已被第22届国际自主智能体与多智能体系统会议（AAMAS 2023）接收。

基于分布式优化的多机器人系统去中心化协同控制

Yi Dong[§]、Zhongguo Li[†]、Xingyu Zhao[§]、Zhengtao Ding[‡]、Xiaowei Huang[§§]利物浦大学，英国，{yi.dong,xingyu.zhao, xiaowei.huang}@liverpool.ac.uk
[†]伦敦大学学院，英国，zhongguo.li@ucl.ac.uk
[‡]曼彻斯特大学，英国，zhengtao.ding@manchester.ac.uk

arXiv:2302.01728v1 [eess.SY] 3 Feb 2023

摘要
由于在民用、安全和军事领域的广泛应用，多机器人协同控制受到广泛关注。本文提出了一种适用于具有一般线性动力学的多机器人系统的协同控制算法。该算法基于分布式协同优化和输出调节，仅利用相邻机器人之间共享的信息即可实现全局最优解。具体而言，本文提出了一种面向多机器人系统的高层分布式优化算法，用作每个个体智能体的最优参考信号生成器。随后，基于该分布式优化算法，采用输出调节方法来解决一般线性动态系统的最优协调问题。本文从理论上证明了所提算法的收敛性。通过数值仿真和实时实体机器人实验，验证了所提出的协同控制算法的有效性。

关键词
协同控制、分布式优化、最优协调、多机器人系统、输出调节

ACM 引用格式：
Yi Dong[§], Zhongguo Li[§†], Xingyu Zhao[§], Zhengtao Ding[‡], Xiaowei Huang[§]. 2023. 通过分布式优化实现多机器人系统的去中心化与协同控制。载于第*22*届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集（*AAMAS 2023*），英国伦敦，*2023*年*5*月*29*日至*6*月*2*日，IFAAMAS，共9页。

1 引言
近年来，高性能计算、快速通信和价格低廉的机载传感器不断发展，使多台机器人能够协作完成复杂且具有挑战性的任务 [33, 43]。然而，为现实世界中的多机器人系统设计去中心化算法仍然是一项挑战。本文设计了一种基于输出调节的分布式优化算法，用于控制物理多机器人系统。

在分布式多智能体系统中，多个研究主题（包括目标聚合、轨迹跟踪、围捕和编队控制）都可以表述为一致性问题 [27]。然而，对于分布式一致性问题的求解，现有方法要么针对过度简化的问题设计，要么基于过度简化的智能体模型。例如，在许多场景中，一致性值是相对于智能体的初始状态定义的 [11, 18, 35, 42, 46]，；即使放宽这一约束，智能体也可能被建模为单积分器（定义见公式（5））[5, 14, 44, 48]。虽然施加更强的约束能简化理论结果（如收敛性和正确性）的数学证明，但这些不切实际的约束可能导致理论保证与实际应用之间存在显著差距。

本文从两个方面放宽约束，以解决多机器人协作问题。首先，我们研究一致性值定义在参考点而非初始状态上的一致性问题。参考点可能是初始状态，也可能不是。这种推广具有实际意义，因为在许多应用中，智能体的初始状态是随机设定的，而其目标可能与初始状态无关。其次，我们考虑线性系统；通过使用线性算子定义智能体的动力学，这类系统推广了单积分器模型（定义见公式 (1b) 和 (1c)）。

在考虑更一般的情形时，我们证明了理论保证并未受到影响。也就是说，我们的算法能够同时实现正确性（第 4.3.1 节）和收敛性（第 4.3.2 节和第 4.3.3 节）。这得益于本文提出的新型分布式优化算法。分布式优化旨在解决这样一类优化问题：全局代价函数由一组 N局部目标函数 $f_i(y)$ [16], 构成，即 $\min_y \sum_{i=1}^{N} f_i(y)$。由于通信受限且需要保护局部隐私，局部目标函数 $f_i(y)$ 仅由智能体 i知晓。在分布式优化中，每个智能体只能通过交换非敏感信息与其邻居协作。尽管这并不是一个新问题，但现有方法 [13, 28, 38]要么假设智能体采用单积分器模型，要么基于连续系统。对于机器人系统，尤其是本文旨在解决的机器人系统高层控制问题而言，离散时间系统以及机器人系统的异构假设无疑更为现实，而算法及其相关证明却无法轻易迁移，这促成了我们的研究。直观而言，我们的算法使每个智能体根据关于其局部目标函数梯度以及从邻居处收集的信息的递归表达式（即不仅考虑当前时刻，还考虑历史信息）进行移动（见公式（8））。此外，我们利用分布式输出调节技术，确保所构建的线性多机器人系统能够实时跟踪动态参考信号 [6, 7]。

所提出的算法应用于一个一致性控制问题，该问题使用由 4 台 Turtlebot 机器人组成的物理多机器人系统。物理机器人的通信图设计为无向环。每台机器人仅根据自身及与其相连

第*22*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（*AAMAS 2023*），*A. Ricci*、*W. Yeoh*、*N. Agmon*、*B. An*（编），*2023*年*5*月*29*日至*6*月*2*日，英国伦敦。© 2023年国际自主智能体与多智能体系统基金会（www.ifaamas.org）。保留所有权利。

的邻居提供的信息进行控制和优化。尽管不同机器人各自具有局部目标，但它们最终都会移动到全局最优点，因为最终一致性值是通过求解实时优化问题得出的，且与初始状态无关。

本文的主要贡献总结如下：

(1) 提出了一种分布式离散时间协同控制算法，并从理论上证明了该算法的收敛性。与大多数现有研究不同，例如 [29, 32]及其中的参考文献，这些研究主要关注连续时间系统，而本文提出的算法可直接应用于数字机器人和平台。

(2) 针对异构线性系统，开发了一种结合分布式优化与输出调节的复合方法。与依赖初始化的一致性问题不同，所提出的方法为优化与控制之间的交互奠定了基础。

(3) 所提出的算法已在真实的多机器人系统中成功验证，其中的误差和噪声通过不同智能体之间的通信得以处理。此外，由于所有源代码均已在 Github 上开放获取，我们的工作具有可复现性和可重复性保障。

本文其余部分安排如下。第 3 节总结数学预备知识，并对研究问题进行表述。第 4 节提出一种基于输出调节的分布式优化方法，用于多机器人一致性协议。第 5 节介绍仿真结果及相应分析。最后，第 6 节对本文进行总结。

2 相关工作

本文研究多智能体系统的控制算法。本文设计的分布式算法基于一致性问题，该问题要求通过分布式协议驱动一组智能体在状态上达成一致。

近年来，基于一致性的分布式协同控制问题受到广泛研究，并巧妙地推广到各种具体子问题，例如有限时间、事件触发、时滞和基于切换拓扑的协作问题。Shi 和 Hong 研究了多智能体系统向凸目标集聚合的协同问题 [35]。Zou 等人研究了考虑通信时延的多智能体系统协调聚合问题，并采用投影算子来确保最终一致性值位于目标区域内 [46]。Martinović 等人提出了一种基于分布式观测器的控制策略，以解决领航者跟随跟踪问题 [18]。Wang 等人提出了一种基于时变反馈增益的分布式一致性与包容算法，用于多智能体系统的有限时间控制 [42]。Kuriki 和 Namerikawa 展示了一种具有避碰能力的基于一致性的协同编队控制策略，适用于一组无人机 [11]。对于上述所有方案，一致性值都取决于智能体的初始状态，例如智能体初始位置的中点。这是一项严重限制，因为在许多

表1：所提方法的适用范围。

	单积分器		线性系统	
	连续时间	离散时间	连续时间	离散时间
异构	-	-	[40, 47]	**本文**
非异构 [11, 18, 22]	23, 28, 35, 42, 46] [19–21]		[13, 41, 45]	[17]

