arXiv:2302.01731v1 [math.GT] 3 Feb 2023

非定向带点曲面的映射类群生成元

T ¨UL ´IN AL TUN ¨OZ、MEHMETC ˙IK PAMUK 和 O ˘GUZ YI LDIZ

Abstract. 令 Mod($N_{g,p}$) 表示亏格为 g 且有 p 个穿孔的非定向曲面的映射类群。对于 $g \geq 14$，我们证明 Mod($N_{g,p}$) 可由五个元素生成，或由六个对合生成。

1. Introduction

令 $N_{g,p}$ 表示一个亏格为 g 且有 p 个穿孔的非定向曲面，这些穿孔由p 个特定点组成的集合 $P = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ 指定。如果 p 为零，则在记号中省略它，并将该曲面记为 N_g。映射类群 Mod($N_{g,p}$) 定义为曲面 $N_{g,p}$ 的自微分同胚的同伦类所成的群，其中这些自微分同胚保持集合 P不变。在本文中，我们仅考虑连通曲面，并且致力于为 Mod($N_{g,p}$) 寻找最小生成集。

对于定向曲面，映射类群定义为保定向微分同胚的同伦类所构成的群。对于定向曲面，已知映射类群由德恩扭转和初等辫生成。然而，如果曲面是非定向的，德恩扭转并不能生成映射类群。Lickorish 最先考虑了寻找群 Mod(N_g) 的生成元这一问题。他证明，Mod(N_g) 由德恩扭转以及一个他称为Y-同胚的同胚的同伦类 [3]生成。Chillingworth [2] 确定了 Mod(N_g) 的一个有限生成集。该集合的基数取决于 g。Korkmaz [4]将 Chillingworth 的结果推广到了带点曲面的情形。

由于 Mod(N_g) 不是阿贝尔群，生成集至少必须包含两个元素。Szepietowski [6] 证明，对于所有 $g \geq 3$，这个群都由三个元素生成。我们 [1] 证明，对于 $g \geq 19$ ，亏格为 g 的非定向曲面的映射类群 Mod(N_g) 可以由两个元素生成，其中一个元素的阶为 g。

在存在穿孔的情况下，Szepietowski [5, 定理 3] 证明了 Mod($N_{g,p}$) 由对合生成。我们证明，对于 $g \geq 26$，当 $g \geq 26$ [1]时，Mod(N_g) 可由三个对合生成。最近，Yoshihara [7]证明了，对于 $p \geq 0$，当 $g \geq 13$ 为奇数时，Mod($N_{g,p}$) 由八个对合生成；当$g \geq 14$ 为偶数时，则由十一个对合生成。

本文得到如下主要结果（参见定理 3.5和3.6）：

主要定理 。对于 $g \geq 14$ 和 $p \geq 1$，$\mathrm{Mod}(N_{g,p})$ 由五个元素或六个对合生成。

本文结构安排如下：第 2 节介绍必要的背景知识以及关于映射类群的一些结果。我们主要定理的证明见第 3 节。

致谢。 本研究得到土耳其科学技术研究理事会¨ ˙(TÜBİTAK)[项目编号 120F118]的资助。

2. Background and Results on Mapping Class Groups

令 Mod$_0$($N_{g,\ p}$) 表示 Mod($N_{g,\ p}$) 的子群，其中的元素逐点固定集合 P。该群是 Mod($N_{g,\ p}$) 的正规子群，指数为 $p!$，并且有以下正合列：

$$1 \longrightarrow \mathrm{Mod}_0(N_{g,p}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(N_{g,p}) \longrightarrow Sym_p \longrightarrow 1,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 57M07, 20F05, 20F38*Keywords*: 映射类群、带 puncture 曲面、对合、生成集

其中 Sym_p 是集合 $\{1,2,\ldots,p\}$ 上的对称群，最后一个投影由微分同胚的同伦类限制到其在穿孔上的作用给出。

在本文中，我们不区分微分同胚及其同伦类。对于两个微分同胚的复合，我们采用函数记号；若 f 和 g 是两个微分同胚，则复合 fg表示先应用 g，再应用 f。

对于 $N_{g,\ p}$上的双侧简单闭曲线 a，我们用对应的大写字母 A表示关于 a 的右手德恩扭转 t_a。

现在，我们回顾本文后续部分经常用到的德恩扭转的一些基本事实。设 $N_{g,\ p}$ 上有两条双侧简单闭曲线 a 和 b，且 $f \in$Mod($N_{g,\ p}$)。

