arXiv:2302.01717v1 [math.NT] 3 Feb 2023

实二次函数域中的素数分母丢番图逼近

STEPHAN BAIER 和 ESRAFIL ALI MO LLA

Abstract. 上世纪三十年代，I. M. Vinogradov 证明，不等式 $||p\alpha|| \leq p^{-1/5+\varepsilon}$ 有无穷多个素数解 p，其中 $||.||$ 表示到最近整数的距离。此后，许多作者改进了这一结果。特别是，Vaughan（1978）利用他为冯·曼戈尔特函数建立的著名恒等式以及对傅里叶分析论证的改进，将指数 $1/5$ 替换为 $1/4$ 。目前最好的结果归功于 Matom¨aki（2009），他证明了不等式 $||p\alpha|| \leq p^{-1/3+\varepsilon}$有无穷多个素数解。指数 $1/3$ 被认为是当前技术所能达到的极限。最近，在 [3], 中，作者们为函数域 $k = \mathbb{F}_q(T)$的虚二次扩张建立了 Matom¨aki 结果的类似结论。本文研究类数为 1 的 k 的实二次扩张，并证明了 Vaughan 上述结果（指数 $\theta = 1/4$）在函数域中的类似结论。我们的方法使用了 Vaughan 恒等式的若干变式以及函数域上的狄利克雷逼近定理。后者由 Arijit Ganguly 在我们此前关于虚二次情形的论文 [3] 附录中建立。我们还简化了 D. Mazumder 与第一作者关于实二次数域中同一问题的论文 [1] 中的论证。

Contents

1. 引言 1 2. 符号与预备知识 2 3. 问题的设定 4 3.1. 实二次函数域 4 3.2. 狄利克雷逼近与主要结果 5 3.3. 基本方法 6 4. 泊松求和的应用 6 5. Vaughan恒等式 10 6. I 型和的变换 13 7. 计数过程 19 7.1. 格点计数 20 7.2. 估计 $T_I(i)$ 21 7.3. 排除较小的 i 21 7.4. 估计 T_I 228. II 型和的变换 22 9. II 型和的估计 24 10. 定理 4 的证明 25 11. 定理 3 的证明 26 12. 实二次数域处理方法的简化 26 参考文献 27

1. Introduction

在本文中，设 ε 为任意但固定的正实数。

Date: 2023年2月6日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：11J71，11R44；次分类：11L20，11N05，11N13。*Key words and phrases.* 模一分布、函数域、素理想分布、Vaughan 恒等式、丢番图逼近。

一个基本的 丢番图逼近中的结果是狄利克雷提出的以下定理 .

定理 1. 任给实数无理数 α，存在无穷多个数对 $(a,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$，其中 a 和 q 是互素整数，使得

$$|\alpha - a/q| < q^{-2}.$$

研究无理数 α 的良好有理逼近 a/q 是很自然的，尤其当 q 被限制在正整数中具有算术意义的子集（例如素数集合）时。在这种情况下，可以问，对于哪些$\theta > 0$，能够证明存在无穷多个素数 p 使得

$$\left|\alpha - \frac{a}{p}\right| < p^{-(\theta+1)+\varepsilon}$$

对于适当的 $a \in \mathbb{Z}$，或者等价地，

$$||p\alpha|| < p^{-\theta+\varepsilon}, \tag{1.1}$$

其中 $||.||$ 表示到最近整数的距离。我们最近的论文 [3] 概述了这一问题有趣的发展史。这里提及三个重要里程碑。上世纪三十年代，I. M. Vinogradov 证明了满足 (1.1) 的素数 p 有无穷多个，其中 $\theta = 1/5$。此后，许多作者改进了这一结果。特别是，Vaughan（1978）利用他著名的冯·曼戈尔特函数恒等式以及对傅里叶分析论证的改进，将指数$1/5$ 替换为 $1/4$。目前的最佳纪录由 Matom¨aki（2009）创造，他将指数推进到 $\theta = 1/3$，这被认为是现有技术所能达到的极限。

近年来，Harman、第一作者、Mazumder 和 Technau 在多篇论文中运用 Harman筛法，建立了这些结果在二次数域中的相应版本（见 [1], [2], [5],[9]），最终在这一背景下，为原问题（见 [8]）实现了与 Harman 的指数 $\theta = 7/22$ 相当的结果。在 [3], 中，作者为函数域 $k = \mathbb{F}_q(T)$ 及其虚二次扩张建立了 Matom¨aki 结果（指数为 $\theta = 1/3$）的相应版本。本文考虑 k的实二次扩张 K。我们的指数稍弱，对应于 Vaughan 的 $\theta = 1/4$。之所以得到较弱的指数，是因为我们没有找到办法使 [3] 中的解析论证适用于这一背景。在 [3], 中，我们没有采用筛法或 Vaughan恒等式，而是利用 Hecke L-函数的黎曼猜想来估算算术级数中的素元个数。由于 $\mathbb{F}_q[T]$ 在 k的实二次扩张 K中的整闭包含有无穷多个单位，这一论证似乎无法在此处奏效。因此，本文采用函数域版本的 Vaughan恒等式。另一项重要工具是实二次函数域上的狄利克雷逼近定理，我们将其导出自 A. Ganguly 提出的狄利克雷逼近定理的一般版本。我们的方法与关于实二次数域的论文[1] 和 [2] 中的方法相似；在那些论文中，我们使用了 Harman筛法，而非 Vaughan恒等式。不过，我们简化了 [1], 中的部分论证，从而改进了其中的结果。更具体地说，我们去掉了一个特定的丢番图条件，该条件在[1]中被称为“良数对”。为避免一些技术上的细微问题，本文仅考虑类数为 1 的域。经过一定努力，我们很可能可以将此方法推广到不受类数限制的一般数域和函数域。此外，也有可能利用函数域版本的 Harman下界筛法改进指数 $1/4$。这些问题留待今后研究。

致谢。作者谨向罗摩克里希纳传教会维韦卡南达教育与研究学院致谢，感谢其提供了优良的工作环境。第二作者的研究获得了大学教育资助委员会国家资格考试项目的资助，编号为 NOV2017-424450。

2. Notations and preliminaries

本文全文将使用以下记号和预备知识。

- 设 $q = p^n$ 为素数幂， $\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的有限域。设 $\mathbb{F}_q(T)_\infty$ 为 $\mathbb{F}_q(T)$ 在 ∞ 处的完备化（即 $\mathbb{F}_q(T)_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$）。

- $\mathbb{F}_q(T)_\infty$ 上无穷远处的绝对值 $|.| = |.|_\infty$ 定义为

$$\left|\sum_{i=-\infty}^{n} a_i T^i\right| = q^n \text{ if } a_n \neq 0.$$

- 考虑环面 $\mathbb{T} = \mathbb{F}_q(T)_\infty/\mathbb{F}_q[T]$。 $\mathbb{T}$ 上的度量定义为

$$||x + \mathbb{F}_q[T]|| := \inf_{x' \in x+\mathbb{F}_q[T]} |x'| \quad (x \in \mathbb{F}_q(T)_\infty).$$

注意， $\mathbb{T}$ 是一个紧豪斯多夫空间，并且对所有 $x + \mathbb{F}_q[T] \in \mathbb{T}$，都有 $||x + \mathbb{F}_q[T]|| \leq 1/q$。

- 更具体地说，如果

$$x = \sum_{i=-\infty}^{n} a_i T^i,$$

then

$$||x + \mathbb{F}_q[T]|| = \left|\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i T^i\right|.$$

右侧的求和可以看作是 x 的小数部分。显然，

$$||x|| = q^k,$$

其中， k 是满足 $a_k \neq 0$的最大负整数。

- 对于 $x \in \mathbb{F}_q(T)_\infty$，我们也记作

$$||x|| := ||x + \mathbb{F}_q[T]||.$$

- 设 $\mathrm{Tr}: \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$ 为迹映射。非平凡加性特征 $E: \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ 定义为

$$E(x) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\mathrm{Tr}(x)\right),$$

指数映射 $e: \mathbb{F}_q(T)_\infty \to \mathbb{C}^\times$ 定义为

$$e\left(\sum_{i=-\infty}^{n} a_i T^i\right) = E(a_{-1}).$$

映射 e 也是 $\mathbb{F}_q(T)_\infty$上的一个非平凡加性特征。

- 给定 $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{F}_q(T)_\infty^n$，我们将加性特征 $\Psi_f: \mathbb{F}_q(T)_\infty^n \to \mathbb{C}^\times$ 定义为

$$\Psi_f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = e(f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n) = \prod_{i=1}^{n} e(f_i g_i)$$

对于任意（$g_1, g_2, \ldots\ldots, g_n$） $\in \mathbb{F}_q(T)_\infty^n$.

- 对于 $f = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n) \in \mathbb{F}_q(T)_\infty^n$，我们在 $\mathbb{F}_q(T)_\infty^n$ 上定义度量 $|.|$ 为

$$|f| = \sup\{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_n|\}.$$

- 给定 $r > 0$，以 $f \in \mathbb{F}_q(T)_\infty^n$为中心、半径为 r的开球 $B_n(f, r)$定义为

$$B_n(f, r) := \{g \in \mathbb{F}_q(T)_\infty^n : |g - f| < r\}.$$

注意， $B_n(0, r) = B(0, r)^n$，其中我们规定

$$B(0, r) := B_1(0, r).$$

- 在局部紧拓扑空间 $\mathbb{F}_q(T)_\infty^n$上，令 μ 为满足以下条件的唯一Haar测度

$$\mu(B_n(0, 1)) = 1.$$

对于任意给定的具有紧支集的局部常值函数 $\mathfrak{F}: \mathbb{F}_q(T)_\infty^n \to \mathbb{C}$， 傅里叶变换 $\hat{}\mathfrak{F}$ 定义为

$$\hat{\mathfrak{F}}(f) := \int_{\mathbb{F}_q(T)_\infty^n} \mathfrak{F}(g)\overline{\Psi_f(g)}\, d\mu(g) \text{ for any } f \in \mathbb{F}_q(T)_\infty^n.$$

- 我们将 $\mathbb{F}_q[T]$ 上的 M¨obius 函数定义为

$$\mu(f) := \begin{cases} 0 & \text{if } f \text{ is divisible by a square of a non-unit in } \mathbb{F}_q[T], \\ (-1)^{\omega(f)} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中， $\omega(f)$ 表示 f 的非相伴不可约因子个数。

- 我们在 $\mathbb{F}_q[T]$ 上定义冯·曼戈尔特函数如下

$$\Lambda(f) := \begin{cases} \log_q(|P|), & \text{若 } f = \epsilon P^r \text{ 对某个不可约多项式 } P、\text{单位 } \epsilon \text{ 和 } r \in \mathbb{N} \text{ 成立；否则为 } 0。 \end{cases}$$

- 若 $f \neq 0$，则有以下恒等式

$$\sum_{\substack{g|f \\ g \text{ monic}}} \Lambda(g) = \log_q(|f|)$$

and

$$\sum_{\substack{g|f \\ g \text{ monic}}} \mu(g) = \begin{cases} 1 & \text{if } f \in \mathbb{F}_q^{\times}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3. Setup of the problem

本节陈述主要结果。为此，我们需要描述$\mathbb{F}_q(T)$的实二次扩张，并给出适用于这些域的狄利克雷逼近定理的一个版本。

3.1. 实二次函数域。以下全文假设 q 是一个奇素数幂。设$d \in \mathbb{F}_q[T]$是一个偶数次首一无平方因子多项式。则 d是 $\mathbb{F}_q(T)_\infty$中某个元素的平方，我们将其记为$\sqrt{d}$。显然， $\sqrt{d}$ 在相差一个符号的意义下唯一。域 $K := \mathbb{F}_q(T)(\sqrt{d})$称为 $k := \mathbb{F}_q(T)$的实二次域扩张。下面我们引入一些记号，并回顾这些域的一些众所周知的性质。

- 设 $\mathbb{A}$ 是 $K.$ 中的 $\mathbb{F}_q[T]$ 的整闭包。则有

$$\mathbb{A} = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{F}_q[T]\}.$$

- 若$f = a + b\sqrt{d} \in K$，则记作

$$\Re(f) = a \quad \text{and} \quad \Im(f) = b. \tag{3.1}$$

注意， $\Re(f)$和 $\Im(f)$均定义良好。

- 若 $f = a + b\sqrt{d} \in K$，则我们在 K 上定义一个范数为

$$\mathbf{Norm}(f) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d \in k.$$

- 我们用 $\mathcal{I}$表示 $\mathbb{A}$ 中的非零整理想集合。
- 理想 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ 的范数定义为

$$\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = \sharp\left(\mathbb{A}/\mathfrak{a}\right).$$

