下文中，我们将多次使用（4）。
根据 [35, （7.32.6）]，我们有

$$|P_k^{(\alpha,\beta)}(x)| \le \frac{C}{\sqrt{k}}(1-x)^{-\alpha/2-1/4}(1+x)^{-\beta/2-1/4}, \quad x\in(-1,1) \text{ and } k\in\mathbb{N}. \qquad (5)$$

利用（4）和（5），得到

$$\begin{aligned}\|tH_{t,2}^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_\rho &\le \int_0^\infty\left|\frac{d}{dt}\left(tH_{t,2}^{(\alpha,\beta)}(n,m)\right)\right|dt\\ &\le \frac{C}{\sqrt{nm}}\int_0^\infty\int_{-1}^0 e^{-t(1-x)}(t(1-x)+1)dxdt \le \frac{C}{\sqrt{nm}}. \qquad (6)\end{aligned}$$

另一方面，由于 $P_0^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)=1, x\in(-1,1)$，可得

$$H_{t,1}^{(\alpha,\beta)}(1,m)=\int_0^1 e^{-t(1-x)}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \quad t>0.$$

于是，由（5）可得

$$\begin{aligned}\|tH_{t,1}^{(\alpha,\beta)}(1,m)\|_\rho &\le \frac{C}{\sqrt{m}}\int_0^\infty\int_0^1 e^{-t(1-x)}(t(1-x)+1)(1-x)^{\alpha/2+3/4}(1+x)^{\beta/2+3/4}\,dxdt\\ &\le \frac{C}{\sqrt{m}}.\end{aligned}$$

在 [35, 定理 8.21112], 中，已证明

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^\beta P_l^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) &= \gamma_l^{-\alpha}\frac{\Gamma(l+\alpha+1)}{\Gamma(l+1)}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2}J_\alpha(\gamma_l\theta)\\ &\quad+\begin{cases}\theta^{1/2}O(l^{-3/2}), & \frac{c}{l}\le\theta\le n-\epsilon,\\ \theta^{\alpha+2}O(l^\alpha), & 0<\theta<\frac{c}{l},\end{cases} \qquad l\in\mathbb{N}, \qquad (7)\end{aligned}$$

其中 $\gamma_l=l+\frac{\alpha+\beta+1}{2}$。这里，$c$ 和 ϵ 是固定的正数。由 [24, (5.16.1)] 可得

$$J_\alpha(z)\le C\begin{cases}z^\alpha, & 0<z<1,\\ z^{-1/2}, & z\ge 1.\end{cases} \qquad (8)$$

我们定义

$$F_l^{(\alpha,\beta)}(\theta)=P_l^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)-\gamma_l^{-\alpha}\frac{\Gamma(l+\alpha+1)}{\Gamma(l+1)}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2}J_\alpha(\gamma_l\theta),$$
$$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ and } l\in\mathbb{N}.$$

现在假设 $n > 1$。通过作变量代换 $x = \cos\theta$，可将其写为

$$H_{t,1}^{(\alpha,\beta)}(n,m) = 2^{\alpha+\beta+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta)P_m^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha+3}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\beta+3}d\theta$$

$$= 2^{\alpha+\beta+3}\Bigg[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}F_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\theta)F_m^{(\alpha,\beta)}(\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha+3}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\beta+3}d\theta$$

$$+ \gamma_m^{-\alpha}\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(m+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}F_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\theta)\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2}J_\alpha(\gamma_m\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+3}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+3}d\theta$$

$$+ \gamma_n^{-\alpha-1}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}F_m^{(\alpha,\beta)}(\theta)\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2}J_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+2}d\theta$$

$$+ \frac{\gamma_n^{-\alpha-1}\gamma_m^{-\alpha}\Gamma(n+\alpha)\Gamma(m+\alpha+1)}{2\Gamma(n)\Gamma(m+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\theta J_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)J_\alpha(\gamma_m\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\Bigg]$$

$$:= \sum_{j=1}^{4} H_{t,1,j}^{(\alpha,\beta)}(n,m), \qquad t > 0.$$

假设 $m > n$。由 (7) 可得

$$\begin{aligned}|\partial_t(tH_{t,1,1}^{(\alpha,\beta)}(n,m))| &\le Cn^{\alpha+1}m^\alpha\int_0^{\frac{1}{m}} e^{-ct\theta^2}(1+t\theta^2)\theta^{2\alpha+7}d\theta\\ &+ Cn^{\alpha+1}m^{-3/2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} e^{-ct\theta^2}(1+t\theta^2)\theta^{\alpha+\frac{11}{2}}d\theta\\ &+ C(nm)^{-3/2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ct\theta^2}(1+t\theta^2)\theta^3 d\theta, \qquad t > 0.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\partial_t(tH_{t,1,1}^{(\alpha,\beta)}(n,m))|dt &\le Cn^{\alpha+1}m^\alpha\int_0^{\frac{1}{m}}\theta^{2\alpha+5}d\theta + Cn^{\alpha+1}m^{-3/2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}\theta^{\alpha+\frac{7}{2}}d\theta\\ &+ C(nm)^{-3/2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\theta\, d\theta\\ &\le \frac{C}{(nm)^{3/2}}.\end{aligned}$$

由于 $\gamma_k \sim k$, $k \in \mathbb{N}$, 由 (7) 和 (8) 得到

$$\begin{aligned}|\partial_t(tH_{t,1,2}^{(\alpha,\beta)}(n,m))| &\le Cn^{\alpha+1}m^\alpha\int_0^{\frac{1}{m}} e^{-ct\theta^2}(1+t\theta^2)\theta^{2\alpha+5}d\theta\\ &+ Cn^{\alpha+1}m^{-1/2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} e^{-ct\theta^2}(1+t\theta^2)\theta^{\alpha+\frac{9}{2}}d\theta\\ &+ Cn^{-3/2}m^{-1/2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ct\theta^2}(1+t\theta^2)\theta^2 d\theta, \qquad t > 0.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\partial_t(tH_{t,1,2}^{(\alpha,\beta)}(n,m))|dt &\le Cn^{\alpha+1}m^\alpha\int_0^{\frac{1}{m}}\theta^{2\alpha+3}d\theta + Cn^{\alpha+1}m^{-1/2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}\theta^{\alpha+\frac{5}{2}}d\theta\\ &+ Cn^{-3/2}m^{-1/2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{n^{3/2}m^{1/2}}.$$

类似地，我们得到

$$\int_0^\infty |\partial_t(tH_{t,1,3}^{(\alpha,\beta)}(n,m))|dt \leq \frac{C}{n^{1/2}m^{3/2}}.$$

因此，我们得出

$$\sum_{j=1}^{3}\int_0^\infty |\partial_t(tH_{t,1,j}^{(\alpha,\beta)}(n,m))|dt \leq \frac{C}{\sqrt{nm}}.$$

我们将看到

$$\int_0^\infty |\partial_t(tZ_t^\alpha(n,m))|dt \leq \frac{C}{\sqrt{nm}},$$

其中

$$Z_t^\alpha(n,m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\theta J_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)J_\alpha(\gamma_m\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta, \quad t>0.$$

