arXiv:2302.01737v1 [math.OC] 3 Feb 2023

ALSO-X#：用于分布鲁棒机会约束规划的更优凸近似

Nan Jiang · Weijun Xie

2023年2月6日

摘要 本文研究分布鲁棒机会约束规划（DRCCP），其中不确定约束必须对 Wasserstein 模糊集中的所有概率分布，以至少达到预先指定阈值的概率得到满足。由于 DRCCP 通常是非凸的，且难以求得最优解，研究人员一直在开发各种凸内近似。近期研究已证明，当确定性集合为凸集时，ALSO-X 的表现优于常规机会约束规划的条件风险价值（CVaR）近似。在本文中，我们通过引入一种求解 DRCCP 的新方法 ALSO-X#，放宽了这一假设。具体而言，在 ALSO-X 和 CVaR 近似的双层重构中，我们发现，下层 ALSO-X 是下层 CVaR 近似的一个特例，而上层 CVaR 近似的限制比 ALSO-X 更多。这一发现促使我们提出 ALSO-X#，它仍采用类似双层形式的结构：在下层问题中采用更一般的 CVaR 近似，在上层则选择限制更少的 ALSO-X。我们证明，ALSO-X# 始终可以优于 CVaR 近似，并且在常规机会约束规划和类型为 ∞–Wasserstein 模糊集的条件下，其表现可以优于 ALSO-X。我们还给出了新的充分条件，在这些条件下，ALSO-X# 能够输出 DRCCP 的最优解。我们将所提出的 ALSO-X# 应用于一个无线通信问题，并通过数值结果表明，其解的质量甚至可以优于精确方法。

关键词。机会约束、条件风险价值、分布鲁棒、保守近似

第一作者：Nan Jiang 单位：佐治亚理工学院，美国佐治亚州亚特兰大 电子邮箱：nanjiang@gatech.edu 通讯作者：Weijun Xie 单位：佐治亚理工学院，美国佐治亚州亚特兰大 电子邮箱：wxie@gatech.edu

1 引言

本文考虑如下形式的分布鲁棒机会约束规划（DRCCP）：

$$(\text{DRCCP}) \quad v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \le b_i(\boldsymbol{x}), \forall i \in [I] \right\} \ge 1-\varepsilon \right\}. \tag{1}$$

在分布鲁棒机会约束规划中，目标是在确定性集合 $\mathcal{X}$ 上最小化线性目标函数，并满足由可能包含多个线性约束 $\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \le b_i(\boldsymbol{x})$构成的不确定约束系统；这些约束对所有 $i \in [I]$均须成立，且对于模糊集 $\mathcal{P}$中的任意概率分布 $\mathbb{P}$，约束满足的概率均不得低于 $1-\varepsilon$。这里，标量 $\varepsilon \in (0,1)$表示预设的风险参数，集合$\mathcal{P}$ 正式定义为可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$上概率分布 $\mathbb{P}$ 的一个子集。该可测空间配备了σ代数 $\mathcal{F}$，并由支撑集为 $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$的随机参数 $\boldsymbol{\xi}$ 诱导。对于每个不确定约束 $i \in [I]$，仿射映射 $\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})$和 $b_i(\boldsymbol{x})$定义为 $\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^m$，其中 $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^m$；以及 $b_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}_i^\top \boldsymbol{x} + b_i \in \mathbb{R}$，其中 $\boldsymbol{B}_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}$。当仅有 $I=1$ 个不确定约束时，问题 (1) 是单个分布鲁棒机会约束规划；否则，它是联合分布鲁棒机会约束规划。值得注意的是，当模糊集 $\mathcal{P}$ 为单元素集合（即 $\mathcal{P}=\{\mathbb{P}\}$）时，分布鲁棒机会约束规划 (1) 将退化为常规机会约束规划（机会约束规划）。

1.1 Wasserstein模糊集

本文研究由数据驱动的 $q-$Wasserstein模糊集，其定义如下

$$\mathcal{P}_q = \left\{ \mathbb{P} \colon \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \in \Xi \right\} = 1, W_q(\mathbb{P}, \mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}) \le \theta \right\},$$

其中，对于任意 $q \in [1,\infty]$， $q-$Wasserstein 距离为

$$W_q(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2) = \inf \left\{ \left[\int_{\Xi\times\Xi} \left\| \boldsymbol{\xi}^1 - \boldsymbol{\xi}^2 \right\|^q \mathbb{Q}(d\boldsymbol{\xi}^1, d\boldsymbol{\xi}^2) \right]^{\frac{1}{q}} : \begin{array}{l} \mathbb{Q} \text{ is a joint distribution of } \tilde{\boldsymbol{\xi}}^1 \text{ and } \tilde{\boldsymbol{\xi}}^2 \\ \text{with marginals } \mathbb{P}_1 \text{ and } \mathbb{P}_2, \text{ respectively} \end{array} \right\},$$

$\theta \ge 0$ 为 Wasserstein半径， $\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}$ 表示由随机参数ζ诱导的参考分布。近年来，关于类型为 $q-$Wasserstein模糊集 [11, 12, 22,25, 26, 29, 45, 49]下的分布鲁棒机会约束规划，已有许多令人振奋的研究。特别地，根据 [26], 中的命题8给出的等价重构，我们将类型为 $\infty-$Wasserstein模糊集下的分布鲁棒机会约束规划 (1) 写为

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \theta \left\| \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}) \right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \le b_i(\boldsymbol{x}), \forall i \in [I] \right\} \ge 1-\varepsilon \right\}. \tag{2}$$

全文中，我们作出以下假设：

A1 参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}$为次高斯分布，即 $\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}\{\tilde{\zeta}\colon \|\tilde{\zeta}\| \ge \tau\} \le C_1 \exp(-C_2\tau^2)$，其中 C_1、C_2为某些正数常量。

值得注意的是，次高斯假设确保 Wasserstein 模糊集的弱紧性，因此在类型为$q-$Wasserstein 模糊集下重构最坏情形期望时具有强对偶性。特别地，本文主要关注经验参考分布或椭圆参考分布，它们显然满足假设A1。

1.2 相关文献

当概率分布的相关信息有限时，分布鲁棒机会约束规划（DRCCPs）近年来受到广泛关注（例如，参见 [11, 12, 20–23, 25, 26, 29, 44, 45, 49,50, 54]）。由于分布鲁棒机会约束规划的可行域通常是非凸的，一些现有研究致力于识别使分布鲁棒机会约束规划（1）的可行域为凸的条件（例如，参见 [10, 14, 16, 20, 30, 32, 40, 43, 44, 50]）。对于单个分布鲁棒机会约束规划（1）， [44] 中的作者证明，在类型为 $1-$ Wasserstein 模糊集下，若参考分布为高斯分布，则其可行域为凸。对于单个分布鲁棒机会约束规划，也有类似的凸性结果：模糊集 $\mathcal{P}$ 由所有具有已知一阶和˜ ˜二阶矩（例如，参见 [10, 16]）、已知支撑集 $\boldsymbol{\xi}$ （例如，参见 [14]）、任意凸映射 $\boldsymbol{\xi}$（例如，参见 [50]）或单峰性 $\mathbb{P}$ （例如，参见 [20, 32]）的概率分布构成。研究人员还提出了非凸机会约束的凸内近似方法（例如，[1, 9, 12, 26, 35, 36]）。例如，众所周知的条件风险价值（CVaR）近似，是用更保守的CVaR约束替代分布鲁棒机会约束规划（1）中的机会约束（详情见 [35]）。近期， [1], 提出的凸近似方法 ALSO-X 已被证明优于常规机会约束规划的CVaR近似（例如，参见 [26]中的定理1）。

尽管面临诸多挑战，DRCCPs 在不确定性下的决策中依然有效，并已应用于广泛的问题，包括投资组合优化 [37, 38], 能源管理 [8, 46],供应链管理 [17, 18], 设施选址问题 [31], 以及无线通信网络[4, 33, 34, 48]。例如，机会约束已用于无线通信网络的设计与优化，以确保某些运行约束（如容量限制或可靠性要求）被违反的概率处于可接受范围内（例如，参见 [33, 34]）。在投资组合优化中，目标是在确保投资组合损失超过指定水平的概率不高于某一限值的同时，最大化投资组合的预期收益（例如，参见 [37, 38]）。有关更多应用，请参阅 [2] 。有关 DRCCPs 的全面综述，感兴趣的读者可参阅 [29]最近发表的一篇综述。

1.3 贡献

本文研究了一种称为“ALSO-X#”的新方法，该方法从以下三个主要方面改进了近期提出的 ALSO-X [26]: (a) 对于任意闭确定性集合 $\mathcal{X}$，在任何模糊集下，ALSO-X# 始终优于 CVaR近似；(b) ALSO-X# 可能优于 ALSO-X；(c) ALSO-X# 满足一些新的条件，在这些条件下，其输出解也是分布鲁棒机会约束问题的最优解。具体而言，

(i) 我们证明，在一般模糊集（不限于 Wasserstein模糊集）和闭确定性集合 $\mathcal{X}$ 下，ALSO-X# 优于 CVaR近似。这一结果显著改进了 [26] 中定理1的结论，后者依赖于确定性集合 $\mathcal{X}$ 的凸性；(ii) 我们证明，在类型为 $\infty-$ Wasserstein 模糊集下，当下层 ALSO-X 存在唯一解时，ALSO-X# 优于 ALSO-X。当参考分布由来自连续非退化分布的独立同分布样本构造，或参考分布为连续且非退化分布时，下层 ALSO-X 确实存在唯一解；(iii) 我们提出了新的充分条件，在这些条件下，ALSO-X# 可为分布鲁棒机会约束规划提供最优解。例如，对于基于经验参考分布的二元分布鲁棒机会约束规划，其中一个充分条件是：；(iv) 我们将上述 ALSO-X# 的结果扩展到求解满足 $q \in [1, \infty$ 的、基于类型为 $q-$Wasserstein 模糊集的分布鲁棒机会约束规划 (1)。

组织结构。本文其余部分安排如下。第 2 节回顾 ALSO-X 和 CVaR近似，并介绍 ALSO-X#。第 3 节表明 ALSO-X# 优于 ALSO-X 和 CVaR近似。第 4 节探讨 ALSO-X# 优于 ALSO-X 的条件。第 5 节给出 ALSO-X# 能够输出精确最优解的条件。第 6 节将

ALSO-X# 扩展至求解具有类型 q–Wasserstein模糊集的分布鲁棒机会约束问题，其中包含 $q \in [1, \infty)$。第7节通过数值实验展示所提出的方法。第8节总结全文。

符号说明。本文使用以下符号。我们用粗体字母（例如，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}$）表示向量和矩阵，并用相应的非粗体字母表示其分量。给定一个向量或矩阵 $\boldsymbol{x}$，其零范数 $\|\boldsymbol{x}\|_0$ 表示其中非零元素的数量。我们用 $\|\cdot\|_*$ 表示一般范数 $\|\cdot\|$的对偶范数。给定一个整数 n，令 $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$，并令 $\mathbb{R}^n_+ := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0, \forall i \in [n]\}$。给定一个实数 τ，令$(\tau)_+ := \max\{\tau, 0\}$。给定一个有限集 I，令 $|I|$表示其基数。~我们用 $\boldsymbol{\xi}$ 表示一个随机向量，并用 $\boldsymbol{\xi}$表示其实现值。给定一个向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，令 $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})$ 表示其支撑集，即 $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x}) := \{i \in [n] : \ x_i \neq 0\}$。给定定义在 Ξ上的概率分布 $\mathbb{P}$，我们用 $\mathbb{P}\{A\}$ 表示$\mathbb{P}\{\boldsymbol{\xi} : \text{ 当 } A(\boldsymbol{\xi})\text{是关于 } \boldsymbol{\xi}\text{的条件时，条件 } A(\boldsymbol{\xi})\text{成立}\}$；并用 $\mathbb{P}\{\boldsymbol{\xi}\text{表示 } \boldsymbol{\xi} \in A\}$，当 $A \subseteq \Xi$ 是$\mathbb{P}$–可测时。对于任意 $x \in \mathbb{R}$，我们用 $\lfloor x \rfloor$ 表示满足 $y \leq x$的最大整数 y。我们使用“不劣于”一词表示“至少同样好”。其他符号将在需要时引入。

2 ALSO-X#

本节首先回顾DRCCP的两种凸近似：ALSO-X和CVaR近似。然后，我们介绍用于求解DRCCP (2)的ALSO-X#，并说明它与ALSO-X及CVaR近似之间的联系。首先，我们引入$\mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}(\cdot)$和$\mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}(\cdot)$的概念。给定风险~参数 ε 以及一个服从概率分布 $\mathbb{P}$ 、累积分布~函数为 $F_{\tilde{\boldsymbol{X}}}(\cdot)$的随机变量 $\boldsymbol{X}$，$(1-\varepsilon)$ $\boldsymbol{X}$ 的风险价值（VaR）定义为

$$\mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{X}}) := \min_s \{s : F_{\tilde{\boldsymbol{X}}}(s) \geq 1-\varepsilon\},$$