若 $\mathfrak{a} = (f)$，且 $f \in \mathbb{A}$，则

$$\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = |\mathbf{Norm}(f)|.$$

在这种情况下，我们也记作

$$\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(\mathfrak{a}).$$

- 因此 $\mathrm{Gal}(K : k)$ 中有两个自同构，即恒等式和共轭，表示为

$$\sigma_1(a + b\sqrt{d}) := a + b\sqrt{d}$$

and

$$\sigma_2(a + b\sqrt{d}) := a - b\sqrt{d}.$$

记作

$$\sigma(K) := \{(\sigma_1(f), \sigma_2(f)) : f \in K\}.$$

- 相应地， k 上的绝对值可扩展为 K上的两个绝对值，即

$$|a + b\sqrt{d}|_1 := |a + b\sqrt{d}|$$

and

$$|a + b\sqrt{d}|_2 := |a - b\sqrt{d}|$$

其中， $|.| = |.|_\infty$ 是 k_∞上的绝对值，已在前文定义。

- 莫比乌斯函数定义在 $\mathbb{A}$ 中的非零整理想上，是满足以下性质的唯一乘法函数：

$$\mu(\mathfrak{p}^r) = \begin{cases} -1 & \text{if } r = 1 \\ 0 & \text{if } r > 1. \end{cases}$$

- 冯·曼戈尔特函数在 $\mathbb{A}$ 中的非零整理想上定义为

$$\Lambda(\mathfrak{f}) := \begin{cases} \log_q(\mathcal{N}(\mathfrak{p})) & \text{if } \mathfrak{f} = \mathfrak{p}^r \text{ for some prime ideal } \mathfrak{p}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 这些恒等式

$$\sum_{\mathfrak{g}|\mathfrak{f}} \Lambda(\mathfrak{g}) = \log_q(\mathcal{N}(\mathfrak{f}))$$

and

$$\sum_{\mathfrak{g}|\mathfrak{f}} \mu(\mathfrak{g}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathfrak{f} = (1), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对所有 $\mathfrak{f} \in \mathcal{I}$ 均成立。

3.2. 狄利克雷逼近与主要结果。文献 [3, 中给出了函数域上狄利克雷逼近定理的一个一般版本，即定理 5.3]。由此可得以下定理。

定理 2. 假设 K 是 $k = \mathbb{F}_q(T)$ 的一个类数为 1 的实二次扩张。那么，若 $(x_1, x_2) \in K_\infty^2 \setminus \sigma(K)$，则存在一个仅取决于 K 的常数 $C > 0$，使得

$$\left| x_i - \frac{\sigma_i(p)}{\sigma_i(q)} \right| \leq \frac{C}{\mathcal{N}(q)} \quad \text{for } i = 1, 2 \tag{3.2}$$

对于无穷多个元素 $p/q \in K$，有 $(p, q) \in \mathbb{A} \times (\mathbb{A} \setminus \{0\})$。

现在我们可以陈述下面的主要定理了。

定理 3. 设 $q > 2^{12}$ 是一个奇素数幂。令 K 为 k 的类数为 1 的实二次域扩张。假设 $(x_1, x_2) \in K_\infty^2 \setminus \sigma(K)$。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在无穷多个元素 $p/\pi \in K$，满足 p、$\pi \in \mathbb{A}$，使得 $\pi \in \mathbb{A}$ 是一个素元，并且

$$\left| x_i - \frac{\sigma_i(p)}{\sigma_i(\pi)} \right| \leq \mathcal{N}(\pi)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \log_q \sqrt{2} + \varepsilon} \quad \text{for } i = 1, 2. \tag{3.3}$$

如 [3], 所示，类数大于 1 的情形需要额外做不少工作，因为在这种情况下，我们无法定义 $\mathbb{A}$ 中两个元素的最大公因子。本文避开了这些微妙问题，始终假设类数为 1（即 $\mathbb{A}$ 具有唯一分解），而据猜想，许多实二次域 K 都属于这种情形（关于这方面的结果，例如参见 [7], ）。

3.3. 基本方法。我们在本节最后介绍基本方法，该方法受到 [1]中工作的启发。不过，在函数域情形下，情况要简单得多。特别是，与 [1], 中使用的光滑权函数不同，此处只需取适当集合的示性函数即可。

我们对 $x \in K_\infty$ 定义，

$$\Omega_\Delta(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \le \Delta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.4}$$

此外，我们定义函数 $\omega:\ \mathcal{I} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 如下

$$\omega(\mathfrak{a}) := \sum_{p \in \mathbb{A}} \Omega_{\delta/q^{N/2}}\left(x_1 - \frac{\sigma_1(p)}{\sigma_1(v)}\right) \Omega_{\delta/q^{N/2}}\left(x_2 - \frac{\sigma_2(p)}{\sigma_2(v)}\right), \tag{3.5}$$

其中 v 是 $\mathfrak{a}$的任意生成元。注意， $\omega(\mathfrak{a})$定义良好，即与生成元v的选取无关。

我们的方法是比较以下两个量

$$\mathcal{T}(N) := \frac{\delta^2}{|\sqrt{d}|} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathcal{I} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{a}) = q^N}} \Lambda(\mathfrak{a}) \tag{3.6}$$

and

$$\tilde{\mathcal{T}}(N) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathcal{I} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{a}) = q^N}} \Lambda(\mathfrak{a})\omega(\mathfrak{a}), \tag{3.7}$$

其中 Λ 是理想上的冯·曼戈尔特函数。我们的目标是证明

$$\tilde{\mathcal{T}}(N) \sim \mathcal{T}(N)$$

对于满足 $N \to \infty$ 的适当 N 序列，将其与函数域上的素数定理应用于量 $\mathcal{T}(N)$ 结合起来，将产生无穷多个 p/π K，满足定理 3 中所要求的丢番图性质。

4. Application of Poisson summation

在本节中，我们将使用函数域上的泊松求和公式，重新表示量 $\mathcal{T}(N)$。零频率将恰好等于量 $\mathcal{T}(N)$。因此，在应用泊松求和公式之后，这两个量之差由非零频率项组成。我们首先给出函数域上的泊松求和公式（参见 [6, 定理 4.2.1]）。

引理 1（泊松求和公式）。设 Λ 是 k_∞^n 中的完备格，并令

$$\Lambda' = \{g \in k_\infty^n : f \cdot g \in \mathbb{F}_q[T] \text{ for all } f \in \Lambda\}$$

为 Λ 的对偶格。设 $f\colon k_\infty^n \to \mathbb{C}$ 为一个函数，使得函数

$$F(x) = \sum_{a \in \Lambda} |f(x+a)|$$

在 k_∞ 的紧子集上一致收敛，并且

$$\sum_{a' \in \Lambda'} |\hat{f}(a)|$$

收敛。因此

$$\sum_{a \in \Lambda} f(a) = \frac{1}{\mathrm{Cov}(\Lambda)} \sum_{a' \in \Lambda'} \hat{f}(a'),$$

其中，$\mathrm{Cov}(\Lambda)$ 是 Λ 的余体积。

我们回顾一下，如果 M 是生成元矩阵 o，则 Λ 的余体积等于 $|\det M|$。 f Λ.

对于 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ 以及 $\mathfrak{a}$的一个生成元 v，定义矩阵 A 如下：

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1(v)} & \frac{\sqrt{d}}{\sigma_1(v)} \\ \frac{1}{\sigma_2(v)} & -\frac{\sqrt{d}}{\sigma_2(v)} \end{pmatrix}.$$

则 $|\det(A)| = |\sqrt{d}|/\mathcal{N}(\mathfrak{a})$，并且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1(v)}{2} & \frac{\sigma_2(v)}{2} \\ \frac{\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}} & -\frac{\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}} \end{pmatrix}.$$

在我们的 应用中，我们将对格应用上述泊松求和公式

$$\Lambda = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (x, y) \in \mathbb{F}_q[T]^2 \right\}$$

其对偶格为

$$\Lambda' = \left\{ (A^{-1})^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (x, y) \in \mathbb{F}_q[T]^2 \right\}.$$

为此，我们将在下文计算球的示性函数的傅里叶变换。设

$$\chi_{B_2(0,\Delta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{cases} 1 & \text{if } |x|, |y| \le \Delta, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

是球 $B_2(0, \Delta)$ 的示性函数。我们回忆

$$\chi_{B_2(0,\Delta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \chi_{B(0,\Delta)}(x)\chi_{B(0,\Delta)}(y).$$

显然，$\chi_{B_2(0,\Delta)}$ 的傅里叶变换等于

$$\hat{\chi}_{B_2(0,\Delta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \hat{\chi}_{B(0,\Delta)}(x)\hat{\chi}_{B(0,\Delta)}(y),$$

其中 $\hat{}\chi_{B(0,\Delta)}$ 是 $\chi_{B(0,\Delta)}$ 的傅里叶变换。我们有如下结果 t.

引理 2。$\chi_{B(0,1)}$ 的傅里叶变换等于

$$\hat{\chi}_{B(0,1)}(x) = \int\limits_{F_q(T)_\infty} \chi_{B(0,1)}(y)e(-xy)d\mu(y) = \chi_{B(0,1)}(x).$$

证明。这是 [4, 引理5.4]。 □

作为推论，我们得出以下推广。

推论1。$\chi_{B(0,q^N)}$ 的傅里叶变换等于

$$\hat{\chi}_{B(0,q^N)}(x) = q^N \chi_{B(0,q^{-N})}(x).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{B(0,q^N)}(x) &= \int\limits_{F_q(T)_\infty} \chi_{B(0,q^N)}(y)e(-xy)d\mu(y) \\ &= \int\limits_{F_q(T)_\infty} \chi_{B(0,1)}(T^{-N}y)e(-xy)d\mu(y) \\ &= q^N \int\limits_{F_q(T)_\infty} \chi_{B(0,1)}(z)e(-T^N xz)d\mu(z) \\ &= q^N \hat{\chi}_{B(0,1)}(T^N x). \end{aligned}$$

由引理 2,

$$\hat{\chi}_{B(0,1)}(T^N x) = \chi_{B(0,1)}(T^N x).$$

因此,

$$\hat{\chi}_{B(0,q^N)}(x) = q^N \chi_{B(0,1)}(T^N x) = q^N \chi_{B(0,q^{-N})}(x).$$

□

作为上述结果的另一推论，我们得出以下结论。

推论 2. 设

$$g_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \chi_{B_2(0,\Delta)}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

那么，$g_{(x_1,x_2)}$ 的傅里叶变换等于

$$\hat{g}_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = e(\tilde{x}x_1 + \tilde{y}x_2)\ \hat{\chi}_{B_2(0,\Delta)}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} &= \int\limits_{F_q(T)^2_\infty} g_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} e(-\tilde{x}x - \tilde{y}y)d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int\limits_{F_q(T)^2_\infty} \chi_{B_2(0,\Delta)}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) e(-\tilde{x}x - \tilde{y}y)d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \int\limits_{F_q(T)^2_\infty} \chi_{B_2(0,\Delta)}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} e(-\tilde{x}(x' - x_1) - \tilde{y}(y' - x_2))d\mu(x')d\mu(y') \\
&= e(\tilde{x}x_1 + \tilde{y}x_2) \int\limits_{F_q(T)^2_\infty} \chi_{B_2(0,\Delta)}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} e(-\tilde{x}x' - \tilde{y}y')d\mu(x')d\mu(y') \\
&= e(\tilde{x}x_1 + \tilde{y}x_2)\ \hat{\chi}_{B_2(0,\Delta)}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

现在我们可以证明下面的结果了。

命题 1. 我们有

$$\omega(\mathfrak{a}) = \frac{\mathcal{N}(\mathfrak{a})\Delta^2}{|\sqrt{d}|} \cdot \sum_{p\in\mathbb{A}} e\left(\frac{x_1\sigma_1(vp) - x_2\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right) \chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_1(vp)}{2\sqrt{d}}\right) \chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right), \tag{4.1}$$

其中

$$\Delta := \frac{\delta}{q^{N/2}}. \tag{4.2}$$

实二次函数域中的素数分母丢番图逼近 9 证明。根据式 (3.5) 中 $\omega(\mathfrak{a})$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\omega(\mathfrak{a}) &= \sum_{p\in\mathbb{A}} \Omega_\Delta\left(x_1 - \frac{\sigma_1(p)}{\sigma_1(v)}\right)\Omega_\Delta\left(x_2 - \frac{\sigma_2(p)}{\sigma_2(v)}\right) \\
&= \sum_{(x,y)\in\mathbb{F}_q[T]^2} \chi_{B_2(0,\Delta)}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}(x+y\sqrt{d})/\sigma_1(v)\\(x-y\sqrt{d})/\sigma_2(v)\end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{(x,y)\in\mathbb{F}_q[T]^2} \chi_{B_2(0,\Delta)}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{(x',y')\in\Lambda} \chi_{B_2(0,\Delta)}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{(x',y')\in\Lambda} g_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