再次，由于 $\gamma_k \sim k$, $k\in\mathbb{N}$，利用 (8) 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_t\left(tZ_t^\alpha(n,m) - t\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\theta J_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)J_\alpha(\gamma_m\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\right)\right| \\
&= \left|\partial_t\left(t\int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t(1-\cos\theta)}\theta J_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)J_\alpha(\gamma_m\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\right)\right| \\
&\leq C\left(n^{\alpha+1}m^\alpha\int_0^{\frac{1}{m}} e^{-c\theta^2 t}\theta^{2\alpha+3}d\theta + n^{\alpha+1}m^{-1/2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} e^{-c\theta^2 t}\theta^{\alpha+5/2}d\theta\right), \quad t>0.
\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left|\partial_t\left(tZ_t^\alpha(n,m) - t\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\theta J_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)J_\alpha(\gamma_m\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\right)\right| dt \\
&\quad\leq C\left(n^{\alpha+1}m^\alpha\int_0^{\frac{1}{m}}\theta^{2\alpha+1}d\theta + n^{\alpha+1}m^{-1/2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}\theta^{\alpha+1/2}d\theta\right) \\
&\quad\leq C\left(\frac{n^{\alpha+1}m^\alpha}{m^{2\alpha+2}} + \frac{n^{\alpha+1}m^{-1/2}}{n^{\alpha+3/2}}\right) \leq C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{\sqrt{nm}}\right) \leq \frac{C}{\sqrt{nm}}.
\end{aligned}$$

根据 [24, (5.11.6)]，我们有

$$J_\alpha(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + g_\alpha(z), \quad z>0, \tag{9}$$

其中 $|g_\alpha(z)| \leq Cz^{-3/2}, \quad z\geq 1.$
我们定义：

$$Q_t^\alpha(n,m) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\theta J_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)J_\alpha(\gamma_m\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta, \quad t>0.$$

我们可以写成

$$\begin{aligned}
Q_t^\alpha(n,m) &= \frac{1}{\pi\sqrt{nm}}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\cos\left(\gamma_n\theta - \frac{(\alpha+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\gamma_m\theta - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sin\theta\, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\cos\left(\gamma_n\theta - \frac{(\alpha+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)g_\alpha(\gamma_m\theta)\sqrt{\theta}\sin\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)} g_{\alpha+1}(\gamma_n\theta)\cos\left(\gamma_m\theta-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\theta}\sin\theta\, d\theta$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)} g_{\alpha+1}(\gamma_n\theta) g_{\alpha}(\gamma_m\theta)\theta\sin\theta\, d\theta$$
$$=\sum_{j=1}^{4} Q_{t,j}^{\alpha}(n,m), \quad t>0.$$

利用（9），我们得到

$$\sum_{j=2}^{4}\int_0^{\infty}|\partial_t(tQ_{t,j}^{\alpha}(n,m))|dt \le C\left(\frac{1}{n^{1/2}m^{3/2}}+\frac{1}{n^{3/2}m^{1/2}}\right)\int_0^{\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ct\theta^2}d\theta dt$$
$$+\frac{C}{(nm)^{3/2}}\int_0^{\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ct\theta^2}\frac{d\theta}{\theta^3}dt$$
$$\le C\left(\frac{\sqrt{n}}{m^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{nm}}\right)\le\frac{C}{\sqrt{nm}}.$$

我们的下一个目标是证明

$$\int_0^{\infty}|\partial_t(tQ_{t,1}^{\alpha}(n,m))|dt\le\frac{C}{\sqrt{nm}}.$$

经过直接计算可得

$$2\cos\left(\gamma_n\theta-\frac{(\alpha+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\gamma_m\theta-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\gamma_n\theta-\eta\right)\cos\left(\gamma_m\theta-\eta\right)$$
$$=\sin\left((\gamma_n+\gamma_m)\theta-2\eta\right)+\sin\left((\gamma_n-\gamma_m)\theta\right)$$
$$=\cos(2\eta)(\sin((n+m)\theta)(\cos(\rho\theta)-1)+\sin((n+m)\theta)+\sin(\rho\theta)\cos((n+m)\theta))$$
$$-\sin(2\eta)(\cos((n+m)\theta)(\cos(\rho\theta)-1)+\cos((n+m)\theta)-\sin(\rho\theta)\sin((n+m)\theta))$$
$$+\sin((n-m)\theta), \tag{10}$$

其中 $\eta=\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$和 $\rho=\alpha+\beta+1$。

我们考虑

$$R_t(n,m)=t\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\sin((n-m)\theta)\sin\theta d\theta, \quad t>0.$$

我们将证明

$$\int_0^{\infty}|\partial_t R_t(n,m)|dt\le C. \tag{11}$$

通过分部积分，我们得到

$$R_t(n,m)=-t\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos((n-m)\theta)}{n-m}\right)\sin\theta d\theta$$
$$=t(S_{n,m}(t,\pi/2)-S_{n,m}(t,1/n)-\mathbb{R}_t(n,m)), \quad t>0,$$

其中

$$S_{n,m}(t,\theta)=e^{-t(1-\cos\theta)}\frac{\cos((n-m)\theta)}{m-n}\sin\theta, \quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\text{ and } t>0,$$

and

$$\mathbb{R}_t(n,m)=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\frac{\cos((n-m)\theta)}{m-n}(-t\sin^2\theta+\cos\theta)d\theta, \quad t>0.$$

我们有

$$\int_0^\infty |\partial_t[tS_{n,m}(t,\pi/2)]|dt \le \frac{C}{m-n}\int_0^\infty (1+t)e^{-t}dt \le \frac{C}{m-n}$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\partial_t[tS_{n,m}(t,1/n)]|dt &\le \frac{C}{m-n}\int_0^\infty \left(1+t\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)e^{-t\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}\sin\frac{1}{n}dt\\ &\le \frac{C}{n(m-n)}\int_0^\infty e^{\frac{-ct}{n^2}}dt \le C\frac{n}{m-n}.\end{aligned}$$

我们还得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\partial_t(t\mathbb{R}_t(n,m))|dt &\le \frac{C}{m-n}\int_0^\infty \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ct\theta^2}(t\theta^2+1+t^2\theta^4)d\theta dt \le \frac{C}{m-n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\theta^2}\\ &= C\frac{n}{m-n}.\end{aligned}$$

我们得出

$$\int_0^\infty |\partial_t R_t(n,m)|dt \le C\frac{n}{m-n} \le C,$$

条件是 $m>2n$。

以类似的方式继续推导，我们可以看到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big|\partial_t\Big[t\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\sin\theta\big(&\cos(2\eta)[\sin((n+m)\theta)(\cos(\rho\theta)-1)+\sin((n+m)\theta)\\ &+\sin(\rho\theta)\cos((n+m)\theta)]-\sin(2\eta)[\cos((n+m)\theta)(\cos(\rho\theta)-1)\\ &+\cos((n+m)\theta)-\sin(\rho\theta)\sin((n+m)\theta)]\big)d\theta\Big]\Big|dt \le C.\end{aligned}$$

注意，最后一个不等式对每个 n， $m\in\mathbb{N}$ 都成立。

假设 $1<m-n<n$。我们将 $R_t(n,\ m)$ 分解如下

$$\begin{aligned}R_t(n,m) &= t\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-n}} e^{-t(1-\cos\theta)}\sin((n-m)\theta)\sin\theta\,d\theta\\ &\quad + t\int_{\frac{1}{m-n}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t(1-\cos\theta)}\sin((n-m)\theta)\sin\theta\,d\theta\\ &= R_t^1(n,m)+R_t^2(n,m),\quad t>0.\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\partial_t R_t^1(n,m)|dt &\le C\int_0^\infty\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-n}} e^{-ct\theta^2}(1+t\theta^2)(m-n)\theta^2 d\theta dt\\ &\le C(m-n)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m-n}} d\theta \le C.\end{aligned}$$