相应的条件风险价值（CVaR）为

$$\mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{X}}) := \min_\beta \left\{\beta + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{X}} - \beta]_+\right\}.$$

2.1 最先进的凸近似

一般而言，求解DRCCP (2)是NP难的（例如，参见 [51]）。因此，在本文中，我们不直接求解DRCCP (2)，而是回顾两种已知的凸近似，即广泛使用的CVaR近似和近期提出的ALSO-X。

具有双层结构的 ALSO-X方法可用于求解分布鲁棒机会约束规划 (2)。在下层 ALSO-X 中，我们求解给定目标上界下的铰链损失近似。随后，我们检查其最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 是否满足最坏情形机会约束。上层 ALSO-X 的任务是搜索目标值的最佳上界。形式上，ALSO-X 可表示为：

$$\begin{aligned} v^A = \min_t \quad & t, \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty} \left\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\max_{i\in[I]}\left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\xi}} - b_i(\boldsymbol{x})\right)_+\right] : \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} \leq t\right\}, \\ & \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty} \mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\xi}} : \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top\tilde{\boldsymbol{\xi}} \leq b_i(\boldsymbol{x}^*), \forall i \in [I]\right\} \geq 1-\varepsilon. \end{aligned}$$

基于 [26], 中命题9的等价重构，我们考虑以下 ALSO-X:

$$v^A = \min_t \quad t, \tag{3a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}}\left[\max_{i\in[I]}\left(\theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x})\right)_+\right] : \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} \leq t\right\}, \tag{3b}$$

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)\right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \le b_i(\boldsymbol{x}^*), \forall i\in[I]\right\} \ge 1-\varepsilon. \tag{3c}$$

在类型为 $\infty-$ 的 Wasserstein 模糊集 $\mathcal{P}_\infty$ 下，已有研究表明，当确定性集合 $\mathcal{X}$ 为凸集时，ALSO-X 优于 CVaR近似（例如，参见 [26] 中的定理 7）。然而，一般而言，当集合 $\mathcal{X}$ 为非凸集时，这一结论对分布鲁棒机会约束规划并不成立（参见 [26] 中的例2，其中 Wasserstein半径为$\theta=0$）。为方便记号，分别将 $v^A(t)$ 和 $\widehat{F}(\boldsymbol{x})$ 记为下层 ALSO-X (3b) 的最优值和目标函数。

已有研究表明，CVaR近似在求解分布鲁棒机会约束问题时效果相当不错（例如，参见 [11, 49]）。对于分布鲁棒机会约束规划 (2)，其CVaR近似定义为将最坏情形机会约束替换为如下最坏情形CVaR约束：

$$v^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\colon \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty}\inf_{\beta\le 0}\left[\beta+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\max_{i\in[I]}\left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\xi}}-b_i(\boldsymbol{x})\right)-\beta\right)_+\right]\right]\le 0\right\}.$$

根据 [26], 中命题9的等价重构，我们考虑分布鲁棒机会约束规划 (2) 的如下CVaR近似：

$$v^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\colon \inf_{\beta\le 0}\left[\beta+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}}\left[\left(\max_{i\in[I]}\left(\theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\right\|_*+\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}-b_i(\boldsymbol{x})\right)-\beta\right)_+\right]\right]\le 0\right\}.$$

等价地，我们还将CVaR近似改写为一个双层规划，其中上层问题旨在寻找最优目标值，下层问题则是在目标函数不超过给定值的条件下，最小化CVaR约束左侧的值。即：

$$v^{\mathrm{CVaR}} = \min_t t, \tag{4a}$$

$$\text{s.t. } (\boldsymbol{x}^*,\beta^*)\in \operatorname*{argmin}_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\le t,\\ \beta\le 0}}\left\{\varepsilon\beta+\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}}\left[\left(\max_{i\in[I]}\left(\theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\right\|_*+\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}-b_i(\boldsymbol{x})\right)-\beta\right)_+\right]\right\}, \tag{4b}$$

$$\varepsilon\beta^*+\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}}\left[\left(\max_{i\in[I]}\left(\theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)\right\|_*+\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}-b_i(\boldsymbol{x}^*)\right)-\beta^*\right)_+\right]\le 0. \tag{4c}$$

我们将下层CVaR近似 (4b) 中的目标函数称为“CVaR损失”。我们注意到，若令下层CVaR近似 (4b) 中的变量 $\beta=0$，便可得到铰链损失近似 (3b)。换言之，当 $\beta=0$ 时，下层ALSO-X (3b) 与下层CVaR近似 (4b) 相同。这一观察启发我们改进ALSO-X：以CVaR损失近似替换其下层铰链损失目标函数，具体内容将在后续小节中阐述。

值得注意的是，当确定性集合 $\mathcal{X}$ 为离散集合时，求解 DRCCP (2) 时，CVaR近似可能优于 ALSO-X，以下示例对此进行了说明。

例 *1* 考虑一个具有 $\infty-$Wasserstein模糊集的单个分布鲁棒机会约束规划，其中 $\theta=1$。假设经验分布包含 4 个等概率情景（即 $N=4, \mathbb{P}\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{\zeta}^i\}=1/N$），风险参数为 $\varepsilon=1/2$，确定性集合为 $\mathcal{X}=\{0,1\}$，函数为 $\boldsymbol{a}_1(x)^\top\boldsymbol{\zeta}-b_1(x)$ $=\zeta_1 x-\zeta_2, \zeta_1^1=-48, \zeta_1^2=\zeta_1^3=\zeta_1^4=100, \zeta_2^1=-51$，且 $\zeta_2^2=\zeta_2^3=\zeta_2^4=100$。在此示例中，分布鲁棒机会约束规划 (2) 采用

$$v^* = \min_{x\in\{0,1\}}\left\{-x\colon \mathbb{I}(49x\ge 50)+\mathbb{I}(101x\le 99)+\mathbb{I}(101x\le 99)+\mathbb{I}(101x\le 99)\ge 2\right\},$$

在此情况下，CVaR近似得出最优解，而 ALSO-X 未能找到任何可行解（参见 [26] 中的 example2）。$\diamond$

2.2 什么是 ALSO-X#?

为克服 ALSO-X 和 CVaR近似的局限性，我们提出了新的“ALSO-X#”。如前一小节所述，通过令 $\beta = 0$, 下层 ALSO-X (3b) 可视为下层CVaR近似 (4b) 的一个特例。因此，可以考虑用 CVaR损失替换铰链损失目标函数。另一方面，CVaR近似 (4) 的一个缺点是，它在进行可行性检查时依赖于更保守的 CVaR约束 (4c)。为改进 CVaR近似 (4)，我们可以在可行性检查中使用机会约束 (3c)，从而得到 ALSO-X#，即 CVaR近似与 ALSO-X 的结合。形式上，ALSO-X# 的形式为

$$
\begin{aligned}
v^{A\#} = \min_{t} \quad & t, \\
\text{s.t.} \quad & (\boldsymbol{x}^*, \beta^*) \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}, \beta\le 0} \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty} \left\{ \varepsilon\beta + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} - b_i(\boldsymbol{x})\right) - \beta\right]_+ : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \le t \right\}, \\
& \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty} \mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\xi}}\colon \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \le b_i(\boldsymbol{x}^*), \forall i \in [I]\right\} \ge 1-\varepsilon.
\end{aligned}
$$

根据第2.1节中的重构，ALSO-X# 等价于

$$v^{A\#} = \min_{t} \quad t, \tag{5a}$$

$$\text{s.t.} \quad (\boldsymbol{x}^*, \beta^*) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\le t, \\ \beta\le 0}} \left\{ \varepsilon\beta + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}}\left[\left(\max_{i\in[I]} \left(\theta \left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x})\right) - \beta\right)_+\right] \right\}, \tag{5b}$$

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \theta \left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)\right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \le b_i(\boldsymbol{x}^*), \forall i \in [I]\right\} \ge 1-\varepsilon. \tag{5c}$$

在所提出的 ALSO-X# (5) 中，给定当前目标值 t，下层 ALSO-X# (5b) 首先求解 CVaR近似，然后上层 ALSO-X# 检查下层解是否满足最坏情形机会约束 (5c)。通过这种方式，我们引入了分布鲁棒机会约束规划 (2) 的新凸近似，其中有 $v^* \le v^{A\#}$。

算法1总结了 ALSO-X# (5) 的求解过程。对于给定的上层问题的 t，我们求解下层CVaR近似 (5b)，得到一个最优解 $(\boldsymbol{x}^*, \beta^*)$，并检查 $\boldsymbol{x}^*$ 是否满足分布鲁棒机会约束规划 (2)，即检查 $\boldsymbol{x}^*$ 是否满足 (5c)。如果答案为是，则减小 t 的值；否则，增大其值。在实现中，我们使用二分搜索法，以停止容差 δ_1 搜索最优 t。实现细节与 [26] 中算法1及其备注类似。

算法1 所提出的 ALSO-X# 算法

输入： 令 δ_1 表示停止容差参数，t_L 且 t_U 分别表示 DRCCP (2) 最优值的已知下界和上界 **当** $t_U - t_L > \delta_1$ **时执行** 令 $t = (t_L + t_U)/2$ 和 $(\boldsymbol{x}^*, \beta^*)$ 为下层 ALSO-X# (5b) 的一个最优解 令 $t_L = t$ 如果 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 (5c)；否则，$t_U = t$ **循环结束** **输出：** DRCCP (2) 的一个可行解 $\boldsymbol{x}^*$ 及其目标值 $\bar{v}^{A\#}$

请注意，下层 ALSO-X# (5b) 中的约束 $\beta \le 0$ 是从 CVaR近似继承而来的。我们可以放宽这一约束，从而得到 ALSO-X# 的以下“弱”形式，称为“ALSO-X#: ”

$$\underline{v^{A\#}} = \min_{t} t, \tag{6a}$$

$$\text{s.t. } (\boldsymbol{x}^*,\beta^*)\in \underset{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\le t,\beta}{\operatorname{argmin}} \left\{\varepsilon\beta+\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}}\left[\left(\max_{i\in[I]}\left(\theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\right\|_*+\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}-b_i(\boldsymbol{x})\right)-\beta\right)_+\right]\right\}, \tag{6b}$$

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)\right\|_*+\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\le b_i(\boldsymbol{x}^*),\forall i\in[I]\right\}\ge 1-\varepsilon. \tag{6c}$$

在数值研究中，我们发现 ALSO-X# 的表现始终优于 ALSO-X#。以下示例表明，ALSO-X# 可以优于 ALSO-X#、ALSO-X、ALSO-X+ 和 CVaR近似。我们将在下一节正式证明这一结果。

例*2* 考虑一个具有类型 ∞–Wasserstein模糊集的单个分布鲁棒机会约束规划，其中 $\theta=1$。假设经验分布有 4 个等概率情景（即 $N=4,\mathbb{P}\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{\zeta}^i\}=1/N$），风险参数为 $\varepsilon=1/2$，确定性集合为 $\mathcal{X}=\{0,1\}$，函数 $\boldsymbol{a}_1(x)^\top\boldsymbol{\zeta}-b_1(x)$ $=\zeta_1 x-\zeta_2,\zeta_1^1=-8,\zeta_1^2=\zeta_1^3=\zeta_1^4=3,\zeta_2^1=-25/2$，且 $\zeta_2^2=\zeta_2^3=\zeta_2^4=5/2$。在此例中，DRCCP (2) 采用

$$v^*=\min_{x\in\{0,1\}}\left\{-x\colon \mathbb{I}\left(9x\ge\frac{23}{2}\right)+\mathbb{I}\left(4x\le\frac{3}{2}\right)+\mathbb{I}\left(4x\le\frac{3}{2}\right)+\mathbb{I}\left(4x\le\frac{3}{2}\right)\ge 2\right\}.$$

ALSO-X# $v^{A\#}$ (6) 的弱形式可写为

$$v^{A\#}=\min_t\left\{t\colon \sum_{i\in[4]}\mathbb{I}(s_i^*>0)\le 2,\right.$$
$$\left.(x^*,\boldsymbol{s}^*,\beta^*)\in\underset{x\in\{0,1\},\boldsymbol{s},\beta}{\operatorname{argmin}}\left\{\frac{1}{4}\sum_{i\in[4]}s_i-\frac{1}{2}\beta\colon \begin{array}{l}-9x+\frac{23}{2}\le s_1,4x-\frac{3}{2}\le s_2,4x-\frac{3}{2}\le s_3,\\ 4x-\frac{3}{2}\le s_4,-x\le t,s_i\ge\beta,\forall i\in[4]\end{array}\right\}\right\}.$$

特别地，对于任意 $t\ge -1$，ALSO-X# 都会返回一个满足 $s_1^*=s_2^*=s_3^*=s_4^*=5/2,x^*=1$ 的解。由于 $\boldsymbol{s}^*$ 的支撑集大小大于 2，我们必须将目标上界 t 增大到无穷大。然而，如果我们施加 $\beta\le 0$，即考虑 ALSO-X#，则有 $s_1^*=23/2,s_2^*=s_3^*=s_4^*=-3/2,\beta^*=-3/2,x^*=0$。因此，在此例中，ALSO-X# 总能返回最优解，但 ALSO-X# 无法找到任何可行解。请注意，在此例中，ALSO-X、CVaR近似和 ALSO-X+（例如，参见 [26] 第 4 节）都无法找到任何可行解。$\diamond$