将引理 1——泊松求和公式应用于上面的最后一行，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{(x',y')\in\Lambda} g_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} &= \frac{1}{\mathrm{Cov}(\Lambda)} \sum_{(x'',y'')\in\Lambda'} \hat{g}_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\det(A)|} \sum_{(x,y)\in\mathbb{F}_q[T]^2} \hat{g}_{(x_1,x_2)}\left((A^{-1})^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{\mathcal{N}(\mathfrak{a})}{|\sqrt{d}|} \sum_{(x,y)\in\mathbb{F}_q[T]^2} \hat{g}_{(x_1,x_2)}\begin{pmatrix}\frac{x\sigma_1(v)}{2} + \frac{y\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}}\\ \frac{x\sigma_2(v)}{2} - \frac{y\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

利用推论 2，上式变为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{N}(\mathfrak{a})}{|\sqrt{d}|} \sum_{(x,y)\in\mathbb{F}_q[T]^2} e\left(x_1\left(\frac{x\sigma_1(v)}{2} + \frac{y\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}}\right) + x_2\left(\frac{x\sigma_2(v)}{2} - \frac{y\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}}\right)\right) \\
&\times \hat{\chi}_{B_2(0,\Delta)}\begin{pmatrix}\frac{x\sigma_1(v)}{2} + \frac{y\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}}\\ \frac{x\sigma_2(v)}{2} - \frac{y\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}}\end{pmatrix} \\
=&\frac{\mathcal{N}(\mathfrak{a})}{|\sqrt{d}|} \sum_{(x,y)\in\mathbb{F}_q[T]^2} e\left(\frac{x_1\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}+y) + \frac{x_2\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}-y)\right) \\
&\times \hat{\chi}_{B(0,\Delta)}\left(\frac{\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}+y)\right)\hat{\chi}_{B(0,\Delta)}\left(\frac{\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}-y)\right).
\end{aligned}$$

利用推论1，上式可写成

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{N}(\mathfrak{a})\Delta^2}{|\sqrt{d}|} \sum_{(x,y)\in\mathbb{F}_q[T]^2} e\left(\frac{x_1\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}+y) + \frac{x_2\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}-y)\right) \\
&\times \chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_1(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}+y)\right)\chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_2(v)}{2\sqrt{d}}(x\sqrt{d}-y)\right) \\
=&\frac{\mathcal{N}(\mathfrak{a})\Delta^2}{|\sqrt{d}|} \sum_{p\in\mathbb{A}} e\left(\frac{x_1\sigma_1(vp) - x_2\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right)\cdot\chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_1(vp)}{2\sqrt{d}}\right)\chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right).
\end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到所需的恒等式。 □

注意， $p=0$ 对等式 (4.1) 右侧的贡献等于

$$\frac{\mathcal{N}(\mathfrak{a})\Delta^2}{|\sqrt{d}|}=\frac{\delta^2}{|\sqrt{d}|}$$

若 $\mathcal{N}(\mathfrak{a})=q^N$。因此，

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}}(N)-\mathcal{T}(N)=&\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{a})=q^N}}\Lambda(\mathfrak{a})\left(\omega(\mathfrak{a})-\frac{\delta^2}{|\sqrt{d}|}\right)\\ =&\frac{\delta^2}{|\sqrt{d}|}\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{a})=q^N}}\Lambda(\mathfrak{a})\sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}}e\left(\frac{x_1\sigma_1(vp)-x_2\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right)\times\\ &\chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_1(vp)}{2\sqrt{d}}\right)\cdot\chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

在接下来的几节中，我们的目标是证明以下定理，并由此推导出主要结果定理 3。

定理 4。设 $q>2^{12}$ 是一个奇素数幂。假设 $(x_1,x_2)\in K_\infty^2\setminus\sigma(K)$，且 $\varepsilon>0$ 充分小。那么存在一个正整数无限序列 N，使得

$$\tilde{\mathcal{T}}(N)-\mathcal{T}(N)\ll_\varepsilon\delta^2q^{(1-\varepsilon)N}$$

条件是

$$q^{-(1/8-\log_q\sqrt{2}-2\varepsilon)N}\le\delta\le q^{-(\log_q 2+2\varepsilon)N}.\tag{4.4}$$

5. Vaughan's identity

本节中，我们给出函数域上 Vaughan恒等式的若干版本，随后将用它们把 (4.3) 最后一行中涉及 $\Lambda(\mathfrak{a})$ 的求和化为所谓的 I 型和 II 型双线性和。下文将为 $\mathbb{F}_q[T]$表述这一恒等式的一个基本版本，它也可能适用于其他问题。

引理 3. 设 $f\in\mathbb{F}_q[T]\setminus\{0\}$ 是首一多项式， α、β 是任意非负整数，且满足 $\beta<\deg(f)$。那么

$$\Lambda(f)=\sum_{\substack{l|f\\ \deg(l)\le\alpha}}^{\flat}\mu(l)\log_q(|f/l|)-\sum_{\substack{ml|f\\ \deg(m)\le\alpha\\ \deg(l)\le\beta}}^{\flat}\sum\mu(m)\Lambda(l)+\sum_{\substack{dm|f\\ \deg(d)>\alpha\\ \deg(m)>\beta}}^{\flat}\sum\mu(d)\Lambda(m),\tag{5.1}$$

其中，上标“♭”表示求和仅限于首一多项式。

证明. 这是命题 13.5] 的函数域版本，可以用类似的方法证明。 □

我们将这个恒等式改写如下。

推论 3. 在引理 3 的条件下，我们有

$$\Lambda(f)=a_1(f)+a_2(f)+a_3(f),$$

其中

$$a_1(f):=-\sum_{\substack{nml=f\\ \deg(m)\le\alpha\\ \deg(l)\le\beta}}^{\flat}\mu(m)\Lambda(l),$$

$$a_2(f):=\sum_{\substack{ln=f\\ \deg(l)\le\alpha}}^{\flat}\mu(l)\log_q(|n|)$$

and

$$a_3(f) := -\sum_{\substack{mn=f\\ \deg(m)>\beta\\ \deg(n)>0}}^{\flat} \Lambda(m) \sum_{\substack{d|n\\ \deg(d)\le\alpha}}^{\flat} \mu(d).$$

证明。显然， $a_1(f)$ 和 $a_2(f)$ 分别等于 (5.1) 右侧的第二个和第一个求和。第三个求和可表示为

$$a_3(f) = \sum_{\substack{nm=f\\ \deg(m)>\beta}}^{\flat} \Lambda(m) \sum_{\substack{\deg(d)>\alpha\\ d|n}}^{\flat} \mu(d) = -\sum_{\substack{nm=f\\ \deg(m)>\beta\\ \deg(n)>0}}^{\flat} \Lambda(m) \sum_{\substack{d|n\\ \deg(d)\le\alpha}}^{\flat} \mu(d).$$

证明至此完成。 □

对于 $\mathbb{i}$ 在 $\mathbb{A}$ 中进行运算时，可以用基本相同的方式建立以下恒等式 y.

引理4. 设 $\mathfrak{f}$ 是一个非- $\mathbb{A}$ 中的零整理想，并令 α、β 为正整数，使得 $\beta < \mathcal{N}(f)$。于是

$$\Lambda(\mathfrak{f}) = a_1(\mathfrak{f}) + a_2(\mathfrak{f}) + a_3(\mathfrak{f}),$$

其中

$$a_1(\mathfrak{f}) := -\sum_{\substack{\mathfrak{nml}=\mathfrak{f}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})\le\alpha\\ \mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\beta}} \mu(\mathfrak{m})\Lambda(\mathfrak{l}),$$

$$a_2(\mathfrak{f}) := \sum_{\substack{\mathfrak{ln}=\mathfrak{f}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\alpha}} \mu(\mathfrak{l}) \log_q(\mathcal{N}(\mathfrak{n}))$$

and

$$a_3(\mathfrak{f}) := -\sum_{\substack{\mathfrak{mn}=\mathfrak{f}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})>\beta\\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})>1}} \Lambda(\mathfrak{m}) \sum_{\substack{\mathfrak{d}|\mathfrak{n}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{d})\le\alpha}} \mu(\mathfrak{d}).$$

令 $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ 为一个函数，使得当 $\mathcal{N}(f) \le \beta$ 时， $\mathcal{F}(f) = 0$。由引理4可得

$$\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{f})\le X} \Lambda(\mathfrak{f})\mathcal{F}(\mathfrak{f}) = S_1 + S_2 + S_3,$$

其中

$$S_i = \sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{f})\le X} \mathcal{F}(\mathfrak{f}) a_i(\mathfrak{f}).$$

接下来，我们将 S_1、 S_2 和 S_3 转化为双线性和，并对其进行适当估计。我们首先写出

$$\begin{aligned} S_1 &= -\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{f})\le X} \sum_{\substack{\mathfrak{nlm}=\mathfrak{f}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\beta\\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})\le\alpha}} \Lambda(\mathfrak{l})\mu(\mathfrak{m})\mathcal{F}(\mathfrak{f}) \\ &= -\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{t})\le\alpha\beta} \left(\sum_{\substack{\mathfrak{lm}=\mathfrak{t}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\beta\\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})\le\alpha}} \Lambda(\mathfrak{l})\mu(\mathfrak{m}) \right) \sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(\mathfrak{t})} \mathcal{F}(\mathfrak{tn}) \\ &\ll \log_q(\alpha\beta) \sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{t})\le\alpha\beta} \left| \sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(\mathfrak{t})} \mathcal{F}(\mathfrak{tn}) \right|. \end{aligned}$$

求和 S_2 满足

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{f})\le X}\Bigg(\sum_{\substack{\mathfrak{l}\mathfrak{n}=\mathfrak{f}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\alpha}}\mu(\mathfrak{l})\log_q\mathcal{N}(\mathfrak{n})\Bigg)\mathcal{F}(\mathfrak{f})\\
&= \sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\alpha}\mu(\mathfrak{l})\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(\mathfrak{l})}\mathcal{F}(\mathfrak{l}\mathfrak{n})\cdot\log_q\mathcal{N}(\mathfrak{n})\\
&= \frac{1}{\log q}\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\alpha}\mu(\mathfrak{l})\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(\mathfrak{l})}\mathcal{F}(\mathfrak{l}\mathfrak{n})\cdot\int_1^{\mathcal{N}(\mathfrak{n})}\frac{d\mu(w)}{w}\\
&= \frac{1}{\log q}\int_1^X\Bigg(\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\alpha}\mu(\mathfrak{l})\sum_{w\le\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(\mathfrak{l})}\mathcal{F}(\mathfrak{l}\mathfrak{n})\Bigg)\frac{d\mu(w)}{w}\\
&\ll (\log_q X)\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\alpha}\sup_{1\le w\le X/\mathcal{N}(l)}\Bigg|\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(l)}\mathcal{F}(\mathfrak{l}\mathfrak{n})-\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le w}\mathcal{F}(\mathfrak{l}\mathfrak{n})\Bigg|\\
&\ll (\log_q X)\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{l})\le\alpha}\sup_{1\le w\le X/\mathcal{N}(l)}\Bigg|\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le w}\mathcal{F}(\mathfrak{l}\mathfrak{n})\Bigg|.
\end{aligned}$$

接下来，我们令

$$H(\mathfrak{n}) := \sum_{\substack{\mathfrak{d}\mid\mathfrak{n}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{d})\le\alpha}}\mu(\mathfrak{d}) \tag{5.2}$$

并注意到 $H(\mathfrak{n}) = 0$ 当 $1 < \mathcal{N}(\mathfrak{n}) \le \alpha$. 因此，求和 S_3 具有如下形式

$$\begin{aligned}
S_3 &= -\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{f})\le X}\Bigg(\sum_{\substack{\mathfrak{m}\mathfrak{n}=\mathfrak{f}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})>\alpha\\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})>\beta}}\Lambda(\mathfrak{m})H(\mathfrak{n})\Bigg)\mathcal{F}(\mathfrak{f})\\
&= -\sum_{\beta<\mathcal{N}(\mathfrak{m})\le X/\alpha}\ \sum_{\alpha<\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(\mathfrak{m})}\Lambda(\mathfrak{m})H(\mathfrak{n})\mathcal{F}(\mathfrak{m}\mathfrak{n}).
\end{aligned}$$