- 若 a 和 b 不相交，则 $AB = BA$ （交换性）。
- 若 $f(a) = b$，则 $fAf^{-1} = B^{\varepsilon}$，其中 $\varepsilon = \pm 1$取决于$f(a)$的正则邻域相对于所选定方向的定向。（共轭）。

本文中我们反复使用共轭关系，并对任意 $f, g \in$Mod($N_{g,p}$)，将 fgf^{-1}记作 g^f。

现在我们定义 Mod($N_{g,p}$) 中的两类微分同胚： y 同胚（交叉帽滑动）或穿孔滑动。考虑图 K 1所示的克莱因瓶。交叉帽换位 u 定义为如下同伦类

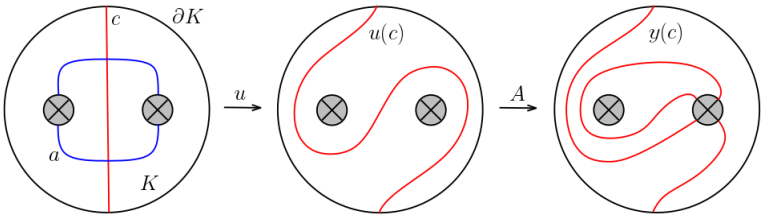

FIGURE 1. 同胚 u 和 $y = Au$。

微分同胚的同位类，它交换两个相邻的交叉帽，并使 K 的边界保持不动，如图1左侧所示。微分同胚 $y = Au$ 对区间 c 的作用如图1所示；它也可以通过将一条莫比乌斯带沿另一条莫比乌斯带的核心滑动一周，并固定 ¨边界上的每一点得到。这称为 K-同胚 Y（也称为交叉帽滑动 [4]）。注意， $A^{-1}u$是一个 Y-同胚，即对曲线 a 的邻域选择另一种定向，也会得到一个Y-同胚。另请注意， y^2 是关于 ∂K的德恩扭转。

Lickorish [3] 证明，Mod(N_g)由德恩扭转和一个 Y 同胚（一个交叉帽滑动）生成。注意，在 Mod(N_g) 的生成集中，可以用交帽换位代替交叉帽滑动，因为交叉帽换位等于一个德恩扭转与一个交叉帽滑动的乘积。

对于 Mod($N_{g,p}$) 的另一类微分同胚，考虑图 ¨2中带有一个穿孔 z 和单侧简单闭曲线 a 的莫比乌斯带 M。我们将 v_a 通过滑动穿孔 z得到的穿孔滑动

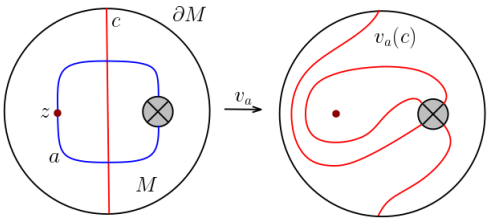

FIGURE 2. 穿孔滑动 v_a。

沿着 a 滑动一周，同时保持边界 M 上的每个点不动。该微分同胚 v_a 在区间 c上的作用如图 2所示。我们将由单侧简单闭曲线 δ_i 和穿孔 z_j 支撑的穿孔滑动记为 $v_{i,\ j}$ 如图 2所示。

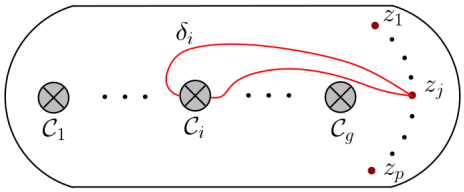

FIGURE 3. 穿孔滑动$v_{i,\ j}$。

在结束预备知识之前，我们先给出 Korkmaz 关于 Mod$_0$($N_{g,\ p}$) 的生成集。令 $\mathcal{C}$ 为以下简单闭曲线的集合：

$$\mathcal{C} = \{a_i, b_i, f_i, c_j, e_k, \text{ for } i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, r-1 \text{ and } k = 1, \dots, p-1 \text{ if } g = 2r+1,$$

and

$$\mathcal{C} = \{a_i, b_i, f_i, c_i, e_k, \text{ for } i = 1, \dots, r \text{ and } k = 1, \dots, p-1 \text{ if } g = 2r+2,$$