实际场景中，智能体的初始状态是随机设定的，而协作目标与初始状态毫无关联。

为消除初始化步骤，当要求一致性值最小化个体智能体已知的局部代价函数之和时，多智能体一致性问题便转化为分布式优化问题。Qiu 等 提出了一种分布式优化协议，在同时考虑约束与优化的情况下最小化总体代价函数 [28]。Li 等设计了一个比例–积分（PI）控制器来解决最优一致性问题，并引入事件触发通信机制以减少通信开销 [13]。Tran 等 研究了两种时间触发和事件触发分布式优化算法，以降低通信成本和能耗 [38]。Ning 等 研究了一种固定时间分布式优化协议，以保证多智能体系统在一定步数内收敛 [22]。

在实际应用中，对于真实的机器人应用而言，最好能在离散时间域内实现一致性。然而，前述分布式控制与优化研究 [8, 9, 13, 17–23, 28, 35, 38, 40–42, 45–47] 仅适用于连续时间系统或非异构系统。因此，在实际场景中，很难保证异构线性系统在未进行初始化的情况下收敛。受上述观测结果启发，本文旨在解决离散时间异构线性系统的分布式最优协调问题。我们严格证明，异构线性系统能够实现一致性，同时使全局代价最小化。由于该目标问题具有跨学科特性，其涵盖了多种不同的问题类型，包括单积分器/线性系统、连续时间/离散时间以及异构/非异构系统。我们汇总并列出若干相关参考文献于表1中，以突出本文的研究范围和定位。

3 预备知识

记号： 令 $\mathbb{R}^n$ 表示维数为 $n > 0$的向量集合。令 $\|x\|$和 x^T分别表示标准欧几里得范数和 $x \in \mathbb{R}^n$的转置。 I_p表示维数为 $p > 0$ 的相容单位矩阵， $\otimes$表示克罗内克积。col(·)表示列向量。

3.1 图论

沿用 [31], 有向图 G(V，E，A) 由 V ={v_1，$\cdots$ v_n} 构成节点集，E ∈V ×V 构成边集。若节点 v_i是节点 v_j的邻居，则 (v_i，v_j) ∈ E。如果任意一对顶点之间都存在有向路径相连，则称该有向图为强连通图。A 为邻接矩阵，我们令 $[A]_{ij} = a_{ij}$，其中，若 (v_i，v_j) ∈E，则 $a_{ij} > 0$；否则为 $a_{ij} = 0$。令 D 为图 G(V，E，A) 的度矩阵，L =D −A 为拉普拉斯矩阵。我们令 l_{ij} 表示矩阵 L 的元素。本文假设智能体之间可以共享信息

信息流完整，具体表述如下假设。

假设1. 通信图是无向且连通的。

在此假设下，拉普拉斯矩阵 L 半正定，且零是 L 的一个简单特征值，其对应的特征向量为 1_N。有关该图更详细的性质，请参阅 [29]。

3.2 最优协调

本文考虑一个最优协调问题，其中一组网络连接机器人被设计用于求解以下优化问题

$$\min_{y\in\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{N} f_i(y) \tag{1a}$$

$$\text{s.t. } x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) \tag{1b}$$

$$y_i(k) = C_i x_i(k) \tag{1c}$$

$$\text{for } i = 1, \cdots, N$$

其中，N是机器人的数量，$x_i(k) \in \mathbb{R}^n$是机器人 i的状态变量，通常表示其位置、速度、力等信息。$y_i(k) \in \mathbb{R}^q$是第 i个机器人的系统输出；由于在某些真实机器人系统中，机器人的实际状态不可见，因此可以直观地将其视为对机器人系统的观测。$u_i(k) \in \mathbb{R}^p$是机器人 i的系统控制输入。例如，控制输入可以是电机的转矩或机器人系统所受的力。方程 (1b) 和 (1c) 表示离散时间线性系统，其满足可加性和齐次性 [4]。$A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B_i \in \mathbb{R}^{n\times p}$，$C_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$是常矩阵，用于描述异构 机器人系统的动力学。当 $A = I_n$，$B = 1^T_{n\times p}$且 $C = 1^T_{q\times n}$时，线性系统可简化为单积分器系统。$f_i(y)$是光滑凸函数，且仅为第 i个机器人所知。

根据假设1，我们可以重新表述最优协同问题。在分布式协作控制中，将为每个个体智能体分配一个局部决策变量，记为 y_i。为求解协同问题 (1)，要求局部决策变量 y_i最终达到相同的最优值，即 $y_i = y_j$，$\forall i$，$j \in \mathrm{V}$。对于连通图，注意到 L 的零空间为 1_N，因此等价地要求 $(\mathrm{L} \otimes I_q)Y = 0$。

引理1 ([16])。假设*1*成立。优化问题 (1) 可等价地重新表述为

$$\begin{aligned} \min_{y_i\in\mathbb{R}^q, \forall i\in\mathcal{V}} \ & \sum_{i=1}^{N} f_i(y_i) \\ s.t. \ & \text{(1b) } and \text{ (1c)} \\ & (\mathcal{L}\otimes I_q)Y = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $Y =$列$(y_1, y_2 \ldots, y_N)$。

当图是无向且连通时，求解问题 (1) 等价于求解问题 (2)。设 $Y^* = \mathrm{col}(y_1^*, \cdots y_N^*)$ 为问题 ($\quad$ 2 $\quad$ $y_i^* = y_j^* =$) 的最 $y^* \ \forall i \ j \in \quad \otimes I_q \ Y^* = 0 \quad \sum_{i=1}^N f_i \ y_i^* =$ 优解，这意味着 „V 由 (L) 给出。因此，我们有 ( ) $\sum_{i=1}^N f_i(y^*)$，这意味着 y^* 也是问题 (1) 的一个最优解。

3.3 问题建模

在许多实际应用中，(1a) 中的目标函数根据智能体与关注位置之间的距离来定义，例如，机器人群问题 [36, 37], 源搜索 [15, 26, 34], 搜救 [1]。本文考虑智能体 i对目标 r_i进行估计。其局部目标是通过优化来跟踪其局部信念

$$f_i(y_i) = \|y_i - r_i\|^2 \tag{3}$$

也就是说，智能体 i 旨在最小化其输出与其局部估计目标之间的差异。

因此，问题可重新表述为

$$\begin{aligned} \min_{y_i\in\mathbb{R}^q, \forall i\in\mathcal{V}} \ & \sum_{i=1}^{N} f_i(y_i) = \sum_{i=1}^{N} \|y_i - r_i\|^2 \\ \text{s.t. } & \text{(1b) and (1c)} \\ & (\mathcal{L}\otimes I_q)Y = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

这里，我们给出参考信号 r_i的一个具体示例：假设存在一个污染源，多个机器人协作寻找该污染源。机器人的传感器范围有限（3 米）。机器人 i的局部参考信号 r_i是其 3 米范围内污染浓度最高的点。根据我们的算法，机器人将通过与邻居通信并更新局部目标，最终汇聚到污染源所在点。

备注 1. (4) 中的表述与多智能体系统中的传统一致性控制有本质区别。一致性控制 *[29, 32]*旨在驱动所有智能体的状态/输出达到由智能体状态初始值决定的一致性值。本文中的协同问题是将机器人状态/输出调整至其联合代价函数(4)的最优解，该最优解可以是静态的，也可以是时变的。值得注意的是，参考信号 $r_i, \forall i \in \mathcal{V}$可以通过学习/估计技术，利用智能体 i上配备的局部机载传感器所提供的传感信息生成。例如，局部目标可以基于计算机视觉算法生成，例如 *YOLO [30]* 和 *AprilTag [25, 39]*。这里，我们假设给定一个参考点 r_i，或者该参考点可以在运行过程中被检测到。