结合上述估计，我们得到以下命题。

命题 2. 设 $X \ge q$ 为整数，且 α、β 为满足 $\alpha\beta < X$的正整数。设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{A}$中的整数理想上的任意复值函数，满足：当 $\mathcal{N}(f) \le \beta$时， $\mathcal{F}(f) = 0$。那么我们有

$$\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{f})\le X}\Lambda(\mathfrak{f})\mathcal{F}(\mathfrak{f}) \ll T_I + T_{II}$$

with

$$T_I := \log_q(X)\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{m})\le\alpha\beta}\sup_{1\le w\le X/\mathcal{N}(m)}\Bigg|\sum_{\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le w}\mathcal{F}(\mathfrak{m}\mathfrak{n})\Bigg| \tag{5.3}$$

and

$$T_{II} := \Bigg|\sum_{\beta<\mathcal{N}(\mathfrak{m})\le X/\alpha}\ \sum_{\alpha<\mathcal{N}(\mathfrak{n})\le X/\mathcal{N}(\mathfrak{m})}\Lambda(\mathfrak{m})H(\mathfrak{n})\mathcal{F}(\mathfrak{m}\mathfrak{n})\Bigg|, \tag{5.4}$$

其中， $H(\mathfrak{n})$ 的定义见（5.2）。

注意到

$$\Lambda(\mathfrak{m}) \le \log_q \mathcal{N}(\mathfrak{m}) \le \log_q X \quad \text{and} \quad |H(\mathfrak{n})| \le 2^{\log_q \mathcal{N}(\mathfrak{m})} \le X^{\log_q 2}. \tag{5.5}$$

按照通常的术语，上面的和 T_I 称为 I 型和，而和 T_{II} 称为 II 型和。下文将命题 2 应用于以下情形： $X := q^N$ ，且函数 $\mathcal{F}$ 满足 $\mathcal{F}(\mathfrak{a}) = 0$，如果 $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) \neq q^N$，并且

$$\mathcal{F}(\mathfrak{a}) = \frac{\delta^2}{|\sqrt{d}|} \sum_{p \in \mathbb{A}\setminus\{0\}} e\left(\frac{x_1\sigma_1(vp) - x_2\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right) \chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_1(vp)}{2\sqrt{d}}\right) \chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_2(vp)}{2\sqrt{d}}\right) \tag{5.6}$$

如果 $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = q^N$。这里我们回顾一下， v 是 $\mathfrak{a}$ 的任意生成元，并注意到

$$\frac{\delta^2}{|\sqrt{d}|} = \frac{q^N\Delta^2}{|\sqrt{d}|} \tag{5.7}$$

由 (4.2) 得。在上述情形下，回顾 (4.3)，上述命题 2 给出

$$\tilde{\mathcal{T}}(N) - \mathcal{T}(N) \ll T_I + T_{II}, \tag{5.8}$$

其中 I 型和具有如下形式

$$T_I = \log_q(\alpha\beta) \sum_{\substack{\mathfrak{t}\in\mathcal{I} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{t})\le\alpha\beta}} \left| \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in\mathcal{I} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^N/\mathcal{N}(\mathfrak{t})}} \mathcal{F}(\mathfrak{tn}) \right| \tag{5.9}$$

（注意，若 $\mathcal{N}(\mathfrak{n}) < q^N/\mathcal{N}(\mathfrak{t})$，则 $\mathcal{F}(\mathfrak{tn}) = 0$，而 II 型和的形式为

$$T_{II} = \Big| \sum_{\substack{\mathfrak{m}\in\mathcal{I} \\ \beta<\mathcal{N}(\mathfrak{m})\le q^N/\alpha}} \Lambda(\mathfrak{m}) \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in\mathcal{I} \\ \alpha<\mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^N/\mathcal{N}(\mathfrak{m})}} H(\mathfrak{n})\mathcal{F}(\mathfrak{nm}) \Big|. \tag{5.10}$$

6. Transformation of the type-I sum

上述等式 (5.9) 表明

$$T_I = \log_q(\alpha\beta) \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ q^i\le\alpha\beta}} \sum_{\substack{\mathfrak{t}\in\mathcal{I} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{t})=q^i}} \left| \sum_{\substack{\mathfrak{n}\in\mathcal{I} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i}}} \mathcal{F}(\mathfrak{tn}) \right|,$$

其中 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。为简化问题，我们引入与 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ 相关的集合 $S(\mathfrak{a})$，定义如下。根据 $\mathbb{F}_q(T)$ 的实二次扩张的狄利克雷单位定理（见 [11, 命题 14.2]） ， $\mathcal{U}$ 的单位群 $\mathbb{A}$ 等于

$$\mathcal{U} = \{\epsilon u^r : \epsilon \in \mathbb{F}_q^\times, r \in \mathbb{Z}\} \tag{6.1}$$

对某个满足 $|u| > 1$ 的单位 u ，称其为基本单位。对于 $\mathbb{A}$中的整理想 $\mathfrak{a}$ ，我们定义

$$S(\mathfrak{a}) := \{v \in \mathbb{A} : (v) = \mathfrak{a},\ \mathcal{N}(\mathfrak{a})^{1/2}|u|^{-1/2} < |v| \le \mathcal{N}(\mathfrak{a})^{1/2}|u|^{1/2}\}. \tag{6.2}$$

由 (6.1)， $\mathfrak{a}$的所有生成元 对于固定的 $v_0 \in \mathbb{A}$，其形式为 $\epsilon u^r v_0$ 。因此， $\sharp S(\mathfrak{a})$ 的基数恰好为 y

$$\sharp S(\mathfrak{a}) = \sharp\mathbb{F}_q^\times = q - 1. \tag{6.3}$$

结合上文 $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ 和 $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ 的定义以及恒等式 (5.7) 和 (6.3)，可得

$$T_I = \frac{q^N\Delta^2\log_q(\alpha\beta)}{|\sqrt{d}|(q-1)^2} \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ q^i\le\alpha\beta}} \sum_{\substack{t\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{t})=q^i \\ t\in S(\mathfrak{t})}} \left| \sum_{\substack{n\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i} \\ tn\in S(\mathfrak{tn})}} \sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}} \mathcal{E}(tnp)E(tnp) \right|$$

按照约定，$(t) = \mathfrak{t}$ 和 $(n) = \mathfrak{n}$ 和

$$\mathcal{E}(l) := e\left(\frac{x_1\sigma_1(l) - x_2\sigma_2(l)}{2\sqrt{d}}\right), \quad E(l) := \chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_1(l)}{2\sqrt{d}}\right) \chi_{B(0,\Delta^{-1})}\left(\frac{\sigma_2(l)}{2\sqrt{d}}\right). \tag{6.4}$$

由于

$$E(tnp)=\begin{cases}1 & \text{if } \max\left\{|\frac{\sigma_1(p)\sigma_1(tn)}{2\sqrt{d}}|,|\frac{\sigma_2(p)\sigma_2(tn)}{2\sqrt{d}}|\right\}\le\Delta^{-1},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{6.5}$$

我们推得

$$\begin{aligned}T_I&=\frac{q^N\Delta^2\log_q(\alpha\beta)}{|\sqrt{d}|(q-1)^2}\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ q^i\le\alpha\beta}}\sum_{\substack{t\in\mathbb{A}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{t})=q^i\\ t\in S(\mathfrak{t})}}\Bigg|\sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i}\\ tn\in S(\mathfrak{tn})\\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(tp)|)}}\sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}}\mathcal{E}(tnp)\Bigg|\\ &=\frac{q^N\Delta^2\log_q(\alpha\beta)}{|\sqrt{d}|(q-1)^2}\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ q^i\le\alpha\beta}}T_I(i),\end{aligned} \tag{6.6}$$

其中

$$T_I(i):=\sum_{\substack{t\in\mathbb{A}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{t})=q^i\\ t\in S(\mathfrak{t})}}\Bigg|\sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}}\sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i}\\ tn\in S(\mathfrak{tn})\\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(tp)|)}}\mathcal{E}(tnp)\Bigg|. \tag{6.7}$$

根据（6.2）中 $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ 的定义，若 $tn\in S(\mathfrak{tn})$，则

$$\mathcal{N}(\mathfrak{tn})^{1/2}|u|^{-1/2}<|tn|\le\mathcal{N}(\mathfrak{tn})^{1/2}|u|^{1/2}. \tag{6.8}$$

由于 $\sigma_1(tn)=tn$ 和 $|\sigma_1(tn)\sigma_2(tn)|=\mathcal{N}(\mathfrak{tn})=q^N$，（6.8）推出

$$q^{N/2}|u|^{-1/2}<|\sigma_1(tn)|\le q^{N/2}|u|^{1/2} \tag{6.9}$$

and

$$q^{N/2}|u|^{-1/2}\le|\sigma_2(tn)|<q^{N/2}|u|^{1/2}. \tag{6.10}$$

类似地，若（6.2）中的 $t\in\mathcal{S}(\mathfrak{t})$ 且 $\mathcal{N}(\mathfrak{t})=q^i$，则有

$$q^{i/2}|u|^{-1/2}<|\sigma_1(t)|\le q^{i/2}|u|^{1/2} \tag{6.11}$$

and

$$q^{i/2}|u|^{-1/2}\le|\sigma_2(t)|<q^{i/2}|u|^{1/2}. \tag{6.12}$$

由此可得

$$q^{(N-i)/2}|u|^{-1}<|\sigma_{1,2}(n)|<q^{(N-i)/2}|u|. \tag{6.13}$$

Hence，求和条件 $|\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(tp)|)$ 蕴含不等式 y

$$|\sigma_{1,2}(tp)|\le|\sqrt{d}u|\Delta^{-1}q^{(i-N)/2}, \tag{6.14}$$

我们稍后将用到这一点。

接下来，我们变换最内层的求和

$$V:=\sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i}\\ tn\in S(\mathfrak{tn})\\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(tp)|)}}\mathcal{E}(tnp) \tag{6.15}$$

（6.7）右端。由（6.9）和（6.10）可得

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ q^{N/2}|u|^{-1/2}/|\sigma_1(t)|<|\sigma_1(n)|\le q^{N/2}|u|^{1/2}/|\sigma_1(t)|\\ |\sigma_2(n)|=q^{N-i}/|\sigma_1(n)|\\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(tp)|)}} \mathcal{E}(tnp) \\
&= \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0\\ q^{N/2}|u|^{-1/2}/|\sigma_1(t)|<q^{j}\le q^{N/2}|u|^{1/2}/|\sigma_1(t)|\\ q^{j},q^{N-i-j}\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(tp)|)}} V_{j,N-i-j},
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

其中

$$
V_{j_1,j_2} := \sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ |\sigma_1(n)|=q^{j_1}\\ |\sigma_2(n)|=q^{j_2}}} \mathcal{E}(tpn). \tag{6.17}
$$

我们记下，求和条件 $|\sigma_1(n)| = q^{j_1}$ 和 $|\sigma_2(n)| = q^{j_2}$ 连同（6.13）一起推出不等式

$$
q^{(N-i)/2}|u|^{-1} < q^{j_1}, q^{j_2} < q^{(N-i)/2}|u|. \tag{6.18}
$$

稍后也会用到这一点。令 $n = r + s\sqrt{d}$，其中 r、$s \in \mathbb{F}_q[T]$，则（6.17）中的求和变为

$$
V_{j_1,j_2} = \sum_{\substack{r,s\in\mathbb{F}_q[T]\\ |r+s\sqrt{d}|=q^{j_1}\\ |r-s\sqrt{d}|=q^{j_2}}} \mathcal{E}(tp(r+s\sqrt{d})) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q[T]} \sum_{\substack{r\in\mathbb{F}_q[T]\\ r\in\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})\cap\mathbb{S}(s\sqrt{d},q^{j_2})}} \mathcal{E}(tp(r+s\sqrt{d})), \tag{6.19}
$$

其中 $\mathbb{S}(z, q^j) := \{y \in \mathbb{F}_q(T)_\infty : \ |z - y| = q^j\}$。

我们有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(tp(r+s\sqrt{d})) &= e\left(\frac{x_1\sigma_1(tp(r+s\sqrt{d})) - x_2\sigma_2(tp(r+s\sqrt{d}))}{2\sqrt{d}}\right) \\
&= e\left(\frac{x_1\sigma_1(tp)(r+s\sqrt{d}) - x_2\sigma_2(tp)(r-s\sqrt{d})}{2\sqrt{d}}\right) \\
&= e(C(tp)r + D(tp)s),
\end{aligned}
$$

其中

$$
C(a) := \frac{x_1\sigma_1(a) - x_2\sigma_2(a)}{2\sqrt{d}} \quad \text{and} \quad D(a) := \frac{x_1\sigma_1(a) + x_2\sigma_2(a)}{2}. \tag{6.20}
$$