其中曲线如图 4所示。

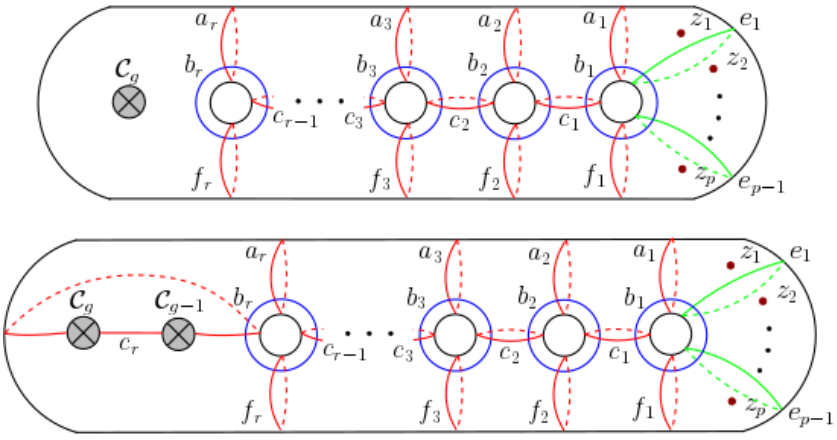

FIGURE 4. Mod($N_{g,\ p}$) 的德恩扭转生成元。

定理 2.1。 [4] 对于 $g \geq 3$，映射类群 $\text{Mod}_0(N_{g,\ p})$ 由以下元素生成：

(i) $\{t_c, y, v_{g,i} : \ c \in \mathcal{C}, \ 1 \leq i \leq p\}$ 若 g为奇数，且

(ii) $\{t_c, y, v_{g-1,i}, v_{g,i} : \ c \in \mathcal{C}, \ 1 \leq i \leq p\}$ 若 g为偶数。

3. A GENERATING SET FOR Mod($N_{g,p}$)

我们首先回顾代数中的以下基本引理。

Lemm3.1. 设 G 和 K 为群。假设以下短正合序列成立，

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 1.$$

那么，子群 Γ 包含 $i(N)$，并且存在到 K 的满射，当且仅当 $\Gamma = G$。

对于 $G = \text{Mod}(N_{g,p})$ 和 $N = \text{Mod}_0(N_{g,p})$，有以下短正合序列：

$$1 \longrightarrow \text{Mod}_0(N_{g,p}) \longrightarrow \text{Mod}(N_{g,p}) \longrightarrow Sym_p \longrightarrow 1.$$

因此，由引理 3.1 可立即得出以下有用结果。设 Γ 是 $\text{Mod}(N_{g,p})$ 的一个子群。若子群 Γ 包含 $\text{Mod}_0(N_{g,p})$，并且存在到 Sym_p 的满射，那么 $\Gamma = \text{Mod}(N_{g,p})$。