另一方面，按照（11）的证明进行推导，可以看出

$$\int_0^\infty |\partial_t R_t^2(n,m)|dt \le C.$$

由此得出

$$\int_0^\infty |\partial_t R_t(n,m)|dt \le C.$$

综合以上所有估计，我们证明

$$\|tH_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_\rho \le \frac{C}{\sqrt{nm}},\quad n,m\in\mathbb{N},\ m>n.$$

此外，同样的论证还可以得出

$$\|tH_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_\rho \leq \frac{C}{\sqrt{nm}}, \quad n,m \in \mathbb{N},\ n>m.$$

因此，我们已经证明

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_\rho \leq \frac{C}{|n-m|}, \quad n,m \in \mathbb{N},\ m \neq n.$$

现在令 $m \in \mathbb{N}$. 根据 [3, 引理 5.1], , 我们有

$$K_t^{(\alpha,\beta)}(0,m) = w_0^{(\alpha,\beta)} w_m^{(\alpha,\beta)} \frac{t}{2m} \mathcal{H}_t^{(\alpha,\beta)}(m), \quad t>0,$$

其中

$$\mathcal{H}_t^{(\alpha,\beta)}(m) = \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)} P_{m-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \quad t>0.$$

利用 (5)，得到

$$|\partial_t[t\mathcal{H}_t^{(\alpha,\beta)}(m)]| \leq \frac{C}{\sqrt{m}} \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)}((1-x)t+1)(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}dx, \quad t>0.$$

于是，由于 $w_k^{(\alpha,\beta)} \sim \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$，我们得到

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(0,m)\|_\rho \leq \int_0^\infty |\partial_t[t\mathcal{H}_t^{(\alpha,\beta)}(m)]|dt \leq \frac{C}{m}.$$

同理，我们得到

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(m,0)\|_\rho \leq \frac{C}{m}.$$

因此，(2) 的证明完成。

仿照 [3, pp. 13-14], 中的推导可知，为了证明 (3)，只需证明

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(n+1,m) - K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_\rho \leq \frac{C}{|n-m|^2}, \tag{12}$$

对每个 $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, $m/2 \leq n \leq 3m/2$。

设 $n,m \in \mathbb{N}_0$, $n \neq m$, $m/2 \leq n \leq 3m/2$。那么，当$n=1$时， $n \neq 0 \neq m$ 且 $m=2$ 。再假设 $(n,m) \neq (1,2)$。

利用 (4) 以及 [3, pp. 18-19]中的论证可知，只要证明以下结论，(12) 即成立：

$$\int_0^\infty |\partial_t D_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)|dt \leq \frac{C}{\sqrt{nm}\,|n-m|^2}, \tag{13}$$

其中

$$D_t^{(\alpha,\beta)}(n,m) = \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)} P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}dx, \quad t>0.$$

根据 [3, 引理 5.1 (a)], , 我们得到

$$D_t^{(\alpha,\beta)}(n,m) = \frac{(n+\alpha+\beta+2)(m+\alpha+\beta+1)}{2(n(n+\alpha+\beta+2)-m(m+\alpha+\beta+1))} \cdot$$

$$\left(\frac{t}{m+\alpha+\beta+1} I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha,\beta,\alpha+2,\beta+1)}(n-1,m) - \frac{t}{n+\alpha+\beta+2} I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+1)}(n,m-1) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n+\alpha+\beta+2} I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1)}(n,m-1) \right), \quad t>0,$$

其中，如 [3],

$$I_t^{(a,b,A,B,c,d)}(k,l)=\int_{-1}^{1}e^{-t(1-x)}P_k^{(a,b)}(x)P_l^{(A,B)}(x)(1-x)^c(1+x)^d dx,\quad k,l\in\mathbb{N}\text{ and }t>0.$$

我们有

$$n(n+\alpha+\beta+2)-m(m+\alpha+\beta+1)=(n-m)(n+m+\alpha+\beta+1)+n.$$

于是,

$$\begin{aligned}|n(n+\alpha+\beta+2)-m(m+\alpha+\beta+1)|&=\begin{cases}(n-m)(n+m+\alpha+\beta+1)+n, & n>m\\ (m-n)(n+m+\alpha+\beta+1)-n, & n<m\end{cases}\\ &\geq\begin{cases}(n-m)(n+m+\alpha+\beta+1)+n, & n>m\\ (m-n)(m+\alpha+\beta+1), & n<m\end{cases}\end{aligned}$$

由此可知，对于 $k=n,\ m$,

$$\frac{k+\alpha+\beta+2}{|n(n+\alpha+\beta+2)-m(m+\alpha+\beta+1)|}\leq\frac{C}{|n-m|}.$$

于是,

$$\begin{aligned}D_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)&=r_{n,m}^1 tI_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha,\beta,\alpha+2,\beta+1)}(n-1,m)\\ &-r_{n,m}^2 tI_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+1)}(n,m-1)+r_{n,m}^3 I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1)}(n,m-1),\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $t>0$和$|r_{n,\ m}^j|\leq\frac{C}{|n-m|}$, ~~$j=$~~1, 2, 3。

我们有以下性质

(a) 假设 $n=m+k$, $k\in\mathbb{N}$。由此可得

$$\begin{aligned}(n+\alpha+\beta+3)(n-1)-m(m+\alpha+\beta+1)&=(k+\alpha+\beta+3)(m+k-1)\\ &+(m+\alpha+\beta+3)(m+k-1)-m(m+\alpha+\beta+1)\\ &\geq km,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}n(n+\alpha+\beta+2)-(m-1)(m+\alpha+\beta+2)&=(k+m)(k+m+\alpha+\beta+2)\\ &-(m-1)(m+\alpha+\beta+2)\geq km,\end{aligned}$$

(b) 假设 $m=n+k$, $k\in\mathbb{N}$。我们得到

$$\begin{aligned}(n+\alpha+\beta+3)(n-1)-m(m+\alpha+\beta+1)&=(n+\alpha+\beta+3)(n-1)\\ &-(n+k)(n+k+\alpha+\beta+1)\\ &=n-(\alpha+\beta+3)-k(2n+k+\alpha+\beta+1)\\ &\leq -kn,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}n(n+\alpha+\beta+2)-(m-1)(m+\alpha+\beta+2)&=n(n+\alpha+\beta+2)\\ &-(n+k-1)(n+k+\alpha+\beta+2)\\ &=-nk-(k-1)(n+k+\alpha+\beta+2)\leq -kn.\end{aligned}$$

再次利用 [3, 引理 5.1 (a)], , 由于 $n\sim m$, (a) y (b) 得出

$$|\partial_t D_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)|\leq\frac{C}{|n-m|^2}\Big(t^2[|I_t^{(\alpha+3,\beta+2,\alpha,\beta,\alpha+4,\beta+2)}(n-2,m)|$$

$$+|I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+4,\beta+2)}(n-1,m-1)|+|I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+2,\beta+2,\alpha+4,\beta+2)}(n,m-2)|]$$
$$t[|I_t^{(\alpha+3,\beta+2,\alpha,\beta,\alpha+3,\beta+2)}(n-2,m)|+|I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+3,\beta+2)}(n-1,m-1)|$$
$$+|I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+2,\beta+2,\alpha+3,\beta+2)}(n,m-2)|+|I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+4,\beta+1)}(n-1,m-1)|$$
$$+|I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+3,\beta+1)}(n-1,m-1)|]$$
$$+|I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+2)}(n-1,m-1)|+|I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+3,\beta+1)}(n-1,m-1)|$$
$$+|I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+2,\beta+2,\alpha+2,\beta+2)}(n,m-2)|+|I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+1)}(n-1,m-1)|\Big).$$