4 算法开发与收敛性分析

4.1 单积分器系统的高层决策

目前，多智能体系统中的智能体通常配备有效的跟踪算法，以跟随高层决策者发出的指令。智能体 i 的动力学可表示为单积分器系统：

$$y_i(k+1) = y_i(k) + v_i(k) \tag{5}$$

其中， $y_i(k) \in \mathbb{R}^q$ 表示第 i个智能体的输出。随后，可通过令以下变量来进行控制设计：

$$\begin{aligned} v_i(k) &= -\beta\Big[\sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}y_j(k) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}\lambda_j(k) + \nabla f_i(y_i(k))\Big] \\ \lambda_i(k+1) &= \lambda_i(k) + \beta\sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}y_j(k) \end{aligned} \tag{6}$$

其中， v_i 表示积分器动力学中第 i个智能体的控制输入， l_{ij} 是拉普拉斯矩阵 L 的元素， λ_i 是由智能体 i维护的拉格朗日乘子， β 是待设计的优化增益（等价于机器学习算法中的学习率）。我们强调，所提出的算法仅在不同智能体之间共享观测值 $y_i(k)$ 和拉格朗日乘子$\lambda_i(k)$，而不传递梯度项 $\nabla f_i(y_i(k))$，因此保护了局部智能体的目标隐私。

将增广输出和拉格朗日乘子分别记为$Y(k) = \mathrm{col}(y_1(k)\ y_2(k)\ldots, y_N(k))$和 $\Lambda(k) = \mathrm{col}(\lambda_1(k)\ \lambda_2(k)\ldots,$ $\lambda_N\ k$ ( ))。那么，上述算法可简洁地写为

$$\begin{aligned} Y(k+1) =& Y(k) - \beta[(\mathcal{L}\otimes I)Y(k) + (\mathcal{L}\otimes I)\Lambda(k) + \nabla F(Y(k))] \\ \Lambda(k+1) =& \Lambda(k) + \beta(\mathcal{L}\otimes I)Y(k) \end{aligned} \tag{7}$$

其中， $\nabla F(Y(k)) = \mathrm{col}(\nabla f_1(y_1(k))\ \nabla f_2(y_2(k))\ldots, \nabla f_N(y_N(k)))$。

正如我们将在后续的收敛性分析中阐述的那样，迭代优化算法本质上具有积分器的形式 [3]。为求解线性系统的分布式优化问题，我们采用输出调节技术，并将算法 (6) 作为内部参考生成器。

4.2 线性多机器人系统的控制算法

如下所述，上述算法可通过一种非平凡的方式扩展，以适用于线性多机器人系统。为求解最优协调问题，设计如下分布式协同算法。

$$\begin{aligned} u_i(k) =& -K_i x_i(k) + (G_i + K_i\Psi_i)\xi_i(k) \\ \xi_i(k+1) =& \xi_i(k) - \beta[\sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}\xi_j(k) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}\lambda_j + \nabla f_i(\xi_i(k))] \\ \lambda_i(k+1) =& \lambda_i(k) + \beta\sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}\xi_j \end{aligned} \tag{8}$$

其中， $\xi_i(k)$ $\lambda_i(k)$ 是两个内部辅助变量，用于为第 i 个智能体生成跟踪参考信号。 K_i 的选取应确保在假设动力学 (A_i, B_i) 可控的条件下， $A_i - B_iK_i$ 施尔稳定。 G_i 和 Ψ_i 是增益矩阵，可通过求解以下方程得到

$$\begin{aligned} (A_i - I)\Psi_i + B_iG_i &= 0 \\ C_i\Psi_i - I &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

直观而言，增益矩阵 K_i, G_i, Ψ_i 的设计旨在根据系统动力学 A_i, B_i, C_i 跟踪参考信号。对于异构系统，每个机器人 i 的 A_i, B_i, C_i 可能各不相同。为确保 (9) 可解，我们采用以下假设 2，该假设是输出调节文献中的一个调节方程 [10]。

假设 2。 对(A_i, B_i) $\forall i \in \mathcal{V}$ 是可控的，并且

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A_i - I & B_i \\ C_i & 0 \end{bmatrix} = n + q. \tag{10}$$

注 2。 所提出的算法实际上是梯度下降优化与输出调节技术的结合。内模 $\xi_i(k)$ 由基于共识的梯度下降优化生成，其中 $\lambda_i(k)$ 是拉格朗日乘子。控制输入 u_i 的设计借鉴了经典输出调节方法 *[10]*。

类似地，闭环系统动力学可简洁地写为

$$\begin{aligned} U(k) =& -KX(k) + \Pi\Xi(k) \\ \Xi(k+1) =& \Xi(k) - \beta[(\mathcal{L}\otimes I)\Xi(k) + (\mathcal{L}\otimes I)\Lambda(k) + \nabla F(\Xi(k))] \\ \Lambda(k+1) =& \Lambda(k) + \beta(\mathcal{L}\otimes I)Y(k) \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $K = K_1 \quad K_N \quad \Pi = G_1 + K_1\Psi_1 \quad G_N + \mathrm{diag}(, \ldots,)$ 以及 $\overset{K_N\Psi_N}{\mathrm{diag}(, \ldots,)}$。

4.3 收敛性分析

所提出算法的收敛性分析分为三个步骤。第一步（4.3.1）中，我们证明所提出算法的平衡点是问题（4）的最优解。随后，所提出的算法能够保证单积分器和线性系统均收敛到该平衡点，这分别在步骤4.3.2和4.3.3中得到证明。

4.3.1. 我们首先对第4.1节中的高层决策进行收敛性分析，随后将在证明线性系统调节时将其用作参考信号生成器。

在（7）中，平衡点记为（Y^*, Λ^*），满足

$$\begin{aligned} \beta[(\mathcal{L}\otimes I)Y^* - (\mathcal{L}\otimes I)\Lambda^* - \nabla F(Y^*)] &= 0 \\ \beta(\mathcal{L}\otimes I)Y^* &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

利用假设1下 L 的性质，由 (12) 可得

$$1_N^T\nabla F(Y^*) = 0 \tag{13}$$

由于 $(\mathrm{L}\ \otimes I)Y^* = 0$ 蕴含 $y_i = y_j = y^*, \forall i, j \in \mathrm{V}$，因此由 (13) 可得

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla f_i(y^*) = 0. \tag{14}$$

注意，由于局部目标函数均为强凸函数，因此 y^* 的唯一性得以保证。根据原始-对偶理论 [12],，解对 (Y^*, Λ^*) 实际上是 $\phi(Y, \Lambda) = \sum_{i=1}^N f_i(y_i) + \Lambda^T(\mathrm{L}\ \otimes I_q)Y$ 的拉格朗日函数的一个鞍点。

现在，我们可以给出单积分器动力学下 (7) 收敛到平衡点 (Y^*, Λ^*) 的结论。值得注意的是，算法 (6) 和 (8) 的平衡点相同。

4.3.2. 为了给出完整的证明，下面我们将证明所提出的算法能够使系统渐近收敛到平衡点。

定理1。 设假设*1*成立。如果步长 β 按 $0 < \beta < \min\{\frac{1}{2\lambda_{max}(\mathcal{L})}\ \frac{3}{2L}\}$ 选取，其中 $\lambda_{\overline{max}(\mathcal{L})}$ 是拉普拉斯矩阵的最大特征值， L 是代价函数的利普希茨常数，则算法 (7) 收敛到最优解 (Y^*, Λ^*)。