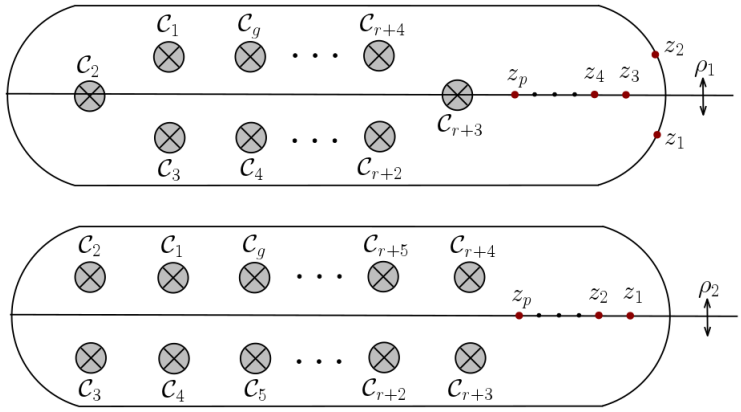

FIGURE 5. 关于 $N_{g,p}$ 的反射 ρ_1 和 ρ_2，若 $g = 2r + 2$。

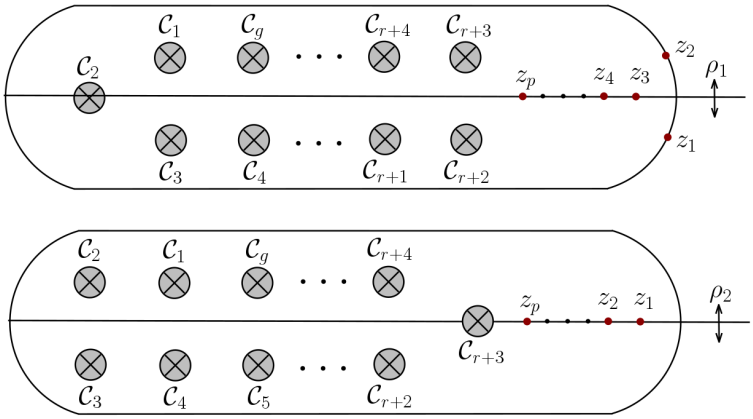

FIGURE 6. 反射 ρ_1 和 ρ_2 在 $N_{g,\ p}$ 如果 $g = 2r + 1$。

定理 2.1 中给出的某些德恩扭转曲线，在我们将曲面建模为带有 p 个穿孔和 g 个交叉帽的球面$N_{g,\ p}$ 时，如图 9 所示。

考虑 $N_{g,\ p}$ 的模型，使其在反射 ρ_1 和 ρ_2 下保持不变（见图 5 和6）。注意，$\text{Mod}(N_{g,\ p})$ 包含满足以下条件的元素 $T = \rho_2\rho_1$：

