arXiv:2302.01720v1 [math.DG] 3 Feb 2023

高斯映射相关预设平均曲率的带边紧致曲面

Antonio Bueno

科学系

圣哈维尔国防大学中心

E-30729 圣地亚哥-德拉里贝拉，西班牙

Rafael López

几何与拓扑系

格拉纳达大学，格拉纳达，西班牙

摘要

给定定义在单位球面中的C^1函数 $\mathcal{H}$， $\mathcal{H}$-曲面M是欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，其平均曲率H_M 满足$H_M(p) = \mathcal{H}(N^p)$，$p \in M$，其中$N$ 是M的高斯映射。给定一条闭简单曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$和一个函数 $\mathcal{H}$，本文研究张成 Γ 的紧致 $\mathcal{H}$-曲面的几何性质，并以 Γ为依据。在对 $\mathcal{H}$的温和假设下，我们证明闭 $\mathcal{H}$-曲面不存在，这与常平均曲率的经典情形形成对比。我们给出关于 $\mathcal{H}$ 的条件，以确保当 Γ 为圆时，M 是旋转曲面。我们还建立了 $\mathcal{H}$-曲面面积关于曲面高度的估计。

数学主题分类：53A10、53C42、35J93、35B06、35B50。关键词： $\mathcal{H}$-曲面、最大值原理、亚历山德罗夫反射法、平移子。

1 引言

1910年，Bernstein 研究了预设平均曲率方程

$$\mathcal{M}(u) := \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = (1+|Du|^2)^m, \tag{1}$$

其中，m 是一个整数，而$u = u(x)$ 是在 $\mathbb{R}^2$ [4, 5] 的某个区域上定义的函数。左端 $\mathcal{M}(u)$ 是已知的平均曲率算子。在 [4, p. 240], 中，当$m = -1/2$ 时，他将方程（1）称为“曲面方程：曲面上每一点的曲率与该点法线和 z 轴夹角的余弦成比例（相等）”。欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中曲面上的单位法向量场称为高斯映射。受 Bernstein 的启发，本文研究欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$中的紧致曲面，其平均曲率是高斯映射的函数。用偏微分方程术语来说，该方程可视为预设平均曲率方程

$$\mathcal{M}(u) = \mathcal{F}(Du), \tag{2}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 的子集中，其中函数 $\mathcal{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是给定的。尽管关于将 $\mathcal{F}$ 替换为$(x、u)$型函数 的研究文献浩如烟海，但方程（2）所考虑的情形则少得多。正是 Bernstein 证明了：只要$m \le -1/2$，在凸解析区域上，对于任意边界数据，方程（1）的狄利克雷问题都有解。

六十年后，Serrin 在其开创性论文 [31]中重新研究了这一方程。尽管这篇文章主要因其关于常平均曲率方程的狄利克雷问题可解性的研究而广为人知，但 Serrin 还考察了许多其他类型的拟线性椭圆方程。在 [31, 第 477-8], 页中，他再次研究了 Bernstein 所研究方程的狄利克雷问题，将区域的解析性要求改为光滑性，并将结果推广到任意维数。近年来，人们也研究了（2）型方程，尤其是径向解和狄利克雷问题：例如，参见 [2, 3, 11, 12, 13, 14, 15, 26, 27]。

回到方程（1），令人惊讶、甚至颇为费解的是，$m = -1/2$ 的情形，也就是说

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \tag{3}$$

近年来，这一主题引起了广泛关注。方程（3）的解称为平均曲率流的平移孤子，其演化仅通过平移实现。过去二十年来，由于

Huisken 的开创性工作 [18]，平均曲率流理论得到了蓬勃发展。平移孤子是平均曲率流的永恒解，即其演化对所有时刻都存在 $-\infty < t < \infty$。这些曲面尤其引人关注，因为它们会作为平均曲率流中的一种奇点出现。请注意，流可能会产生奇点，也就是说，解会在有限时间内变得不光滑。所谓的 II 型奇点与平移孤子有关，因为如果流中的初始曲面是平均凸的，并且出现了 II 型奇点，那么经过流的重缩放后，极限曲面就是一个平移孤子 [19]。

一种处理方程（2）的策略是：将函数u的图形M 的高斯映射视为欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面时，它是

$$N_p = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}(x), \quad p = (x, u(x)) \in M.$$

若$e_3 = (0, 0, 1)$，则 $\langle N、e_3\rangle = 1/\sqrt{1+|Du|^2}$，其中 $\langle,\rangle$ 是$\mathbb{R}^3$的欧几里得度量。这表明，（2）式右端可表示为 $\mathcal{F}(Du) = \mathcal{H}(N^p)$，其中 $\mathcal{H}$ 是定义在单位球面 $\mathbb{S}^2$上的某个函数。这引出了以下定义：

定义 1.1 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{S}^2$中的一个 C^1 函数。若 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 M 的平均曲率 H_M 满足

$$H_M(p) = \mathcal{H}(N_p), \quad \forall p \in M. \tag{4}$$

注意到，（4）式是一个依赖于曲面高斯映射的预设平均曲率方程。对高斯映射的这种依赖，使得由（4）定义的曲面可视为一种各向异性平均曲率方程 [2]。研究洛伦兹-闵可夫斯基空间中的超曲面时，文献 [14] 中的作者将 $\mathcal{F}$为 $\mathcal{F}(x, u, Du)$ 的情形称为“梯度依赖的预设平均曲率方程”。关于上述定义，最后补充一点：若将（4）式中的平均曲率替换为高斯曲率，则相应方程的解恰好就是著名的卵形体闵可夫斯基问题 [28]的解。

对于给定函数的某些特定选取，会出现一些经过深入研究的几何理论。以下列举几个例子：

1. 常平均曲率曲面（简称常平均曲率曲面）。此处 $\mathcal{H} = H_0 \in \mathbb{R}$为常数。若 $H_0 = 0$，则得到极小曲面。

2. λ-平移子。给定函数为 $\mathcal{H}(x) = \langle x,\mathbf{w}\rangle + \lambda$，其中 $\mathbf{w} \in \mathbb{S}^2$ 且$\lambda \in \mathbb{R}$。向量 $\mathbf{w}$ 称为密度向量。当 $\lambda = 0$ 时，我们得到平均曲率流的平移孤子。

3. 平均曲率流幂孤子。这些曲面的平均曲率为 $H_M(p) = \langle N^p, v\rangle^\alpha + \lambda$，其中 $\alpha > 0$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$。当 $\alpha > 1$ 时，这些曲面是关于 $\mathcal{H}(x) = \langle x,v\rangle^\alpha + \lambda$ 的 $\mathcal{H}$-曲面。注意，$\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$。

第一作者最近与 Gálvez 和 Mira 合作，以常平均曲率曲面和平移孤子理论为出发点，发展了完备非紧致 $\mathcal{H}$-曲面的理论 [9, 10], 。另见 [7, 23] ，其中研究了不变的 λ-平移子；以及 [6, 8] ，其中讨论了更一般的 $\mathbb{R}^3$线性魏因加滕给定曲率问题。