利用 (7) 和 (8)，并按照证明第一部分中的方法进行推导，我们可以看出

$$\int_0^\infty |\partial_t D_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)|dt \le \frac{C}{\sqrt{nm}|n-m|^2}.$$

另一方面，与式 (14) 中一样，我们得到

$$D_t^{(\alpha,\beta)}(1,2) = r_{1,2}^1 t I_t^{(\alpha+2,\beta+1,\alpha,\beta,\alpha+2,\beta+1)}(0,2)$$
$$- r_{1,2}^2 t I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+1)}(1,1) + r_{1,2}^3 I_t^{(\alpha+1,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1)}(1,1), \quad t>0,$$

其中 $|r_{1,\,2}^j| \le C$, $j=1$，2，3。然后，利用 [3, 引理 5.1 (a) 和 (b)] 并按上述方法进行推导，我们得到

$$\int_0^\infty |\partial_t D_t^{(\alpha,\beta)}(1,2)|dt \le C.$$

由此证明了式 (3)。

根据 [8, 定理 2.1], 我们得出，算子 $V_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 可从 $\ell^p(\mathbb{N}_0,\ w) \cap \ell^2(\mathbb{N}_0)$ 延拓至 $\ell^p(\mathbb{N}_0,\ w)$，成为一个有界算子

(i) 对任意 $1<p<\infty$，算子从 $\ell^p(\mathbb{N}_0,\ w)$ 映射到其自身；(ii) 对任意 $w \in A^1(\mathbb{N}_0)$，算子从 $\ell^1(\mathbb{N}_0,\ w)$ 映射到 $\ell^{1,\,\infty}(\mathbb{N},\ w)$。

□

2.2. **跳跃算子定理**(1.1) **的证明**。

根据 [21, 第 6712], 页，我们有

$$\lambda(\Lambda(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0},\lambda)(f))^{1/\rho} \le 2^{1+\frac{1}{\rho}} \mathcal{V}_\rho(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f), \quad \lambda>0.$$

因此，定理 (1.1) 中关于 λ-跳跃算子的性质，都是相应变差算子性质的推论。□

2.3. **振荡算子定理**(1.1) **的证明**。

沿用第 2.1 小节的记号，对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，我们有

$$\mathcal{O}(\{\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0},\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})(f)(n) = \frac{1}{p_n^{(\alpha,\beta)}(1)}(\mathcal{O}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0},\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})(p_\cdot^{(\alpha,\beta)}(1)f)(n),$$

根据 [23, 第 20] 页（另见 [19, 定理 3.3]），振荡算子 $O(\{\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0},\ \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})$ 是从 $\ell^2(\mathbb{N}_0,\ v^{(\alpha,\beta)})$ 到其自身的有界算子。于是，算子 $O(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0},\ \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})$ 是从 $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 到其自身的有界算子。

设 g 是定义在 $(0,\ \infty)$ 上的复值函数。我们定义

$$\|g\|_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t_{j+1}\le\epsilon_{j+1}<\epsilon_j\le t_j}|g(\epsilon_j)-g(\epsilon_{j+1})|^2\right)^{1/2}.$$

将每一对函数 g_1 和 g_2 视为相同，其中 g_1-g_2 为常数，$\|\cdot\|_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}$ 是空间中的一个范数 $F_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}$ 由所有定义在 g 上的复值函数 $(0,\infty)$ 组成，其中 $\|g\|_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}<\infty$.

因此，$(F_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}\ \|\cdot\|_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})})$ 是一个巴拿赫空间。
如果 g 是一个在 $(0,\infty)$ 上可微的复值函数，则有

$$\begin{aligned}\|g\|_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}&=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t_{j+1}\le\epsilon_{j+1}<\epsilon_j\le t_j}\left|\int_{\epsilon_{j+1}}^{\epsilon_j}g'(s)ds\right|^2\right)^{1/2}\\&\le\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t_{j+1}\le\epsilon_{j+1}<\epsilon_j\le t_j}\left(\int_{\epsilon_{j+1}}^{\epsilon_j}|g'(s)|\,ds\right)^2\right)^{1/2}\\&\le\int_0^{\infty}|g'(s)|\,ds.\end{aligned}$$

根据第 2.1 小节中得到的估计，我们可以推得

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)\|_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}\le\frac{C}{|n-m|},\quad n,m\in\mathbb{N}_0,\ n\ne m,$$

and

$$\|K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)-K_t^{(\alpha,\beta)}(l,m)\|_{\mathcal{O}(\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})}\le C\frac{|n-l|}{|n-m|^2},\quad |n-m|>2|n-l|,\ \frac{m}{2}\le n,l\le\frac{3m}{2}.$$

利用 [8, 定理 1.1], ，我们得出，振荡算子 $\mathcal{O}(\{\tilde{W}_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0},\ \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}})$ 可以从 $\ell^p(\mathbb{N}_0,w)\cap\ell^2(\mathbb{N}_0)$ 延拓为 $\ell^p(\mathbb{N}_0,w)$ 上的有界算子

(i) 从 $\ell^p(\mathbb{N}_0,\ w)$ 到其自身，对每个 $1<p<\infty$ 和 $w\in A^p(\mathbb{N}_0\ \ )$,
(ii) 从 $\ell^1(\mathbb{N}_0,\ w)$ 到 $\ell^{1,\ \infty}(\mathbb{N}_0,\ w)$，对每个 $w\in A^1(\mathbb{N}_0)$。

□

3. 定理 1.2 的证明

3.1. 算子 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},\ N}(\{W^{(\alpha,\ \beta)}t\}_{t>0})$。

本节将证明以下结果。

定理 *3.1.* 设 $\alpha,\beta\ge-1/2$。假设 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $(0,\infty)$ 中的一个 ρ-稀疏序列，且满足 $\rho>1$ ；$\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个实数有界序列。对于每个$N=(N_1,N_2)\in\mathbb{Z}^2,\ N_1<N_2$，算子 $S^{\{b_j\}}{}_{j\in\mathbb{Z}}\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N(\{W^{(\alpha,\beta)}{}_t\}_{t>0})$ 对每个 $1<p<\infty$ 和 $w\in A^p(\mathbb{N}_0)$，均从$\ell^p(\mathbb{N}_0,w)$到自身有界；并且对于每个 $w\in A^1(\mathbb{N}_0)$，它从 $\ell^1(\mathbb{N}_0,w)$ 到 $\ell^{1,\infty}(\mathbb{N}_0,w)$ 有界。此外，对于每个 $1<p<\infty$ 和$w\in A^p(\mathbb{N}_0)$,

$$\sup_{\substack{N=(N_1,N_2)\in\mathbb{Z}^2\\N_1<N_2}}\left\|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\right\|_{\ell^p(\mathbb{N}_0,w)\to\ell^p(\mathbb{N}_0,w)}<\infty,$$

并且，对于每个 $w \in A^1(\mathbb{N}_0)$，

$$\sup_{\substack{N=(N_1,N_2)\in\mathbb{Z}^2\\ N_1<N_2}} \left\| S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0}) \right\|_{\ell^1(\mathbb{N}_0,w)\to\ell^{1,\infty}(\mathbb{N}_0,w)} < \infty.$$