值得一提的是，尽管 ALSO-X# 的形式往往较弱，但无约束的β 变量有助于证明在椭圆参考分布下 ALSO-X# 的优势。

3 ALSO-X# 优于ALSO-X 和CVaR 近似

本节将分别证明 ALSO-X# 优于 ALSO-X、ALSO-X# 和 CVaR近似。

3.1 ALSO-X# 优于 ALSO-X

注意，ALSO-X# 可视为 CVaR近似与 ALSO-X 的结合。事实上，如果下层 ALSO-X 为分布鲁棒机会约束规划 (2) 提供一个可行解，那么下层 ALSO-X# 至少有一个最优解也满足分布鲁棒机会约束规划 (2)。具体而言，在类型为 ∞–Wasserstein模糊集的情况下，对于给定的目标上界 t，若下层 ALSO-X (3b) 的最优值为正（即 $v^A(t)>0$），则下层 ALSO-X (3b) 有唯一最优解，且该解满足分布鲁棒机会约束规划 (2)。因此，下层 ALSO-X# 的任意最优解也满足分布鲁棒机会约束规划 (2)。

定理1 假设对于任意满足 t 使得 $t\ge\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t)>0$ 的目标上界，下层ALSO-X (3b) 均存在唯一最优解。那么，ALSO-X# (5) 优于ALSO-X (3)，即 $v^{A\#}\le v^A$。

证明 只需证明：对于任意目标上界 t，如果下层ALSO-X (3b)对于$\widehat{}$分布鲁棒机会约束规划 (2)是可行的，那么下层 ALSO-X# (5b)对于分布鲁棒机会约束规划 (2)也可行。令 $(\widehat{\boldsymbol{x}},\beta)$ 表示下层 ALSO-X# (5b)的一个最优解，并令 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 表示下层 ALSO-X (3b)的一个最优解。我们通过讨论 $v^A(t)=0$ 或 $v^A(t)>0$，将证明分为两个步骤。

步骤 I. 当下层 ALSO-X (3b) 的最优值为 $v^A(t)=0$ 时，由于 $v^A(t)$ 是下层 ALSO-X# (5b) 的上界，因此下层 ALSO-X (3b) 的最优值小于或等于零。由于 ALSO-X# 的目标值除以 ε 小于或等于零意味着对分布鲁棒机会约束 [36], 的保守近似，我们必有 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 满足 DRCCP (2)。

步骤 II. 接下来，我们考虑下层 ALSO-X (3b) 的最优值为正的情况，即 $v^A(t)>0$。我们根据 $\widehat{\beta}=0$ 是否成立，讨论两种情形。

$\widehat{}$**情形 I.** 若 $\beta=0$，则下层 ALSO-X# (5b) 与下层 ALSO-X (3b) 重合。由于下层 ALSO-X (3b) 存在唯一最优解，我们必有 $\bar{\boldsymbol{x}}=\widehat{\boldsymbol{x}}$。也就是说，ALSO-X# 与 ALSO-X 相同。因此，若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足 DRCCP 的可行性条件，即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足 (3c)，则 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 也满足 DRCCP (2)。

$\widehat{}$**情形 II.** 假设 $\beta<0$。根据 [41], 第 3 节中的讨论，我们有

$$\mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}\left\{\theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}})\right\|_*+\boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}-b_i(\widehat{\boldsymbol{x}}),\forall i\in[I]\right\}<0,$$

这意味着

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon\theta\left\|\boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}})\right\|_*+\boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\le b_i(\widehat{\boldsymbol{x}}),\forall i\in[I]\right\}\ge 1-\varepsilon.$$

因此，ALSO-X# 为分布鲁棒机会约束规划 (2) 提供了一个可行解。由于下层 ALSO-X (3b) 的解可能不满足分布鲁棒机会约束规划 (2) 的可行性，ALSO-X# 优于 ALSO-X。□

我们对定理1作如下评述：

(i) 与文献 [26], 不同，我们的证明不需要集合 $\mathcal{X}$ 满足凸性假设；(ii) 正如下一节将正式证明的，许多分布鲁棒机会约束问题及其常规对应问题都满足唯一性条件；(iii) 在例2中，当 $t\ge -1$ 时，下层 ALSO-X 有唯一最优解，但该解不满足分布鲁棒机会约束问题的可行性。相比之下，本文提出的 ALSO-X# 能够找到最优解，根据定理1，它优于 ALSO-X。

定理1中的唯一性假设实际上是必要的。下面给出一个例子，说明 ALSO-X# 可能劣于 ALSO-X。

例 *3* 考虑一个在类型为 ∞–Wasserstein模糊集下的单个分布鲁棒机会约束规划，其中 $\theta=1/2$ 和 $\|\cdot\|_*=\|\cdot\|_1$。假设经验分布有 3 个等概率情景（即 $N=3,\mathbb{P}\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{\zeta}^i\}=1/N$），风险参数为 $\varepsilon=1/2$，确定性集合为 $\mathcal{X}=[0,10]^2$，函数为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\zeta}-b_1(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}+1,\boldsymbol{\zeta}^1=(5/2,7/2)^\top,\boldsymbol{\zeta}^2=(5/2,3/2)^\top$，且 $\boldsymbol{\zeta}^3=(3/2,5/2)^\top$。在此例中，分布鲁棒机会约束规划 (2) 转而采用

$$v^*=\min_{\boldsymbol{x}\in[0,10]^2}\left\{x_1+x_2\colon\mathbb{I}(2x_1+3x_2\ge 1)+\mathbb{I}(2x_1+x_2\ge 1)+\mathbb{I}(x_1+2x_2\ge 1)\ge 2\right\},$$

其中最优值为 $v^*=1/2$。其 ALSO-X 对应的形式如下：

$$\begin{aligned}v^A=\min_t\Bigg\{&t\colon\sum_{i\in[3]}\mathbb{I}(s_i^*>0)\le 2,\\&(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{s}^*)\in\operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in[0,10]^2,\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^3_+}\left\{\frac{1}{3}\sum_{i\in[3]}s_i\colon\begin{array}{l}2x_1+3x_2\ge 1-s_1,2x_1+x_2\ge 1-s_2,\\x_1+2x_2\ge 1-s_3,x_1+x_2\le t\end{array}\right\}\Bigg\}.\end{aligned}$$

当 $t = 1/2$ 时，下层 ALSO-X 的一个最优解为 $x_1^* = 0, x_2^* = 1/2, s_1^* = 0, s_2^* = 1/2, s_3^* = 0$，该解满足分布鲁棒机会约束规划的可行性。在这种情况下，ALSO-X 可以找到分布鲁棒机会约束规划的一个最优解，且 $v^A = v^* = 1/2$。然而，当 $t = 1/2$ 时，下层 ALSO-X 的另一个最优解为 $x_1^* = 1/4, x_2^* = 1/4, s_1^* = 0, s_2^* = 1/4, s_3^* = 1/4$，该解不满足分布鲁棒机会约束规划的可行性。因此，它违反了唯一性假设。

现在来考虑相应的 ALSO-X# :

$$v^{A\#} = \min_t \left\{ t \colon \sum_{i\in[3]} \mathbb{I}(s_i^* > 0) \le 2, \right.$$
$$\left. (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{s}^*, \beta^*) \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in[0,10]^2, \boldsymbol{s}, \beta\le 0} \left\{ \frac{1}{3}\sum_{i\in[3]} s_i - \frac{1}{2}\beta \colon \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \ge 1 - s_1, 2x_1 + x_2 \ge 1 - s_2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 1 - s_3, x_1 + x_2 \le t, s_i \ge \beta, \forall i \in [3] \end{array} \right\} \right\}.$$

当 $t = 1/2$ 时，其一个最优解为 $x_1^* = 1/4, x_2^* = 1/4, s_1^* = 0, s_2^* = 1/4, s_3^* = 1/4, \beta^* = 0$，该解对于分布鲁棒机会约束规划而言不可行。因此，ALSO-X# 可能无法找到分布鲁棒机会约束规划的最优解。也就是说，当唯一性假设不成立时，我们可能有 $v^{A\#} > v^A$。$\diamond$

3.2 ALSO-X# 优于 ALSO-X#

在下层 ALSO-X# (5b) 中，我们基于 CVaR近似 (4) 加入约束 $\beta \le 0$。放宽此约束后，我们得到一个较弱的 ALSO-X# (6)。我们证明，当 ALSO-X# 为分布鲁棒机会约束规划 (2) 提供可行解时，下层 ALSO-X# 与下层 ALSO-X# 等价。具体而言，在类型为 $\infty-$ 的 Wasserstein 模糊集下，对于给定的目标上界 t，当下层 ALSO-X# (6b) 存在一个对分布鲁棒机会约束规划 (2) 可行的最优解时，下层 ALSO-X# 的任意最优解也对分布鲁棒机会约束规划 (2) 可行。

定理 2 假设对于任意满足 $t \ge \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 的目标上界 t，ALSO-X# (5) 优于 ALSO-X# (6)，即 $v^{A\#} \le v^{A\#}$。

证明 只需证明：对于给定的目标上界 t，若下层 ALSO-X# (6b) 得到分布鲁棒机会约束规划 (2) 的一个可行解，则下层 ALSO-X# (5b) 也可行。

令 $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\beta})$ 表示下层 ALSO-X# (5b) 的一个最优解，并令 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \beta)$ 表示下层 ALSO-X# (6b) 的一个最优解。假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 对分布鲁棒机会约束规划 (2) 可行，即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足 (3c)。现在令

$$\bar{\beta}^* := \mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}\left\{ \theta \left\| \boldsymbol{a}_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\bar{\boldsymbol{x}}), \forall i \in [I] \right\} \le 0.$$

根据 [41] 中的定理1（例如，参见 [41] 中的方程 (7)），我们有 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \beta^*)$ 是下层 ALSO-X# (6b) 的另一个最优解。由于下层 ALSO-X# (5b) 与下层 ALSO-X# (6b) 之间唯一的区别是约束 $\beta \le 0$，因此解 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \beta^*)$ 也是下层 ALSO-X# (5b) 的最优解。也就是说，对于给定的目标上界 t，两个下层问题具有相同的最优值。

在这种情况下，对于下层 ALSO-X# (5b) 的任意最优解，它也应当是下层 ALSO-X# (6b) 的最优解。因此，$(\widehat{\boldsymbol{x}}, \beta)$ 也是下层 ALSO-X# (6b) 的最优解。根据 [41] 中的定理1（例如，参见 [41] 中的公式 (7)），我们有

$$\widehat{\beta} \ge \mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}\left\{ \theta \left\| \boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\widehat{\boldsymbol{x}}), \forall i \in [I] \right\}.$$

结合条件 $\beta \le 0$，我们有

$$\mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}\left\{ \theta \left\| \boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}}) \right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\widehat{\boldsymbol{x}})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\widehat{\boldsymbol{x}}), \forall i \in [I] \right\} \le 0,$$

这意味着 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 满足 (3c)，即 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 对于分布鲁棒机会约束规划 (2) 也是可行的。证明至此完成。 $\square$

我们对定理 2 作如下说明:

(i) 请注意，在定理 2 中，我们证明了 ALSO-X# 优于 ALSO-X#；并且

(ii) 人们可能会认为 ALSO-X 和 ALSO-X# 可以相互比较。事实上并非如此。在例 1 中，我们可以证明 ALSO-X# 返回了更好的解（即，$v^{A\#}=0$，而 ALSO-X 未能找到任何可行解）；而在例 3 中，ALSO-X 可能得到更好的解（即，$v^{A}=1/2<v^{A\#}=2/3$）。

3.3 ALSO-X# 优于 CVaR 近似

回顾一下，ALSO-X# 与 CVaR近似的差异在于相应的上层和下层问题，其中，上层 CVaR近似中的检验条件比上层 ALSO-X# 中的条件更严格，而下层 ALSO-X# 是下层CVaR近似的松弛。因此，我们证明，当 CVaR近似为分布鲁棒机会约束规划 (2) 提供一个可行解时，下层 ALSO-X# 的任何最优解都必定是分布鲁棒机会约束规划 (2) 的可行解。

定理 3 ALSO-X# (6) 优于 CVaR 近似(4)，即 $v^{A\#}\leq v^{\mathrm{CVaR}}$。

证明 注意，对于给定的目标上界 t，下层 ALSO-X# 是下层CVaR近似的松弛。因此，如果下层CVaR近似的最优值非正（即约束 (4c) 成立），那么下层 ALSO-X# 的最优值必定也非正，这根据 [36] 确保任何最优解都是分布鲁棒机会约束规划 (2) 的可行解。因此，对于给定的 t，如果 CVaR近似能找到分布鲁棒机会约束规划 (2) 的可行解，ALSO-X# 也必定能找到。证明完毕。□