尽管上述论文已展示了完备 $\mathcal{H}$-曲面的主要性质，但关于带边界的紧致 $\mathcal{H}$-曲面，我们所知甚少。当 $\mathcal{H}$ 为常数时，关于这一主题已有大量文献；例如，参见 [22] ，了解该理论的发展概况。平移孤子 [29]和 λ-平移子 [24], 也曾受到这类研究的关注，但据我们所知，尚无专门针对任意给定函数 $\mathcal{H}$的研究。为明确术语，设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 为一条闭曲线，$\psi : M \to \mathbb{R}^3$ 为带边界的曲面 M 的一个浸入，边界为 ∂M。我们称 Γ 为M 的边界（若浸入 ψ 已明确），当且仅当 $\psi_{|\partial M}$ 是到 Γ上的微分同胚。当我们将M 视为浸入于 $\mathbb{R}^3$ 时，只要两者微分同胚，我们就不区分 Γ 与 ∂M，并通常称 M 张成 Γ。本文要解决的主要问题是研究紧致 $\mathcal{H}$-曲面的几何性质与其边界之间的关系。例如，我们希望M 继承 Γ的对称性；或者，对于给定曲线 Γ，并非每个 $\mathcal{H}$ 都适用于存在一个边界为 Γ的 $\mathcal{H}$-曲面。

基于上述例子，本文将运用常平均曲率曲面理论中的思想和技巧来研究方程 (4) 的解。这为与 (2) 相关的问题增添了几何视角。例如，我们将使用 Alexandrov 提出的移动平面法；他证明了球面是 $\mathbb{R}^3$, [1] 中唯一的紧致嵌入常平均曲率曲面。后来，Serrin 在研究椭圆超定问题时也使用了同一方法 [32]。

根据公式 (4)，以下是 $\mathcal{H}$-曲面的三个基本性质，将帮助我们研究这些问题：(1) $\mathcal{H}$-曲面在欧氏平移下保持不变；(2) $\mathcal{H}$-曲面局部上是拟线性椭圆偏微分方程的解，因此最大值原理适用；(3) $\mathcal{H}$ 在 $\mathbb{S}^2$ 中的任意对称性都会诱导出 $\mathbb{R}^3$ 的线性等距变换，该变换将 $\mathcal{H}$-曲面映射为 $\mathcal{H}$-曲面。然而，$\mathcal{H}$ 的任意性还会带来必须加以考虑的其他困难。例如，一般而言，$\mathcal{H}$-曲面并不是涉及

面积或体积等几何测度的变分问题的解。另一方面，我们还需要考虑公式 (4) 对称性的丧失。例如，关于任意平面对 $\mathcal{H}$-曲面进行反射后，所得曲面不一定是 $\mathcal{H}$-曲面，除非该平面是 $\mathcal{H}$的对称平面。在我们将得到的一些结果中，我们会比较常平均曲率曲面的类似情形，并强调其中存在的差异（如果有的话）。

本文的组织结构如下。第 2 节陈述最大值原理和比较原理，它们是获得下文大多数结果的基石。我们分析闭 $\mathcal{H}$-曲面的存在与不存在，并在命题 2.4 中证明，条件 $\mathcal{H} \neq 0$ 是闭 $\mathcal{H}$-曲面存在的必要条件。然而，与常平均曲率情形不同，命题 2.5 揭示，条件 $\mathcal{H} \neq 0$ 并不足以保证闭 $\mathcal{H}$-曲面的存在。第 3 节探讨 Γ 的对称性是否会被继承到张成 Γ的紧致 $\mathcal{H}$-曲面上。研究这一问题的常用方法是所谓的 Alexandrov 反射技术，而我们发现的一个主要难点是，具有平面边界的紧致曲面可能有点落在其边界所在平面的两侧，这与常平均曲率情形相同。第 4 节给出保证紧致 $\mathcal{H}$-曲面位于包含其边界的平面一侧的充分条件：定理 4.1 和 4.3。作为 $\mathcal{H}$-曲面的一种特殊但重要的情形，这些结果将应用于满足 $|\lambda| \leq 1$时的 λ-平移子。最后，第 5 节根据到边界的高度，建立具有平面边界的紧致$\mathcal{H}$-曲面面积估计（定理 5.1）。

2 $\mathcal{H}$-曲面的最大值原理及初步推论

本节陈述 $\mathcal{H}$-曲面的最大值原理，以推广常平均曲率曲面的经典情形。设 (x_1,x_2,x_3) 为 $\mathbb{R}^3$的典范坐标，令 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 表示 $\mathbb{R}^3$的标准基。给定 $\mathbb{R}^3$中的一个 $\mathcal{H}$-曲面，我们可以在每个切平面上将其局部表示为函数 u 的图形，其中 u 是一个椭圆型二阶拟线性偏微分方程的解。具体而言，若 $u = u(x_1,x_2)$，则 u 满足方程

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 2\mathcal{H}\left(\frac{(-Du,1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right), \tag{5}$$

其中 div、D 分别表示 $\mathbb{R}^2$上的散度和梯度算子。依此，式 (5) 可表示为 $Q(u) = 0$，其中

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,u,Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x,u,Du), \quad x = (x_1, x_2).$$

因此，两个$Q(u) = 0$ 解之差满足一个线性椭圆方程。项$b(x,u,Du)$ 汇集了式 (5) 的右端。为了在内部以及边界版本中应用 Hopf 极大值原理，要求b 关于变量Du [16, 连续可微。92], 因此，我们要求定义 1.1 中的函数 $\mathcal{H}$ 为C^1。最大值原理的几何版本如下：

引理 2.1（$\mathcal{H}$曲面的最大值原理）设 M_1,M_2 是两个 $\mathcal{H}$曲面，其边界可以是光滑的。假设以下两个条件之一成立：

1. 存在 $p \in \text{int}(M_1) \cap \text{int}(M_2)$，使得$(N_1)^p = (N_2)^p$，其中 N_i 是 M_i的高斯映射。

2. 存在 $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$，使得$(N_1)^p = (N_2)^p$ 且 $\nu_1(p) = \nu_2(p)$，其中 ν_i表示 ∂M_i的内单位余法向量。

若 M_1 在 p 附近位于 M_2 的一侧，则 $M_1 = M_2$。

在常平均曲率曲面理论中，最大值原理应用于极小曲面时有一个更强的版本，即所谓的切触原理。它指出，无论选择何种定向，两个极小曲面都不能有一个公共切点，且其中一个位于另一个的一侧。这是因为反转极小曲面的定向不会改变相应的偏微分方程。依照这一思路，对于某类函数 $\mathcal{H}$，我们有相应的 $\mathcal{H}$-曲面切触原理。

推论 2.2（$\mathcal{H}$-曲面的切触原理）设 $\mathcal{H}$ 使得 $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$，$x \in \mathbb{S}^2$。若 M_1, 和 M_2 是两个 $\mathcal{H}$-曲面，且 M_1 位于 M_2, 的一侧，则 $M_1 = M_2$。

证明：设M_1 在某个公共点p_0（内部点或边界点）附近位于M 的一侧。如果$(N_1)^{p_0} = (N_2)^{p_0}$，那么我们应用 $\mathcal{H}$-曲面的最大值原理即可得到结论。否则，也就是说，当$(N_1)^{p_0} = -(N_2)^{p_0}$时，我们反转定向

于M_1。于是M_1 在这一定向下也是一个 $\mathcal{H}$-曲面，因为其平均曲率H'_{M_1} 满足：对于所有 $p \in M_1,$，都有

$$H'_{M_1}(p) = -H_{M_1}(p) = -\mathcal{H}((N_1)_p) = \mathcal{H}(-(N_1)_p).$$

那么，我们再次满足条件，可以在$p_0,$附近应用 $\mathcal{H}$-曲面的最大值原理，从而得到结论。□

满足条件 $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$ 的函数 $\mathcal{H}$ 的一些例子有 $\mathcal{H}(x) = \langle x,v\rangle^n$，其中$v \in \mathbb{S}^2$ 为固定值，且n 为奇数（$n = 1$ 对应于平移孤子）；此外还有 $\mathcal{H}(x) = \sin(\langle x,v\rangle)$，其中$v \in \mathbb{S}^2$为固定值。