- $T(b_i) = c_i$和 $T(c_j) = b_{j+1}$当 $i,\ j = 1,\ \ldots\ldots,\ r - 1$时，

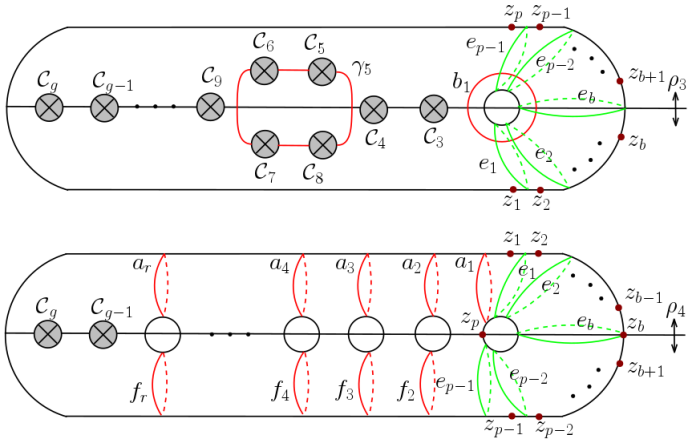

FIGURE 7. 在 $N_{g,p}$ 上的反射 ρ_3 和 ρ_4，若 $p = 2b$（当 g 为奇数时，去掉最后一个交叉帽）。

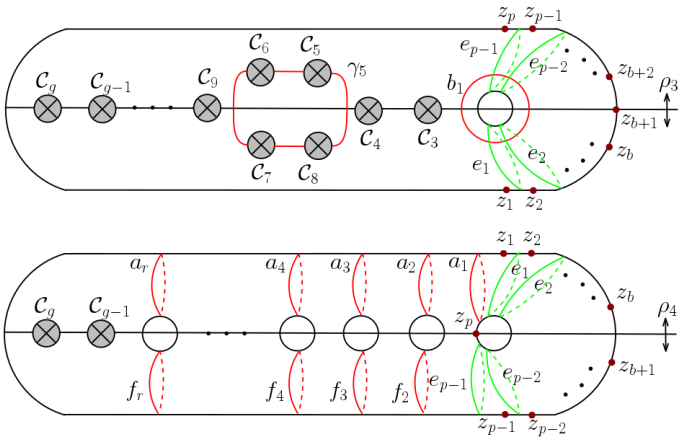

FIGURE 8. 在 $N_{g,p}$ 上的反射 ρ_3 和 ρ_4，若 $p = 2b+1$（当 g 为奇数时，去掉最后一个交叉帽）。

- $T(a_1) = b_1$。另外，请注意，当 $g = 2r+1$ 和 $T(b_r) = c_r$ 时，$T^2(c_r) = a_1$ 当 $g = 2r+2$ 时，
- $T(z_1) = z_2$, $T(z_2) = z_1$ 和 $T(z_k) = z_k$，其中 $k = 3, 4, \ldots, p$,
- $T(\alpha_l) = \alpha_{l+1}$ 其中 $l = 1, 2, \ldots, g-1$ 和 $T(\alpha_g) = \alpha_1$ 所有曲线均绘于图 9。

在本文余下部分，我们将使用 Mod($N_{g,p}$) 的两种不同微分同胚，即图 ρ_3 和 ρ_4 中所示的反射 7 和 8。

引理 3.2. 对于任意 $g = 2r+1 \geq 15$ 或 $g = 2r+2 \geq 14$，由这些元素生成的群

$$\{T, \rho_3, \rho_4, \Gamma_5 B_1 u_{r+5}, v_{r+3,p}\}$$

包含德恩扭转 A_i、B_i、F_i 和 C_j，其中 $i = 1, \ldots, r$ 以及 $j = 1, \ldots, r-1$（当 g 为偶数时，还包含元素 C_r）。

证明。设 $G_1 := \Gamma_5 B_1 u_{r+5}$，并令 G 为由元素 T、ρ_3、ρ_4、G_1 和 $v_{r+3,p}$ 生成的 Mod($N_{g,p}$) 的子群。

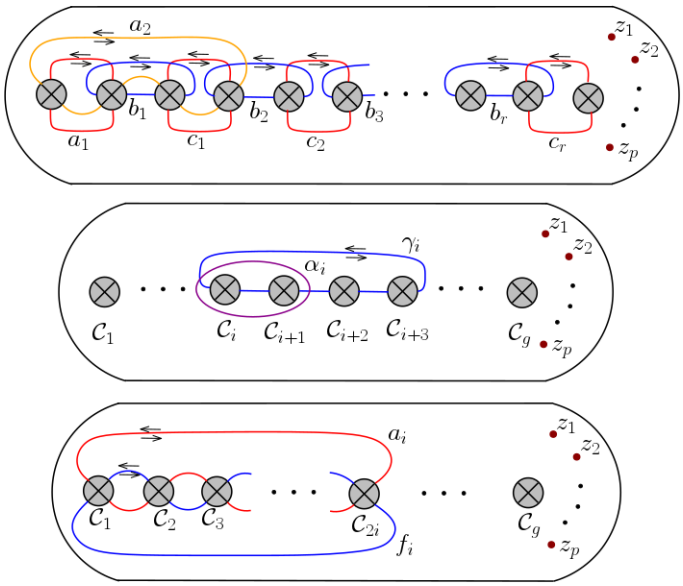

FIGURE 9. 曲线 $a_i, b_i, c_i, \gamma_i, f_i$ 和 α_i （注意，当 g 为奇数时，我们没有 c_r 。）

令 G_2 为将 G_1 与 T^2 共轭后得到的元素。由此可得

$$T^2(\gamma_5, b_1, \alpha_{r+5}) = (\gamma_7, b_2, \alpha_{r+7})$$

that

$$G_2 = G_1^{T^2} = \Gamma_7 B_2 u_{r+7} \in G.$$

设 G_3 表示元素 $G_1^{G_1G_2}$，它属于子群 G。因此，

$$G_3 = B_2 B_1 u_{r+5}$$

我们详细说明这一计算，因为在证明的其余部分中会用到类似的计算。可以验证，微分同胚 G_1G_2 将曲线 $\{\gamma_5, b_1, \alpha_{r+5}\}$ 分别映射为曲线 $\{b_2, b_1, \alpha_{r+5}\}$。于是我们得到元素

$$\begin{aligned} G_3 &= G_1^{G_1G_2} \\ &= (G_1G_2)(\Gamma_5 B_1 u_{r+5})(G_1G_2)^{-1} \\ &= B_2 B_1 u_{r+5}. \end{aligned}$$