因此，式 (6.19) 中的求和变为

$$
V_{j_1,j_2} = \sum_{s\in\mathbb{F}_q[T]} e(D(tp)s) \sum_{\substack{r\in\mathbb{F}_q[T]\\ r\in\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})\cap\mathbb{S}(s\sqrt{d},q^{j_2})}} e(C(tp)r).
$$

利用开球 $B(x, R)$ 的定义，我们写作

$$
\mathbb{S}(-s\sqrt{d}, q^{j_1}) \cap \mathbb{S}(s\sqrt{d}, q^{j_2}) = \big(B(-s\sqrt{d}, q^{j_1+1}) \setminus B(-s\sqrt{d}, q^{j_1})\big) \cap \big(B(s\sqrt{d}, q^{j_2+1}) \setminus B(s\sqrt{d}, q^{j_2})\big).
$$

如果 $B(-s\sqrt{d}, q^{j_1+1}) \subseteq B(s\sqrt{d}, q^{j_2+1})$，那么

$$
\begin{aligned}
\big(B(-s\sqrt{d}, q^{j_1+1}) \setminus B(-s\sqrt{d}, q^{j_1})\big) \cap \big(B(s\sqrt{d}, q^{j_2+1}) \setminus B(s\sqrt{d}, q^{j_2})\big) &= B(-s\sqrt{d}, q^{j_1+1}) \setminus B(-s\sqrt{d}, q^{j_1}) \\
&= \mathbb{S}(-s\sqrt{d}, q^{j_1}).
\end{aligned}
$$

如果 $B(s\sqrt{d},q^{j_2+1}) \subseteq B(-s\sqrt{d},q^{j_1+1})$，那么

$$\big(B(-s\sqrt{d},q^{j_1+1}) \setminus B(-s\sqrt{d},q^{j_1})\big) \cap \big(B(s\sqrt{d},q^{j_2+1}) \setminus B(s\sqrt{d},q^{j_2})\big) = B(s\sqrt{d},q^{j_2+1}) \setminus B(s\sqrt{d},q^{j_2}) \\ = \mathbb{S}(s\sqrt{d},q^{j_2}).$$

此外，如果 $B(-s\sqrt{d},q^{j_1+1})$ 与 $B(s\sqrt{d},q^{j_2+1})$ 的交集非空，则这两个球中的一个包含另一个。因此，

$$V_{j_1,j_2} = V'_{j_1,j_2} + V''_{j_1,j_2} + V'''_{j_1,j_2}, \tag{6.21}$$

其中

$$V'_{j_1,j_2} := \sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_q[T] \\ B(-s\sqrt{d},q^{j_1+1})\subsetneq B(s\sqrt{d},q^{j_2+1})}} e(D(tp)s) \sum_{\substack{r\in\mathbb{F}_q[T] \\ r\in\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})}} e(C(tp)r), \tag{6.22}$$

$$V''_{j_1,j_2} := \sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_q[T] \\ B(-s\sqrt{d},q^{j_1+1})=B(s\sqrt{d},q^{j_2+1})}} e(D(tp)s) \sum_{\substack{r\in\mathbb{F}_q[T] \\ r\in\mathbb{S}(s\sqrt{d},q^{j_2})}} e(C(tp)r)$$

and

$$V'''_{j_1,j_2} = \sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_q[T] \\ B(s\sqrt{d},q^{j_2+1})\subsetneq B(-s\sqrt{d},q^{j_1+1})}} e(D(tp)s) \sum_{\substack{r\in\mathbb{F}_q[T] \\ r\in\mathbb{S}(s\sqrt{d},q^{j_2})}} e(C(tp)r).$$

我们将 (6.22) 右侧最内层的求和写为

$$\sum_{\substack{r\in\mathbb{F}_q[T] \\ r\in\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})}} e(C(tp)r) = \sum_{r\in\mathbb{F}_q[T]} \chi_{\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})}(r) e(C(tp)r).$$

利用泊松求和公式和引理 1，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in\mathbb{F}_q[T]} \chi_{\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})}(r) e(C(tp)r) &= \sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} \int_{\mathbb{F}_q(T)_\infty} \chi_{\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})}(x) e(C(tp)x) e(-xr') d\mu(x) \\
&= \sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} \int_{\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})} e((C(tp)-r')x) d\mu(x) \\
&= \sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} \int_{\mathbb{S}(0,q^{j_1})} e((C(tp)-r')(x-s\sqrt{d})) d\mu(x) \\
&= \sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} e((r'-C(tp))s\sqrt{d}) \int_{\mathbb{S}(0,q^{j_1})} e((C(tp)-r')x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

根据傅里叶变换的定义和推论1，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}(0,q^{j_1})} e((C(tp)-r')x)d\mu(x) &= \int_{B(0,q^{j_1+1})} e((C(tp)-r')x)d\mu(x) - \int_{B(0,q^{j_1})} e((C(tp)-r')x)d\mu(x)\\ &= \int_{B(0,q^{j_1+1})} e((C(tp)-r')x)d\mu(x) - \int_{B(0,q^{j_1})} e((C(tp)-r')x)d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{F}_q(T)_\infty} \chi_{B(0,q^{j_1+1})}(x)e(-(r'-C(tp))x)d\mu(x)\\ &\quad - \int_{\mathbb{F}_q(T)_\infty} \chi_{B(0,q^{j_1})}(x)e(-(r'-C(tp))x)d\mu(x)\\ &= \hat{\chi}_{B(0,q^{j_1+1})}(r'-C(tp)) - \hat{\chi}_{B(0,q^{j_1})}(r'-C(tp))\\ &= q^{j_1+1}\chi_{B(0,q^{-(j_1+1)})}(r'-C(tp)) - q^{j_1}\chi_{B(0,q^{-j_1})}(r'-C(tp)).\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{r\in\mathbb{F}_q[T]} \chi_{\mathbb{S}(-s\sqrt{d},q^{j_1})}(r)e(C(tp)r) = \sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} e((r'-C(tp))s\sqrt{d})\, G_{(r',j_1)},$$

其中

$$G_{(r',k)} := q^{k+1}\chi_{B(0,q^{-(k+1)})}(r'-C(tp)) - q^{k}\chi_{B(0,q^{-k})}(r'-C(tp)).$$

结合上述方程，并注意到

$$B(-s\sqrt{d},q^{j_1+1}) \subsetneqq B(s\sqrt{d},q^{j_2+1}) \Longleftrightarrow |s\sqrt{d}| < q^{j_2+1} \text{ and } j_1 < j_2,$$

我们得到

$$V'_{j_1,j_2} = \delta_1(j_1,j_2)\sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} G_{(r',j_1)} \sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_q[T]\\ s\in B(0,q^{j_2+1}/|\sqrt{d}|)}} e((D(tp)+(r'-C(tp))\sqrt{d})s),$$

其中

$$\delta_1(j_1,j_2) := \begin{cases}1 & \text{if } j_1 < j_2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

类似地，我们推出

$$V'''_{j_1,j_2} = \delta_1(j_2,j_1)\sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} G_{(r',j_2)} \sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_q[T]\\ s\in B(0,q^{j_1+1}/|\sqrt{d}|)}} e((D(tp)+(C(tp)-r')\sqrt{d})s)$$

and

$$V''_{j_1,j_2} = \delta(j_1,j_2)\sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} G_{(r',j_2)} \sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_q[T]\\ s\in B(0,q^{j_2+1}/|\sqrt{d}|)}} e((D(tp)+(C(tp)-r')\sqrt{d})s),$$

其中

$$\delta(j_1,j_2) := \begin{cases}1 & \text{if } j_1 = j_2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

再次利用泊松求和公式，我们得到

$$\sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_q[T]\\ s\in B(0,q^{j_2+1}/|\sqrt{d}|)}} e((D(tp)+(r'-C(tp))\sqrt{d})s) = |\sqrt{d}| \sum_{s'\in\mathbb{F}_q[T]} q^{j_2+1}\chi_{B(0,q^{-(j_2+1)}|\sqrt{d}|)}(s'-D(tp)+(C(tp)-r')\sqrt{d}).$$

因此，$V'_{j_1,\ j_2}$ 变为

$$V'_{j_1,j_2} = \delta_1(j_1,j_2)|\sqrt{d}| \sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]} G_{(r',j_1)} \sum_{s'\in\mathbb{F}_q[T]} q^{j_2+1}\chi_{B(0,q^{-(j_2+1)}|\sqrt{d}|)}(s'-D(tp)-(r'-C(tp))\sqrt{d}). \tag{6.23}$$

类似地，$V''_{j_1,\ j_2}$ 和 $V'''_{j_1,\ j_2}$ 变为

$$V''_{j_1,j_2}=\delta(j_1,j_2)|\sqrt{d}|\sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]}G_{(r',j_2)}\sum_{s'\in\mathbb{F}_q[T]}q^{j_1+1}\chi_{B(0,q^{-(j_1+1)}|\sqrt{d}|)}(s'-D(tp)+(r'-C(tp))\sqrt{d}) \tag{6.24}$$

and

$$V'''_{j_1,j_2}=\delta_1(j_2,j_1)|\sqrt{d}|\sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]}G_{(r',j_2)}\sum_{s'\in\mathbb{F}_q[T]}q^{j_1+1}\chi_{B(0,q^{-(j_1+1)}|\sqrt{d}|)}(s'-D(tp)+(r'-C(tp))\sqrt{d}). \tag{6.25}$$

由 (6.23)，我们得到估计

$$\begin{aligned}|V'_{j_1,j_2}|\leq&q^{j_1+j_2+2}|\sqrt{d}|\sum_{r'\in\mathbb{F}_q[T]}\chi_{B(0,q^{-j_1})}(r'-C(tp))\sum_{s'\in\mathbb{F}_q[T]}\chi_{B(0,q^{-j_1}|\sqrt{d}|)}(s'-D(tp)-(r'-C(tp))\sqrt{d})\\ =&q^{j_1+j_2+2}|\sqrt{d}|\sum_{\substack{r'\in\mathbb{F}_q[T]\\ s'\in\mathbb{F}_q[T]}}\chi_{B(0,q^{-j_1})}(r'-C(tp))\chi_{B(0,q^{-j_1}|\sqrt{d}|)}(s'-D(tp))\\ =&q^{j_1+j_2+2}|\sqrt{d}|\chi_{B(0,q^{-j_1})}(\|C(tp)\|)\chi_{B(0,q^{-j_1}|\sqrt{d}|)}(\|D(tp)\|).\end{aligned} \tag{6.26}$$

类似地，由 (6.24) 和 (6.25)，我们得到

$$|V''_{j_1,j_2}|\leq q^{j_1+j_2+2}\chi_{B(0,q^{-j_1})}(\|C(tp)\|)\chi_{B(0,q^{-j_1}|\sqrt{d}|)}(\|D(tp)\|) \tag{6.27}$$

and

$$|V'''_{j_1,j_2}|\leq q^{j_1+j_2+2}\chi_{B(0,q^{-j_2})}(\|C(tp)\|)\chi_{B(0,q^{-j_2}|\sqrt{d}|)}(\|D(tp)\|). \tag{6.28}$$

结合 (6.21)、(6.26)、(6.27) 和 (6.28)，我们得到

$$|V_{j_1,j_2}|\ll q^{j_1+j_2}\left(\chi_{B(0,q^{-j_1})}(\|C(tp)\|)\chi_{B(0,q^{-j_1}|\sqrt{d}|)}(\|D(tp)\|)+\chi_{B(0,q^{-j_2})}(\|C(tp)\|)\chi_{B(0,q^{-j_2}|\sqrt{d}|)}(\|D(tp)\|)\right). \tag{6.29}$$

令 $j_1=j$ 和 $j_2=N-i-j$，并结合 (6.7)、(6.14)、(6.15)、(6.16) 和 (6.29)，我们推得

$$\begin{aligned}T_I(i)\ll&q^{N-i}\sum_{\substack{t\in\mathbb{A}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{t})=q^i\\ t\in S(\mathfrak{t})}}\sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}\atop |\sigma_{1,2}(tp)|\leq|\sqrt{d}u|\Delta^{-1}q^{(i-N)/2}}\sum_{j\in\mathbb{N}_0\atop q^{N/2}|u|^{-1/2}/|\sigma_1(t)|<q^j\leq q^{N/2}|u|^{1/2}/|\sigma_1(t)|\atop q^j,q^{N-i-j}\leq|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(tp)|)}\\ &\left(\chi_{B(0,q^{-j})}(\|C(tp)\|)\chi_{B(0,q^{-j}|\sqrt{d}|)}(\|D(tp)\|)+\chi_{B(0,q^{i+j-N})}(\|C(tp)\|)\chi_{B(0,q^{i+j-N}|\sqrt{d}|)}(\|D(tp)\|)\right).\end{aligned} \tag{6.30}$$