下面的结果是经典平均曲率比较原理在 $\mathcal{H}$-曲面上的推广。

引理 2.3（$\mathcal{H}$-曲面的比较原理）设 M_i 为 $\mathcal{H}_i$-曲面，$i = 1,2$。假设存在 $p \in M_1 \cap M_2$，使得$(N_1)^p = (N_2)^p$。若 M_1 在 p $_2$附近局部位于 M 之上，则 $\mathcal{H}_1((N_1)^p) \geq \mathcal{H}_2((N_2)^p)$。

本文将始终运用以下基本性质。设 $v \in \mathbb{S}^2$ 并假设 $\mathcal{H}(v) = 0$。那么显然，任何由 v 定向的平面都是一个 $\mathcal{H}$-曲面，无论 $\mathcal{H}$ 是否恒等于 0。接下来我们将说明，在同一类 $\mathcal{H}$-曲面中，可以有彼此差异很大的不同类型的例子。取某个 $\varepsilon \in (0,1)$，并定义

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \leq 0 \\ g(t), & \text{if } t \in [0,\varepsilon] \\ 0, & \text{if } t \geq \varepsilon, \end{cases}$$

其中 $g(0) = 1,g(\varepsilon) = 0$，$g$ 单调递减，且f 属于 C^∞ 类。定义 $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ 为 $\mathcal{H}(x) = f(\langle x, e_3\rangle)$。一些 $\mathcal{H}$-曲面如下：

1. 取向向下的上半球面 $\mathbb{S}^2_+$（或其任意开子集）。

2. 任何由 v 定向的平面，其中 $v \in \mathbb{S}^2$ 满足 $\langle v,e_3\rangle \geq \varepsilon$。

请注意，同一类 $\mathcal{H}$-曲面中平面与半球面并存，并不违反最大值比较原理，也不违反平均曲率比较原理。

事实上，如果它们在某点相切，其单位法向量必然相反；否则，它们就不再是 $\mathcal{H}$-曲面，因为不满足条件 (4)。

现在我们推导最大值原理的一些直接推论。给定 $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$，我们关注闭（紧致且无边界） $\mathcal{H}$-曲面的存在性。当 $\mathcal{H}$ 为正的常数时，确实存在这样的闭曲面，即球面。当 $\mathcal{H}$ 恒等于零时，情况就大不相同了，因为众所周知，闭极小曲面不存在。以下结果证明，只需$\mathcal{H}$ 在 $\mathbb{S}^2$ 上的某一点取零，就足以排除闭 $\mathcal{H}$-曲面的存在。

命题2.4 设 $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$。若 $\mathcal{H}$ 在某一点取零，则 $\mathbb{R}^3$中不存在闭 $\mathcal{H}$-曲面。

证明：反设M是一个闭$\mathcal{H}$-曲面。不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{H}(e_3) = 0$。设 Π 为方程 $x_3 = 0$所确定的平面，并以e_3为其定向。经过一次竖直平移，并利用M的紧致性，我们可以假设M 包含于半空间 $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$，且$M \cap \Pi \neq \emptyset$。设$p_0 \in M \cap \Pi$。由于 p_0 是M的一个内点，因此$N_{p_0} = \pm e_3$。

若 $N^{p_0} = e_3$,，我们在平面 Π 与M 之间应用 $\mathcal{H}$-曲面的最大值原理，便可得出$M \subset \Pi$。这与M 是闭的相矛盾。因此，$N^{p_0} = -e_3$。现在考虑以向量 $-e_3$定向的 Π。$\mathcal{H}$-曲面的比较原理给出 $\mathcal{H}(-e_3) \leq 0$。此外，$\mathcal{H}(-e_3) < 0$；因为若 $\mathcal{H}(-e_3) = 0$，就会与最大值原理相矛盾。

再次利用紧致性，设 $p_1 \in M$ 是 Π 上的最大高度点，P 是M 在p_1处的仿射切平面。此处有 $N_{p_1} = \pm e_3$。若 $N^{p_1} = e_3$，则与最大值原理相矛盾。若 $N^{p_1} = -e_3$,，则M 在p_1附近局部位于P 上方，但 $\mathcal{H}(-e_3) < 0$，这与比较原理相矛盾。无论如何，我们都得到了所需的矛盾。□

根据这一结果，条件 $\mathcal{H} \neq 0$ 是闭 $\mathcal{H}$-曲面存在性的必要条件。与 $\mathcal{H}$ 为非零常数的情形相同，可以预期条件 $\mathcal{H} \neq 0$（例如 $\mathcal{H} > 0$）也是闭 $\mathcal{H}$-曲面存在性的充分条件。然而，以下结果给出了正函数 $\mathcal{H}$ 的例子，对于这些函数，不存在闭 $\mathcal{H}$-曲面。

命题 2.5 设 $\mathcal{H}$ 满足 $\mathcal{H}(x) = h_0(x) + \lambda$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $h_0 \in C^1(\mathbb{S}^2)$ 不恒为零。若存在 $v \in \mathbb{S}^2$ 使得对所有 $x \in \mathbb{S}^2$，都有 $h_0(x)\langle x,v\rangle \geq 0$，则不存在闭的 $\mathcal{H}$-曲面。

证明：反设 M 是一个闭的 $\mathcal{H}$-曲面，且 $\mathcal{H} = h_0 + \lambda$ 在命题的假设下有定义。由$f(p) = \langle p, v\rangle$ 定义的函数 $f \in C^\infty(M)$ 满足 $\Delta f = 2H\langle N, v\rangle$，其中 Δ 是M上的拉普拉斯算子。由于 $\partial M = \varnothing$，散度定理给出

$$0 = \int_M \mathcal{H}(N)\langle N, v\rangle \, dM = \int_M h_0(N)\langle N, v\rangle \, dM + \lambda \int_M \langle N, v\rangle \, dM.$$

第二个积分为零，因为M 是闭的。因此，第一个积分也必为零，但根据假设，$h_0(N)\langle N,v\rangle \geq 0$ 和h_0 并非恒为零，由此得出所需的矛盾。□

满足命题 2.5 假设的正函数 $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ 的例子如下：

1. 令 $v \in \mathbb{S}^2$。对于 $\lambda > 1$ 且n 为奇自然数的情形，定义 $\mathcal{H}(x) = \langle x,v\rangle^n + \lambda$。
2. 令$v \in \mathbb{S}^2$。对于 $\lambda > 2$，定义 $\mathcal{H}(x) = \langle x,v\rangle(1 + \sin(\langle x,v\rangle)) + \lambda$。

最后两个结果表明，在对 $\mathcal{H}$作出温和假设的条件下，不存在闭的 $\mathcal{H}$-曲面。因此，对于这些给定函数，任何紧致的 $\mathcal{H}$-曲面都有非空边界。这使得研究带边界的紧致 $\mathcal{H}$-曲面不仅顺理成章，而且十分必要。

给定一条简单闭曲线 Γ，我们研究这一问题的首要方法是，根据 Γ 的几何性质，为 $\mathcal{H}$ 曲面张成 Γ 的存在性推导出关于 $\mathcal{H}$ 的一些限制。在常平均曲率曲面理论中，已知给定一条闭曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$，并非所有 $H \in \mathbb{R}$ 都允许存在张成 Γ 的 H-曲面。Heinz [17] 最初证明了这一点，后来又利用常平均曲率曲面的通量公式将其推广：详情见 [22]。例如，若 Γ 是一条闭简单曲线，则 $|H| \leq L/(2\text{面积}(\Omega))$，其中 L 是 Γ 的长度，而 Ω 是由 Γ 围成的平面区域。据作者所知，在 $\mathcal{H}$-曲面理论中尚无通量公式的类似物。尽管如此，对于曲面为图形的情形，我们仍能证明一个类似的必要条件。