因此，子群 G 包含元素

$$G_1 G_3^{-1} = \Gamma_5 B_2^{-1}.$$

这意味着该元素

$$B_3 \Gamma_7^{-1} = (B_2 \Gamma_5^{-1})^{T^2}$$

也包含在 G 中。利用这些元素，我们还得到

$$\begin{aligned} G_4 &= (B_3\Gamma_7^{-1})G_2 = B_3 B_2 u_{r+7} \in G, \\ G_5 &= G_4^{T^{-3}} = C_1 A_1 u_{r+4} \in G, \\ G_6 &= G_4^{G_4G_5} = B_3 C_1 u_{r+7} \in G. \end{aligned}$$

由此，我们得　　元素 $G_4G_6^{-1} = B_2C_1^{-1}$，它属于 G。因此，我们得到以下元素：

$$\begin{aligned} C_1B_1^{-1} &= (B_2C_1^{-1})^{T^{-1}}, \\ B_1B_2^{-1} &= (B_1C_1^{-1})(C_1B_2^{-1}), \\ C_1C_2^{-1} &= (B_1B_2^{-1})^T, \\ B_2C_2^{-1} &= (B_1C_1^{-1})^{T^2}, \\ \Gamma_5C_2^{-1} &= (\Gamma_5B_2^{-1})(B_2C_2^{-1}) \text{ and} \\ A_2A_1^{-1} &= \Gamma_1A_1^{-1} = (\Gamma_5C_2^{-1})^{T^{-4}}, \end{aligned}$$

which 都包含在 G 中。此外，子群 G 包含以下元素　　ts:

$$\begin{aligned} A_1B_1^{-1} &= (C_1B_2^{-1})^{T^{-2}}, \\ A_1B_2^{-1} &= (A_1B_1^{-1})(B_1B_2^{-1}), \\ A_1C_1^{-1} &= (A_1B_1^{-1})(B_1B_2^{-1})(B_2C_1^{-1}), \\ C_1A_2^{-1} &= (C_1A_1^{-1})(A_1A_2^{-1}), \\ C_2A_1^{-1} &= (C_2C_1^{-1})(C_1A_2^{-1})(A_2A_1^{-1}), \\ C_2B_1^{-1} &= (C_2A_1^{-1})(A_1B_1^{-1}) \text{ and} \\ B_3B_1^{-1} &= (B_2C_1^{-1})^{T^2}(C_2B_1^{-1}). \end{aligned}$$

利用 [1, 定理 2.1], 的证明中给出的灯笼关系，可以验证子群 G 包含

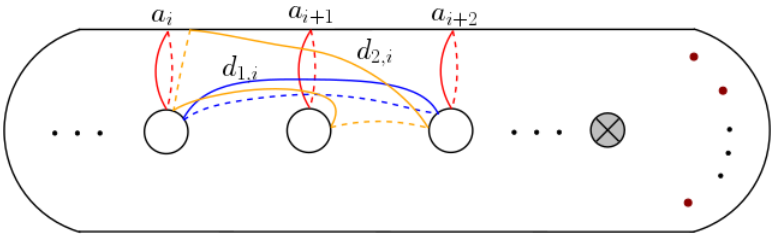

FIGURE 10. 曲线$d_{1,\ i}$ 和 $d_{2,\ i}$。

元素 A_1、A_2、A_3、B_i 和 C_i，适用于 $1 \le i \le r-1$ 和 B_r（当 g 为偶数时，元素 C_r 也适用）。现在我们通过归纳法证明，对于 $j = 4, \ldots, r$，有 $A_j \in G$。为此，我们首先使用微分同胚

$$(A_iB_{i+1}^{-1})(A_iC_i^{-1})(A_iC_{i+1}^{-1})(A_iB_{i+1}^{-1}),$$

它将曲线（a_{i+1}，a_i）映射为（$d_{2,\ i}$，a_i），其中曲线如图10所示，对应于 $i+2 \le r$。由此得到以下恒等式：

$$\big((A_iB_{i+1}^{-1})(A_i\ C_i^{-1})(A_iC_{i+1}^{-1})(A_iB_{i+1}^{-1})\big)(A_{i+1}A_i^{-1})\big((A_iB_{i+1}^{-1})(A_iC_i^{-1})(A_iC_{i+1}^{-1})(A_iB_{i+1}^{-1})\big)^{-1} = D_{2,i}A_i^{-1}.$$