接下来，我们写作 $k=tp$ 并注意到

$$B(0,q^{-j}),B(0,q^{i+j-N}),B(0,q^{-j}|\sqrt{d}|),B(0,q^{i+j-N}|\sqrt{d}|)\subseteq B(0,|u\sqrt{d}|q^{(i-N)/2})$$

由（6.18）可得

$$T_I(i)\ll q^{N-i}\sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\setminus\{0\}\\ |\sigma_{1,2}(k)|<\Delta^{-1}R(i)}}\chi_{B(0,R(i))}\left(\left|\left|\frac{x_1\sigma_1(k)-x_2\sigma_2(k)}{2\sqrt{d}}\right|\right|\right)\chi_{B(0,R(i))}\left(\left|\left|\frac{x_1\sigma_1(k)+x_2\sigma_2(k)}{2}\right|\right|\right), \tag{6.31}$$

其中

$$R(i):=|u\sqrt{d}|q^{(i-N)/2}. \tag{6.32}$$

7. Counting Process

假设我们有一组数对 (x_1, x_2) 的同时丢番图逼近，其逼近数对为 $(\sigma_1(\theta)\ \sigma_2(\theta_2))$，且 $\theta \in K = \mathbb{F}_q(T)(\sqrt{d})$ 满足

$$|x_i - \sigma_i(\theta)| \le \Delta_1 \text{ for } i = 1, 2 \tag{7.1}$$

对于适当的 $\Delta_1 > 0$。于是 (6.31) 给出

$$\begin{aligned} T_I(i) \ll & q^{N-i} \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\setminus\{0\} \\ |\sigma_{1,2}(k)|<\Delta^{-1}R(i)}} \chi_{B(0,\tilde{R}(i))}\left(\left|\left|\frac{\sigma_1(k\theta)-\sigma_2(k\theta)}{2\sqrt{d}}\right|\right|\right)\chi_{B(0,\tilde{R}(i))}\left(\left|\left|\frac{\sigma_1(k\theta)+\sigma_2(k\theta)}{2}\right|\right|\right), \\ = & q^{N-i} \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\setminus\{0\} \\ |\sigma_{1,2}(k)|<\Delta^{-1}R(i)}} \chi_{B(0,\tilde{R}(i))}(||\Im(k\theta)||)\chi_{B(0,\tilde{R}(i))}(||\Re(k\theta)||), \end{aligned} \tag{7.2}$$

其中

$$\tilde{R}(i) = (1 + \Delta_1\Delta^{-1})R(i) \tag{7.3}$$

且 $\Re(f)$ 和 $\Im(f)$ 的定义同 (3.1)。记

$$\theta = \frac{u + v\sqrt{d}}{f + g\sqrt{d}} \tag{7.4}$$

其中 $u, v, f, g \in \mathbb{F}_q[T]$，且 $u + v\sqrt{d}$和 $f + g\sqrt{d}$在 $\mathbb{A}$中互素。根据定理 2，存在无穷多个 $\theta \in K$，使得 (7.1) 成立，其中

$$\Delta_1 := \frac{c_1}{W}, \tag{7.5}$$

其中

$$W := \mathcal{N}(f + g\sqrt{d})$$

且 $c_1 > 0$ 是一个适当常数。

接下来，我们将 (7.2) 最后一行中的求和拆分为

$$O\left(\frac{R(i)^2}{\Delta^2 W} + 1\right)$$

如下形式的子和

$$\Sigma(A_1, A_2) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\setminus\{0\} \\ \sigma_1(k)\in B\left(A_1, \sqrt{\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})}\right) \\ \sigma_2(k)\in B\left(A_2, \sqrt{\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})}\right)}} \chi_{B(0,\tilde{R}(i))}(||\Im(k\theta)||)\chi_{B(0,\tilde{R}(i))}(||\Re(k\theta)||) \tag{7.6}$$

对于适当的 $A_1, A_2 \in \mathbb{F}_q(t)_\infty$。我们声称，对于遍历 $\mathbb{A}$ 并满足条件的 k

$$\sigma_1(k) \in B\left(A_1, \sqrt{\mathcal{N}(f + g\sqrt{d})}\right)$$

and

$$\sigma_2(k) \in B\left(A_2, \sqrt{\mathcal{N}(f + g\sqrt{d})}\right),$$

$k\theta(f + g\sqrt{d}) = k(u + v\sqrt{d})$ 至多覆盖 $\bmod(f + g\sqrt{d})$ 的每个剩余类一次。理由如下。如果

$$k_1(u + v\sqrt{d}) \equiv k_2(u + v\sqrt{d}) \bmod (f + g\sqrt{d}),$$

then

$$k_1 - k_2 \equiv 0 \bmod (f + g\sqrt{d})$$

因为 $u + v\sqrt{d}$ 和 $f + g\sqrt{d}$ 互素。我们有

$$|\sigma_1(k_1 - k_2)| = |\sigma_1(k_1) - \sigma_1(k_2)| \le \max\{|\sigma_1(k_1) - A_1|, |\sigma_1(k_2) - A_1|\} < \sqrt{\mathcal{N}(f + g\sqrt{d})}.$$

类似地,

$$|\sigma_2(k_1-k_2)|<\sqrt{\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})}.$$

Thus

$$\mathcal{N}(k_1-k_2)=|\sigma_1(k_1-k_2)||\sigma_2(k_1-k_2)|<\mathcal{N}(f+g\sqrt{d}).$$

然而，如果 $k_1\neq k_2$，那么 $\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})\mid\mathcal{N}(k_1-k_2)$，这意味着 $\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})\leq\mathcal{N}(k_1-k_2)$。因此，我们得出了矛盾。所以 $k_1=k_2$，从而证明了上述断言。于是

$$\begin{aligned}\Sigma(A_1,A_2)\leq&\sharp\left\{n\in\mathbb{A}:\Re\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right),\Im\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right)\in B(0,\tilde{R}(i))\right\}\\ \leq&\sharp\left\{n\in\mathbb{A}:\sigma_1\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right),\sigma_2\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right)\in B(0,|\sqrt{d}|\tilde{R}(i))\right\}.\end{aligned}\tag{7.7}$$

集合

$$\Lambda(f+g\sqrt{d}):=\left\{\left(\sigma_1\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right),\sigma_2\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right)\right)\in\mathbb{F}_q(t)_\infty:n\in\mathbb{A}\right\}$$

在 K_∞^2 中构成一个格，其余体积为 $|\sqrt{d}|/W$。用此记号，（7.7）可化简为

$$\Sigma(A_1,A_2)\leq\sharp\left(\Lambda(f+g\sqrt{d})\cap B_2(0,|\sqrt{d}|\tilde{R}(i))\right).\tag{7.8}$$

7.1. 格点计数。现在我们旨在建立以下界

$$\sharp\left(\Lambda(f+g\sqrt{d})\cap B_2(0,|\sqrt{d}|\tilde{R}(i))\right)\ll W\tilde{R}(i)^2+1.\tag{7.9}$$

这里的关键在于，不失一般性，可以将 $f+g\sqrt{d}$ 选取为满足

$$|\sigma_1(f+g\sqrt{d})|\asymp\sqrt{\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})}\quad\text{and}\quad|\sigma_2(f+g\sqrt{d})|\asymp\sqrt{\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})}.\tag{7.10}$$

通过用适当的单位同时乘以（7.4）右端分数的分母和分子，可以实现这种情形。

我们有

$$\begin{aligned}&\left(\Lambda(f+g\sqrt{d})\cap B_2(0,|\sqrt{d}|\tilde{R}(i))\right)\\ =&\left\{n\in\mathbb{A}:\frac{1}{W}\left(\sigma_1(n)\sigma_2(f+g\sqrt{d}),\sigma_2(n)\sigma_1(f+g\sqrt{d})\right)\in B_2(0,|\sqrt{d}|\tilde{R}(i))\right\}\\ =&\left\{(a,b)\in\mathbb{F}_q[T]^2:\left((a+b\sqrt{d})(f-g\sqrt{d}),(a-b\sqrt{d})(f+g\sqrt{d})\right)\in B_2\left(0,W|\sqrt{d}|\tilde{R}(i)\right)\right\}.\end{aligned}\tag{7.11}$$

由于我们可以选择 $f+g\sqrt{d}$ 使得（7.10）成立，因此条件

$$\left((a+b\sqrt{d})(f-g\sqrt{d}),(a-b\sqrt{d})(f+g\sqrt{d})\right)\in B_2\left(0,W|\sqrt{d}|\tilde{R}(i)\right)$$

意味着

$$|a+b\sqrt{d}|\ll_d\sqrt{W}\tilde{R}(i)\quad\text{and}\quad|a-b\sqrt{d}|\ll_d\sqrt{W}\tilde{R}(i)$$

进一步有

$$|a|\ll_d\sqrt{W}\tilde{R}(i)\quad\text{and}\quad|b|\ll_d\sqrt{W}\tilde{R}(i).$$

由（7.11）及上述结果，我们推得

$$\begin{aligned}\sharp\left(\Lambda(f+g\sqrt{d})\cap B_2(0,|\sqrt{d}|\tilde{R}(i))\right)\ll&\sharp\left\{(a,b)\in\mathbb{F}_q[T]^2:|a|,|b|\leq C(d)\sqrt{W}\tilde{R}(i)\right\}\\ \ll&W\tilde{R}(i)^2+1,\end{aligned}$$

其中 $C(d)$ 是一个仅取决于 d 的适当常数。这就证明了断言 (7.9).

7.2. 估计 $T_I(i)$。结合 (7.2)、(7.8) 和 (7.9)，我们得到

$$T_I(i) \ll q^{N-i}\left(\frac{R(i)^2}{\Delta^2 W}+1\right)\left(W\tilde{R}(i)^2+1\right). \tag{7.12}$$

回顾 (6.32) 和 (7.3)，我们推得

$$T_I(i) \ll q^{N-i}\left(\left(q^{N-i}\Delta^2 W\right)^{-1}+1\right)\left(\left(1+\Delta_1^2\Delta^{-2}\right)Wq^{i-N}+1\right).$$

此外，回顾 (4.2) 和 (7.5)，可得

$$\frac{q^N\Delta^2\log_q(\alpha\beta)}{|\sqrt{d}|(q-1)^2}\cdot T_I(i) \ll \log_q(\alpha\beta)\left(\left(1+\delta^{-2}W^{-2}q^N\right)q^i+\left(W^{-1}q^N+\delta^2 W\right)+\delta^2 q^{N-i}\right), \tag{7.13}$$

根据 (6.6)，这就是 i 对 T_I 的贡献。

7.3. 排除较小的 i。若 i 较小，则估计式 (7.13) 中的最后一项约为 $\log_q(\alpha\beta)\delta^2 q^N$，这太大了，无法对 T_I 得到非平凡估计。本小节将说明可以排除较小的 i，也就是说，对这些值而言，求和 $T_I(i)$ 实际上为空。为此，考虑到 (7.2)，只需从下方估计 $\max\{||\Re(k\theta)||, ||\Im(k\theta)||\}$ 的大小。

回顾 (7.4)。格 $\tilde{\Lambda}(f+g\sqrt{d})$ 定义为

$$\tilde{\Lambda}(f+g\sqrt{d}) := \left\{\left(\Re\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right), \Im\left(\frac{n}{f+g\sqrt{d}}\right)\right) \in \mathbb{F}_q(t)_\infty^2 : n\in\mathbb{A}\right\}.$$

为简单起见，以下始终记 $\Lambda=\Lambda(f+g\sqrt{d})$ 和 $\tilde{\Lambda}=\tilde{\Lambda}(f+g\sqrt{d})$。显然，若 $k\in\mathbb{A}$，则 $(\Re(k\theta)\ \Im(k\theta))\in\tilde{\Lambda}$。此外，$F_q[T]^2\subseteq\tilde{\Lambda}$。进一步，若

$$0<\mathcal{N}(k)<W=\mathcal{N}(f+g\sqrt{d}), \tag{7.14}$$

则 $k\theta\notin F_q[T]^2$。在此条件下，可得

$$\max\{||\Re(k\theta)||, ||\Im(k\theta)||\} \geq \min_{(\alpha,\beta)\in\tilde{\Lambda}\setminus\{0\}}\max\{|\alpha|,|\beta|\}.$$