Proof. From the second update Equation in (7), we have

$$\begin{aligned} \Lambda(k) - \Lambda^* =& \Lambda(k+2) - \Lambda^* - \beta(\mathcal{L}\otimes I)(Y(k) - Y^*) \\ & - \beta(\mathcal{L}\otimes I)(Y(k+1) - Y^*) \end{aligned} \tag{15}$$

在（15）两边左乘可得

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\otimes I)(\Lambda(k)-\Lambda^*) =&(\mathcal{L}\otimes I)(\Lambda(k+2)-\Lambda^*)\\ &-\beta(\mathcal{L}^2\otimes I)(Y(k)-Y^*)\\ &-\beta(\mathcal{L}^2\otimes I)(Y(k+1)-Y^*)\end{aligned}\tag{16}$$

其中用到了克罗内克积的性质（ $A\otimes B\ \ C\otimes$）（）（）（）。记（）$D_{()}= AC\otimes BD$ $Z\ k+1\ =Y\ k$ $Y\ k$ $-\beta\nabla F$ $-\beta$ $\otimes$（（））（L）（ $I\ \Lambda\ k\ +Y\ k\ -Y\ k+1$ $=\ I-\beta\ +\beta^2\ ^2\otimes I$（）（））（），并令 W（L L）。结合（16）和（7），可得:

$$\begin{aligned}&Y(k+1)-Y^*\\ =&Y(k)-Y^*-\beta\nabla F(Y(k))-\beta(\mathcal{L}\otimes I)(\Lambda(k)+Y(k))-Z(k+1)\\ =&((I-\beta\mathcal{L}+\beta^2\mathcal{L}^2)\otimes I)(Y(k)-Y^*)-Z(k+1)\\ &-\beta((\mathcal{L}\otimes I)(\Lambda(k+2)-\Lambda^*)-\beta(\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*))\\ &-\beta(\nabla F(Y^*)+(\mathcal{L}\otimes I)\Lambda^*)+\beta^2(\mathcal{L}^2\otimes I)(Y(k+1)-Y^*)\end{aligned}\tag{17}$$

从等式（17）两边减去 W（Y（$k+1$）$-Y^*$），可得一个新的递归更新律:

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}(Y(k+1)-Y(k))+\beta(\mathcal{L}\otimes I)(\Lambda(k+2)-\Lambda^*)\\ &=-(\beta\mathcal{L}\otimes I-2\beta^2\mathcal{L}^2\otimes I)(Y(k+1)-Y^*)-Z(k+1)\\ &\quad-\beta(\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*))-\beta(\nabla F(Y^*)+(\mathcal{L}\otimes I)\Lambda^*).\end{aligned}\tag{18}$$

利用这一新的递归算法，可以通过李雅普诺夫方法和鞍点动力学证明其收敛性。

我们构造如下李雅普诺夫函数:

$$V(Y,\Lambda)=\langle Y-Y^*,\mathcal{W}(Y-Y^*)\rangle+\langle\Lambda-\Lambda^*,\Lambda-\Lambda^*\rangle\tag{19}$$

这里，我们用 x，y 表示向量 x 和 y 的内积。于是可得:

$$\begin{aligned}&V(Y(k+1),\Lambda(k+2))-V(Y(k),\Lambda(k+1))\\ =&\langle Y(k+1)-Y^*,\mathcal{W}(Y(k+1)-Y^*)\rangle+\|\Lambda(k+2)-\Lambda^*\|^2\\ &-\langle Y(k)-Y^*,\mathcal{W}(Y(k)-Y^*)\rangle+\|\Lambda(k+1)-\Lambda^*\|^2\\ =&-\langle Y(k+1)-Y(k),\mathcal{W}(Y(k+1)-Y(k))\rangle\\ &+2\langle Y(k+1)-Y^*,\mathcal{W}(Y(k+1)-Y(k))\rangle\\ &-\|\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1)\|^2\\ &+2\langle\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1),\Lambda(k+2)-Y^*\rangle\end{aligned}\tag{20}$$

根据方程(11)和(12)，我们可以推导出方程(20)的最后一项:

$$\begin{aligned}&\langle\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1),\Lambda(k+2)-Y^*\rangle\\ =&\langle\beta(\mathcal{L}\otimes I)(Y(k+1)-Y^*),\Lambda(k+2)-\Lambda^*\rangle\\ =&\langle\beta(\mathcal{L}\otimes I)(\Lambda(k+2)-\Lambda^*),Y(k+1)-Y^*\rangle\end{aligned}\tag{21}$$

因此，我们可以得到:

$$\begin{aligned}&\langle Y(k+1)-Y^*,\mathcal{W}(Y(k+1)-Y(k))\rangle\\ &+\langle\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1),\Lambda(k+2)-Y^*\rangle\\ =&\langle Y(k+1)-Y^*,\beta(\mathcal{L}\otimes I)(\Lambda(k+2)-\Lambda^*)\\ &+\mathcal{W}(Y(k+1)-Y(k))\rangle\end{aligned}\tag{22}$$

根据公式（18），我们可以进一步推导如下:

$$\begin{aligned}&\langle Y(k+1)-Y^*,\mathcal{W}(Y(k+1)-Y(k))\rangle\\ &+\langle\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1),\Lambda(k+2)-Y^*\rangle\\ =&-\langle Y(k+1)-Y^*,(\beta\mathcal{L}\otimes I-2\beta^2\mathcal{L}^2\otimes I)(Y(k+1)-Y^*)\rangle\\ &-\langle Y(k+1)-Y^*,\beta(\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*))\rangle\\ &-\langle\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1),Z(k+1)\rangle\\ &-\langle Y(k+1)-Y^*,\beta(\nabla F(Y^*)+(\mathcal{L}\otimes I)\Lambda^*)\rangle\end{aligned}\tag{23}$$

由于 $f(y)$ 是光滑凸函数，因此根据最优条件 [2]，我们可以推导出:

$$\langle Y(k+1)-Y^*,\beta(\nabla F(Y^*)+(\mathcal{L}\otimes I)\Lambda^*)\rangle\geq 0\tag{24}$$

根据法锥的定义，我们有:

$$\langle Y(k+1)-Y^*,Z(k+1)\rangle\geq 0\tag{25}$$

将(23)、(24)和(25)代回(20)，我们得到:

$$\begin{aligned}&V(Y(k+1),\Lambda(k+2))-V(Y(k),\Lambda(k+1))\\ \leq&-\langle Y(k+1)-Y(k),\mathcal{W}(Y(k+1)-Y(k))\rangle\\ &-\|\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1)\|^2\\ &-2\langle Y(k+1)-Y^*,(\beta\mathcal{L}\otimes I-2\beta^2\mathcal{L}^2\otimes I)(Y(k+1)-Y^*)\rangle\\ &-2\langle Y(k+1)-Y^*,\beta(\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*))\rangle\end{aligned}\tag{26}$$

根据定理1，我们有$0<\beta\leq\frac{1}{2\lambda_{max}(\mathcal{L})}$。此外，L是对称矩阵，且有一个零特征值，因此我们可以找到一个正交矩阵P，使得$\mathrm{P}^T\mathrm{LP}=diag\{0,\lambda_1,\cdots\ \lambda_N\}$且$\mathrm{P}^T\mathrm{L}^2\mathrm{P}=diag\{0,\lambda_1^2,\cdots\ \lambda_N^2\}$。于是，矩阵 $\beta\mathrm{L}-2\beta^2\mathrm{L}^2$ 是半正定的。

此外，代价函数是Lipschitz连续的:

$$\langle Y-Y^*,\nabla F(Y)-\nabla F(Y^*)\rangle\geq\frac{1}{L}\|\nabla F(Y)-\nabla F(Y^*)\|^2\tag{27}$$