命题 2.6 设 Γ 是包含在平面 $\Pi = v^\perp$、$v \in \mathbb{S}^2$ 中的一条闭简单曲线。若 $\mathcal{H} > 0$ 是定义在 $\mathbb{S}^2$ 上的 C^1 函数，则紧致 $\mathcal{H}$-图形张成 Γ 的存在性有一个必要条件，即

$$\mathcal{H}_{\min} := \min\{\mathcal{H}(x) : x \in \mathbb{S}^2\} \leq \frac{L}{2\,\text{area}(\Omega)},$$

其中，L 是 Γ 的长度，而 $\Omega \subset \Pi$ 是由 Γ 围成的区域。

证明：由 (5) 和散度定理可得

$$\int_\Omega 2(\mathcal{H}\circ N)\,d\Omega = \int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{(-Du,1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)\,d\Omega = \int_{\partial\Omega}\langle\frac{(-Du,1)}{\sqrt{1+|Du|^2}},\mathbf{n}\rangle\,ds \le L,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 Π的平面曲线 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。由于 $\mathcal{H}>0$，上述等式中的第一项可由下方估计为 $2\mathcal{H}_{min}\int_\Omega d\Omega$，从而得到所需结论。□

回到命题 2.4，可以预期，如果 $\mathcal{H}(v)=0$，那么 $\mathcal{H}$-曲面的性质将类似于极小曲面。以下结果通过推广极小曲面的凸包性质强调了这种关系。该性质指出，任何紧致极小曲面都必须包含在其边界的凸包内。

命题 2.7 设 Γ 是 $\mathbb{R}^3$中的一条闭曲线。设 $\mathcal{H}\in C^1(\mathbb{S}^2)$ 满足 $\mathcal{H}(\pm v)=0$，其中某个 v 满足 $\in\mathbb{S}^2$。若 M 是边界为 Γ的紧致 $\mathcal{H}$-曲面，则 M 包含于带状区域

$$\{x\in\mathbb{R}^3:\mu_1(v)\le\langle x,v\rangle\le\mu_2(v)\},$$

其中

$$\mu_1=\min\{\langle p,v\rangle:\ p\in\Gamma\},\quad \mu_2(v)=\max\{\langle p,v\rangle:\ p\in\Gamma\}.$$

证明：经过坐标变换后，假设 $\mathrm{v}=\mathrm{e}_3$。反设 M 含有第三坐标 x_3 大于 $\mu_2(\mathrm{e}_3)$ 的点。取 $\mathrm{p}\in\mathrm{M}$ 为 M 的最高点，特别地，它满足 $\mathrm{x}_3(\mathrm{p})>\mu_2(\mathrm{e}_3)$，因此 p 是 M 的内点。此外，$\mathrm{N}^p=\mathrm{e}_3$ 或 $\mathrm{N}^p=-\mathrm{e}_3$。以向量 N^p为定向，给（仿射）切平面 $\mathrm{T}^p\mathrm{M}$ 定向。由于 $\mathcal{H}(\mathrm{N}^p)=0$，$\mathrm{T}^p\mathrm{M}$ 是一个 $\mathcal{H}$-曲面，最大值原理蕴含 M 包含于 $\mathrm{T}^p\mathrm{M}$ 中：这就产生了矛盾，因为$\Gamma\cap\mathrm{T}^p\mathrm{M}=\emptyset$。□

3 $\mathcal{H}$ 曲面的 Alexandrov 方法

在本节中，我们研究简单闭曲线 Γ 的几何如何决定张成它的紧致 $\mathcal{H}$ 曲面的形状。一个首先值得探讨的问题是，边界曲线 Γ 的对称性是否会传递到紧致 $\mathcal{H}$ 曲面上。实现这一目的的主要工具是所谓的 Alexandrov 反射技巧。与常平均曲率情形的一个主要区别在于，对于任意给定的函数 $\mathcal{H}$，我们必须考虑到所得

由 $\mathcal{H}$ 曲面满足的偏微分方程的对称性损失。事实上，关于任意平面的反射不再会将一个 $\mathcal{H}$ 曲面映射为一个 $\mathcal{H}$ 曲面。因此，以下结果的第三个假设至关重要。

定理3.1 设 Γ 是包含在平面 Π中的一条闭简单曲线。假设 *t:*

1. Γ 关于垂直于 Π的平面 P 的反射对称，
2. P 将 Γ 分成两个以直线 $\Pi \cap P$ 为底的图形。
3. $\mathcal{H}$ 关于平行于该向量平面的反射保持不变 *P.*

若 M 是一个紧致的嵌入式 $\mathcal{H}$-曲面，张成 Γ，且 M 位于 Π的一侧，则 M 关于 P 对称。

证明：经过坐标变换后，设 Π 是方程 $x_3 = 0$所表示的平面，且P 是方程$x_1 = 0$所表示的平面。设 $\Omega \subset \Pi$ 为由 Γ围成的区域。由于M 是嵌入的，$M \cup \Omega$ 定义了一个闭曲面，它可能沿$M \cap \Omega$奇异，并围成 $\mathbb{R}^3$中的一个区域W。不失一般性，设$M \subset \{x_3 \geq 0\}$。令M 定向，使N 指向W的内部。

对于任意 $t \in \mathbb{R}$，记 P_t 为方程 $x_1 = t$ 确定的平面。定义 $M(t)^- =$为 $M \cap \{x_1 \leq t\}$，$M(t)^+ =$ 为 $M \cap \{x_1 \geq t\}$，$M(t)^*$ 为 $M(t)^+$ 关于 P_t的反射。此时，定理 3.1 的假设中的第三项允许我们断言，$M(t)^*$ 仍是一个 $\mathcal{H}$-曲面，其定向为 $M(t)^*$ 上的 N^*，其中 $N^* = R^{P_t}(N)$。这里，R^{P_t}表示关于平面 P_t的反射。事实上，若 $q \in M(t)^*$，则存在 $p \in M(t)^+$，使得 $q = R^{P_t}(p)$。于是

$$H_{M(t)^*}(q) = H_{M(t)^+}(p) = \mathcal{H}(N_p) = \mathcal{H}(R_{P_t}(N_p)) = \mathcal{H}(N_q^*),$$

这里我们利用了恒等式 $\mathcal{H} = \mathcal{H} \circ R^{P_t}$，这是由假设中的第三项得出的。

尽管该定理的证明是标准的，为求完整起见，我们仍概述其证明，以强调定理 3.1 陈述中的第三个假设在何处起关键作用。反设 M 关于 P 不对称。于是存在 M 上两点 $q_1, q_2 \in M \backslash \Gamma$，使得直线 q_1q_2 垂直于 P，q_1 和 q_2 位于 $\mathbb{R}^3 \backslash P$ 的不同连通分支中，且 $\mathrm{dist}(q_1, P) \neq \mathrm{dist}(q_2, P)$；不失一般性，设 $x_1(q_2) < 0 < x_1(q_1)$。若记 x^* 为 x 关于 P 的反射像，则 $x_1(q_1^*) < x_1(q_2)$。