为了估计右端，我们注意到

$$\begin{aligned}
\min_{(\alpha,\beta)\in\tilde{\Lambda}\setminus\{0\}}\max\{|\alpha|,|\beta|\} &= \min_{(\mu,\nu)\in\Lambda\setminus\{0\}}\max\left\{\left|\frac{\mu+\nu}{2}\right|,\left|\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{d}}\right|\right\}\\
&\geq \frac{1}{|\sqrt{d}|}\min_{(\mu,\nu)\in\Lambda\setminus\{0\}}\max\left\{\left|\frac{\mu+\nu}{2}\right|,\left|\frac{\mu-\nu}{2}\right|\right\}\\
&= \frac{1}{|\sqrt{d}|}\min_{(\mu,\nu)\in\Lambda\setminus\{0\}}\max\left\{|\mu|,|\nu|\right\}\\
&= \frac{1}{|\sqrt{d}|W}\min_{a+b\sqrt{d}\in\mathbb{A}\setminus\{0\}}\max\left\{\left|(f-g\sqrt{d})(a+b\sqrt{d})\right|,\left|(f+g\sqrt{d})(a-b\sqrt{d})\right|\right\}\\
&\gg \frac{1}{\sqrt{W}}\min_{a+b\sqrt{d}\in\mathbb{A}\setminus\{0\}}\max\left\{\left|a+b\sqrt{d}\right|,\left|a-b\sqrt{d}\right|\right\}\\
&\gg \frac{1}{\sqrt{W}}\min_{(a,b)\in\mathbb{F}_q[T]\setminus\{0\}}\max\left\{|a|,|b|\right\}\\
&\gg \frac{1}{\sqrt{W}},
\end{aligned}$$

其中用到了 (7.10)。根据 (7.2)，我们推得 $T_I(i)=0$ if

$$\Delta^{-1}R(i)\leq W^{1/2} \quad\text{and}\quad \tilde{R}(i)<c_2W^{-1/2}$$

对于某个适当常数 $c_2>0$。结合 (4.2)、(6.32)、(7.3) 和 (7.5)，当 $q^i\leq J$ 时这一条件成立，其中

$$J := c_3\min\left\{\delta^2 W, W^{-1}q^N\right\}$$

对于某个适当常数 $c_3>0$.

7.4. 估计 ng T_I。利用 (6.6)、(7.13)、上述考虑以及 $\log_q(\alpha\beta) \ll N$，我们得到

$$\begin{aligned} T_I \ll & N \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ J<q^i\le\alpha\beta}} \left(\left(1+\delta^{-2}W^{-2}q^N\right)q^i + \left(W^{-1}q^N+\delta^2W\right) + \delta^2q^{N-i}\right) \\ \ll & N^2\left(\left(1+\delta^{-2}W^{-2}q^N\right)\alpha\beta + W^{-1}q^N + \delta^2W\right). \end{aligned} \tag{7.15}$$

8. Transformation of the type-II sum

回顾 (5.10)。根据 (5.6) 中 $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$ 情况下 $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ 的定义，以及 (6.2) 中 $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ 的定义，结合恒等式 (5.7) 和 (6.3)，可得

$$T_{II} \le \frac{q^N\Delta^2}{|\sqrt{d}|(q-1)^2}\cdot \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ \beta<q^i\le q^N/\alpha}} T_{II}(i) \tag{8.1}$$

with

$$T_{II}(i) := \Big| \sum_{\substack{m\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})=q^i \\ m\in S(\mathfrak{m})}} \Lambda(\mathfrak{m}) \sum_{\substack{n\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i} \\ mn\in S(\mathfrak{mn})}} H(\mathfrak{n}) \sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}} \mathcal{E}(mnp)E(mnp)\Big|,$$

其中 $E(l)$ 和 d $\mathcal{E}(l)$ 的定义同 (6.4)。将 (6.5) 中的 t 替换为 m，可推得

$$\begin{aligned} T_{II}(i) =& \Big| \sum_{\substack{m\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})=q^i \\ m\in S(\mathfrak{m})}} \Lambda(\mathfrak{m}) \sum_{\substack{n\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i} \\ mn\in S(\mathfrak{mn}) \\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(mp)|)}} H(\mathfrak{n}) \sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}} \mathcal{E}(mnp)\Big| \\ \le & \sum_{p\in\mathbb{A}\setminus\{0\}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{m})=q^i \\ m\in S(\mathfrak{m})}} \Lambda(\mathfrak{m})\cdot \Big| \sum_{\substack{n\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i} \\ mn\in S(\mathfrak{mn}) \\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(mp)|)}} H(\mathfrak{n})\mathcal{E}(mnp)\Big|. \end{aligned}$$

由于 $mn\in S(\mathfrak{mn})$ 和 $\mathcal{N}(\mathfrak{mn}) = q^N$，我们有

$$q^{N/2}|u|^{-1/2} < |\sigma_{1,2}(mn)| < q^{N/2}|u|^{1/2}. \tag{8.2}$$

同样，由于 $m\in S(\mathfrak{m})$ 和 $\mathcal{N}(\mathfrak{m}) = q^i$，我们有

$$q^{i/2}|u|^{-1/2} < |\sigma_{1,2}(m)| < q^{i/2}|u|^{1/2}. \tag{8.3}$$

由（8.2）、（8.3）以及 $|\sigma_1(m)\sigma_2(m)| = q^i$，可得

$$q^{(N-i)/2}|u|^{-1} < |\sigma_{1,2}(n)| < q^{(N-i)/2}|u|.$$

记 $k = mp$，我们可推得

$$T_{II}(i) \le \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\setminus\{0\} \\ |\sigma_{1,2}(k)|\le\Delta^{-1}|\sqrt{d}u|q^{(i-N)/2}}} a_k\cdot \Big| \sum_{\substack{n\in\mathbb{A} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i} \\ q^{(N-i)/2}|u|^{-1}<|\sigma_{1,2}(n)|<q^{(N-i)/2}|u| \\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(k)|)}} H(\mathfrak{n})\mathcal{E}(nk)\Big|,$$

其中

$$a_k := \sum_{\substack{(m,p)\in\mathbb{A}^2 \\ mp=k \\ m\in S(\mathfrak{m})}} \Lambda(\mathfrak{m}).$$

应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$T_{II}(i)^2 \le A(i)B(i), \tag{8.4}$$

其中

$$A(i) := \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\setminus\{0\}\\ |\sigma_{1,2}(k)|\le\Delta^{-1}|\sqrt{d}u|q^{(i-N)/2}}} |a_k|^2$$

and

$$B(i) := \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\\ |\sigma_{1,2}(k)|\le\Delta^{-1}|\sqrt{d}u|q^{(i-N)/2}}} \Big| \sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{n})=q^{N-i}\\ q^{(N-i)/2}|u|^{-1}<|\sigma_{1,2}(n)|<q^{(N-i)/2}|u|\\ |\sigma_{1,2}(n)|\le|\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_{1,2}(k)|)}} H(\mathfrak{n})\mathcal{E}(nk)\Big|^2.$$

注意，我们现在已经计入了 $k=0$ 的贡献，这得益于 th 的非负性 e 右侧的模。

下面，我们对项 $A(i)$ 进行界定。我们可以将 a_k 显式表示为

$$a_k = \sum_{\substack{m\in\mathbb{A}\\ m|k\\ m\in S(\mathfrak{m})}} \Lambda(\mathfrak{m}) = (q-1)\log_q(\mathcal{N}(k)),$$

这意味着

$$A(i) \ll \log_q^2(\mathcal{N}(k))\left(\Delta^{-1}q^{(i-N)/2}\right)^2 = N^2\Delta^{-2}q^{i-N}. \tag{8.5}$$

接下来我们将处理项 $B(i)$。展开模平方、交换求和次序并利用界

$$H(\mathfrak{n}) \ll \sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{n}} 1 \ll 2^{\log_q\mathcal{N}(n)},$$

我们得到

$$B(i) \ll 2^{2(N-i)} \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{A}\\ q^{(N-i)/2}|u|^{-1}<|\sigma_{1,2}(n_1)|<q^{(N-i)/2}|u|\\ q^{(N-i)/2}|u|^{-1}<|\sigma_{1,2}(n_2)|<q^{(N-i)/2}|u|}} |U(n_1,n_2,i)|, \tag{8.6}$$

其中

$$U(n_1,n_2,i) := \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\\ |\sigma_1(k)|\le L_1(n_1,n_2,k)\\ |\sigma_2(k)|\le L_2(n_1,n_2,k)}} \mathcal{E}(nk)$$

其中 $n=n_1-n_2$ 和

$$L_j(n_1,n_2,i) := \min\left\{\Delta^{-1}|\sqrt{d}u|q^{(i-N)/2}, |\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_j(n_1)|), |\sqrt{d}|/(\Delta|\sigma_j(n_2)|)\right\} \quad \text{for } j=1,2.$$

上面的求和 $U(n_1,n_2,i)$ 可以用与第 6 节中处理式（6.17）所定义的求和 V_{j_1,j_2} 类似的方法处理。（事实上，由于 $\sigma_{1,2}(k)$'s 包含在球中而非球面中，计算会更加简单。）类似于（6.29），我们因此得到

$$U(n_1,n_2,i) \ll L_1L_2\left(\chi_{B(0,L_1^{-1})}(\|C(n)\|)\chi_{B(0,L_1^{-1}|\sqrt{d}|)}(\|D(n)\|) + \chi_{B(0,L_2^{-1})}(\|C(n)\|)\chi_{B(0,L_2^{-1}|\sqrt{d}|)}(\|D(n)\|)\right)$$

其中，当 $j=1$ 时为 $L_j = L_j(n_1,n_2,i)$。记

$$l(i) := \Delta|\sqrt{d}u|q^{(N-i)/2}, \tag{8.7}$$

我们注意到

$$L_1L_2 \le l(i)^{-2} \quad \text{and} \quad L_j^{-1}|\sqrt{d}| \le l(i),$$

其中我们对 (8.6) 中的 n_1 和 n_2 使用求和条件。由此可得

$$U(n_1,n_2,i) \ll l(i)^{-2}\chi_{B(0,l(i))}(\|C(n)\|)\chi_{B(0,l(i))}(\|D(n)\|).$$

将其代入 (8.6)，可得

$$B(i) \ll 2^{2(N-i)}\Delta^{-2}q^{i-N} \sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ |\sigma_{1,2}(n)|<q^{(N-i)/2}|u|}} b_n \cdot \chi_{B(0,l(i))}(\|C(n)\|)\chi_{B(0,l(i))}(\|D(n)\|),$$

其中

$$b_n := \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{A}\\ n=n_1-n_2\\ q^{(N-i)/2}|u|^{-1}<|\sigma_{1,2}(n_1)|<q^{(N-i)/2}|u|\\ q^{(N-i)/2}|u|^{-1}<|\sigma_{1,2}(n_2)|<q^{(N-i)/2}|u|}} 1.$$

显然， $b_n \ll q^{N-i}$。因此，回顾 (6.20) 中 $C(a)$ 和 $D(a)$ 的定义，我们得到以下界

(8.8)

$$B(i) \ll 4^N\Delta^{-2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{A}\\ |\sigma_{1,2}(n)|<q^{(N-i)/2}|u|}} \chi_{B(0,l(i))}\left(\left\|\frac{x_1\sigma_1(n)-x_2\sigma_2(n)}{2\sqrt{d}}\right\|\right)\chi_{B(0,l(i))}\left(\left\|\frac{x_1\sigma_1(n)+x_2\sigma_2(n)}{2}\right\|\right).$$

9. Estimation of the type-II sum

(8.8) 和 (6.31) 中的表达式形式相似。因此，我们可以直接应用第 7 节中的方法。于是，替代 (7.12)，我们得到

$$B(i) \ll 4^N\Delta^{-2}\left(\frac{l(i)^2}{\Delta^2 W}+1\right)\left(\tilde{l}(i)^2W+1\right), \tag{9.1}$$

其中

$$\tilde{l}(i) := \left(1+\Delta_1\Delta^{-1}\right)l(i) \ll \left(1+(\Delta W)^{-1}\right)l(i). \tag{9.2}$$

˜结合 (8.4)、(8.5) 和 (9.1)，利用 (8.7) 和 (9.2) 中 $l(i)$ 与 $l(i)$ 的定义，并开平方，可得

$$T_{II}(i) \ll 2^N N\Delta^{-2}\left(W^{-1/2}+q^{(i-N)/2}\right)\left(\Delta q^{(N-i)/2}W^{1/2}+q^{(N-i)/2}W^{-1/2}+1\right). \tag{9.3}$$