对（26）的最后一项应用Jensen不等式:

$$\begin{aligned}&-\langle Y(k+1)-Y^*,\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*))\rangle\\ =&-\langle Y(k)-Y^*,\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*))\\ &+\langle-Y(k+1)+Y(k),\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*))\\ \leq&-\frac{1}{L}\|\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*)\|^2+\frac{L}{4}\|Y(k)-Y(k+1)\|^2\\ &+\frac{1}{L}\|\nabla F(Y(k))-\nabla F(Y^*)\|^2\\ \leq&\frac{L}{4}\|Y(k)-Y(k+1)\|^2\end{aligned}\tag{28}$$

于是，方程（26）可改写为:

$$\begin{aligned}&V(Y(k+1),\Lambda(k+2))-V(Y(k),\Lambda(k+1))\\ \leq&-\langle Y(k+1)-Y(k),(\mathcal{W}-\frac{\beta L}{2}I)(Y(k+1)-Y(k))\rangle\\ &-\|\Lambda(k+2)-\Lambda(k+1)\|^2\end{aligned}\tag{29}$$

根据定理1，我们有 $0<\beta\leq\frac{3}{2L}$，这意味着 $1-\beta\lambda+\beta^2\lambda^2-\frac{\beta L}{2}=(\frac{1}{2}-\beta\lambda)^2+\frac{3}{4}-\frac{\beta L}{2}>0$。因此，（$\mathrm{W}-\frac{\beta L}{2}I$）是正定的。由此可得，$V(Y(k+1)\ \Lambda(k+2))\leq V(Y(k)\ \Lambda(k+1))$。因此，我们可以得出结论：在定理1的条件下，$V(Y,\ \Lambda)$收敛。□

4.3.3. 在给出一般线性系统分布式最优协同控制的主要结果之前，我们需要通过令 $x_{i\,s}$ $u_{i\,s}$ $=$，$G_i\xi_i\ k$ $\bar{x}_i\ k=x_i\ k-x_{i\,s}\ k$ $\bar{u}_i\ k=u_i\ k-u_{i\,s}\ k$ $(k)=\Psi_i\xi_i(k)$，，(k)（），对（8）进行状态变换。令（）（），（）和（）（），（）。应用控制输入（8），得到闭环动态

$$\begin{aligned}\bar{x}_i(k+1)&=(A_i-B_iK_i)\bar{x}_i(k)-\Psi_iv_i(k)\\ e_i(k)&=C_i\bar{x}_i(k).\end{aligned}\tag{30}$$

可得到以下引理，该引理可视为输入到输出稳定性。

引理 2. 设假设 *1* 和 *2* 成立。若 K_i 的选取使得$A_i - B_iK_i$ 施尔稳定，且通过求解(9)中的调节方程设计 G_i和 Ψ_i，则存在一个正常数$\alpha > 0$，使得

$$\limsup_{k\to\infty} \|e_i(k)\| \le \alpha \limsup_{k\to\infty} \|v_i(k)\|. \tag{31}$$

证明。首先，我们考察式 (9) 的可解性。将式 (9) 写成矩阵形式可得

$$\begin{bmatrix} A_i - I & B_i \\ C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_i \\ G_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \tag{32}$$

记 $\mathrm{O}_i = \begin{bmatrix} A_i - I & B_i \\ C_i & 0 \end{bmatrix}$ and $T_i = \begin{bmatrix} \Psi_i \\ G_i \end{bmatrix}$，利用克罗内克积的性质 $\mathrm{vec}\,(\mathrm{O}_i T_i I) = (I \otimes \mathrm{O}_i)\,\mathrm{vec}(T_i)$，可得一个标准线性代数方程

$$(I \otimes O_i)\,\mathrm{vec}(T_i) = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\right) \tag{33}$$

根据假设 2 中的条件 (10)，该方程保证可解。为方便记号，记 $A_{i,c} = A_i - B_iK_i$ and $B_{i,c} = -\Psi_i$。于是有

$$\tilde{x}_i(k+1) = A_{i,c}\tilde{x}_i(k) + B_{i,c}v_i(k). \tag{34}$$

对式 (34) 递归迭代可得

$$\tilde{x}_i(k) = A_{i,c}^k \tilde{x}_i(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A_{i,c}^{k-j-1} B_{i,c} v_i(j). \tag{35}$$

因此，有

$$e_i(k) = C_i\tilde{x}(k) = C_i A_{i,c}^k \tilde{x}_i(0) - \sum_{j=0}^{k-1} A_{i,c}^{k-j-1} v_i(j) \tag{36}$$

其中用到了 $C_i\Psi_i - I = 0$。由于 $A_{i,c}$ 是 Schur 矩阵，有 $\lim_{k\to\infty} C_i A_{i,c}^k \tilde{x}_i(0) = 0$。定理1已证明参考生成器收敛，这意味着当 $k \to \infty$ 时，v_i 收敛到零。记 $\varpi_i := \limsup_{k\to\infty} \|v_i(k)\|$。那么，对于任意小的常数 $\epsilon > 0$，存在一个正时间索引 $\zeta > 0$，使得

$$\|v_i(k)\| < \varpi_i + \epsilon,\ \forall k > \zeta. \tag{37}$$

根据时间索引 ζ，可将 (36) 中的第二项分解为两部分，写作

$$\sum_{j=0}^{k-1} A_{i,c}^{k-j-1} v_i(j) = \sum_{j=0}^{\zeta} A_{i,c}^{k-j-1} v_i(j) + \sum_{j=\zeta+1}^{k-1} A_{i,c}^{k-j-1} v_i(j). \tag{38}$$

对 (38) 取欧几里得范数，并利用 (37):

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{k-1} A_{i,c}^{k-j-1} v_i(j) \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^{\zeta} A_{i,c}^{k-j-1} v_i(j) + \sum_{j=\zeta+1}^{k-1} A_{i,c}^{k-j-1} v_i(j) \right\| \\ &\le \|A_{i,c}^{k-\zeta-1}\| \left\| \sum_{j=0}^{\zeta} A_{i,c}^{\zeta-j} v_i(j) \right\| + (\varpi_i + \epsilon) \left\| \sum_{j=\zeta+1}^{k-1} A_{i,c}^{k-j-1} \right\|. \end{aligned} \tag{39}$$

因此，我们有

$$\limsup_{k\to\infty} \|e_i(k)\| \le \frac{1}{1 - \|A_{i,c}\|} (\varpi_i + \varepsilon) \tag{40}$$

其中应用了以下两个结果

$$\sum_{j=\zeta+1}^{t-1} \|A_{i,c}\|^{t-1-j} = \frac{1 - \|A_{i,c}\|^{t-\zeta}}{1 - \|A_{i,c}\|} < \frac{1}{1 - \|A_{i,c}\|} \tag{41}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\|A_{i,c}^{k-\zeta-1}\right\| = 0. \tag{42}$$

由于 ϵ 可以任意设得足够小，由（40）可得

$$\limsup_{k\to\infty} \|e_i(k)\| \le \alpha \limsup_{k\to\infty} \|v_i(k)\|. \tag{43}$$

其中 $\alpha = \frac{1}{1 - \|A_{i,c}\|}$。 □

定理 2。 假设 *1* 和 *2* 成立。若 K_i 的选取满足 $A_i - B_iK_i$ 为施尔稳定，且通过求解(9)中的调节方程来设计 G_i 和 Ψ_i，则 (8) 中提出的算法可解决(1)中的最优协调问题。