由 M 的紧致性，当 t 足够大时，我们有 $P_t \cap M = \varnothing$。令 t 逐渐减小，直到到达首次接触点出现的时刻 $t_0 > 0$，此时 P_{t_0} 与 M 首次接触；由于 $x_1(q_1) > 0$，我们知道 $t_0 > 0$。M 的嵌入性以及 M 位于 Π 上方这一条件，保证存在 $\varepsilon > 0$，使得对每个 $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$，均有 $\mathrm{int}(M(t)^*) \subset W$。由 M 的紧致性并逐渐减小 t，我们定义

$$t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R} : \ \mathrm{int}(M(t)^*) \subset W \text{ and } M(t)^* \text{is a graph over } \Pi_t\}.$$

由于 Π 是 Γ的对称平面，$t_1 \geq 0$。对于 $t < t_1$, 无论t 未能成为下确界的原因是什么，都会发生$M(t)^* \not\subset W$。在我们的情形中，由于存在$\overline{q_1}, q_2$ 使得$x_1(q_1^*) < x_1(q_2) < 0$，$t_1 > 0$。

由于 $M(t)^+$ 是关于 P_t 的图形 $> t_1$，并且 $\Gamma \cap \{x_1 > 0\}$ 也是关于直线 $P \cap \Pi$的图形，因此有 $\partial M(t_1)^* \cap \Gamma \subset P_{t_1}$。后一个假设也至关重要，因为第一个交点 p 可能位于 Γ，而在该点，曲面 $M(t_1)^*$ 和 $M(t_1)^-$ 均不相切。p 的情况有两种:

1. 存在 $p \in \mathrm{int}(M(t_1)^*) \cap \mathrm{int}(M(t_1)^-)$。由于 p 是一个内点，$M(t_1)^*$ 和 $M(t_1)^-$ 相切，且两个曲面的定向都指向 W 的内部，因此特别地，它们的定向一致。最大值原理意味着 $M(t_2)^* = M(t_2)^-$，从而 P_{t_1} 是 M 的对称平面。然而，这与 Γ不关于 P_{t_1}反射不变相矛盾。

2. 曲面 M 在某个 $p \in \partial$处与 P_{t_1} 正交，其中 $M(t_1)^* \cap \partial$和$M(t_1)^-$。这一次，我们使用最大值原理的边界版本，得出 P_{t_1} 是M的对称平面，这再次导致矛盾。

这意味着 M 关于 P具有对称性，从而证明了该结果。 □

在定理 3.1 的假设下给定函数的一些例子 e

$$\mathcal{H}(x) = \langle x, v\rangle^\alpha + \lambda, \quad x \in \mathbb{S}^2,$$

其中 $\alpha \geq 1$（以确保 $\mathcal{H}$ 是C^1）且 $\lambda \in \mathbb{R}$。事实上，若P 是一个包含v 的向量平面，且 R_P 是关于P的反射，则对于每个$x \in \mathbb{S}^2$，都有 $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(R^p(x))$。特别地，若$M$ 是一个 $\mathcal{H}$-曲面，则关于任意平行于P 的平面的反射仍是一个 $\mathcal{H}$-曲面。

对于上述对称性质适用于每个包含v的向量平面的特殊情形，$\mathcal{H}$ 在任何保持v方向逐点不变的 $\mathbb{S}^2$ 旋转下也保持不变。我们的目的是得出结论：当M 的边界是一个圆时，它是旋转对称的 $\mathcal{H}$-曲面。为此，我们给出以下定义。

定义 3.2 设 v 为 $\in \mathbb{S}^2$。若存在 $\mathfrak{h} \in C^1([-1,1])$，使得函数 $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ 满足以下条件，则称其为绕 v 方向旋转对称的

$$\mathcal{H}(x) = \mathfrak{h}(\langle x, v\rangle), \quad \forall x \in \mathbb{S}^2.$$

因此，如果 $\mathcal{H}$ 绕某个方向v旋转，那么绕任何与v 平行的直线进行旋转，都会将 $\mathcal{H}$-曲面映射为 $\mathcal{H}$-曲面，特别是，旋转对称$\mathcal{H}$-曲面的概念定义明确。关于旋转对称 $\mathcal{H}$-曲面的深入研究与分类（包括德洛内型分类定理的建立），请参阅 [9] 。此外，作为对线性魏因加滕关系进行更一般研究的一个特例，文献 [6] 给出了旋转对称 $\mathcal{H}$-曲面M^+（分别为M^-）存在的充要条件；该曲面与旋转轴正交相交，且单位法向量为$N = v$（分别为$N = -v$）。下面的结果给出了$M^{\pm}$的刻画。

推论 3.3 设 $\mathcal{H}$ 是绕 $v \in \mathbb{S}^2$旋转对称的函数。设 Γ 是平面 $\Pi = v^{\perp}$中的一个圆，且该平面 Π 以 v 为定向。假设 M 是一个紧致的、嵌入的 $\mathcal{H}$-曲面，张成Γ，并位于 Π的一侧。

1. 若 M 位于 Π 上方，则 $\mathcal{H}(-v) > 0$，且 $M = M^-$。
2. 若 M 位于 Π 下方，则 $\mathcal{H}(v) > 0$，且 $M = M^+$。

4 具有平面边界的紧致 $\mathcal{H}$-曲面

作为定理 3.1 的推论，研究能确保具有平面边界的嵌入紧致 $\mathcal{H}$-曲面位于边界平面一侧的条件颇有意义。我们将证明两个相关结果。第一个结果推广了常平均曲率曲面的类似情形 [20]。

定理 4.1 设 Π 为一个平面，$\Gamma \subset \Pi$ 为一条围成区域 Ω的闭简单曲线，并设 $\mathrm{ext}(\Omega) = \Pi \backslash \overline{\Omega}$。若 M 是一个跨越 Γ 且 $M \cap \mathrm{ext}(\Omega) = \varnothing$的紧致嵌入 $\mathcal{H}$-曲面，则 $\mathrm{int}(M)$ 包含于由 Π确定的两个闭半空间之一中。

证明：不失一般性，我们假设 Π 是方程 $x_3 = 0$ 所定义的平面。令 $\mathbb{S}^1(r) \subset \Pi$ 为半径为r 的圆，并令 $\mathbb{S}^2_+(r)$ 为半空间$\{x_3 \geq 0\}$中的上半球，其中 $\partial \mathbb{S}^2_+(r) = \mathbb{S}^1(r)$，而 $D(r)$ 是由 $\mathbb{S}^1(r)$ 所围成的圆盘。由于M 是紧的，

取足够大的r，使得$M \cap \{x_3 \geq 0\}$严格包含于由$D(r) \cup \mathbb{S}^2_+(r)$所界定的区域内。在这种情形下，

$$K = M \cup (D(r) \backslash \Omega) \cup \mathbb{S}^2_+(r)$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的嵌入闭曲面，沿 $\Gamma \cup \mathbb{S}^1(r)$ 可能并不光滑，并且它围成 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域W。设 M 的单位法向量为 N，并在 K 上取定向 $\tilde{N}$，使得$\tilde{N}|_M = N$。于是，N 指向W 的内部或外部。我们假设 N 指向W 的内部；否则，论证类似。

用矛盾法，假设 M 在 Π 的两侧都有内点。设 p、q $\in$int(M) 分别为高度最小点和最大点，满足 $x_3(p) < 0$ 且 $x_3(q) \geq 0$（若 $x_3(p) \leq 0$ 且 $x_3(q) > 0$，论证类似）。由于 N 指向 W 的内部，因此 $N_p = N_q = e_3$。设 T_pM 和 T_qM 分别为 M 在 p 和 q 处的仿射切平面，并取单位法向量 e_3 定向。由于 M 在 p 附近局部位于 T_pM 上方（在 q 附近局部位于 T_qM 下方），由平均曲率比较原理可得 $H_M(p) \geq 0$ 且 $H_M(q) \leq 0$。因此

$$0 \leq H(p) = \mathcal{H}(N_p) = \mathcal{H}(e_3) = \mathcal{H}(N_q) = H(q) \leq 0.$$