在估计 $T_{II}(i)$ 的整个过程中交换 m 和 n 的角色，我们得到相同的上界，只需用 q^i 替换 q^{N-i}，即

$$T_{II}(i) \ll 2^N N\Delta^{-2}\left(W^{-1/2}+q^{i/2}\right)\left(\Delta q^{i/2}W^{1/2}+q^{i/2}W^{-1/2}+1\right). \tag{9.4}$$

当 $i \le N/2$ 时，我们使用 (9.3)；当 $i > N/2$ 时，则使用 (9.4)。因此，我们将 (8.1) 中关于 i 的求和分为两部分，得到

$$T_{II} \ll T' + T'', \tag{9.5}$$

其中

$$T' := q^N\Delta^2 \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0\\ \beta<q^i\le q^{N/2}}} T_{II}(i) \tag{9.6}$$

and

$$T'' := q^N\Delta^2 \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0\\ q^{N/2}<q^i\le q^N/\alpha}} T_{II}(i). \tag{9.7}$$

利用 (9.3)，我们得到

$$\begin{aligned} T' \ll & 2^N N q^N \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ \beta<q^i\le q^{N/2}}} \left(W^{-1/2}+q^{(i-N)/2}\right)\left(\Delta q^{(N-i)/2}W^{1/2}+q^{(N-i)/2}W^{-1/2}+1\right) \\ \ll & 2^N N q^N \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ \beta<q^i\le q^{N/2}}} \left(\Delta q^{N/2-i/2}+q^{N/2-i/2}W^{-1}+W^{-1/2}+\Delta W^{1/2}+q^{i/2-N/2}\right) \\ \ll & 2^N N^2\left(\Delta q^{3N/2}\beta^{-1/2}+q^{3N/2}W^{-1}\beta^{-1/2}+q^N W^{-1/2}+\Delta q^N W^{1/2}+q^{3N/4}\right) \\ \ll & 2^N N^2\left(\delta q^N\beta^{-1/2}+q^{3N/2}W^{-1}\beta^{-1/2}+q^N W^{-1/2}+\delta q^{N/2}W^{1/2}+q^{3N/4}\right), \end{aligned} \tag{9.8}$$

其中对于最后一个 在直线上，我们使用了关系 $\Delta=\delta/q^{N/2}$。类似地，利用 (9.4)，我们有　　e

$$\begin{aligned} T'' \ll & 2^N N q^N \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ q^{N/2}<q^i\le q^N/\alpha}} \left(W^{-1/2}+q^{-i/2}\right)\left(\Delta q^{i/2}W^{1/2}+q^{i/2}W^{-1/2}+1\right) \\ \ll & 2^N N q^N \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}_0 \\ q^{N/2}<q^i\le q^N/\alpha}} \left(\Delta q^{i/2}+q^{i/2}W^{-1}+W^{-1/2}+\Delta W^{1/2}+q^{-i/2}\right) \\ \ll & 2^N N^2\left(\Delta q^{3N/2}\alpha^{-1/2}+q^{3N/2}W^{-1}\alpha^{-1/2}+q^N W^{-1/2}+\Delta q^N W^{1/2}+q^{3N/4}\right) \\ \ll & 2^N N^2\left(\delta q^N\alpha^{-1/2}+q^{3N/2}W^{-1}\alpha^{-1/2}+q^N W^{-1/2}+\delta q^{N/2}W^{1/2}+q^{3N/4}\right). \end{aligned} \tag{9.9}$$

将 (9.5)、(9.8) 和 (9.9) 合并，我们得到

$$T_{II} \ll 2^N N^2\left(\delta q^N \min\{\alpha,\beta\}^{-1/2}+q^{3N/2}W^{-1}\min\{\alpha,\beta\}^{-1/2}+q^N W^{-1/2}+\delta q^{N/2}W^{1/2}+q^{3N/4}\right). \tag{9.10}$$

10. Proof of Theorem 4

我们回顾一下参数 W 的来源：在第 7 节中，我们同时用数对 $(\sigma_1(\theta)\ \sigma_2(\theta_2))$ 逼近数对 (x_1,x_2)，其中

$$\theta=\frac{u+v\sqrt{d}}{f+g\sqrt{d}}\in K,\quad (u+v\sqrt{d},f+g\sqrt{d})\approx 1.$$

参数 W 是上述分母的范数，即 $W=\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})$。满足我们的假设的 θ 有无穷多个选择，从而得到可能的 W 构成的无限递增序列。现在我们选取这样的 W，并选择依赖于 W 和参数 $\delta<1$ 的 N，使得

$$N:=2\lceil\log_q(\delta W)\rceil$$

从而

$$W\asymp\delta^{-1}q^{N/2}.$$

在这一选择下，(9.10) 化为

$$T_{II}\ll 2^N N^2\left(\delta q^N\min\{\alpha,\beta\}^{-1/2}+q^{3N/4}\right)$$

而 (7.15) 化为

$$T_I\ll N^2(\alpha\beta+\delta q^{N/2}).$$

固定

$$\alpha=\beta:=\delta^2 q^{N/2}$$

回顾（5.8），可知

$$\tilde{\mathcal{T}}(N)-\mathcal{T}(N)\ll 2^N N^2\left(\delta^4 q^N+\delta q^{N/2}+q^{3N/4}\right)\ll_\varepsilon q^{(\log_q 2+\varepsilon)N}\left(\delta^4 q^N+\delta q^{N/2}+q^{3N/4}\right).$$

因此，我们有

$$\tilde{\mathcal{T}}(N) - \mathcal{T}(N) \ll_\varepsilon \delta^2 q^{(1-\varepsilon)N}$$

如果 $q > 2^{12}$ 且

$$q^{-(1/8-\log_q \sqrt{2}-2\varepsilon)N} \le \delta \le q^{-(\log_q 2+2\varepsilon)N}.$$

这证明了定理 4。

11. Proof of Theorem 3

˜回顾 (3.6) 和 (3.7) 中 $\mathcal{T}(N)$ 与 $\mathcal{T}(N)$ 的定义。利用函数域素理想定理，我们得到

$$\mathcal{T}(N) \sim \frac{q^N \delta^2}{|\sqrt{d}|}.$$

将此与定理 4 结合，我们推得，在本定理的假设下，存在一个由正整数组成的无限序列 N 使得

$$\tilde{\mathcal{T}}(N) \sim \frac{q^N \delta^2}{|\sqrt{d}|}$$

每当 δ 满足 (4.4) 时。固定该序列中的一个元素 N，以及一个满足 (4.4) 的 δ。通过标准论证，满足 $k \ge 2$ 的素数幂 $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^k$ 对 $\tilde{\mathcal{T}}(N)$ 的贡献有界于 $O\left(N^2 q^{N/2}\right)$，其中我们利用了 $\omega(\mathfrak{a})$ 有界这一事实。考虑到 δ 的大小，可知剩余贡献满足相同的渐近关系

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}\\ \mathcal{N}(\mathfrak{p})=q^N}} \Lambda(\mathfrak{p})\omega(\mathfrak{p}) \sim \frac{q^N\delta^2}{|\sqrt{d}|},$$

其中 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{A}$ 中的素理想集合。特别地，存在一个素理想 $\mathfrak{p}$，其范数为 $\mathcal{N}(\mathfrak{p}) = q^N$，且满足 $\omega(\mathfrak{p}) > 0$。根据式 (3.5) 中 $\omega(\mathfrak{a})$ 的定义，我们得出存在一个素元 $\pi \in \mathbb{A}$，其范数为 $\mathcal{N}(\pi) = q^N$，且满足

$$\left| x_i - \frac{\sigma_i(p)}{\sigma_i(\pi)} \right| \le \frac{\delta}{q^{N/2}} \quad \text{for } i = 1, 2.$$

选择尽可能小的 δ，即

$$\delta := q^{-(1/8-\log_q \sqrt{2}-2\varepsilon)N},$$

并将 2ε 改为 ε，即可推出式 (3.3)。因此，定理 3 得证。

12. Simplification of the treatment of real quadratic number fields

本文采用的通用方法与 [1], 中的方法类似，那里处理的是实二次数域中的同一问题，但有以下两点不同。首先，我们在此使用 Vaughan 恒等式的一个版本，而不是 Harman筛法；在这一情境下，我们认为前者更为简便。其次，也是更重要的一点，我们在第 7 节中的计数过程不同于 [1, 第 7 节和 8]，而且大为简化。在 [1], 中，计数问题被转化为求解一个由两个线性同余式组成的方程组，其未知数是落在特定范围内的整数数对。为了得到解的数量的可接受上界，作者利用了某个量是二次同余式的根这一事实（见第 8] 节中的第一个同余式），随后用一个分母更小的有理数逼近该根与模之商。为此，他们采用了 Hooley 的一个结果。这迫使他们在论文中引入“好”数对和“坏”数对 (x_1, x_2) 的概念，其中好数对满足某个丢番图约束。他们对好数对所得的最终结果与我们的结果强度相当，但对坏数对的结果则较弱。幸运的是，正如他们所证明的，几乎每个数对 (x_1, x_2) 都是好的。他们甚至给出了好数对的一个显式构造。

在本文中，我们通过将对 k 的求和拆分为若干子和，更直接地处理了计数问题；其中格点 $(\sigma_1(k)\ \sigma_2(k))$ 位于半径为 $\sqrt{\mathcal{N}(f+g\sqrt{d})}$ 的球内（见公式 (7.6)）。接下来只需统计这些球中的格点，任务相对简单。这本可以

以类似的方式在 [1] 中完成，从而避免引入好对与坏对的概念。这里我们不再重复这一过程，而仅指出，对于数域情形，它会导出以下结果。该结果以素理想表述，强化了 [1, 定理 5]，并且是我们定理 3 的一个类比。这里注意到，(3.3) 右端指数中的附加项 $\log_q \sqrt{2}$ 在 q 足够大时会小于 ε，也就是说，当 $q > \exp(\sqrt{2}/\varepsilon)$ 时。

定理 5. 假设 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的类数为 1，其中 d 是满足 $d \equiv 3 \mod 4$ 的正平方自由整数。设 ε 为任意正实数。进一步假设 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \sigma(K)$。那么，在 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的整数环 $\mathcal{O}$ 中存在无穷多个非零素理想 $\mathfrak{p}$，使得

$$\left| x_i - \frac{\sigma_i(p)}{\sigma_i(q)} \right| \leq \mathcal{N}(\mathfrak{p})^{-1/2-1/8+\varepsilon} \quad for\ i = 1, 2$$

对于 $\mathfrak{p}$ 的某个生成元 q 及 $p \in \mathcal{O}$。

References

[1] S. Baier, D. Mazumder, *Diophantine approximation with prime restriction in real quadratic number fields*, 《数学杂志》299, 第 1–2 期, 699–750 (2021). [2] S. Baier, D. Mazumder, M. Technau, *On the distribution of αp modulo one in quadratic number fields*, 《均匀分布理论》16, 第 2 期, 1–48 (2021). [3] S. Baier, E.A. Molla, G. Arijit, *Diophantine approximation with prime restriction in function fields*, 《数论杂志》, 第 241 卷, 57–90 (2022). [4] S. Baier, R.K.Singh, *The large sieve for square moduli in function fields*, 《数论杂志》, 第 235 卷, 第 420–464 页 (2022). [5] S. Baier, M. Technau, *On the distribution of αp modulo one in imaginary quadratic number fields with class number one*, J. Th´eor. Nombres Bordx. 32, 第 3 期, 719–760 (2020). [6] J.W.S. Cassels, A. Fr¨ohlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press (1967). [7] C. Friesen, P. van Wamelen, *Class numbers of real quadratic function fields*, Acta Arith. Journal Profile 81, 第 1 期, 45–55 (1997). [8] G. Harman, 关于 αp 模 1 分布的研究。II, *Proc. London Math. Soc. (3)*, 72(2):241–260 (1996). [9] G. Harman, *Diophantine approximation with Gaussian primes*, Q. J. Math. 70, 第 4 期, 1505–1519 (2019). [10] E. Kowalski, H. Iwaniec, *Analytic number theory*, Colloquium Publications. American Mathematical Society Series Profile 53. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (2004). [11] M. Rosen, *Number theory in function fields*, Graduate Texts in Mathematics 210. New York, NY: Springer (2002).

Stephan Baier Ramakrishna Mission Vivekananda Educational and Research Institute Department of Math- , , , ematics G. T. Road PO Belur Math Howrah West Bengal 711202 India , , , ,*Email address*: stephanbaier2017@gmail.com*URL*:https://www.researchgate.net/profile/Stephan Baier2

-

Esrafil Ali Molla Ramakrishna Mission Vivekananda Educational and Research Institute Department of , , , Mathematics G. T. Road PO Belur Math Howrah West Bengal 711202 India , „ ,*Email address*: esrafil.math@gmail.com