Proof. Let $\tilde{x}_i(k) = x_i(k) - \Psi_i y^*$, we have

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(k+1) =& A_i x_i(k) + B_i[-K_i x_i(k) + (G_i + K_i\Psi_i)\xi_i(k)] - \Psi_i y^* \\ =& (A_i - B_iK_i)\tilde{x}_i(k) + B_i(G_i + K_i\Psi_i)(\xi_i(k) - y^*). \end{aligned} \tag{44}$$

由定理1和引理 2可知，$\xi_i(k)$收敛到 y^*。因此，将引理 2 中的 $B_i(G_i + K_i\Psi_i)(\xi_i(k) - y^*)$视为 $v_i(k)$，即可得出所提出的算法 (8) 收敛。 □

值得一提的是，递归更新算法通常具有如下形式：$y_i(k+1) = y_i(k) + v_i(k)$，其中 v_i表示时间步 k时 $y_i(k)$的变化。本文从这类积分器动力学出发，随后采用输出调节中的经典内模方法，将算法扩展到一般线性系统；在该方法中，参考信号生成器与单积分器具有相同的更新机制。

注释 3. 鉴于分布式协作控制领域的相关文献，例如，*[29],* 经典的一致性控制问题可视为本文所研究的最优协作优化问题的一种特殊情形，只需将代价函数设为 $f_i(y) = (y - y_i(0))^2$。本文考虑的研究问题与初始化无关，因为通过求解分布式最优协调问题即可获得全局最优解。

注释 4. 本注释讨论解的可扩展性。所提出的算法基于梯度，易于计算。智能体只需与其邻居通信。每个智能体的通信复杂度为 $O(n|E|)$，其中 E 是通信边集合，n 是迭代次数；这是因为每次迭代中，智能体只需向邻居发送一条消息，且每条消息的大小为常数 $O(1)$。每个智能体的计算复杂度也为 $O(n|E|)$，因为在每次迭代中，智能体都能以线性方式处理收到的消息并更新局部状态。

5 实验结果

本节介绍实验结果，以评估所提出的分布式优化算法的有效性。首先，我们通过数值案例研究，测试所提出的算法在具有线性系统的多机器人上的表现。随后，我们在真实的 Turtlebot 机器人上验证并应用该算法。所有源代码、分布式算法的详细信息及环境设置文件均可在我们的项目网站 [1] 上公开获取。

[1]项目网站：https://github.com/YD-19/DO4.git

5.1 数值仿真

我们在两个多机器人系统上测试该算法，这两个系统分别由四个和十个机器人组成。每个机器人仅与其相邻机器人通信，连通图如图 1 所示。作为演示，我们先为由四个智能体组成的群体（案例 A）实现该算法，然后将其扩展到由十个智能体组成的网络，以测试所提出算法的可扩展性（案例 B）。

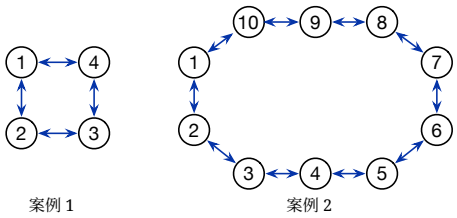

图 1：分别由四个和十个智能体组成的群体的环形通信拓扑。

案例 *A.* 智能体的动力学指定为 $A = [0, 1\ 2\ 1]\ B =$; „; and ; 。图的连通性、可控性和调节条件均得到满足。智能体的参考信号设为 $[1, 0\ \ 0, 1]$ $C = [1, 0\ \ 0, 1]$ $r_3 =$ $[10;\ 1]$, $r_2 = [5;\ 10]$;$[10\ \ 2]$ $r_4 = [3\ \ 5]$; ; ; 。

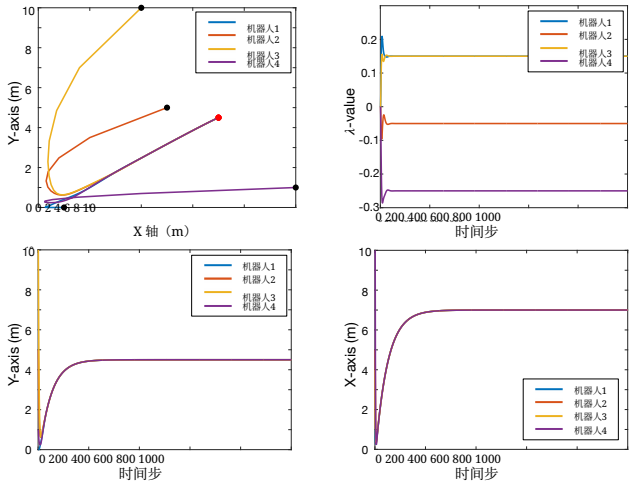

图 2：具有静态局部跟踪参考信号的四智能体群体的仿真结果。

仿真结果如图 2 所示。左上图为智能体轨迹的俯视图。黑点表示四个智能体的初始位置，红点表示四个智能体的最终位置。可以看出，智能体被驱动到同一个最优位置，该位置与其初始状态无关，而与指定参考信号的优化解有关。为了更清楚地说明这一点，其余三个子图展示了收敛过程，其中右上图显示中间变量 λ_i 的收敛情况，底部两图分别展示位置状态 x_i 和 y_i 的细节。从图 2 可以看出，智能体达成了一致目标，且参数已收敛。

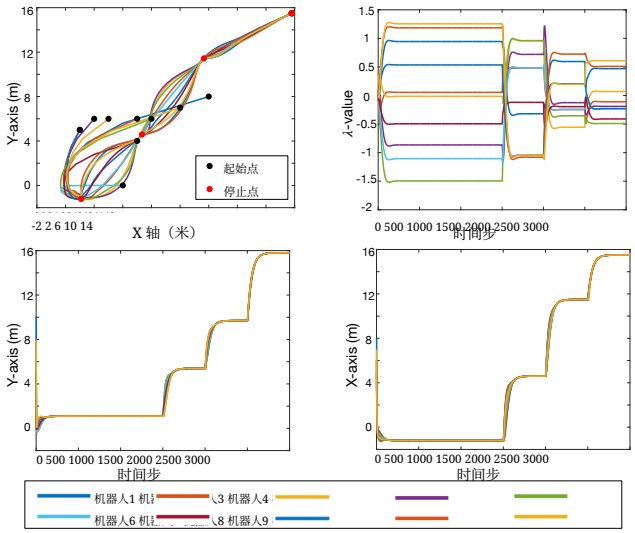

图 3：具有重新调度的跟踪目标的十智能体群体的仿真结果。

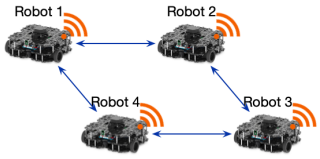

图 4：Turtlebot 网络的通信图。

案例 *B.* 我们进一步通过将所提出的算法应用于由十个智能体组成的集合，考察其可扩展性。在该集合中，每个智能体只需与其邻居通信并协作。这意味着扩大网络规模不会增加任何额外的通信和计算负担，这是分布式方法的一项优势。

此外，我们考虑一种机器人目标随时间变化的场景。例如，机器人根据初始观测值移动到第一个目标位置后，可能会重新扫描环境并确定新的目标方向。因此，我们假设机器人会在 1500、2000 和 2500 步时重新观测其目标。

从图 3 的仿真结果可以看出，无论智能体何时何地重新设定其局部目标，所提出的算法都能以最优方式跟踪全局最优目标。因此，该案例研究展现了所提出算法的可扩展性以及与初始化无关的性质。