因此 $\mathcal{H}(e_3) = 0$。于是，T_pM和T_qM都是 $\mathcal{H}$-曲面。将 $\mathcal{H}$-曲面的最大值原理应用于M和T_pM，可知M包含于T_pM中。这与 Γ 不包含于平面T_pM矛盾。□

该定理的一个直接应用是图形。

推论 4.2 若 M 是一个张成平面闭简单曲线的紧致 $\mathcal{H}$-图形，则它包含在由边界平面确定的两个闭半空间之一中。

在第二个结果中，我们证明，若 $\mathcal{H}$ 在$v \in \mathbb{S}^2$处呈现特殊行为，则曲面包含在边界平面 $\Pi = v^\perp$ 的一侧。与定理 4.1 的假设相比，我们去掉了曲面嵌入性的假设。

定理 4.3 设 $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ 且 $v \in \mathbb{S}^2$，使得 $\mathcal{H}(v)\mathcal{H}(-v) < 0$ 且 $\Pi = v^\perp$。设 M 是一个紧致的 $\mathcal{H}$-曲面，其边界 ∂M 包含于平面 $\Pi = v^\perp$中。

1. 若 $\mathcal{H}(v) > 0$，则 int(M) 位于半空间 $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, v \rangle < 0\}$。
2. 若 $\mathcal{H}(v) < 0$，则 int(M) 位于半空间 $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, v \rangle > 0\}$。

满足本定理条件的函数示例有 $\mathcal{H}(x) = \langle x,v\rangle^n$，其中$n$ 是一个奇自然数。

证明：不失一般性，假设 $\mathrm{v} = \mathrm{e}_3$。我们证明第一项，因为第二项类似。假设 $\mathcal{H}(\mathrm{e}_3) > 0$，并且根据假设，$\mathcal{H}(-\mathrm{e}_3) < 0$。反设 M 在 $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathrm{x}, \mathrm{e}_3\rangle \geq 0\}$ 中存在内点。令 $\mathrm{q} = \max\{\langle \mathrm{p}, \mathrm{e}_3\rangle : \mathrm{p} \in \mathrm{M}\}$，特别地，$\langle \mathrm{q}, \mathrm{e}_3\rangle \geq 0$。由于 q 是内点，其切平面 $\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ 是方程为 $\mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_3(\mathrm{q})$ 的平面。因此 $\mathrm{N}_q = \mathrm{e}_3$或 $\mathrm{N}_q = -\mathrm{e}_3$。

设 $\mathrm{N}_q = \mathrm{e}_3$。我们用向量 e_3 为 $\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ 定向，特别地，$\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ 是一个$\mathcal{H}_1$-曲面，其中 $\mathcal{H}_1(\mathrm{x}) = \mathcal{H}(\mathrm{x}) - \mathcal{H}(\mathrm{e}_3)$。于是 $\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ 在 q 附近位于 M 上方，$\mathcal{H}$-曲面的比较原理意味着 $\mathcal{H}_1(\mathrm{N}_q) \geq \mathcal{H}(\mathrm{N}_q)$。这说明 $0 \geq \mathcal{H}(\mathrm{e}_3)$，这是不可能的。因此必有 $\mathrm{N}_q = -\mathrm{e}_3$。现在我们用 $-\mathrm{e}_3$, 为 $\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ 定向，使 $\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ 成为一个 $\mathcal{H}_2$-曲面，其中 $\mathcal{H}_2(\mathrm{x}) = \mathcal{H}(\mathrm{x}) - \mathcal{H}(-\mathrm{e}_3)$。由于现在 M 在 q 附近位于 $\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ 上方，比较原理推出 $\mathcal{H}(\mathrm{N}_q) \geq \mathcal{H}_2(\mathrm{N}_q)$，即 $\mathcal{H}(-\mathrm{e}_3) \geq 0$。这一矛盾证明了结论。□

定理 4.3 的一个应用场景是研究具有边界的 λ-平移子。回顾一下，$\mathbb{R}^3$ 中的曲面 M 是 λ-平移子，当且仅当其平均曲率H_M 满足$H_M(p) = \langle N_p, \mathbf{w}\rangle + \lambda$，其中$\mathbf{w} \in \mathbb{S}^2$ 称为密度向量，且 $\lambda \in \mathbb{R}$。改变定向后，我们可以不失一般性地假设 $\lambda \geq 0$。在 [24], 中，第二作者研究了具有边界的紧致 λ-平移子。现在我们通过证明假设 $0 \leq \lambda \leq 1$ 在定理 4.3 中具有重要后果，来改进这些结果。

推论4.4 设 $0 \leq \lambda \leq 1$，且 M 是一个紧致的 λ-平移子，其密度向量为$\mathbf{w}$，边界包含于平面 $\Pi = v^{\perp}, v \in \mathbb{S}^2$。若 $|\langle v, \mathbf{w}\rangle| \geq \lambda$，则$\mathrm{int}(M) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{sign}(\langle v, \mathbf{w}\rangle)\langle x, v\rangle \leq 0\}$。此外，存在 $p_0 \in \mathrm{int}(M) \cap \Pi \neq \emptyset$ 当且仅当 M 是平面的，且 $|\langle v, \mathbf{w}\rangle| = \lambda$。

证明：如果 M 是一个 λ-平移曲面，则有 $\mathcal{H}(\mathrm{x}) = \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}\rangle + \lambda$。首先，假设 $|\langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle| > \lambda$。这一条件推出 $\mathcal{H}(\mathrm{v})\mathcal{H}(-\mathrm{v}) = \lambda^2 - \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle^2 < 0$，因此满足定理 4.3 的假设。此外，如果 $\mathrm{sign}(\langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle) > 0$，那么 $\mathcal{H}(\mathrm{v}) = \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle + \lambda > 0$，且 M 位于$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathrm{x}, \mathrm{v}\rangle < 0\}$。如果 $\mathrm{sign}(\langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle) < 0$，那么 M 位于 $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathrm{x}, \mathrm{v}\rangle > 0\}$。

对于第二部分，假设存在某个$p_0 \in \mathrm{int}(M) \cap \Pi$。不失一般性，我们假设 $\langle v$、$\mathbf{w}\rangle > 0$，这尤其意味着 $\langle v$、$\mathbf{w}\rangle \geq \lambda$。根据第一

部分，我们知道M 位于 $\{\langle x、v\rangle \leq 0\}$，因此在$p_0$ 处有$N_{p_0} = \pm v$。若$N^{p_0} = v$，则 Π 在p_0 附近局部位于M 之上，平均曲率比较原理给出

$$0 \geq H_M(p_0) = \mathcal{H}(v) = \langle v, \mathbf{w}\rangle + \lambda > 0,$$

矛盾。因此，$N^{p_0} = -v$ 和M 在p_0附近局部位于 Π 上方。根据平均曲率的比较原理，得到

$$H_M(p_0) = \mathcal{H}(N_{p_0}) = \mathcal{H}(-v) = -\langle v, \mathbf{w}\rangle + \lambda \geq 0,$$

因此 $\langle v,\mathbf{w}\rangle = \lambda$。接着， Π 以v 为定向的 $\mathcal{H}$-曲面满足最大值原理，由此可知M 是平面的。