我们指出，定理 3 中的结果可以推广到任意一般模糊集，即在一般模糊集下，ALSO-X# 优于 CVaR近似。然而，定理1不成立这一结论，因为下层 ALSO-X (3b) 和上层 ALSO-X (3c) 中的最坏情形分布可能并不相同。因此，在一般模糊集下，ALSO-X# 和 ALSO-X 无法比较。下面给出一个例子来说明定理 3。

例*4* 考虑一个具有 ∞–Wasserstein模糊集和 $\theta=1/2$ 的单个分布鲁棒机会约束规划。假设经验分布有 3 个等概率情景（即 $N=3,\mathbb{P}\{\tilde{\zeta}=\zeta^i\}=1/N$），风险参数$\varepsilon=1/2$，确定性集合 $\mathcal{X}=\mathbb{R}_+$，函数 $a_1(x)^\top\zeta-b_1(x)=x-\zeta,\zeta^1=5/2,\zeta^2=3/2$，且 $\zeta^3=1/2$。在此例中，分布鲁棒机会约束规划 (2) 采用

$$v^*=\min_{x\geq 0}\{x\colon \mathbb{I}(x\geq 3)+\mathbb{I}(x\geq 2)+\mathbb{I}(x\geq 1)\geq 2\},$$

其 CVaR近似为

$$v^{\mathrm{CVaR}}=\min_{x\geq 0,\boldsymbol{s},\beta\leq 0}\left\{x\colon x\geq 3-s_1,x\geq 2-s_2,x\geq 1-s_3,\frac{1}{3}\sum_{i\in[3]}s_i-\frac{\beta}{2}\leq 0,s_i\geq\beta,\forall i\in[3]\right\},$$

而 ALSO-X# (6) 的弱形式可写为

$$v^{A\#}=\min_t\left\{t\colon \sum_{i\in[3]}\mathbb{I}(s_i^*>0)\leq 2,\right.$$
$$\left.(x^*,\boldsymbol{s}^*,\beta^*)\in\operatorname*{argmin}_{x\geq 0,\boldsymbol{s},\beta}\left\{\frac{1}{3}\sum_{i\in[3]}s_i-\frac{1}{2}\beta\colon \begin{array}{l}x\geq 3-s_1,x\geq 2-s_2,x\geq 1-s_3,\\ x\leq t,s_i\geq\beta,\forall i\in[3]\end{array}\right\}\right\}.$$

通过直接计算，我们得到 $v^*=2,v^{\mathrm{CVaR}}=8/3,v^{A\#}=2$。因此，在此示例中，ALSO-X# 返回最优解，而 CVaR近似无法做到。◇

3.4 比较总结

最后，我们通过对 ALSO-X#、ALSO-X#、ALSO-X 和 CVaR近似的输出目标值进行理论比较来总结本节，比较结果如图1所示。

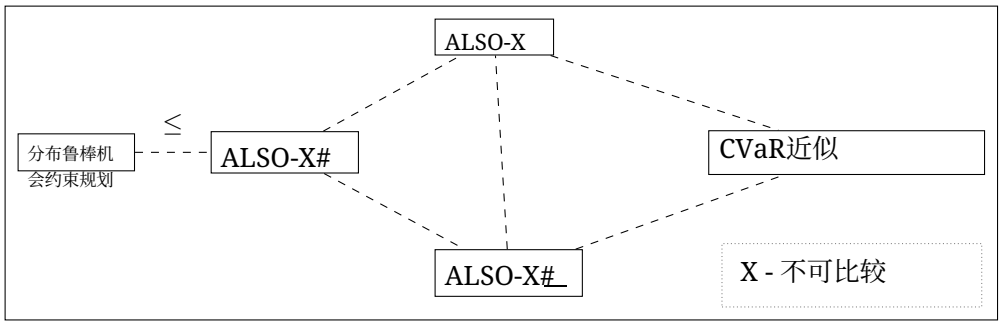


图1：比较总结

4 下层 ALSO-X 的最优解唯一

本节探讨下层 ALSO-X 能够给出唯一最优解的条件。这是根据定理1保证 ALSO-X# 优于 ALSO-X 的一个充分条件。值得注意的是，我们证明，只要满足以下条件之一，下层 ALSO-X (3b) 就存在唯一最优解：(i) 经验数据来自连续非退化分布，且集合 $\mathcal{X}$ 任意；(ii) 单个分布鲁棒机会约束规划具有连续参考分布，且集合 $\mathcal{X}$ 为凸集；(iii) 具有右端不确定性的联合分布鲁棒机会约束规划具有连续参考分布，且集合 $\mathcal{X}$ 为凸集；或 (iv) 具有左端不确定性的联合分布鲁棒机会约束规划中，集合 $\mathcal{X}$ 为凸集。

4.1 唯一性：从连续分布中抽样的独立同分布经验参考分布下的分布鲁棒机会约束问题

在本小节中，我们考虑这样一种情形：当参考分布具有有限支集，且由从连续非退化分布中抽取的独立同分布样本构造时，下层 ALSO-X (3b) 能够给出唯一解。对于给定的随机参数独立同分布样本 $\boldsymbol{\zeta}$，我们考虑如下 ALSO-X：

$$v^A = \min_{t} \quad t, \tag{7a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j\in[N]} \max_{i\in[I]} \left[\theta \left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta}^j - b_i(\boldsymbol{x})\right]_+ : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \le t, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \right\}, \tag{7b}$$

$$\sum_{j\in[N]} \mathbb{I}\left\{ \max_{i\in[I]} \left[\theta \left\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)\right\| + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{\zeta}^j - b_i(\boldsymbol{x}^*)\right]_+ = 0 \right\} \ge N - \lfloor N\varepsilon \rfloor. \tag{7c}$$

事实上，我们证明，以概率 1，对于任意满足 $t \ge \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 的目标上界 t，只要下层 ALSO-X (3b) 的最优值为正（即 $v^A(t) > 0$），下层 ALSO-X (3b) 就存在唯一最优解。注意，如果 $v^A(t) = 0$，那么下层 ALSO-X (3b) 的任意最优解都满足分布鲁棒机会约束规划 (2)。因此，我们关注 $v^A(t) > 0$ 的非平凡情形。

定理 4 设 *(i)* 对任意满足 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ 的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{X}$，以及任意一对 $(i_1, i_2) \in [I] \times [I]$，均有 $\boldsymbol{a}_{i_1}(\boldsymbol{x}_1) \neq \boldsymbol{a}_{i_2}(\boldsymbol{x}_2)$; *(ii)* 随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 的真实分布 $\mathbb{P}^*$ 是连续且非退化的；*(iii)* $\boldsymbol{\zeta}^1, \boldsymbol{\zeta}^2, \cdots, \boldsymbol{\zeta}^N$ 是随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$ 的~独立同分布样本。那么，当$t \geq \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t) > 0$ 时，下层 *ALSO-X (3b)* 存在唯一最优解。

证明 我们首先将下层 ALSO-X (7b) 写为

$$F(\boldsymbol{x}, \mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}) \colon = \frac{1}{N} \sum_{j \in [\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}]} \max_{i \in [I]} \left[\theta \left\| \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}) \right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta}^j - b_i(\boldsymbol{x}) \right], \tag{8}$$

其中集合 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}$ 定义为 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}} = \{j \in [N] \colon \theta \left\| \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}) \right\|_* + \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta}^j - b_i(\boldsymbol{x}) \geq 0, \forall i \in [I]\}$。假设 (8) 中存在两个不同的解 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{X}$。在此证明中，我们省略记号 $F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_1})$ 和 $F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_2})$。我们考虑 $F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0$，因为 $v^A(t) > 0$。我们根据确定性集合 $\mathcal{X}$ 将余下的证明分为三个步骤。

步骤 I. 假设集合 $\mathcal{X}$ 紧致且离散。令 i_1^j 和 i_2^j 分别表示目标函数 (8) 中对应于 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$ 的样本 $j \in [N]$ 的最大部分。下面分两种情况讨论。

情形 1). 当 $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{T} \subseteq [N]$ 和 $\mathcal{T} \neq \emptyset$ 时，根据 $F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \middle| \mathcal{T} \neq \emptyset, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \right\} \\
\leq &\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \sum_{j \in \mathcal{T}} \left[\left[\boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) \right]^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] \right. \\
&\qquad \left. = \sum_{j \in \mathcal{T}} \left[b_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - b_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) + \theta \left[\left\| \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* - \left\| \boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* \right] \right] \middle| \mathcal{T} \neq \emptyset, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \right\}.
\end{aligned}$$

根据假设 (i)，对于任意 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ 以及任意一对 $(i_1, i_2) \in [I] \times [I]$，我们有 $\boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) \neq \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2)$~对所有 $j \in [N]$ 均成立。由于随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$ 是连续且非退化的（例如，参见 [28] 中的定义 24.16 ），因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \sum_{j \in \mathcal{T}} \left[\left[\boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) \right]^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] \right. \\
&\qquad \left. = \sum_{j \in \mathcal{T}} \left[b_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - b_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) + \theta \left[\left\| \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* - \left\| \boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* \right] \right] \middle| \mathcal{T} \neq \emptyset, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \right\} = 0.
\end{aligned}$$

情形 2）。当 $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$ 时，根据 $F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \middle| \mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \right\} \\
\leq &\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \sum_{j \in \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2} \left[\boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1)^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] - \sum_{j \in \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1} \left[\boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2)^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] + \sum_{j \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2} \left[\left[\boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) \right]^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] \right. \\
&\qquad \left. = \sum_{j \in \mathcal{T}} \left[b_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - b_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) + \theta \left[\left\| \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* - \left\| \boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* \right] \right] \middle| \mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \right\}.
\end{aligned}$$

由于集合 $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2$、$\mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ 中至少有一个非空，并且随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$ 的分布~是连续且非退化的，因此我们有

$$\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \sum_{j \in \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2} \left[\boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1)^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] - \sum_{j \in \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1} \left[\boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2)^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] + \sum_{j \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2} \left[\left[\boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) \right]^\top \boldsymbol{\zeta}^j \right] \right.$$

$$= \sum_{j\in\mathcal{T}} \left[b_{i_1^j}(\boldsymbol{x}_1) - b_{i_2^j}(\boldsymbol{x}_2) + \theta \left[\left\| \boldsymbol{a}_{i_2^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* - \left\| \boldsymbol{a}_{i_1^j}(\boldsymbol{x}) \right\|_* \right] \right] \Bigg| \mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \Bigg\} = 0.$$

结合这两种情况，对于给定的 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0\} \\
=& \sum_{\mathcal{T}\subseteq[N], i_1^j\in[I], i_2^j\in[I], \forall j\in\mathcal{T}} \mathbb{P}^* \left\{ \mathcal{T} \neq \emptyset, i_1^j, i_2^j, \forall j \in \mathcal{T} \right\} \mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \Big| \mathcal{T} \neq \emptyset, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \right\} \\
&+ \sum_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq [N], \mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2, i_1^j \in, i_2^j \in \mathcal{S}_2, \forall j \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \mathbb{P}^* \left\{ \mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2, i_1^j, i_2^j, \forall j \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \right\} \\
&\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \Big| \mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2, i_1^j, i_2^j, \forall j \in [N] \right\} \\
=& 0.
\end{aligned}$$

因此，对于任意 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{X}$，我们进一步有

$$\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{X}, \boldsymbol{x}_2\in\mathcal{X}, \\ \boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2}} F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \right\} = 0.$$

因此，我们证明了当集合 $\mathcal{X}$ 为离散紧集时，下层问题 (8) 以概率 1 存在唯一最优解。

步骤 II. 假设集合 $\mathcal{X}$ 是紧集，但不一定是离散集。假设集合 $\mathcal{X} \subseteq [-M, M]^n$。那么，对于某个足够小的 $\nu > 0$，通过离散化，对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$，存在 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}^\nu$，使得 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty \leq \nu$ 和 $|\mathcal{X}^\nu| \leq |2M/\nu|^n$。我们不再对 $\mathcal{X}$ 进行优化，而是考虑在 (8) 中对 $\mathcal{X}^\nu$ 进行优化。这里，我们选择 ν 作为 $\nu(\tau) = 2M/2^\tau$，$\tau \in \mathbb{N}$。按照步骤 I 中的类似过程，我们假设存在两个不同的解 $\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau)) \neq \boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))$，使得 $\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau)) \ \boldsymbol{x}_2(\nu(\tau)) \in \mathcal{X}^\nu(\tau) \ F(\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau)) \ \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau)) \ \mathcal{S}_2) > 0$。对于任意 $\tau \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \\ \boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\neq\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))}} F(\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau)), \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau)), \mathcal{S}_2) > 0 \right\} = 0.$$

当 τ 增大时，可行解的数量也会增加。也就是说，可测序列

$$\bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \\ \boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\neq\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))}} \{F(\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau)), \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau)), \mathcal{S}_2) > 0\}$$