因此，我们有 $D_{2,\ i}C_{i+1}^{-1} = (D_{2,\ i}A_i^{-1})(A_iC_{i+1}^{-1})$。类似地，可以证明

$$(C_{i+1}B_i^{-1})(C_{i+1}A_i^{-1})(C_{i+1}C_i^{-1})(C_{i+1}B_i^{-1})(d_{2,i}, c_{i+1}) = (d_{1,i}, c_{i+1}),$$

这意味着

$$\big((C_{i+1}B_i^{-1})(C_{i+1}A_i^{-1})(C_{i+1}C_i^{-1})(C_{i+1}B_i^{-1})\big)(D_{2,i}C_{i+1}^{-1})\big((C_{i+1}B_i^{-1})(C_{i+1}A_i^{-1})(C_{i+1}C_i^{-1})(C_{i+1}B_i^{-1})\big)^{-1} = D_{1,i}C_{i+1}^{-1}.$$

我们还有 $D_{1,\ i}A_i^{-1}=(D_{1,\ i}C_{i+1}^{-1})(C_{i+1}A_i^{-1})$ 。根据 [1, 定理 21], 证明中给出的灯笼关系，我们得到

$$A_{i+2}=(A_{i+1}C_i^{-1})(D_{1,i}C_{i+1}^{-1})(D_{2,i}A_i^{-1}).$$

因此，由于 A_1、 A_2和 A_3属于 G，我们归纳地得到，对于 $j=1,\ldots,r$，所有 $A_j\in G$均成立。另一方面，由于对于 $i=2,\ldots,r$， $\rho_3(a_1)=f_1$且 $\rho_4(a_i)=f_i$，

$$F_1=(A_1^{-1})^{\rho_3}\in G \text{ and } F_i=(A_i^{-1})^{\rho_4}\in G \text{ for } i=2,\ldots,r.$$

证明至此完成。 □

令 G 为 Mod($N_{g,p}$) 的子群，它由引理 3.2 中明确给出的、满足给定条件的元素生成。

引理 3.3。 子群 G 包含元素 y和 $v_{g,i}$ （若 g为偶数，还包含 $v_{g-1,i}$） ， 其中 $i=1, 2, \ldots, p$。

证明。 我们首先证明 G 包含一个 y-同胚。由引理 3.2，交叉帽换位

$$u_{r+5}=(B_1^{-1})(A_2^{-1})^{T^4}(\Gamma_5 B_1 u_{r+5})\in G$$

因为右侧的每个因子都包含于 G 中。利用 T 的作用，我们得到 $u_i\in G$对于 $i=1$，……， $g-1$。特别地， $u_1\in G$ ，并且不难看出

$$y=A_1u_1\in G.$$

为了证明对每个 $i=1$， 2，……， p都有 $v_{g,\ i}\in G$， 注意到

$$v_{r+3,p}^{T^k}=v_{r+3+k,p}\in G \text{ for } k=1,\ldots g-r-3.$$

特别地， $v_{g,\ p}\in G$。利用元素 $\rho_3\rho_4$，我们得到以下元素:

$$v_{g,p}^{\rho_3\rho_4}=v_{g,1},\quad v_{g,1}^{\rho_3\rho_4}=v_{g,2},\quad \ldots\quad ,v_{g,p-2}^{\rho_3\rho_4}=v_{g,p-1},$$

它们都包含于 G中。

对于偶数 g 的情形，同样地，利用包含于 G 中的元素 $v_{g-1,\ p}$ 和 $\rho_3\rho_4$ ，我们得到这些元素

$$v_{g-1,p}^{\rho_3\rho_4}=v_{g-1,1}\in G,\quad v_{g-1,1}^{\rho_3\rho_4}=v_{g-1,2}\in G,\quad \ldots\quad ,v_{g-1,p-2}^{\rho_3\rho_4}=v_{g-1,p-1}\in G,$$