若 $\langle v,\mathbf{w}\rangle < 0$，这尤其推出 $\langle v,\mathbf{w}\rangle \leq -\lambda$，则证明类似。这一次，$M$ 在p_0 附近位于 Π 上方，而$N^{p_0} = v$ 必然成立。因此，由比较原理可得 $\langle v,\mathbf{w}\rangle + \lambda \geq 0$，由此我们得出 $\langle v,\mathbf{w}\rangle = -\lambda$。这一次，对$M$ 和 Π 应用最大值原理，并取定向v ，可断言M 包含于 Π中，从而证明结论。□

结合这个推论与推论 3.3，我们可以得出以下关于 λ-平移子的对称性结果。我们以边界为圆的情形说明这一结果。

推论 4.5 设 M 是一个紧致嵌入的 λ-平移孤子，其密度向量为 $v \in \mathbb{S}^2$ 且 $|\lambda| \leq 1$。若 M 的边界是包含在平面 $\Pi = v^{\perp}$中的圆，则 M 是一个与旋转轴正交相交的旋转对称 λ-平移孤子的一部分。

我们以 Pyo 的一个结果的推广结束本节。在 [29] 中证明了，密度为v 且张成包含在平面 $\Pi^{\perp}$ 中的圆的紧致平移孤子是旋转曲面。如今，可以自然而然地在 $\mathcal{H}$-曲面理论的背景下理解证明这一结果所用的技巧。

定理 4.6 设 $v \in \mathbb{S}^2$ 且 $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ 满足：对于每个与 v 正交的 x，都有 $\mathcal{H}(x) = 0$ 。假设对于所有 $x \in \mathbb{S}^2$，都有 $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$ 。设 Γ 是包含在 $\Pi = v^{\perp}$ 中的一条闭凸曲线，并设 $\Omega \subset \Pi$ 表示由 Γ围成的区域。若 M 是张成 Γ的 $\mathcal{H}$-曲面，则 Γ 包含在实心圆柱 $C_{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}v$ 中。此外，若 Γ 是一个圆，且 $\mathcal{H}$ 绕 v 旋转对称，则 M 是旋转曲面。

请注意，我们并未在假设中要求M 是嵌入的。

证明：经过坐标变换后，我们假设$v = e_3$，并且 Π 是方程为$x_3 = 0$的平面。因此，$\mathcal{H}$ 在赤道 $\langle x,e_3\rangle = 0$ 上消失，特别地，任何竖直平面都是一个 $\mathcal{H}$-曲面。由假设 $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$，$\forall x \in \mathbb{S}^2$，我们知道切触原理 2.2 适用。我们定义实心圆柱$C_\Omega = \Omega \times \mathbb{R}$。

首先，我们证明 int(M) 位于C_Ω内。反设存在某个$p \in$ int(M) 位于C_Ω之外。令 $\hat{}p$ 为p 在 Π上的正交投影，因此 $\hat{}p \notin \Omega$。令$q \in \Omega$为 Ω 上到 $\hat{}p$距离最小的点。若$q \in$所在的竖直平面P 为P，则由于 Γ 是凸的，Ω 完全位于P 的一侧。将P 沿 Ω向外并沿其法向量方向平行移动，令P_0 为最后一个与M接触的位置。于是P_0 位于M 的一侧，切触原理由此导出矛盾。

证明 int(M) 位于 C_Ω 内后，接下来证明 M 是Ω上的图形，这也特别意味着 M 是嵌入的。记竖直平移后的 $M_s = M + se_3, s \geq 0$，它们同样是 $\mathcal{H}$-曲面。由紧致性可知，当 s 足够大时，M_s 与 M 不相交。我们逐渐减小 s，直到某个时刻 s_0，此时 M_{s_0} 首次与 M 相交。不可能出现 $s_0 > 0$ 的情况，因为否则切触原理会推出 $M_{s_0} = M$，从而导致矛盾 $\partial M_{s_0} = \Gamma + s_0 e_3 \neq \Gamma$。因此，经过竖直平移，首次接触点必定出现在 $s = 0$处，也就是说，M 回到了初始位置。对 M $-se_3, s \geq 0$类型的竖直平移作类似论证，可得 M 是一个图形。

当 Γ 是圆且 $\mathcal{H}$ 具有旋转对称性时，我们使用推论 3.3。 □

正如我们所述，定理 4.6 将 [29] 关于平移孤子的主要结果推广到了以下情形：$\mathcal{H}(x) = \langle x, v\rangle$，并且满足该定理条件的函数 $\mathcal{H}$ 有很多。例如，给定一个 C^1 奇函数 $f(t)$，$t \in [-1,1]$，对于固定的 $v \in \mathbb{S}^2$，函数 $\mathcal{H}(x) = f(\langle x, v\rangle)$满足定理 4.6 的假设。

5 关于高度的高度估计

我们得到了一个紧致的、边界为平面的 $\mathcal{H}$-曲面的面积与其边界所在平面之间高度的关系。该结果推广了其他关于 $\mathbb{R}^3$ [25] 中常平均曲率曲面的高度与面积、乘积空间 $M^2 \times \mathbb{R}$ [21] 中的曲面，以及 $\mathbb{R}^3$ [24] 中 λ-平移子的高度与面积的结果，适用于$\mathcal{H}$-曲面这一类曲面。在我们的结果中，需要假设该曲面是一个图形。

定理 5.1 设 $\mathcal{H} > 0$ 且 M 是平面 Π 上的一个紧致 $\mathcal{H}$-图形。假设 M 的边界包含于 Π 中。若 h 是 M 相对于 Π 的高度，则

$$h \leq \frac{\mathcal{H}_{\max} \operatorname{area}(M)}{2\pi},$$

其中 $\mathcal{H}_{\max} =$ 最大值$\{\mathcal{H}(x) : x \in \mathbb{S}^2\}$。

证明：不失一般性，假设 Π 是由方程$x_3 = 0$给出的水平平面。由推论 4.2 可知，M 位于 Π的一侧，设为 $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$。由于$\mathcal{H} > 0$，$M$ 的高斯映射 N 向下指向，即 $N_3 = \langle N, e_3 \rangle < 0$。在此设定下，$M$ 的高度为 $h = \max\{x_3(p) : p \in M\}$。

对每个 $t > 0$，定义 $M(t) = M \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq t\}$，并定义 $\Pi(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = t\}$。令 $A(t)$ 为 $M(t)$ 的面积，且 $\Gamma(t) = M(t) \cap \Pi(t)$。由余面积公式 [30,定理 5.8]，

$$A'(t) = -\int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\nabla x_3|}\, ds_t,$$

其中，ds_t 是 $\Gamma(t)$ 的线元。记 $L(t)$ 为 $\Gamma(t)$ 的长度。另一方面，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$L(t)^2 = \left(\int_{\Gamma(t)} ds_t\right)^2 \leq \int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\nabla x_3|}\, ds_t \int_{\Gamma(t)} |\nabla x_3|\, ds_t = -A'(t) \int_{\Gamma(t)} |\nabla x_3|\, ds_t,$$

其中，ds_t 表示 $\Gamma(t)$ 的线元。

由于 $\Gamma(t)$ 是 x_3 的水平曲线，且 $M(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq t\}$，我们有 $|\nabla x_3|_{|\Gamma(t)} = \langle \nu(t), e_3 \rangle$，其中 $\nu(t)$ 是沿着 $\Gamma(t)$ 的 $M(t)$ 的单位内余法向量。因此，

$$L(t)^2 \leq -A'(t) \int_{\Gamma(t)} \langle \nu(t), e_3 \rangle\, ds_t. \tag{6}$$