随着 τ 增大，该量单调不减。根据可测集序列的单调收敛定理（例如参见 [52] 中的定理 1.26），当 $\tau \to \infty$ 时，该可测序列的极限存在。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \lim_{\tau\to\infty} \bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \\ \boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\neq\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))}} F(\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau)), \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau)), \mathcal{S}_2) > 0 \right\} \\
=& \lim_{\tau\to\infty} \mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))\in\mathcal{X}^\nu(\tau), \\ \boldsymbol{x}_1(\nu(\tau))\neq\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau))}} F(\boldsymbol{x}_1(\nu(\tau)), \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2(\nu(\tau)), \mathcal{S}_2) > 0 \right\} = 0.
\end{aligned}$$

因此，当集合 $\mathcal{X}$ 紧致但非离散时，方程 (8) 以概率 1 存在唯一解。

步骤 III。当集合 $\mathcal{X}$ 不紧时，该结论仍然成立。令 $\mathcal{X}_r = \mathcal{X} \cap \mathcal{B}(\mathbf{0}, r)$，其中 $r > 0$。根据定义，$\mathcal{X}_r$是紧集。然后，按照步骤 I 和步骤 II 中类似的过程，存在两个不同的解 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$，使得 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{X}_r$、$F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0$。对于任意 $r > 0$，由于集合 $\mathcal{X}_r$有界，根据步骤 II，我们有

$$\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} : \bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1 \in \widehat{\mathcal{X}}_r, \boldsymbol{x}_2 \in \widehat{\mathcal{X}}_r, \\ \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2}} F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \right\} = 0.$$

由于可测集序列的单调收敛定理（例如，参见 [52]中的定理 1.26），我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} : \lim_{r \to \infty} \bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1 \in \widehat{\mathcal{X}}_r, \boldsymbol{x}_2 \in \widehat{\mathcal{X}}_r, \\ \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2}} F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \right\} \\ &= \lim_{r \to \infty} \mathbb{P}^* \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} : \bigcup_{\substack{\boldsymbol{x}_1 \in \widehat{\mathcal{X}}_r, \boldsymbol{x}_2 \in \widehat{\mathcal{X}}_r, \\ \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2}} F(\boldsymbol{x}_1, \mathcal{S}_1) = F(\boldsymbol{x}_2, \mathcal{S}_2) > 0 \right\} = 0. \end{aligned}$$

因此，当集合 $\mathcal{X}$不紧时，方程（8）以概率 1 存在唯一解。证明完毕。□

我们对定理 4 作如下备注:

(i) 证明表明，下层 ALSO-X 的任何目标值都是唯一的；(ii) 证明的关键在于利用线性不确定约束和非退化连续分布的性质。放宽其中任一条件，定理 4 的结论都可能不成立。

从连续分布中抽样有助于我们找到下层 ALSO-X (3b) 的唯一解。然而，如果不满足定理 4 中的条件，最优解可能不唯一。例如，当随机参数的真实分布具有离散支持集时，下层 ALSO-X 可能没有唯一解；也就是说，在例 3 中，当 $t = 1/2$ 时，下层 ALSO-X 给出两个最优解，其中一个满足分布鲁棒机会约束规划 (2)，另一个则不满足。

我们使用以下例子说明，下层 ALSO-X (3b) 不存在唯一解 u-分布是连续的 当参考分布为连续分布时。

示例 5 考虑一个采用类型为 ∞–Wasserstein 模糊集的单个分布鲁棒机会约束规划，其参考分布为高斯分布$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}})$，且 $\theta = 1/2$) 满足 $n = 3, \bar{\boldsymbol{\mu}} = [1, 1, 1]^\top, \bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$，风险参数为 $\varepsilon = 0.40$，集合为 $\mathcal{X} = \{0, 1\}^3$，函数为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta} - b_1(\boldsymbol{x}) = -2 + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\zeta}$。在此示例中，下层 ALSO-X (3b) 可写为

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}} \left[\theta \left\| \boldsymbol{x} \right\|_* + \tilde{\zeta}_1 x_1 + \tilde{\zeta}_2 x_2 + \tilde{\zeta}_3 x_3 - 2 \right]_+ : -x_1 - x_2 - x_3 \leq t, \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^3 \right\},$$

其中对偶范数为 $\| \cdot \|_2$。令 $t = -2$。简单计算可得，下层 ALSO-X (3b) 有三个目标值相同且为正的最优解，即 $(\boldsymbol{x}^1)^* = (1, 1, 0)^\top$、$(\boldsymbol{x}^2)^* = (1, 0, 1)^\top$、$(\boldsymbol{x}^3)^* = (0, 1, 1)^\top$。因此，在这种情况下，下层 ALSO-X 没有唯一解。◇

这促使我们在接下来的小节中，当参考分布连续时，将集合 $\mathcal{X}$ 限制为凸集。

4.2 唯一性：具有连续参考分布的单个分布鲁棒机会约束规划

我们考虑参考分布连续的情形。对于单个分布鲁棒机会约束规划 (2)，即 $I = 1$，当仿射映射为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$、随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$ 连续且确定性集合 $\mathcal{X}$ 为凸集时，下层 ALSO-X (3b) 等价于

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}} \left[\theta \left\| \boldsymbol{x} \right\|_* + \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_1 \right]_+ : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \right\}.$$

回顾一下，$F(\boldsymbol{x})$ 表示下层 ALSO-X (3b) 中的目标函数。在这种情况下，我们有

$$\widehat{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}} \left[\theta \left\| \boldsymbol{x} \right\|_* + \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_1 \right]_+ .$$

定理 5 假设在单个分布鲁棒机会约束规划(2)中，确定性集合 $\mathcal{X}$ 是凸集，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$ 是支撑集为 $\mathbb{R}^n$、$\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_p$ 的连续非退化分布，其中 $p \in (1, \infty)$，且仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$和 $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$。那么，当 $t \geq \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 且$v^A(t) > 0$时，下层 ALSO-X (3b) 存在唯一最优解。

证明 见附录 A.1。 □

请注意，定理 5 中的分析表明，对于任何一般的连续非退化分布，下层 ALSO-X 的解都是唯一的。以下推论进一步表明，当已知支撑集 Ξ的上界和下界时，下层 ALSO-X (3b) 会返回唯一最优解。

推论 1 假设在单个分布鲁棒机会约束规划(2)中，确定性集合 $\mathcal{X}$ 是凸的，$\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_p$ 满足 $p \in (1, \infty)$，且仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ 和 $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$；参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$ 是连续且非退化的，其闭凸支撑集为 Ξ，并且

$$\exists \boldsymbol{\zeta} \in \Xi \colon \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t} \left\{ \theta \|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\zeta} \right\} > b_1, \text{ and } \exists \boldsymbol{\zeta} \in \Xi \colon \max_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t} \left\{ \theta \|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\zeta} \right\} < b_1.$$

当 $t \geq$ 最小值$_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t) > 0$时，下层ALSO-X (3b) 存在唯一最优解。
证明 利用如下事实：根据假设，在定理 5 证明的第 (i) 部分中，我们还有 $\int_{\partial \mu(\boldsymbol{x}^*)} (\boldsymbol{y}^\top \partial(\theta \|\boldsymbol{x}\|_*)/\partial \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{\zeta})^2 \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0$。证明过程与定理 5 的证明几乎完全相同，因此从略。□

我们指出，定理 5 的结果也可以推广到 $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_p$ with $p \in \{1, \infty\}$。由于篇幅限制，感兴趣的读者可参阅附录 A.2 中的证明。

4.3 唯一性：具有连续参考分布的联合分布鲁棒机会约束规划

本小节中，我们考虑具有右端不确定性和连续参考分布的联合分布鲁棒机会约束规划。具体而言，我们假设 $I = n$，不确定性约束为 $\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta} - b_i(\boldsymbol{x}) = \zeta_i - x_i$，且随机参数 ζ_i 对于每个 $i \in [n]$ 都是连续的。也就是说，我们考虑以下分布鲁棒机会约束规划：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_\infty} \mathbb{P} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \tilde{\xi}_i \leq x_i, \forall i \in [n] \right\} \geq 1 - \varepsilon \right\},$$

也就是说，

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \mathbb{P} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \tilde{\zeta}_i + \theta \leq x_i, \forall i \in [n] \right\} \geq 1 - \varepsilon \right\}. \tag{9}$$

在这种情况下，下层 ALSO-X (3b) 为

$$v^A(t) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}} \left[\max_{i\in[n]} \left\{ \tilde{\zeta}_i + \theta - x_i \right\}_+ \right] : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \le t \right\}.$$

我们的证明思路是证明下层 ALSO-X (3b) 中目标函数的海森矩阵正定，从而证明其唯一性。

定理6 假设在联合分布鲁棒机会约束规划 (9)中，确定性集合 $\mathcal{X}$ 是凸集，且参考分布$\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$ 是连续的，其支撑集为 $\mathbb{R}^n$。那么，当 $t \geq$最小值$_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$且 $v^A(t) > 0$时，下层 ALSO-X (3b) 存在唯一最优解。

证明 假设下层 ALSO-X (3b) 存在一个最优解 $\boldsymbol{x}^*$。我们将证明分为两步，以证明 $\boldsymbol{x}^*$ 是唯一解。

步骤 I. 首先，我们给出下层 ALSO-X (3b) 的闭式表达式及其一阶导数^和二阶导数，其中下层 ALSO-X (3b) 中的目标函数为 $F(\boldsymbol{x}^*) = \max_{i\in[n]} \{\zeta_i + \theta - x_i^*\}_+$。根据函数 $f(\tau) = \max\{\tau, 0\}$的连续性以及 [42], 中的定理1，我们可以交换次微分算子与期望；对于每个 $i \in [n]$，⌢$F(\boldsymbol{x}^*)$ 的一阶导数为

$$\frac{\partial \widehat{F}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} = -\int_{\mu_i(\boldsymbol{x}^*)} \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}),$$

其中 $\mu_i(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta}\colon \zeta_i + \theta - x_i \geq 0, \zeta_i + \theta - x_i \geq \zeta_j + \theta - x_j, \forall j \in [n]\setminus\{i\}\}$。下面求其二阶导数，即对于每个 $i \in [n]$，海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ 的对角元素为

$$\frac{\partial^2 \widehat{F}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i^2} = \int_{\partial\mu_{i0}(\boldsymbol{x}^*)} \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) + \sum_{\tau\in[n]\setminus\{i\}} \int_{\partial\mu_{i\tau}(\boldsymbol{x}^*)} \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}),$$

其中

$$\partial\mu_{i0}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta} : \zeta_i + \theta - x_i = 0 \geq \zeta_j + \theta - x_j, \forall j \in [n]\setminus\{i\}\},$$

and

$$\partial\mu_{i\tau}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta} : \zeta_i + \theta - x_i \geq 0, \zeta_i + \theta - x_i = \zeta_\tau + \theta - x_\tau \geq \zeta_j + \theta - x_j, \forall j \in [n]\setminus\{i\}\}.$$

对于每个 $\tau \in [n]\setminus\{i\}$，海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ 的非对角元素为

$$\frac{\partial^2 \widehat{F}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i \partial x_\tau} = -\int_{\partial\mu_{i\tau}(\boldsymbol{x}^*)} \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}).$$

步骤 II. 接下来，我们证明海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ 严格对角占优。我们将以下证明分为两部分：(i) $\int_{\partial\mu_{i0}(\boldsymbol{x}^*)} \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0$ 对每个 $i \in [n]$均成立；以及 (ii) $\int_{\partial\mu_{i\tau}(\boldsymbol{x}^*)} \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0$ 对每个 $i \in [n]$和 $\tau \in [n]\setminus\{i\}$ 均成立。

第 *(i)* 部分。 *</style}*事实是，对于每个，$(\boldsymbol{x}^*)\, \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0$，这是因为集合 $\partial\mu_{i0}(\boldsymbol{x}^*)$ 的维数为 $n-1$，且集合 $\partial\mu_{i0}(\boldsymbol{x}^*)$ 的相对内部非空。
第 *(i)* 部分。 *</style}*事实是，对于每个 和，$(\boldsymbol{x}^*)\, \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0$，这是因为集合 $\partial\mu_{i\tau}(\boldsymbol{x}^*)$ 的维数为 $n-1$，且集合 $\partial\mu_{i\tau}(\boldsymbol{x}^*)$ 的相对内部非空。

因此，海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ 严格对角占优，即满足以下两个条件：(i) 对每个 $i \in [n]$ 和 $\tau \in [n]\setminus\{i\}$，$\partial^2\widehat{F}(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i \partial x_\tau < 0$；以及 (ii) 对每个 $i \in [n]$，$\partial^2\widehat{F}(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i^2 + \sum_{\tau\in[n]\setminus\{j\}} \partial^2\widehat{F}(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i \partial x_\tau > 0$。根据格尔施戈林圆盘定理（例如，参见 [24] 中的定理 6.1.10），海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ 是正定的。因此，最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 是唯一的。□

下面的推论表明，在温和条件下，当Ξ闭且凸时，下层 ALSO-X (3b) 返回唯一最优解。

推论 2 假设 Ξ 的支撑集是闭且凸的。当 $t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t) > 0$时，对于任意具有正的下层 ALSO-X 目标值的 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \cap \{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t\}$，该集合

$$\partial\mu_{i0}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta} \in \Xi : \zeta_i + \theta - x_i = 0 \geq \zeta_j + \theta - x_j, \forall j \in [n] \setminus \{i\}\}$$