证明。设 $N=(N_1,N_2)\in\mathbb{Z}^2$ 满足 $N_1<N_2$。按照定理 2.1 的证明方法，并利用 (α,β)-傅里叶变换，我们可以看到

$$\left\| S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f) \right\|_{\ell^2(\mathbb{N}_0)} \le C\|f\|_{\ell^2(\mathbb{N}_0)}, \quad f\in\ell^2(\mathbb{N}_0),$$

其中 $C>0$ 不依赖于 N。
对于任意 $f\in\ell^2(\mathbb{N}_0)$，我们有

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} f(m)\mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(n,m), \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

其中

$$\mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(n,m) = \sum_{j=N_1}^{N_2} b_j(K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m)), \quad n,m\in\mathbb{N}_0.$$

根据 (4)，我们得到

$$|\mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(n,m)| \le \|b_j\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \int_0^\infty |\partial_t K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)|dt, \quad n,m\in\mathbb{N}_0.$$

在 (2) 的证明中，我们已证明

$$\int_0^\infty |\partial_t K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)|dt \le \frac{C}{|n-m|}, \quad n,m\in\mathbb{N}_0,\ n\neq m.$$

Then

$$|\mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(n,m)| \le \frac{C}{|n-m|}, \quad n,m\in\mathbb{N}_0,\ n\neq m, \tag{15}$$

其中 $C>0$ 不依赖于 N。
此外，仿照 (3) 的证明可知

$$|\mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(n,m) - \mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(l,m)| \le C\frac{|n-l|}{|n-m|^2}, \quad |n-m|>2|n-l|,\ \frac{m}{2}\le n,l\le\frac{3m}{2}, \tag{16}$$

其中 C 不依赖于 N。
利用 [8, 定理 2.1] 即可完成证明。 □

对于满足 $N_1<N_2$ 的每个 $N=(N_1,N_2)\in\mathbb{Z}^2$，我们定义

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) = S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{n}{2}\le m\le\frac{3n}{2}})(n), \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

and

$$\begin{aligned} S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f) &= S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f) \\ &\quad - S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f). \end{aligned}$$

推论 3.1. 定理 *3.1* 中的性质对 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 以及 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 成立。

证明。 设 $N \in \mathbb{Z}$。根据 (15)，我们有

$$|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n)| \le C\left(\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|f(m)| + \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|f(m)|}{m}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

其中 $C > 0$ 不依赖于 N。当 $n = 0$ 时，右侧的第一项不出现。利用离散 Hardy 算子的 ℓ^p-有界性，可以推出相应性质适用于 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\ \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$。利用定理 3.1 即可完成证明。 □

3.2. **一些辅助结果**。 为了证明关于 $T_*^{(\alpha,\beta)}$ 的 Cotlar 不等式，我们需要以下结果。

命题 3.1. 设 $\alpha, \beta \ge -1/2$。那么，

$$\sup_{t>0}|\partial_t K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)| \le \frac{C}{|n-m|^3}, \quad n,m \in \mathbb{N}_0, \quad n \ne m.$$

证明。 我们将多次使用 [3, 引理 5.1] 。设 $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \ge 3$, $n \ne m$。根据 [3, 引理 5.1 (a)]，我们得到

(i)

$$I_t^{(\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta)}(n,m) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)(m+\alpha+\beta+1)}{2(n-m)(n+m+\alpha+\beta+1)}\, t\Bigg(\frac{1}{m+\alpha+\beta+1}\cdot I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha,\beta,\alpha+1,\beta+1)}(n-1,m) - \frac{1}{n+\alpha+\beta+1}I_t^{(\alpha,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1)}(n,m-1)\Bigg).$$

(ii)

$$\begin{aligned} I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha,\beta,\alpha+1,\beta+1)}(n-1,m) = {} & \frac{(n+\alpha+\beta+2)(m+\alpha+\beta+1)}{2((n-m)(n+m+\alpha+\beta+1)-(\alpha+\beta+2))} \\ & \Bigg(\frac{t}{m+\alpha+\beta+1}I_t^{(\alpha+2,\beta+2,\alpha,\beta,\alpha+2,\beta+2)}(n-2,m) \\ & - \frac{t}{n+\alpha+\beta+2}I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+2)}(n-1,m-1) \\ & + \frac{1}{n+\alpha+\beta+2}I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+2)}(n-1,m-1) \\ & - \frac{1}{n+\alpha+\beta+2}I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+1)}(n-1,m-1)\Bigg). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} I_t^{(\alpha,\beta,\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1)}(n,m-1) = {} & \frac{(n+\alpha+\beta+1)(m+\alpha+\beta+2)}{2((n-m)(n+m+\alpha+\beta+1)+(\alpha+\beta+2))} \\ & \Bigg(\frac{t}{m+\alpha+\beta+2}I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+2)}(n-1,m-1) \\ & - \frac{1}{m+\alpha+\beta+2}I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+2)}(n-1,m-1) \\ & + \frac{1}{m+\alpha+\beta+2}I_t^{(\alpha+1,\beta+1,\alpha+1,\beta+1,\alpha+2,\beta+1)}(n-1,m-1) \\ & - \frac{t}{n+\alpha+\beta+1}I_t^{(\alpha,\beta,\alpha+2,\beta+2,\alpha+2,\beta+2)}(n,m-2)\Bigg). \end{aligned}$$

我们再次将 [3, 引理 5.1 (a)] 应用于 (ii) 和 (iii) 右侧的四项，得到

$$\begin{aligned} I_t^{(\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta)}(n,m) &= t^3 \sum_{j\in J_1} c_{j1}(n,m) I_t^{(a_{j1},b_{j1},A_{j1},B_{j1},\eta_{j1},\gamma_{j1})}(l_{j1},k_{j1}) \\ &\quad + t^2 \sum_{j\in J_2} c_{j2}(n,m) I_t^{(a_{j2},b_{j2},A_{j2},B_{j2},\eta_{j2},\gamma_{j2})}(l_{j2},k_{j2}) \\ &\quad + t \sum_{j\in J_3} c_{j3}(n,m) I_t^{(a_{j3},b_{j3},A_{j3},B_{j3},\eta_{j3},\gamma_{j3})}(l_{j3},k_{j3}), \quad t>0. \end{aligned}$$

这里，$J_1 = J_3 = \{n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le 8\}$ 和 $J_2 = \{n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le 20\}$，为

- $|c_{ji}(n,m)| \le \frac{C}{|n-m|^3}$, $j \in J_i$, $i = 1,2,3$.
- $(l_{ji}, k_{ji}) \in \{(l,k) : l,k \in \mathbb{N}_0,\ n-3 \le l \le n,\ m-3 \le k \le m\}$, $j \in J_i$, $i = 1,2,3$.
- $\eta_{j1} = \alpha + 3$, $\gamma_{j1} = \beta + 3$, $j \in J_1$.
- $\eta_{j3} = \alpha + 2$, $\gamma_{j3} = \beta + 2$, $j \in J_3$.
- $(\eta_{j2}, \gamma_{j2}) \in \{(\alpha+2, \beta+3), (\alpha+3, \beta+2)\}$, $j \in J_2$.
- $a_{ji} + A_{ji} = 2\alpha + 3$, $b_{ji} + B_{ji} = 2\beta + 3$, $j \in J_i$, $i = 1,2,3$.