由于 $\Delta x_3 = 2HN_3$，，由散度定理可得

$$\int_{M(t)} 2HN_3\, dM_t = -\int_{\Gamma(t)} \langle \nu(t), e_3 \rangle\, ds_t.$$

将此积分代入 (6)。利用 $A'(t) \leq 0$ 和 $N_3 \leq 0$，我们有

$$L(t)^2 \leq A'(t) \int_{M(t)} 2HN_3\, dM_t \leq 2\mathcal{H}_{\max} A'(t) \int_{M(t)} N_3\, dM_t.$$

曲线 $\Gamma(t)$ 可能不连通，因此由它围成的内部区域 $\Omega(t)$由有限个紧致连通区域的有限并组成，记为 $\Omega_i(t)$，$i = 1, \ldots, n_t$，位于 $\Pi(t)$ 中。

对由 $M(t)$ 和 $\Omega(t)$ 围成的、可能不连通的三维区域$W(t)$ 中的向量场 e_3 应用散度定理，可得

$$L(t)^2 \leq -2\mathcal{H}_{\max} A'(t)\text{area}(\Omega(t)). \tag{7}$$

记 号 $L_i(t)$ 表示 $\partial\Omega_i(t)$的长度，经典等周不等式给出 ves

$$L(t)^2 \geq \sum_{i=1}^{n_t} L_i(t)^2 \geq 4\pi \sum_{i=1}^{n_t} \text{area}(\Omega_i(t)) = 4\pi\,\text{area}(\Omega(t)).$$

将此不等式代入 (7)，可得

$$2\pi \leq -\mathcal{H}_{\max} A'(t).$$

将此不等式从 $t = 0$ 积分到 $t = h$，并注意到 $A(0)$ 是 M的面积，可得

$$h \leq \frac{\mathcal{H}_{\max}\,\text{area}(M)}{2\pi},$$

这就证明了该结论。 □

将定理 5.1 的陈述与常平均曲率情形相比较， [25], 由于缺少适用于 $\mathcal{H}$-曲面的通量公式，对于式 (6) 中的积分，若 $\mathcal{H}$-曲面不一定是图形，我们便无法将其表示为 $\mathcal{H}_{max}$ 和面积$(\Omega(t))$的函数。因此，定理 5.1 的陈述中需要假设M 是一个图形。

致谢

Antonio Bueno 得到了项目 P18-FR-4049 和塞内卡基金会 21937/PI/22 的部分资助。Rafael López 是格拉纳达大学数学研究所的成员，并得到了项目 PID2020-117868GB-I00 和 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 的部分资助。

参考文献

[1] A. D. Alexandrov, 《大范围曲面的唯一性定理》。I. 列宁格勒大学学报11 (1956 年)，第 19 期，5–17 页。

[2] M. Bergner, R^{n+1}中预设各向异性平均曲率图形的狄利克雷问题。Analysis(Munich) 28 (2008), 149–166。

[3] M. Bergner，S. Fröhlich，R^{n}中的预设平均曲率二维浸入。Z. Anal. Anwend. 27 (2008), 31–52。[4] S. Bernstein，关于由平均曲率或全曲率定义的曲面，Ann. Sci. École Norm. Sup. 27 (1910), 233–256。[5] S: Bernstein，狄利克雷问题可解的充要条件，C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 150 (1910), 514–515。[6] A. Bueno，R. López，魏因加滕型方程的径向解，J. Math. Anal. Appl. 517 (2023)。[7] A. Bueno，I. Ortiz，具有线性预设平均曲率的不变超曲面，J. Math. Anal. Appl. 487 (2020)。[8] A. Bueno，I. Ortiz，具有线性魏因加滕曲率的预设曲面 $\mathbb{R}^3$，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1-24。[9] A. Bueno，J. A. Gálvez，P. Mira，预设平均曲率的旋转超曲面，J. Differential Equations 268 (2020), 2394–2413。[10] A. Bueno，J. A. Gálvez，P. Mira，R中具有预设平均曲率的曲面的整体几何，Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), 4437-4467。[11] C. Corsato，C. De Coster，N. Flora，P. Omari，验光学中一类拟线性椭圆方程的狄利克雷问题的径向解，Nonlinear Anal. 181 (2019), 9–23。[12] C. Corsato，C. De Coster，P. Omari，模拟角膜形状的各向异性平均曲率方程的径向对称解，Discrete Contin. Dyn. Syst. (2015), 297– 303。[13] C. Corsato，C. De Coster，P. Omari，预设各向异性平均曲率方程的狄利克雷问题：解的存在性、唯一性和正则性，J. Differential Equations. 260 (2016), 4572–4618。[14] C. Corsato，F. Obersnel，P. Omari，洛伦兹-闵可夫斯基空间中依赖于梯度的预设平均曲率方程的狄利克雷问题，Georgian Math. J. 24 (2017), 113–134。

[15] *C. Enache, R. López.* 某些平移孤子型问题的极小值原理与先验估计，*Nonlinear Anal. 187 (2019), 352–364.*[16] *D. Gilbarg* 和 *N. S. Trudinger*，《二阶椭圆型偏微分方程》，数学科学基础丛书 *224*，施普林格出版社，柏林，*1977* 年。[17] *E. Heinz*，关于给定边界上常平均曲率曲面的存在性，*Math. Ann. 127 (1954), 258–287.*[18] *G. Huisken*，凸曲面在平均曲率流下演化为球面，*J. Differential Geom. 20 (1984), 237–266.*[19] *G. Huisken, C. Sinestrari*，平均曲率流的凸性估计及平均凸曲面的奇点，*Acta Math. 183 (1999), 45–70.*[20] *M. Koiso*，具有对称边界的常平均曲率超曲面的对称性，*Math. Z. 191 (1986), 567–574.*[21] *C. Leandro, H. Rosenberg*，$\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$中紧致常平均曲率曲面的高度、面积与体积之间的关系，*Michigan Math. J. 61 (2012), 123–131.*[22] *R. López*，《带边界的常平均曲率曲面》，*Springer Science*，纽约，*2013* 年。[23] *R. López*，具有对数线性密度的欧氏空间中的不变曲面，*Adv. Math. 339 (2018) 285–309.*[24] *R. López*，带边界的紧致 λ-孤子，*Mediterr. J. Math. 15 (2018).*[25] *R. López, S. Montiel*，具有平面边界的常平均曲率曲面，*Duke Math. J. 85 (1996), 583–604.*[26] *R. Ma, M. Xu*，闵可夫斯基空间中涉及高阶平均曲率算子的狄利克雷问题的正旋转对称解，*J. Math. Anal. Appl. 460(2018), 33–46.*[27] *H. Mitake, L. Zhang*，关于带驱动力的图平均曲率流广义柯西-狄利克雷问题的几点说明，*Partial Differ. Equ. Appl. 2 (2021), 40.*[28] *H. Minkowski*，体积与表面积，*Math. Ann. 57 (1903), 447–495.*

[29] J. Pyo, 具有非空平面边界的紧致平移孤子，Diff. Geom. App. 47 (2016), 79–85..
[30] T. Sakai, 黎曼几何，《数学译著丛书》149，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，1992 年。[31] J. Serrin, 多自变量拟线性椭圆微分方程的狄利克雷问题，Phil. Trans. R. Soc. Lond. 264 (1969), 413–496.[32] J. Serrin, 势理论中的一个对称性问题，《数学物理学档案》43 (1971), 304–318.