的维数为 $n-1$。在联合分布鲁棒机会约束规划(9)中，若确定性集合 $\mathcal{X}$是凸的，且参考分布$\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$是连续的，其支撑集为 Ξ。那么，当 $t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$且 $v^A(t) > 0$时，下层 ALSO-X (3b) 存在唯一最优解。

证明 利用与定理 6 证明中第 (ii) 部分类似的事实，我们同样有 $\int_{\partial\mu_{i0}(\boldsymbol{x}^*)} \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0$，根据假设，这对每个 $i \in [n]$ 均成立。证明与定理 6 的证明几乎完全相同，因此略去。□

4.4 唯一性：左端不确定的联合分布鲁棒机会约束规划

我们考虑参考分布为连续分布的情形。对于具有左端不确定性和背包约束的联合分布鲁棒机会约束规划 (2)，我们假设，对于每个 $i \in [I]$，仿射映射为 $\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $b_i(\boldsymbol{x}) = \tilde{b_i}$，随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$连续且满足 $\boldsymbol{\zeta} := [\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_I]$，使得对于每个 $i \neq j$，$\boldsymbol{\zeta}_i$与 $\boldsymbol{\zeta}_j$不重叠，并且确定性集合 $\mathcal{X}$为凸集。也就是说，我们考虑以下分布鲁棒机会约束规划:

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}}_i \leq b_i, \forall i \in [I] \right\} \geq 1-\varepsilon \right\},$$

也就是说,

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \theta \left\|\boldsymbol{x}\right\|_* + \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_i \leq b_i, \forall i \in [I] \right\} \geq 1-\varepsilon \right\}. \tag{10}$$

在这种情况下，下层 ALSO-X (3b) 为

$$v^A(t) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}} \left[\max_{i\in[I]} \left\{ \theta \left\|\boldsymbol{x}\right\|_* + \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_i - b_i \right\}_+ \right] : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t \right\}.$$

回想一下，$F(\boldsymbol{x})$ 表示下层 ALSO-X (3b) 中的目标函数。在这种情况下，我们有

$$\widehat{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}} \left[\max_{i\in[I]} \left\{ \theta \left\|\boldsymbol{x}\right\|_* + \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_i - b_i \right\}_+ \right].$$

定理 7 假设在联合分布鲁棒机会约束规划 *(10)* 中，确定性集合 $\mathcal{X}$为凸集，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$为连续且非退化分布，其支撑集为 $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_p$，其中 $p \in (1, \infty)$；对于每个 $i \in [I]$，仿射映射 $\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{x}}$ 和 $b_i(\boldsymbol{x}) = b_i$，且随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$连续并满足 $\boldsymbol{\zeta} := [\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_I]$，使得对于每个 $i \neq j$，$\boldsymbol{\zeta}_i$与 $\boldsymbol{\zeta}_j$ 不重叠。那么，当$t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t) > 0$时，下层 *ALSO-X (3b)* 存在唯一最优解。

证明 $F(\boldsymbol{x})$ 的一阶导数为

$$\widehat{F}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \widehat{F}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \sum_{i\in[I]} \int_{\mu_i(\boldsymbol{x})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\theta \left\|\boldsymbol{x}\right\|_* + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\zeta}_i \right] \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}),$$

其中，对于每个 $i \in [I]$, $\mu_i(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta}\colon \theta\|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_i \geq b_i, \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_i - b_i \geq \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_j - b_j, \forall j \in [I]\setminus\{i\}\}$； $F(\boldsymbol{x})$ 的海森矩阵为

$$H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in[I]}\Bigg[\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\int_{\mu_i(\boldsymbol{x})\cap\{\theta\|\boldsymbol{x}\|_*+\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_i=b_i\}}\left(\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\zeta}_i\right)\left(\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\zeta}_i\right)^\top\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta})$$
$$+\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\sum_{\tau\in[I]\setminus\{i\}}\int_{\mu_i(\boldsymbol{x})\cap\{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_i-b_i=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_\tau-b_\tau\}}(\boldsymbol{\zeta}_i-\boldsymbol{\zeta}_\tau)(\boldsymbol{\zeta}_i-\boldsymbol{\zeta}_\tau)^\top\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta})+\theta\int_{\mu_i(\boldsymbol{x})}\frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}^2}\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta})\Bigg].$$

其余证明与定理 5 的证明类似，因此为简洁起见，略去。 □

同样，当支撑集 Ξ 的上界和下界已知时，以下推论表明，下层 ALSO-X (3b) 返回唯一最优解。

推论3 假设 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 的支撑集 Ξ 闭且凸。当 $t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t) > 0$时，对于任意具有正下层 ALSO-X 目标值的 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}\cap\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\leq t\}$，集合

$$\partial\mu_i(\boldsymbol{x}) = \left\{\boldsymbol{\zeta}\in\Xi : \theta\|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_i - b_i = 0 \geq \theta\|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta}_j - b_j, \forall j\in[n]\setminus\{i\}\right\}$$

的维数为 $n-1$。在联合分布鲁棒机会约束规划 (10)中，当确定性集合 $\mathcal{X}$ 为凸集，且参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$ 具有连续支撑集 Ξ时，下层 ALSO-X (3b) 在 $t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t) > 0$时存在唯一最优解。

5 精确性：ALSO-X# 为分布鲁棒机会约束规划提供最优解

本节给出在 ∞–Wasserstein 模糊集下，使 ALSO-X# 为分布鲁棒机会约束规划提供最优解的充分条件。根据定理 2， $v^{A\#} \leq v^A$。因此，为便于分析，我们聚焦于 ALSO-X# (6)。首先，我们将分布鲁棒机会约束规划 (2) 和 ALSO-X# (6) 改写为以下形式：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\colon \widehat{G}_\theta\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{h}\right)\leq 0\right\}; \tag{11}$$

and

$$v^{A\#} = \min_t \quad t, \tag{12a}$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left\{\overline{F}_\theta\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{h}\right) : \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\leq t\right\}, \tag{12b}$$
$$\widehat{G}_\theta\left((\boldsymbol{x}^*)^\top\boldsymbol{h}\right)\leq 0. \tag{12c}$$

我们看到，如果函数 $G_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 均为单调不减函数，那么 ALSO-X# 就能找到分布鲁棒机会约束规划的最优解。根据定理 2，ALSO-X# 也是如此。

定理 8 假设在分布鲁棒机会约束规划 (11) 和 ALSO-X# (12)中，函数 $G_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 均为单调不减函数。那么，ALSO-X# 是精确的。

证明 设 v_1, v_2 分别为分布鲁棒机会约束规划 (11) 和 ALSO-X# (12) 的最优值。由于 ALSO-X# (12) 是一种保守近似，我们必有 $v_1 \leq v_2$。接下来只需证明 $v_2 \leq v_1$。

令 $\boldsymbol{x}^*$ 为分布鲁棒机会约束规划 (11) 的一个最优解，且 $t^* = \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}^*$。将 t^* 代入下层 ALSO-X#，并令 $\widehat{\boldsymbol{x}}$为其最优解，即：

$$\widehat{\boldsymbol{x}} \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left\{\overline{F}_\theta\left(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{h}\right) : \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\leq t^*\right\}.$$

由于 $\boldsymbol{x}^*$ 对于 $t^* = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*$ 下的下层 ALSO-X# 可行，因此必有 $\overline{F}_\theta(\widehat{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{h}) \leq \overline{F}_\theta((\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{h})$。根据函数 $\widehat{G}_\theta(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{h})$ 的单调性假设，我们进一步得到 $\widehat{G}_\theta(\widehat{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{h}) \leq \widehat{G}_\theta((\boldsymbol{x}^*)^\top \overline{\boldsymbol{h}})$，这意味着 $\widehat{G}_\theta(\widehat{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{h}) \leq 0$。因此，我们有 $v_2 \leq t^* = v_1$。也就是说，ALSO-X# 是精确的。

根据定理 2，ALSO-X# 的保守性低于 ALSO-X#。因此，ALSO-X# 也是精确的。至此证明完毕。□

接下来，我们确定了三类满足定理 8 条件的特殊分布鲁棒机会约束问题，分别是参考分布为椭圆分布、多项分布和有限支撑集分布的单个分布鲁棒机会约束问题。

5.1 特殊情形 I：具有椭圆参考分布的单个分布鲁棒机会约束规划

我们考虑参考分布为椭圆分布的单个分布鲁棒机会约束规划。注意，椭圆分布 $\mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \widehat{g})$ 由三个参数描述：位置参数 $\boldsymbol{\mu}$、半正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 以及生成函数 $\widehat{g}$，其概率密度函数 f 形式如下：

$$\widehat{f}(\boldsymbol{x}) = \bar{k} \cdot \widehat{g}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

其中，k 为正的归一化常数。标准单变量椭圆分布 $\mathbb{P}_{\mathrm{E}}(0, 1, \widehat{g})$ 的概率密度函数为 $\varphi(z) = \bar{k}\widehat{g}(z^2/2)$，相应的累积分布函数为 $\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \bar{k}\widehat{g}(z^2/2)dz$。对于单个分布鲁棒机会约束规划 (2)，即 $I = 1$，当仿射映射为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$，$b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$ 时，随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$ 服从联合椭圆分布，其参数为 $\boldsymbol{\zeta} \sim \mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \widehat{g})$，且定义 Wasserstein 距离的范数为与矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 相关的广义马氏范数，即，对于某个 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，$\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^\dagger \boldsymbol{y}}$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}^\dagger$ 是伪逆。根据 [26]，分布鲁棒机会约束规划 (2) 中命题 10 的重构，可将其转化为

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \theta\right) \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{x}} - b_1 \leq 0 \right\},$$

下层 ALSO-X# (6b) 等价于

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t} \left\{ \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \left[\overline{G}\left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2 / 2 \right) / \varepsilon + \theta \right] \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{x}} - b_1 \right\},$$

其中 $\overline{G}(\tau) = G(\infty) - G(\tau)$ 且 $G(\tau) = \bar{k} \int_0^\tau \widehat{g}(z)dz$。

接下来，我们研究 ALSO-X# 在以下两种条件下的精确性。

条件 I. 对于椭圆参考分布下的单个分布鲁棒机会约束规划，假设对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$，$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top$ 且 $\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$。在这种情况下，我们可以将分布鲁棒机会约束规划 (2) 和下层 ALSO-X# (6b) 简化为

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \widehat{G}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \left(1 + \Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \theta\right) \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} - b_1 \leq 0 \right\}, \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \left\{ \overline{F}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \left(1 + \overline{G}\left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2 / 2 \right) / \varepsilon + \theta \right) \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} - b_1 \colon \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t \right\}, \tag{13b}$$

resp分别。精确性结论可直接由定理 8 得出，定理内容总结如下。

推论 4 假设在单个分布鲁棒机会约束规划 (2)中，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}$ 为椭圆分布，具有仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top$, $\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 均成立，且 $1 + \Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \theta \geq 0$ 成立。那么 ALSO-X# 是精确的。

证明 根据重构 (13a) 和 (13b)，以及假设 $\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$ 对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 和 $1 + \Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \theta \geq 0$，函数 $\widehat{G}_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 均单调不减。因此，定理 8 中的条件均得到满足，由此可知 ALSO-X# 是精确的。□

条件 II. 对于采用椭圆参考分布的单个分布鲁棒机会约束规划，假设 $\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$、$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\mu})$。此时，分布鲁棒机会约束规划 (2) 和下层 ALSO-X# (6b) 可简化为

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \widehat{G}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \theta\right) \sqrt{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}} - b_1 \leq 0 \right\}, \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n} \left\{ \overline{F}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \left[\overline{G}\left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2 /2 \right) /\varepsilon + \theta \right] \sqrt{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}} - b_1 \colon \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t \right\}, \tag{14b}$$

分别。根据定理 8，我们得到以下精确性结果。

推论 5 假设在单个分布鲁棒机会约束规划 (2) 中，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$ 为椭圆分布，具有仿射映射$\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$, $\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$, $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\mu})$，以及 $\Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \theta \geq 0$。则ALSO-X# 是精确的。

证明 根据重构 (14a) 和 (14b)，以及假设 $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$和 $\Phi^{-1}(1-\varepsilon)+\theta \geq 0$，函数 $G_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 均为单调不减。因此，根据定理 8，我们可知 ALSO-X# 是精确的。□

我们指出，推论 4 和推论 5 中的结果适用于一般类型的 q–Wasserstein模糊集，如第 6.2 节所示。

5.2 特殊情形 II：具有独立同分布随机参数和二元决策的单个分布鲁棒机会约束规划

本小节研究带有二元决策变量的单个分布鲁棒机会约束规划 (2) 的精确性，并给出下层 ALSO-X# 的闭式表达式。

首先考虑单个装箱型分布鲁棒机会约束规划 (2)，其中确定性集合 $\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$ 为二元的，仿射映射为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$、$b_1(\boldsymbol{x}) = b_1 \geq 0$，且支撑集为非负的 $\Xi \subseteq \mathbb{R}^n_+$，随机参数$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$独立同分布。也就是说，我们考虑以下分布鲁棒机会约束规划 (2)：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \leq b_1 \right\} \geq 1-\varepsilon \right\}.$$