至此证明完成。 □

引理 3.4. 群 $\mathrm{Mod}_0(N_{g,p})$ 包含于群 G 中。

证明。群 G包含德恩扭转元 A_i、 B_i、 F_i和 C_j，其中 $i=1,\ldots,r$以及 $j=1,\ldots,r-1$ （当 g为偶数时也包括C_r），由引理 3.2 可知；此外，对于 $k=1, 2, \ldots, p$，由引理 3.3 可知，群中还包含元素 y和 $v_{g,k}$ （当 g为偶数时也包括 $v_{g-1,k}$）。由定理 2.1 可知，只需证明对于 $l=1, 2, \ldots, p-1$， 有 $E_l\in G$。由于反射 ρ_4 将 a_1 映射到 e_{p-1}，我们有

$$(A_1^{-1})^{\rho_4}=E_{p-1}\in G.$$

反射 ρ_3 将曲线 e_{p-1} 映射到 e_1。于是我们有

$$(E_{p-1}^{-1})^{\rho_3}=E_1\in G.$$

类似地，利用反射 ρ_4，我们得到

$$(E_1^{-1})^{\rho_4}=E_{p-2}\in G.$$

以此类推，我们得出元素 E_1、 E_2、……、 E_{p-1}属于 G，至此证明完成。现在，我们来证明主要定理。 □

定理 3.5. 子群 G 等于映射类群 $\mathrm{Mod}(N_{g,\ p})$。

证明。根据引理3.4，群 $\mathrm{Mod}_0(N_{g,\ p})$ 包含于群 G中。因此，根据引理 3.1，我们需要证明 G满射到 Sym_p。元素 $\rho_3\rho_4\in G$和 $\rho_1\in G$ 的像分别为 (1， 2，……， p) $\in Sym_p$和 (1， 2) $\in Sym_p$。由于这些元素生成整个群 Sym_p，证明完毕。

□

考虑曲面 $N_{g,\ p}$，其亏格为 $g \geq 14$。由于

$$\rho_3(\gamma_5) = \gamma_5, \quad \rho_3(b_1) = b_1, \text{ and } \rho_3(\alpha_{r+5}) = \alpha_{r+5},$$

反向定向时，元素 $\rho_3\Gamma_5 B_1 u_{r+5}$ 是一个对合。类似地，若为 $g = 2r+1$ 或 $2r+2$，由 $v_p^{\rho_1}{}_{,r+3} = v_p^{-1}{}_{,r+3}$ 可知，元素 $\rho_1 v_{p,r+3}$ 是一个对合。

定理 3.6. 对于任意 $g = 2r+1 \geq 15$ 或 $g = 2r+2 \geq 14$，映射类群 $\mathrm{Mod}(N_{g,p})$ 由以下对合生成

$$\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_3\Gamma_5 B_1 u_{r+5}, \rho_1 v_{p,r+3}\}$$

证明。 证明由定理 3.5 以及以下事实 $T = \rho_2\rho_1$。 □

References

[1] T. Altun ¨ *Generating the mapping class group of a nonorientable surface by two elements or by* oz、M. Pamuk 和 O. Yildiz：*three involutions*，《巴西数学会通报》，新系列 **53**，( )，–。2022 1145 1156 [2] D. R. J. Chillingworth：*A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface*，《剑桥哲学学会会刊》**65**，(2) (1969)，409–430。[3] W. B. R. Lickorish：*Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*，《剑桥哲学学会会刊》**59**，(1963)，307–317。[4] M. Korkmaz：*Mapping class groups of nonorientable surfaces*，《几何学奉献》**89(1)**，(2002)，107–131。[5] B. Szepietowski：*Involutions in mapping class groups of non-orientable surfaces*，《数学集刊》**55**，(3) (2004)，253–260。[6] B. Szepietowski：*The mapping class group of a nonorientable surface is generated by three elements and by four involutions*，《几何学奉献》**117**，(1) (2006)，1–9。[7] K. Yoshihara：*Generating the mapping class group of a non-orientable punctured surface by involutions*，ArXiv math.GT/2212.09924，v1 2022年12月20日。

Faculty of Engineering, Başkent University, Ankara, Turkey
Email address: tulinaltunoz@baskent.edu.tr

Department of Mathematics, Middle East Technical University, Ankara, Turkey
Email address: mpamuk@metu.edu.tr

Department of Mathematics, Middle East Technical University, Ankara, Turkey
Email address: oguzyildiz16@gmail.com