根据 (5)，我们得到

$$\begin{aligned} |\partial_t I_t^{(\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta)}(n,m)| &\le \frac{C}{|n-m|^3}\Bigg(t^2 \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)}(1-x)(1+x)dx \\ &\quad + t\int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)}(1+x)dx + t\int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)}(1-x)dx + \int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)}dx \Bigg) \\ &\le \frac{C}{|n-m|^3}\Bigg(\int_0^{2t} e^{-u} u\, du + \int_0^{2t} e^{-u} du + \frac{1}{t}\int_0^{2t} e^{-u} u\, du + \frac{1}{t}\int_0^{2t} e^{-u}\, du \Bigg) \\ &\le \frac{C}{|n-m|^3}, \quad t>0. \end{aligned}$$

当 n, $m \in \mathbb{N}_0$、$n < 3$ 或 $m < 3$ 时，我们可以类似地利用 [3, 引理 5.1 (a)、(b) 和 (c)] 进行推导。

□

我们称正序列在 $\lambda > 1$ 下是 (λ, λ^2)-稀疏的，当 $\lambda \le \frac{a_{j+1}}{a_j} \le \lambda^2$、$j \in \mathbb{Z}$ 时。——

命题 3.2。 设 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个 (λ, λ^2)-稀疏序列，且 $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个有界复数序列。那么，

(i) $\left| \sum_{j=k}^{M} v_j (K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m)) \right| \le \frac{C}{\sqrt{a_k}}, \quad k, M \in \mathbb{Z},\ k < M \ \ n,m \in \mathbb{N}_0,$

(ii) $\left| \sum_{j=-M}^{l-1} v_j (K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m)) \right| \le \frac{C}{\sqrt{a_k}} \lambda^{-(k-l+1)},$ *when* $k, M, l \in \mathbb{Z}$, $k > l > -M$, $C > 0$ *and* $n, m \in \mathbb{N}_0$, $|n-m| \ge C\sqrt{a_k}$.

证明。 *(i)* 令 $j \in \mathbb{Z}$。利用中值定理，我们得到

$$K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m) = (a_{j+1} - a_j)\partial_t K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)|_{t=c_j},$$

对某个 $c_j \in (a_j, a_{j+1})$。根据 (1)，由于 $w_k^{(\alpha,\beta)} \sim \sqrt{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$，我们得到

$$\begin{aligned}|\partial_t K_t^{(\alpha,\beta)}(n,m)| &\le C\int_{-1}^{1} e^{-t(1-x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \\ &\le C\left(e^{-t} + \int_0^1 e^{-tz}\sqrt{z}dz\right) \le C(e^{-t}+t^{-3/2}) \le \frac{C}{t^{3/2}}, \quad n,m \in \mathbb{N}_0 \text{ and } t>0.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}|K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m)| &\le C\frac{|a_{j+1}-a_j|}{a_j^{3/2}} \\ &\le C\frac{\lambda^2-1}{\sqrt{a_j}}, \quad n,m \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

由此可知，对于每个 k, $M \in \mathbb{Z}$, $k < M$, n, $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=k}^{M} v_j(K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m))\right| &\le C\sum_{j=k}^{M}\frac{1}{\sqrt{a_k}} \le \frac{C}{\sqrt{a_k}}\sum_{j=k}^{M}\sqrt{\frac{a_k}{a_j}} \\ &\le \frac{C}{\sqrt{a_k}}.\end{aligned}$$

(*ii*) 令 $j \in \mathbb{Z}$。利用命题 3.1，再次应用中值定理，我们得到

$$|K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m)| \le C\frac{|a_{j+1}-a_j|}{|n-m|^3} \le C\frac{a_j}{|n-m|^3}, \quad n,m \in \mathbb{N}_0.$$

于是,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=-M}^{l-1} v_j(K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m) - K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m))\right| &\le C\sum_{j=-M}^{l-1}\frac{a_j}{|n-m|^3} \le C\sum_{j=-M}^{l-1}\frac{a_j}{a_k^{3/2}} \\ &\le \frac{C}{\sqrt{a_k}}\lambda^{-(k-l+1)},\end{aligned}$$

只要 k, M, $l \in \mathbb{Z}$, $k \ge l > -M$, n, $m \in \mathbb{N}_0$, $|n-m| > C\sqrt{a_k}$，其中 $C > 0$。 □

用 M 表示中心化 Hardy-Littlewood 极大函数，其定义为 b y

$$\mathcal{M}(f)(n) = \sup_{r>0}\frac{1}{\mu_d(B_{\mathbb{N}_0}(n,r))}\sum_{m\in B_{\mathbb{N}_0}(n,r)}|f(m)|, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

这里，$B_{\mathbb{N}_0}(n,r) = \{m \in \mathbb{N}_0 : |m-n| < r\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ 以及 $r > 0$。对于每个 $1 < q < \infty$，我们考虑 $\mathcal{M}_q$，其定义为

$$\mathcal{M}_q(f) = (\mathcal{M}(|f|^q))^{1/q}.$$

现在我们证明局部极大算子的 Cotlar 型不等式

$$\begin{aligned}&S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) \\ &\quad= \sup_{\substack{N=(N_1,N_2)\\ N_1,N_2\in\mathbb{Z},\,-M\le N_1<N_2\le M}} |S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{n}{2}\le m\le\frac{3n}{2}})(n)|\end{aligned}$$

对每个 $M \in \mathbb{N}$。

命题 3.3。 假设 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个(λ,λ^2)-稀疏序列，$\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个有界复数序列，且 $1<q<\infty$。那么，存在 $C>0$，使得对每个 $M\in\mathbb{N}$,

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n)\leq C\Bigg(\mathcal{M}(S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M),loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f))+\mathcal{M}_q(f)\Bigg).$$

证明。为了证明这一性质，我们可以调整 [36, 定理 3.11] 的证明，使其适用于我们的情形。所需性质已在命题 3.2、(15)、(16) 和定理 3.1 中得到证明。下面简述证明。设 $M\in\mathbb{N}$。对于每个满足 $-M<N_1<N_2<M$ 的 $N=(N_1,N_2)$，我们可以写成

$$\begin{aligned}&S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n)\\&\quad=S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(N_1,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n)\\&\qquad-S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(N_2+1,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n),\quad n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

我们将证明存在 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}&|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(l,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n)|\\&\leq C\Big(\mathcal{M}(S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f))(n)+\mathcal{M}_q(f)(n)\Big),\end{aligned}$$

对每个 $l\in\mathbb{Z}$、$-M<l<M$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。这里，C 不依赖于 $n\in\mathbb{N}_0$、$M\in\mathbb{N}$、$l\in\mathbb{Z}$ 和 $-M<l<M$。

假设 $n\in\mathbb{N}_0$ 且 $l\in\mathbb{Z}$, $-M<l<M$。我们将 f 分解如下

$$f=f\chi_{B_{\mathbb{N}_0}(n,\sqrt{a_l})}+f\chi_{B_{\mathbb{N}_0}(n,\sqrt{a_l})^c}=:f_1+f_2.$$

我们有

$$\begin{aligned}&|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(l,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n)|\\&\leq|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(l,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f_1\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n)|\\&\quad+|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(l,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f_2\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n)|=:A(l,M,n)+B(l,M,n).\end{aligned}$$

根据命题 3.2 (i)，我们得到

$$A(l,M,n)\leq\frac{C}{\sqrt{a_l}}\sum_{k\in B_l}|f_1(k)|\leq C\mathcal{M}(f)(n).$$