在此情形下，分布鲁棒机会约束规划 (2) 等价于

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \widehat{G}_\theta(\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x}) = 1 - \varepsilon - \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n_+} \left\{ \sum_{i\in[n]} \xi_i x_i \colon \|\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_p \leq \theta \right\} \leq b_1 \right\} \leq 0 \right\}. \tag{15a}$$

下层 ALSO-X# (6b) 等价于

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t} \left\{ \overline{F}_\theta(\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x}) = \mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}\left\{ -b_1 + \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n_+} \left[\sum_{i\in[n]} \xi_i x_i \colon \|\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_p \leq \theta \right] \right\} \right\}. \tag{15b}$$

在此情形下，我们可以证明 ALSO-X# 是精确的。

推论 6 考虑一个具有仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1 \geq 0$、确定性集合$\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$，且随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 独立同分布且非负的单个分布鲁棒机会约束规划(2) 。那么ALSO-X# 是精确的。

证明 只需证明函数 $G_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 确实存在且具有相同的单调性。我们首先注意到

$$\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n_+} \left\{ \sum_{i\in[n]} \xi_i x_i \colon \|\boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_p \leq \theta \right\} = \sum_{i\in[n]} \tilde{\zeta}_i x_i + \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n_+} \left\{ \sum_{i\in[n]} \xi_i x_i \colon \|\boldsymbol{\xi}\|_p \leq \theta \right\}.$$

由于 $\{\tilde{\zeta}_i\}_{i\in[n]}$ 是独立同分布的非负随机参数，对于任意满足 $\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{x}=\ell$ 的 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$，我们有

$$\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n_+}\left\{\sum_{i\in[n]}\xi_i x_i\colon \|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_p\le\theta\right\}\overset{\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}}{\sim}\sum_{i\in[\ell]}\tilde{\zeta}_i+\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^\ell_+}\left\{\sum_{i\in[\ell]}\xi_i\colon \|\boldsymbol{\xi}\|_p\le\theta\right\}.$$

因此，我们定义

$$\widehat{G}_\theta(\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{x})=\widehat{G}_\theta(\ell)=1-\varepsilon-\mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\colon \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n_+}\left\{\sum_{i\in[n]}\xi_i x_i\colon \|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_p\le\theta\right\}\le b_1\right\}.$$

类似地，我们也定义

$$\overline{F}_\theta(\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{x})=\overline{F}_\theta(\ell)=\mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}\left\{-b_1+\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n_+}\left[\sum_{i\in[n]}\xi_i x_i\colon \|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|_p\le\theta\right]\right\}.$$

~由于所有随机参数 $\{\zeta_i\}_{i\in[n]}$ 均为非负，因此我们有

$$\sum_{i\in[\ell+1]}\tilde{\zeta}_i+\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{\ell+1}_+}\left\{\sum_{i\in[\ell+1]}\xi_i\colon \|\boldsymbol{\xi}\|_p\le\theta\right\}\ge\sum_{i\in[\ell]}\tilde{\zeta}_i+\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^\ell_+}\left\{\sum_{i\in[\ell]}\xi_i\colon \|\boldsymbol{\xi}\|_p\le\theta\right\}$$

几乎必然成立。因此，我们有

$$\widehat{G}_\theta(\ell)\le\widehat{G}_\theta(\ell+1),\overline{F}_\theta(\ell)\le\overline{F}_\theta(\ell+1).$$

根据定理 8，ALSO-X# 是精确的。 □

我们指出，推论 6 中的结果同样适用于覆盖型分布鲁棒机会约束规划。也就是说，考虑以下

$$v^*=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\left\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\colon \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty}\mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\xi}}\colon \boldsymbol{x}^\top\tilde{\boldsymbol{\xi}}\ge b_1\right\}\ge 1-\varepsilon\right\},$$

其中，随机参数 $\{\zeta_i\}_{i\in[n]}$ 独立同分布且非负，成本向量 $\boldsymbol{c}$ 非负。记 $1-y_i=x_i$，对所有 $i\in[n]$均成立。则机会约束覆盖问题等价于

$$v^*=\min_{(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{y})\in\mathcal{X}}\left\{\boldsymbol{c}^\top(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{y})\colon \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty}\mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\xi}}\colon (\boldsymbol{e}-\boldsymbol{y})^\top\tilde{\boldsymbol{\xi}}\ge b_1\right\}\ge 1-\varepsilon\right\}.$$

因此，推论 6 的证明可直接得出，概述如下。

推论7 考虑一个具有仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}, b_1(\boldsymbol{x})=-b_1\le 0$、确定性集合 $\mathcal{X}\subseteq\{0,1\}^n$，且随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$ 独立同分布并非负的单个分布鲁棒机会约束规划。则ALSO-X# 是精确的。

5.3 特殊情形 III：具有经验参考分布的单个分布鲁棒机会约束规划

在本小节中，我们研究具有经验参考分布的单个分布鲁棒机会约束规划的精确性，其中仿射映射为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1 \geq 0$，且支撑集是离散的。也就是说，我们考虑以下分布鲁棒机会约束规划：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \theta \left\| \boldsymbol{x} \right\|_* + \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \leq b_1 \right\} \geq 1-\varepsilon \right\}. \tag{16}$$

推论 8 考虑一个具有仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, b_1(\boldsymbol{x}) = b_1 \geq 0$ 的单个分布鲁棒机会约束规划(2)，其范数 $\|\cdot\|$ 是与矩阵 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top$ 相关的广义马氏范数，并且对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$，$\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$。假设~支撑集是离散的，且对所有 $i \in [N]$, $\mathbb{P}\{\boldsymbol{\zeta} = \zeta_i \boldsymbol{\mu}\} = p_i \geq 0$，其中 $\sum_{i\in[N]} p_i = 1$ 和 $0 \leq \zeta_1 < \zeta_2 < \cdots < \zeta_N$ 是标量。那么ALSO-X# 是精确的。

证明 我们定义 $K \in [N]$ 为 $\sum_{i\in[K-1]} p_i < 1-\varepsilon$、$\sum_{i\in[K]} p_i \geq 1-\varepsilon$。根据定义，有 $\zeta_K > 0$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_* = |\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}|$。根据假设，对所有 $i \in [N]$均有 $\mathbb{P}\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \zeta_i \boldsymbol{\mu}\} = p_i \geq 0$，分布鲁棒机会约束规划 (16) 可简化为

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \widehat{G}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = 1-\varepsilon - \sum_{i\in[N]} p_i \mathbb{I}\left((\zeta_i + \theta)\, \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \leq b_1 \right) \leq 0 \right\},$$

相应的下层 ALSO-X# (6b) 等价于

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t} \left\{ \overline{F}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\sum_{i\in[K]} p_i - (1-\varepsilon) \right) \zeta_i + \sum_{j\in[K+1,N]} p_j \zeta_j \right] \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \theta \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{-1} \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} - b_1 \right\}.$$

~函数 $G_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 均为单调不减函数。因此，定理 8 中的条件得到满足，由此我们得出 ALSO-X# 是精确的。□

6 扩展：类型 $q-$Wasserstein 模糊集下的分布鲁棒机会约束问题

本节将讨论扩展到带有 $q \in [1,\infty$ 的类型 $q-$Wasserstein 模糊集。我们首先给出等价重构。然后我们证明，在类型 $q-$Wasserstein 模糊集下，ALSO-X# 能够为一个分布鲁棒机会约束规划提供最优解。本节的结果依赖于带有$q \in [1,\infty)$ 的类型 $q-$Wasserstein 模糊集下，分布鲁棒机会约束规划、ALSO-X、CVaR近似和 ALSO-X# 的等价重构，这些内容见附录 B。

6.1 ALSO-X#、ALSO-X#、ALSO-X 与 CVaR近似的比较

如第 3 节所述，本文的主要结果定理1无法推广至具有 $q \in [1,\infty)$ 的类型 $q-$Wasserstein 模糊集。也就是说，当 $q \in [1,\infty)$ 时，在类型 $q-$Wasserstein 模糊集下，ALSO-X 与 ALSO-X# 不可比较。下面给出一个例子。

例*6* 考虑一个采用类型为 $1-$ 的 Wasserstein模糊集、且具有 $\theta = 1$ 和 $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$ 的单个分布鲁棒机会约束规划。假设经验分布有 4 个等概率情景（即 $N = 4, \mathbb{P}\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\zeta}^i\} = 1/N$），风险参数为 $\varepsilon = 1/2$，确定性集合为 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3_+, \boldsymbol{c} = (-4,-2,-3)^\top$，函数为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta} - b_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\zeta} - 3$,
$\boldsymbol{\zeta}^1 = (4,6,3)^\top$ $\boldsymbol{\zeta}^2 = (5,0,3)^\top$ $\boldsymbol{\zeta}^3 = (2,1,4)^\top$ $\boldsymbol{\zeta}^4 = (0,2,5)^\top$ ( ), ( ), ( ), 和 ( )。在本例中，我们可以通过数值方法求解 ALSO-X v_1^A、ALSO-X# $v_1^{A\#}$ 和 CVaR近似 v_1^{CVaR}，得到的近似目标值分别为$v_1^A = -2.4929$, $v_1^{A\#} = -2.4369$和$v_1^{\mathrm{CVaR}} = -2.033$，误差界为 $[-10^{-4}, 10^{-4}]$。◇

尽管 ALSO-X 和 ALSO-X# 无法比较，但沿用第 3 节中定理 2 和定理 3 的类似证明，我们可以证明，在类型为 $q-$、具有 $q \in [1,\infty$ 的 Wasserstein模糊集下，ALSO-X# 优于 CVaR近似，且 ALSO-X# 优于 ALSO-X#。证明请参阅附录 B。

命题 1 在类型为 $q-$*Wasserstein*模糊集且满足 $q \in [1,\infty)$的条件下，假设对于任何满足 $t \geq$ 最小值$_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$的目标上界 t，ALSO-X# 优于 条件风险价值 近似。

命题 2 在类型为 $q-$*Wasserstein*模糊集且满足 $q \in [1,\infty)$的条件下，假设对于任何满足 $t \geq$ 最小值 $_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 的目标上界 t，且下层 ALSO-X# 存在唯一的最优 $\boldsymbol{x}$-解，则ALSO-X#优于ALSO-X#。

6.2 ALSO-X# 的精确性

在本小节中，我们将第 5.1 节中关于椭圆分布下带仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ 和 $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$ 的单个分布鲁棒机会约束规划 (22) 的讨论加以扩展。由于篇幅限制，详细推导请参阅附录 B。在类型为 $q-$Wasserstein模糊集且参考分布为椭圆分布的条件下，分布鲁棒机会约束规划转而采用

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \eta_q^* \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{x}} - b_1 \leq 0 \right\}, \tag{17}$$

with

$$\eta_q^* = \min_{\eta} \left\{ \eta \colon \int_{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}^{\eta} (\eta - t)^q \, \bar{k}\widehat{g}(t^2/2) dt \geq \theta^q, \eta \geq \Phi^{-1}(1-\varepsilon) \right\}.$$

在这种情况下，下层 ALSO-X# 等价于

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t} \left\{ \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \left[\overline{G} \left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2 / 2 \right) / \varepsilon + \theta \varepsilon^{-\frac{1}{q}} \right] \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{x}} - b_1 \right\}. \tag{18}$$

让我们作出与第 5.1 节条件 I 中相同的假设，即，对于采用椭圆参考分布的单个分布鲁棒机会约束规划，假设对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$，$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top$ 以及 $\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$。于是，分布鲁棒机会约束规划 (17) 和下层 ALSO-X# (18) 可简化为

$$\begin{aligned}
v^* &= \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \widehat{G}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \left(1 + \eta_q^*\right) \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} - b_1 \leq 0 \right\}, \\
\boldsymbol{x}^* &\in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \overline{F}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \left(1 + \overline{G} \left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2 / 2 \right) / \varepsilon + \theta \varepsilon^{-\frac{1}{q}} \right) \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} - b_1 \colon \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t \right\},
\end{aligned}$$

分别为。假设对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 和 $1 + \eta_q^* \geq 0$，$\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$，可确保两个函数$\widehat{G}_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 都是单调不减的。然后，精确性结果直接由定理 8 和推论 4 得出，概述如下。

推论 9 假设在单个分布鲁棒机会约束规划 (17) 中，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}$ 为椭圆分布，并具有仿射映射$\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$、$b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$、$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top$、$\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$（对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$），且 $\eta_q^* \geq -1$。则 ALSO-X# 是精确的。

类似地，我们作出与第 5.1 节条件 II 中相同的假设，即对于具有椭圆参考分布的单个分布鲁棒机会约束规划，假设 $\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$、$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\mu})$。此时，分布鲁棒机会约束规划 (17) 和下层 ALSO-X# (18) 可简化为