5.2 真实多机器人系统

在本节中，我们将所提出的分布式算法应用于仿真和物理环境。机器人仿真

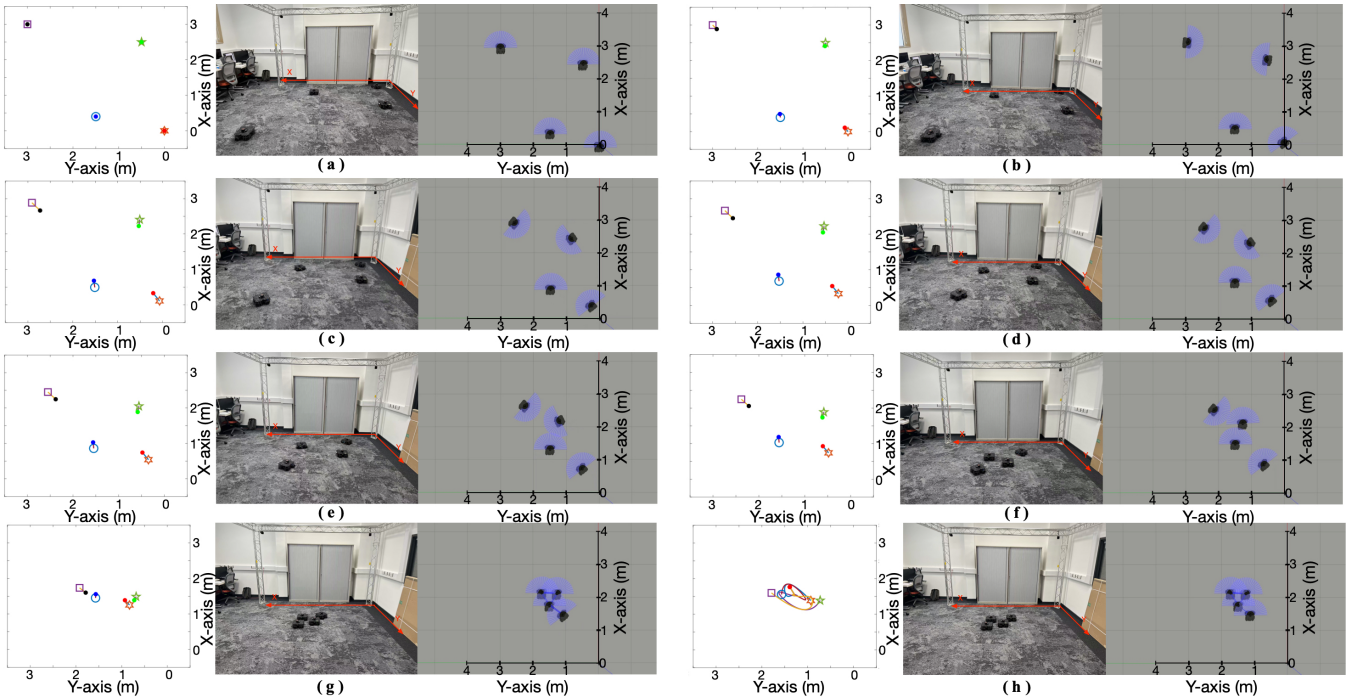

图 5：真实多机器人系统上的实验结果。

基于 ROS 和 Gazebo 平台。对于物理环境，我们组装了四台 Turtlebot3 Waffle Pi 机器人，并搭建了实验室环境，如图 5 中间的子图所示。Turtlebot3 机器人只能获取信息并与其邻居通信，通信图如图 4 所示。它们均基于标准 ROS 平台驱动。我们应用分布式优化算法，为每个时间点生成一个最优位置。底层 PID 控制器根据当前位置与最优位置之间的误差，驱动机器人跟随最优位置。在顶层优化算法发布优化后的参考值后，底层 PID 控制器将基于 Raspberry Pi 和 OpenCR 触发两个电机，以跟踪参考信号。

在本实验中，环境受实验室房间大小的限制，因此我们将仿真和真实环境设定在一个 $3.3 \times 3.5\text{m}^2$ 的矩形空间内。我们将机器人的转向速度限制在 $[-0.3, 0.3]$ rad/s 以内，线速度限制在 $[0, 0.1]$ m/s 以内。控制参数 β 设为 0.05。所有机器人都在相同的 $/world$ 坐标系下知道各自的初始位置。机器人的目标设为 $r_1 = [1;\ \ 0.1]$, $r_2 =$; ; ; ; ; 。[0.5 1] $r_3 = [1\ \ 0.2]$ $r_4 = [0.3\ \ 0.5]$

子图 (a) 至 (j) 展示了一致性过程中的典型时刻，录像可通过 https: //youtu.be/a0k4KicX9u4 查看。在每幅子图中，左侧的仿真图给出了由所提出的分布式优化算法生成的高层参考轨迹，右侧两幅图则展示了仿真机器人和真实机器人的跟踪性能。值得注意的是，机器人会趋近于由协同优化生成的优化后参考轨迹

，而非各自的局部目标；停止距离设为 0。3 米，以避免机器人发生碰撞。

在真实世界实验中，由于不同地面摩擦等外部因素的干扰，车辆的机器人系统动态信息（位置）存在误差。尽管如此，所提出的算法能够处理这些误差，并通过与相邻智能体通信来更新本地信息，从而优化全局代价。从图和视频中可以看出，所提出的算法始终会优化每个机器人的全局最优位置。通过所提出的方法，机器人最终到达目标位置并实现一致性。我们考虑的问题涵盖范围更广的协同控制问题，包括依赖初始化的一致性问题、协同目标跟踪问题和搜索问题。将所提出的算法部署并应用于真实机器人系统，展现了其在现实应用中的巨大潜力。

6 结论

本文提出了一种基于输出调节的分布式优化算法，用于多智能体协同控制。该算法通过让智能体与邻居通信来优化各自的局部目标函数，同时确保智能体能够达到全局最优解。该算法能够跟踪全局目标，而非收敛到一个基于初始位置确定的中心；此外，它还能处理具有线性且异构动力学的多智能体系统。本文对理论保证和实验验证进行了研究，这将推动分布式协同最优控制在实际应用中的未来部署，并确保其收敛性和最优性。