另一方面，我们可以写成

$$\begin{aligned}B(l,M,n)\leq\frac{C}{\sqrt{a_{l-1}}}\sum_{|k-n|\leq\frac{1}{2}\sqrt{a_{l-1}}}\Bigg(&|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{\frac{k}{2}\leq m\leq\frac{3k}{2}})(k)|\\&+|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f_1\chi_{\frac{k}{2}\leq m\leq\frac{3k}{2}})(k)|\\&+|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(l,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f_2\chi_{\frac{k}{2}\leq m\leq\frac{3k}{2}})(k)\\&\quad-S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(l,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f_2\chi_{\frac{n}{2}\leq m\leq\frac{3n}{2}})(n)|\end{aligned}$$

$$+ |S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,l-1)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f_2\chi_{\frac{k}{2}\le m\le\frac{3k}{2}})(k)|\Big)$$

$$=: \sum_{i=1}^{4} B_i(l,M,n),$$

当 $l=-M$ 时，对这四个求和作显然的理解。

现在我们估计 $B_i(l,M,n)$，$i=1,2,3,4$。

(i) 显然，

$$B_1(l,M,n) \le C\mathcal{M}(S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M),loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f))(n).$$

(ii) 由于算子族 $\{S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W^{(\alpha,\beta)}_t\}_{t>0})\}_{N=(N_1,N_2)\atop N_1<N_2\in\mathbb{Z}^2}$ 从 $L^q(\mathbb{N}_0)$ 到其自身一致有界，因此，$\{S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\}_{N=(N_1,N_2)\atop N_1\le N_2\in\mathbb{Z}^2}$ 从 $L^q(\mathbb{N}_0)$ 到其自身也一致有界。然后，利用霍尔德不等式，并考虑到这是一个 (λ,λ^2)-稀疏序列，我们得到

$$B_2(l,M,n) \le C\mathcal{M}_q(f)(n).$$

(iii) 利用 (15) 和 (16)，按照证明 [8,(18)] 的方法，可以证明

$$B_3(l,M,n) \le C\mathcal{M}(f)(n).$$

(iv) 由命题 3.2 (ii)，我们推得

$$B_4(l,M,n) \le C\mathcal{M}(f)(n).$$

结合 (i)-(iv)，可得

$$B(l,M,n) \le C\Big(\mathcal{M}(S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M),loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f))(n) + \mathcal{M}_q(f)(n)\Big).$$

因此，我们得出

$$|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(l,M),loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n)|$$
$$\le C\Big(\mathcal{M}(S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M),loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f))(n) + \mathcal{M}_q(f)(n)\Big).$$

□

3.3. 定理 1.2 的证明。令 $M\in\mathbb{N}$。对于每个 $n\in\mathbb{N}_0$，我们可以写成

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) \le S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n)$$
$$+ S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n),$$

其中

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) = \sup_{\substack{N=(N_1,N_2)\\ N_1,N_2\in\mathbb{Z},\\ -M\le N_1<N_2\le M}} |S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f\chi_{[\frac{n}{2},\frac{3n}{2}]})(n)|,$$

and

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n) = \sup_{\substack{N=(N_1,N_2)\\ N_1,N_2\in\mathbb{Z},\\ -M\le N_1<N_2\le M}} |S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f(1-\chi_{[\frac{n}{2},\frac{3n}{2}]}))(n)|.$$

根据（15），存在 $C>0$ 使得

$$|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n)| \leq C \sum_{m\notin[n/2,3n/2]} \frac{|f(m)|}{|n-m|}$$
$$\leq C\left(\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|f(m)| + \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|f(m)|}{m}\right), \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

这里，当 $n=0$ 时，最后一个求和中的第一项不出现。这里， C 不依赖于 M。利用离散 Hardy 算子的 ℓ^p-有界性，我们推得算子 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到其自身有界，对每个 $1<p<\infty$ 均成立。此外，我们有

$$\sup_{M\in\mathbb{N}} \|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*,M,glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\|_{\ell^p(\mathbb{N}_0)\to\ell^p(\mathbb{N}_0)} < \infty,$$

对每个 $1<p<\infty$ 均成立。

设 $1<p<\infty$。我们取 $1<q<p$。$\mathbf{M}_q$ 定义了一个从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到其自身的有界算子。

根据定理 3.1，算子 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 从$\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到其自身有界。此外，我们有

$$\sup_{M\in\mathbb{N}} \|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M)}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\|_{\ell^p(\mathbb{N}_0)\to\ell^p(\mathbb{N}_0)} < \infty.$$

如上所述，利用 (15) 以及离散 Hardy 算子的 ℓ^p-有界性，可推出算子 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M)\ glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到自身的有界算子，并且

$$\sup_{M\in\mathbb{N}} \|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M),glob}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\|_{\ell^p(\mathbb{N}_0)\to\ell^p(\mathbb{N}_0)} < \infty.$$

那么， $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M)\ loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到自身的有界算子，并且

$$\sup_{M\in\mathbb{N}} \|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},(-M,M),loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\|_{\ell^p(\mathbb{N}_0)\to\ell^p(\mathbb{N}_0)} < \infty.$$

根据命题 3.3， $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},M,*,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到自身的有界算子，并且

$$\sup_{M\in\mathbb{N}} \|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},M,*,loc}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\|_{\ell^p(\mathbb{N}_0)\to\ell^p(\mathbb{N}_0)} < \infty.$$

由此可得， $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},M,*}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到自身的有界算子，并且

$$\sup_{M\in\mathbb{N}} \|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},M,*}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})\|_{\ell^p(\mathbb{N}_0)\to\ell^p(\mathbb{N}_0)} < \infty.$$

取 $M\to+\infty$，可知算子 $S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},M,*}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ 到其自身的有界算子。

现在我们应用奇异积分的向量值 Calderón-Zygmund 理论（参见[31]和 [32]）。

我们可以写成

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f) = \left\|S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)\right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})}.$$

对于每个 $N=(N_1,N_2)$，其中 $N_1,N_2\in\mathbb{Z}$ 和 $N_1<N_2$ 以及 $f\in\ell^\infty_c(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$，我们有

$$S^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}_{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},N}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})(f)(n)=\sum_{m\in\mathbb{N}_0}\mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(n,m)f(m),\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

其中

$$\mathcal{Q}_N^{(\alpha,\beta)}(n,m)=\sum_{j=N_1}^{N_2}b_j\left(K_{a_{j+1}}^{(\alpha,\beta)}(n,m)-K_{a_j}^{(\alpha,\beta)}(n,m)\right),\quad n,m\in\mathbb{N}_0.$$

根据 (15) 和 (16)，利用 [8, 定理 2.1]，我们可以证明，对于每个 $1<p<\infty$ 和 $w\in A_p(\mathbb{N}_0)$，算子 $\mathcal{S}^{\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}},*}(\{W_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t>0})$ 是从 $\ell^p(\mathbb{N}_0,w)$ 到其自身的有界算子；对于每个 $w\in A_1(\mathbb{N}_0)$，它也是从 $\ell^1(\mathbb{N}_0,w)$ 到 $\ell^{1,\infty}(\mathbb{N}_0,w)$ 的有界算子。□

声明

作者的研究部分得到了西班牙政府资助项目 PID2019-106093GB-I00 的支持。第二作者还获得了西班牙经济与竞争力部通过胡安·德·拉·谢尔瓦研究员奖学金 FJC2020-044159-I 提供的资助。

参考文献

[1] *A. Arenas*、*O. Ciaurri* 和 *E. Labarga*，《与雅可比展开相关的离散调和分析 *III*：*Littlewood-Paley-Stein* g_k函数与拉普拉斯型乘子》，*arXiv:1906.07999*。[2] ，《雅可比系数的加权转移定理》，*Journal of Approximation Theory*，*248*（*2019*），第 *105297* 页，*16* 页。[3] ，《与雅可比展开相关的离散调和分析 *I*：热半群》，*Journal of Mathematical Analysis and Applications*，*490*（*2020*），第 *123996* 页，*21* 页。[4] ，《与雅可比展开相关的离散调和分析 *II*：黎斯变换》，*Potential Analysis*，*57*（*2022*），第 *501–520* 页。[5] *R. Askey*，《雅可比系数的转移定理》，*Pacific Journal of Mathematics*，*21*（*1967*），第 *393–404* 页。[6] *R. Askey* 和 *G. Gasper*，《雅可比多项式乘积的线性化 *III*》，*Canadian Journal of Mathematics*，*23*（*1971*），第 *332–338* 页。[7] *A. L. Bernardis*、*M. Lorente*、*F. J. Martín-Reyes*、*M. T. Martínez*、*A. de la Torre* 和 *J. L. Torrea*，《加权空间中的微分变换》，*Journal of Fourier Analysis and Applications*，*12*（*2006*），第 *83–103* 页。[8] *J. J. Betancor*、*A. J. Castro*、*J. C. Fariña* 和 *L. Rodríguez-Mesa*，《与超球多项式展开相关的离散调和分析》，*Potential Analysis*，*53*（*2020*），第 *523–563* 页。[9] *J. J. Betancor*、*R. Crescimbeni* 和 *J. L. Torrea*，《拉盖尔热半群、泊松半群及黎斯变换的振荡与变差》，*Acta Mathematica Scientia, Series B*（英文版），*32*（*2012*），第 *907–928* 页。[10] *J. Bourgain*，《算术集的逐点遍历定理》，*Institut des Hautes Études Scientifiques Publications Mathématiques*，（*1989*），第 *5–45* 页。附录由作者、*Harry Furstenberg*、*Yitzhak Katznelson* 和 *Donald S. Ornstein* 撰写。[11] *J. T. Campbell*、*R. L. Jones*、*K. Reinhold* 和 *M. Wierdl*，《希尔伯特变换的振荡与变差》，*Duke Mathematical Journal*，*105*（*2000*），第 *59–83* 页。[12] ，《高维奇异积分的振荡与变差》，*Transactions of the American Mathematical Society*，*355*（*2003*），第 *2115–2137* 页。[13] *O. Ciaurri*、*T. A. Gillespie*、*L. Roncal*、*J. L. Torrea* 和 *J. L. Varona*，《与离散拉普拉斯算子相关的调和分析》，*Journal d'Analyse Mathématique*，*132*（*2017*），第 *109–131* 页。[14] *G. Gasper*，《雅可比多项式乘积的线性化 *I*》，*Canadian Journal of Mathematics*，*22*（*1970*），第 *171–175* 页。[15] ，《雅可比多项式乘积的线性化 *II*》，*Canadian Journal of Mathematics*，*22*（*1970*），第 *582–593* 页。

[16] *E. Harboure*、*R. A. Macías*、*M. T. Menárguez* 和 *J. L. Torrea*，《高斯黎斯变换与泊松积分的振荡与变差》，爱丁堡皇家学会学报 *A* 辑，*135*（*2005*），第 *85–104* 页。[17] *I. I. Hirschman, Jr.*，《变差递减变换与超球多项式》，《数学分析杂志》，*8*（*1960/61*），第 *337–360* 页。[18] *R. L. Jones*、*R. Kaufman*、*J. M. Rosenblatt* 和 *M. Wierdl*，《遍历理论中的振荡》，《遍历理论与动力系统》，*18*（*1998*），第 *889–935* 页。[19] *R. L. Jones* 和 *K. Reinhold*，《卷积幂的振荡与变差不等式》，《遍历理论与动力系统》，*21*（*2001*），第 *1809–1829* 页。[20] *R. L. Jones* 和 *J. Rosenblatt*，《微分变换与遍历变换》，《数学年刊》，*323*（*2002*），第 *525–546* 页。[21] *R. L. Jones*、*A. Seeger* 和 *J. Wright*，《调和分析中的强变差与跳跃不等式》，*Transactions of the American Mathematical Society*，*360*（*2008*），第 *6711–6742* 页。[22] *R. L. Jones* 和 *G. Wang*，《*Fejér* 核与泊松核的变差不等式》，*Transactions of the American Mathematical Society*，*356*（*2004*），第 *4493–4518* 页。[23] *C. Le Merdy* 和 *Q. Xu*，《解析半群的强 q变差不等式》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），*62*（*2012*），第 *2069–2097* 页（*2013*）。[24] *N. N. Lebedev*，《特殊函数及其应用》，*Dover Publications, Inc.*，纽约，*1972*。[25] *M. Mirek*、*W. Slomian* 和 *T. Z. Szarek*，《关于振荡不等式的一些评论》，*arXiv:2110.01149*。[26] *M. Mirek*、*E. M. Stein* 和 *B. Trojan*，ℓ^p《拉东型离散算子的（$\mathbb{Z}^d$）估计：变差估计》，《数学创刊》，*209*（*2017*），第 *665–748* 页。[27] *M. Mirek*、*E. M. Stein* 和 *P. Zorin-Kranich*，《通过实插值获得跳跃不等式》，《数学年刊》，*376*（*2020*），第 *797–819* 页。[28]*G. Pisier* 和 *Q. H. Xu*，《鞅与正交级数的强 p变差》，《概率论及相关领域》，*77*（*1988*），第 *497–514* 页。[29] *J. Qian*，《部分和过程的 p变差与经验过程》，《概率年刊》，*26*（*1998*），第 *1370–1383* 页。[30] *X. Ren* 和 *C. Zhang*，《离散拉普拉斯算子生成的热半群的偏差分变换有界性》，《半群论坛》，*103*（*2021*），第 *622–640* 页。[31] *J. L. Rubio de Francia*、*F. J. Ruiz* 和 *J. L. Torrea*，《算子值核的 *Calderón-Zygmund* 理论》，《数学进展》，*62*（*1986*），第 *7–48* 页。[32] *F. J. Ruiz* 和 *J. L. Torrea*，《齐性空间上的向量值 *Calderón-Zygmund* 理论与 *Carleson* 测度》，《数学研究》，*88*（*1988*），第 *221–243* 页。[33] *N. B. Salem*，《与雅可比展开相关的时空分数阶扩散方程》，*Applicable Analysis*，*0*（*2021*），第 *1–17* 页。[34] *E. M. Stein*，《与利特尔伍德–佩利理论相关的调和分析专题》，《数学年刊研究丛书》第 *63* 号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，*1970*。[35] *G. Szegő*，《正交多项式》，《美国数学会讨论会出版物》第 *XXIII* 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第四版，*1975*。[36] *J. L. Torrea* 和 *C. Zhang*，《薛定谔算子生成的热半群的微分变换有界性》，*Canadian Journal of Mathematics*，*73*（*2021*），第 *622–655* 页。

Jorge J. Betancor 数学分析系，拉拉古纳大学，安奇埃塔校区，阿斯特罗菲西科·桑切斯大道，无门牌号，38721 拉拉古纳（圣克鲁斯-德特内里费），西班牙电子邮箱：jbetanco@ull.es

Marta De León-Contreras 数学分析系，拉拉古纳大学，安奇埃塔校区，阿斯特罗菲西科·桑切斯大道，无门牌号，38721 拉拉古纳（圣克鲁斯-德特内里费），西班牙电子邮箱：mleoncon@ull.edu.es