致谢

本项目获得了欧盟地平线2020研究与创新计划的资助（拨款协议编号956123），并得到英国工程与自然科学研究委员会项目 [EP/T026995/1]的支持。

参考信号

[1] Ilario Antonio Azzollini、Nicola Mimmo、Lorenzo Gentilini 和 Lorenzo Marconi。2021。使用 ARVA 进行雪崩搜救：一种极值寻优方法。arXiv 预印本 arXiv:2106.14514（2021）。[2] Dimitri Bertsekas。2009。凸优化理论。第 1 卷。Athena Scientific。[3] Stephen Boyd、Stephen P Boyd 和 Lieven Vandenberghe。2004。凸优化。剑桥大学出版社。[4] Chi-Tsong Chen。1984。线性系统理论与设计。Saunders College Publishing。[5] Ashish Cherukuri 和 Jorge Cortes。2016。变化负荷和机组组合条件下用于经济调度的无初始化分布式协调。Automatica 74（2016），183–193。[6] Zhengtao Ding。2003。具有不确定内模的一类非线性系统的全局镇定与扰动抑制。Automatica 39，3（2003），471–479。[7] Zhengtao Ding。2013。一类异构非线性系统的一致性输出调节。IEEE 自动控制汇刊 58，10（2013），2648–2653。[8] Yi Dong、Yang Chen、Xingyu Zhao 和 Xiaowei Huang。2022。基于分布式长短期记忆网络的短期负荷预测。arXiv 预印本 arXiv:2208.01147（2022）。[9] Yi Dong、Tianqiao Zhao 和 Zhengtao Ding。2019。智能电网中采用分布式无初始化优化的需求侧管理。IET 可再生能源发电 13，9（2019），1533–1543。[10] Jie Huang。2004。非线性输出调节：理论与应用。SIAM。[11] Yasuhiro Kuriki 和 Toru Namerikawa。2014。具有避碰功能的多无人机系统基于一致性的协同编队控制。载于《2014年美国控制会议》。电气与电子工程师协会，2077–2082。[12] Jinlong Lei、Han-Fu Chen 和 Hai-Tao Fang。2016。分布式约束优化的原始-对偶算法。《系统与控制快报》96（2016），110–117。[13] Li Li、Yang Yu、Xiuxian Li 和 Lihua Xie。2022。不平衡有向图上异构线性多智能体系统分布式优化的指数收敛。Automatica 141（2022），110259。[14] Zhongguo Li。2021。网络上的分布式协作与竞争优化。曼彻斯特大学（英国）。[15] Zhongguo Li、Wen-Hua Chen 和 Jun Yang。2021。用于自主搜索中探索与利用的基于并发学习的双重控制。arXiv 预印本 arXiv:2108.08062（2021）。[16] Zhongguo Li、Zhen Dong、Zhongchao Liang 和 Zhengtao Ding。2021。针对昂贵黑箱函数的代理模型分布式优化。Automatica 125 2021 109407 10 1016 2020 109407 ( )，。[17] 2011 https://doi.org/ 。/j.automatica. 。Zhongkui Li、Zhisheng Duan 和 Guanrong Chen。。采用观测器型协议的离散时间线性多智能体系统的一致性。arXiv 预印本 arXiv:1102.5599（2011）。[18] Luka Martinović、Žarko Zečević 和 Božo Krstajić。2022。具有多个领导者的单积分器多智能体系统协同跟踪控制。《欧洲控制杂志》63（2022），232–239。[19] Angelia Nedić 和 Alex Olshevsky。2014。时变有向图上的分布式优化。IEEE 自动控制汇刊 60，3（2014），601–615。[20] Angelia Nedic 和 Asuman Ozdaglar。2009。多智能体优化的分布式次梯度方法。IEEE 自动控制汇刊 54，1（2009），48–61。[21] Angelia Nedic、Asuman Ozdaglar 和 Pablo A Parrilo。2010。多智能体网络中的约束一致性与优化。IEEE 自动控制汇刊 55，4（2010），922–938。[22] Boda Ning、Qing-Long Han 和 Zongyu Zuo。2017。多智能体系统的分布式优化：一种基于边的固定时间一致性方法。IEEE 控制论汇刊 49，1（2017），122–132。[23] Boda Ning、Qing-Long Han 和 Zongyu Zuo。2020。二阶多智能体系统的二部一致性跟踪：一种基于时变函数的预设时间方法。IEEE 自动控制汇刊 66，6（2020），2739–2745。[24] Reza Olfati-Saber 和 Richard M Murray。2004。具有切换拓扑和时滞的智能体网络中的一致性问题。IEEE 自动控制汇刊 49，9（2004），1520–1533。[25] Edwin Olson。2011。AprilTag：一种稳健且灵活的视觉基准标记系统。载于《2011年IEEE国际机器人与自动化会议》。IEEE，3400–3407。[26] Minkyu Park 和 Hyondong Oh。多个智能体的协同信息驱动源搜索与估计。《信息融合》54（2020），72–84。[27] Jiahu Qin、Qichao Ma、Yang Shi 和 Long Wang。2016。多智能体系统一致性研究的最新进展：简要综述。IEEE 工业汇刊 电子学 64，6（2016），4972–4983。[28] Zhirong Qiu、Shuai Liu 和 Lihua Xie。2016。多智能体系统的分布式约束最优一致性。Automatica 68（2016），209–215。[29] Zhihua Qu。2009。动力系统的协同控制：在自主车辆中的应用。施普林格科学与商业媒体。[30] Joseph Redmon、Santosh Divvala、Ross Girshick 和 Ali Farhadi。2016。YOLO：统一的实时目标检测。载于《IEEE计算机视觉与模式识别会议论文集》。779–788。[31] Wei Ren 和 Randal W Beard。2005。交互拓扑动态变化下多智能体系统的一致性寻求。IEEE 自动控制汇刊 50，5（2005），655–661。[32] Wei Ren、Randal W Beard 和 Ella M Atkins。2007。多车辆协同控制中的信息一致性。《IEEE控制系统杂志》27，2（2007），71–82。[33] Wei Ren 和 Dimos V Dimarogonas。2022。网络化多智能体系统的事件触发跟踪控制。IEEE 自动控制汇刊（2022）。[34] Branko Ristic、Christopher Gilliam、William Moran 和 Jennifer L. Palmer。2020。湍流中危险源的分散式多平台搜索。《信息融合》58（2020），13–23。[35] Guodong Shi 和 Yiguang Hong。2009。切换拓扑下非线性多智能体系统的全局目标聚合与状态一致。Automatica 45，5（2009），1165–1175。[36] Enrica Soria、Fabrizio Schiano 和 Dario Floreano。2021。复杂环境中的分布式预测无人机群。《IEEE机器人与自动化快报》7，1（2021），73–80。[37] Enrica Soria、Fabrizio Schiano 和 Dario Floreano。2021。复杂环境中空中集群的预测控制。《自然·机器智能》3，6（2021），545–554。[38] Ngoc-Tu Tran、Yan-Wu Wang、Xiao-Kang Liu、Jiang-Wen Xiao 和 Yan Lei。2019。采用事件触发和时间触发通信的二阶多智能体系统分布式优化问题。《富兰克林研究所学报》356，17（2019），10196–10215。[39] John Wang 和 Edwin Olson。2016。AprilTag 2：高效且稳健的基准标记检测。载于《2016年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议（IROS）》。IEEE，4193–4198。[40] Xiaoli Wang、Yiguang Hong、Jie Huang 和 Zhong-Ping Jiang。2010。一种针对多智能体线性系统鲁棒输出调节问题的分布式控制方法。IEEE 自动控制汇刊 55，12（2010），2891–2895。[41] Xinghu Wang、Yiguang Hong 和 Haibo Ji。具有扰动抑制功能的一类非线性多智能体系统的分布式优化。IEEE 控制论汇刊 46，7（2015），1655–1666。[42] Yujuan Wang、Yongduan Song、David J Hill 和 Miroslav Krstic。2018。网络化多智能体系统的预设时间一致性与包容控制。IEEE 控制论汇刊 49，4（2018），1138–1147。[43] Tao Yang、Xinlei Yi、Junfeng Wu、Ye Yuan、Di Wu、Ziyang Meng、Yiguang Hong、Hong Wang、Zongli Lin 和 Karl H Johansson。2019。分布式优化综述。《控制年度评论》47（2019），278–305。[44] Peng Yi、Yiguang Hong 和 Feng Liu。2016。满足可行性约束的最优资源分配无初始化分布式算法及其在电力系统经济调度中的应用。Automatica 74（2016），259–269。[45] Yu Zhao、Yongfang Liu、Guanghui Wen 和 Guanrong Chen。2017。线性多智能体系统的分布式优化：基于边和节点的自适应设计。IEEE 自动控制汇刊 62，7（2017），3602–3609。[46] Yao Zou、Zongyu Zuo 和 Kewei Xia。2021。具有通信时延的多智能体系统协调聚合采样数据分布式协议。《非线性分析：混合系统》43（2021），101108。[47] Shan Zuo、Yongduan Song、Frank L Lewis 和 Ali Davoudi。2018。采用时变 L_2-增益设计的异构多智能体系统自适应输出编队跟踪。《IEEE控制系统快报》2，2（2018），236–241。[48] Zongyu Zuo、Qing-Long Han 和 Boda Ning。2019。多智能体系统的固定时间协同控制。施普林格。