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \widehat{G}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \eta_q^* \sqrt{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}} - b_1 \leq 0 \right\},$$

$$\boldsymbol{x}^* \in \underset{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ \overline{F}_\theta(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \left[\overline{G}\left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2/2 \right)/\varepsilon + \theta\varepsilon^{-\frac{1}{q}} \right] \sqrt{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x}} - b_1 \colon \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \le t \right\}.$$

^假设 $\boldsymbol{\mu} \ge \mathbf{0}$ 和 $\eta_q^* \ge 0$ 保证函数 $G_\theta(\cdot)$ 和 $\overline{F}_\theta(\cdot)$ 均为单调非递减函数。由此可得以下精确性结果。

推论 10 假设在单个分布鲁棒机会约束规划(17)中，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$ 为椭圆分布，具有仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$, $\mathcal{X} \subseteq \{0,1\}^n$, $\boldsymbol{\mu} \ge \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{\mu})$，且满足 $\eta_q^* \ge 0$。那么 ALSO-X# 是精确的。

7 数值研究

本节通过数值实验展示所提方法的有效性。本节中的所有实例均使用 Python 3.9 执行，并调用求解器 Gurobi（版本 9.1.1，采用默认设置），在配备 Apple M1Pro 处理器和 16G 内存的个人电脑上运行。

7.1 合成案例

我们使用“相较于CVaR近似的改进”来表示 CVaR近似、ALSO-X 和 ALSO-X# 之间的差异，即所提算法的值与 CVaR近似之间的差异百分比：

$$\begin{aligned}&\text{Improvement from CVaR approximation } (\%)\\ &= \frac{\text{CVaR approximation value} - \text{output value of a proposed algorithm}}{|\text{CVaR approximation value}|} \times 100.\end{aligned}$$

通常，CVaR近似相当保守。作为更好的替代方案，我们还用“ALSO-X 带来的改进”表示某个算法与 ALSO-X 近似结果之间的差异百分比，即，

$$\text{Improvement from ALSO-X } (\%) = \frac{\text{ALSO-X value} - \text{output value of a proposed algorithm}}{|\text{ALSO-X value}|} \times 100.$$

我们比较 CVaR近似、ALSO-X 和 ALSO-X# 在求解单个 DR-机会约束规划时的表现，其中数据点数量不同 $N = 400$、600、1000，风险水平不同 $\varepsilon = 0.10$、0.20，Wasserstein 半径固定为 $\theta = 0.05$，决策变量维度也不同 $n = 20$、40、100。在 ALSO-X 和 ALSO-X# 算法中，我们使用 CVaR近似的最优值作为初始上界 t_U，并使用 [1] 中的分位数界作为初始下界 t_L。对于每种参数设置，我们生成 5 个随机实例，并报告其平均表现。

我们分别讨论类型 ∞–Wasserstein模糊集和类型 2–Wasserstein模糊集。

情形 I. 测试一个具有类型 ∞–Wasserstein 模糊集的分布鲁棒机会约束规划。我们将讨论分为连续情形 n-和二元情形 和二元情形。

1.1 连续情形。我们先考虑以下分布鲁棒机会约束规划：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in [0,1]^n, \frac{1}{N} \sum_{i\in[N]} \mathbb{I}\left[\theta \left\| \boldsymbol{x} \right\|_2 + \sum_{j\in[n]} \zeta_j^i x_j \le b^i \right] \ge 1-\varepsilon \right\}.$$

上述样本 $\{\boldsymbol{\zeta}^i\}_{i\in[N]}$ 是通过假设随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 为离散且在 1 到 80 之间独立同分布均匀分布而生成的。我们在 ALSO-X# 算法 1 中设置 $\delta_1 = 10^{-2}$。对于每个随机实例，我们假设成本向量 $\boldsymbol{c}$ 为随机整数向量，每个分量均在−30 和 −1之间均匀分布。并假设随机参数 b 为离散且在以下范围内独立同分布均匀分布：

1 到 20。数值结果见表 1。可以看出，尽管 ALSO-X# 的计算时间与 ALSO-X 相当，但 ALSO-X# 的解的质量比 ALSO-X 好约 4%–10%。这证明了我们提出的 ALSO-X# 的有效性。

表 1：采用类型为 $\infty-$Wasserstein 模糊集且具有 $\theta = 0.05$ 的分布鲁棒机会约束规划数值结果

ε	N	n	CVaR	ALSO-X		ALSO-X#	
			时间（秒）	时间（秒）	改进自 CVaR近似（%）	时间（秒）	改进自 ALSO-X（%）
0.10	400	20	0.15	1.53	13.28	1.56	8.73
		40	0.29	3.26	11.29	2.73	5.86
		100	0.73	9.12	14.59	13.62	6.77
	600	20	0.39	2.27	8.48	2.78	6.06
		40	0.35	4.64	9.22	4.41	6.38
		100	0.78	11.82	9.79	12.73	5.69
	1000	20	0.25	4.77	10.76	4.81	9.16
		40	0.72	7.20	9.16	7.35	5.10
		100	1.62	20.15	6.31	21.98	3.38
0.20	400	20	0.22	2.75	12.94	2.43	9.20
		40	0.41	2.74	13.53	2.34	6.28
		100	0.66	4.79	5.39	5.51	6.02
	600	20	0.49	3.49	6.49	3.24	7.91
		40	0.54	6.18	5.33	4.07	5.97
		100	1.43	12.87	3.82	10.66	7.76
	1000	20	0.52	6.50	8.59	5.26	5.76
		40	0.84	7.68	4.21	7.53	5.09
		100	2.38	21.92	4.76	18.47	3.73

1.2 二元情形。首先考虑以下分布鲁棒机会约束规划：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, \frac{1}{N} \sum_{i\in[N]} \mathbb{I} \left[\theta \left\| \boldsymbol{x} \right\|_1 + \sum_{j\in[n]} \zeta_j^i x_j \le b^i \right] \ge 1-\varepsilon \right\}.$$

上文中，我们通过假设随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 是离散且在 -10 和 20 之间独立同分布均匀分布来生成样本 $\{\boldsymbol{\zeta}^i\}_{i\in[N]}$。我们在 ALSO-X# 算法 1 中设置 $\delta_1 = 0.5$。对于每个随机实例，我们假设成本向量 $\boldsymbol{c}$ 为随机整数，且每个分量在 -10 和 -1 之间均匀分布。我们还假设随机参数 b 是离散的，且在 1 和 200 之间独立同分布均匀分布。此情形的数值结果列于表 2。与表 1 中的结果类似，我们得出结论：ALSO-X# 在计算时间相当的情况下，使解的质量比 ALSO-X 提高约 3%–7%。

情形 II。测试具有类型 $2-$Wasserstein 模糊集的分布鲁棒机会约束规划。我们将讨论分为连续情形和二元情形。

2.1 连续情形。 我们首先考虑以下分布鲁棒机会约束规划：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in [0,1]^n, \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_2} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \le b \right\} \ge 1-\varepsilon \right\}.$$

请注意，该分布鲁棒机会约束规划可能不存在混合整数规划重构（例如，参见 [27]）。上文中，我们假设随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 为离散变量，且独立同分布均匀分布于 1 到 80 之间，据此生成样本$\{\boldsymbol{\zeta}^i\}_{i\in[N]}$。我们在 ALSO-X# 算法 1 中设置 $\delta_1 = 10^{-2}$。对于每个随机实例，我们假设 $b = 10$，并假设成本向量 $\boldsymbol{c}$ 为随机整数向量，其每个分量均匀分布于 -20 和 -1 之间。数值结果如表 3 所示。我们表明，ALSO-X# 带来了约 5%–11% 的改进。我们还注意到，ALSO-X 可以改进 CVaR 近似的解。

2.2 二元情形。首先考虑以下分布鲁棒机会约束规划：

$$v^* = \min_{\boldsymbol{x}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_2} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \le b \right\} \ge 1-\varepsilon \right\}.$$

表 2：在类型为 ∞–Wasserstein 模糊集、带有 $\theta = 0.05$ 的情况下，二元分布鲁棒机会约束规划的数值结果

ε	N	n	CVaR	ALSO-X		ALSO-X#	
			时间（秒）	时间（秒）	改进自 CVaR近似（%）	时间（秒）	相较于 ALSO-X（%）
0.10	400	20	0.30	1.97	5.16	2.54	6.67
		40	0.31	5.65	8.03	8.34	7.10
		100	0.24	7.09	3.09	7.97	4.36
	600	20	0.31	5.28	7.49	4.75	5.33
		40	1.29	12.18	5.11	15.50	7.14
		100	1.35	14.35	5.19	16.23	5.56
	1000	20	0.95	5.82	3.51	6.29	2.78
		40	0.52	16.13	3.63	17.48	2.83
		100	0.61	24.69	4.82	26.11	3.19
0.20	400	20	0.40	5.75	4.73	5.59	7.35
		40	0.57	8.14	4.27	9.43	7.32
		100	0.64	9.34	4.04	11.48	5.41
	600	20	0.42	5.58	4.79	5.24	5.08
		40	0.80	16.92	3.37	14.95	6.92
		100	1.45	21.12	4.58	21.06	6.36
	1000	20	1.04	7.51	3.49	7.45	6.25
		40	1.26	24.39	4.12	22.99	6.24
		100	2.70	32.93	2.87	33.65	5.56

表 3：在类型为 2–Wasserstein 模糊集下，含有 $\theta = 0.50$ 的分布鲁棒机会约束规划数值结果

ε	N	n	CVaR	ALSO-X		ALSO-X#	
			时间（秒）	时间（秒）	相较于.....的改进 CVaR近似（%）	时间（秒）	相较于 CVaR近似的改进（%）
0.10	400	20	0.09	0.90	7.21	0.81	7.22
		40	0.25	2.42	6.43	2.06	6.54
		100	0.55	5.76	4.73	3.97	4.73
	600	20	0.20	1.40	8.60	1.12	8.60
		40	0.38	3.83	6.92	2.72	6.92
		100	1.16	12.46	5.27	8.96	5.27
	1000	20	0.23	2.24	8.78	1.88	8.82
		40	0.76	5.62	7.82	4.39	7.94
		100	1.48	18.82	5.82	13.36	5.87
0.20	400	20	0.25	0.93	10.45	0.82	10.61
		40	0.45	2.89	10.17	2.16	10.24
		100	0.66	6.17	6.14	4.03	6.32
	600	20	0.13	1.41	10.10	1.19	10.10
		40	0.32	3.93	8.46	2.83	8.62
		100	1.14	13.38	6.77	9.30	6.76
	1000	20	0.28	2.35	10.70	2.05	10.70
		40	0.56	5.67	10.33	4.29	10.33
		100	1.83	20.01	6.82	14.30	6.92

上述样本 $\{\boldsymbol{\zeta}^i\}_{i\in[N]}$ 是通过假设随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 为离散且独立同分布均匀分布于 -20和 50 之间生成的。在 ALSO-X# 算法 1 中，我们设定 $\delta_1 = 0.5$ 。对于每个随机实例，我们假设 $b = 400$，并假设成本向量 $\boldsymbol{c}$ 为随机整数，且每个分量均匀分布于 -20 和 -10之间。在此数值实验中，我们假设决策变量的维数为 $n = 20$，40。该情形的数值结果见表 4。我们得出结论：与 CVaR近似相比，ALSO-X# 可提升解的质量约 5–10%。

7.2 应用：无线通信中的资源分配

我们在无线通信网络问题中比较 ALSO-X# 和精确方法，在该问题中，我们可以使用 ALSO-X# 将能耗降至最低。具体而言，我们考虑一个用于节能视频流传输的预测资源分配问题（例如，参见 [3, 4]），其中采用机会约束来确保每位用户都能获得较高的服务质量。该问题的目标是在满足机会约束的同时，最大限度地降低向用户传输视频内容所消耗的能量。

表 4：在 Type 2–Wasserstein 模糊集下求解二元分布鲁棒机会约束规划的数值结果，其中 $\theta = 0.20$

ε	N	n	CVaR	ALSO-X		ALSO-X#	
			时间（秒）	时间（秒）	改进自CVaR近似（%）	时间（秒）	相较于CVaR近似（%）
0.10	400	20	0.23	1.55	5.80	1.43	6.02
		40	2.81	34.11	8.23	25.23	7.10
	600	20	0.36	2.60	5.19	2.69	5.19
		40	5.77	57.60	9.81	55.39	10.19
	1000	20	1.44	5.29	7.92	4.78	8.19
		40	12.45	86.86	9.67	85.98	9.67
0.20	400	20	0.24	1.80	7.67	1.65	7.67
		40	3.49	35.70	9.46	27.71	9.46
	600	20	0.57	3.14	7.73	3.08	7.82
		40	13.85	60.79	9.82	74.74	11.50
	1000	20	1.01	5.61	7.26	4.97	7.66
		40	16.48	82.65	8.73	87.72	9.87

该问题的形式化表述为

$$\min_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^{n\times T}} \left\{ \sum_{t\in[T]} \sum_{i\in[n]} x_{i,t} \colon \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_\infty} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \sum_{t'\in[t]} \tilde{\xi}_{i,t'} x_{i,t'} \geq D_{i,t}, \forall t \in [T] \right\} \geq 1-\varepsilon, \forall i \in [n], \right.$$
$$\left. \sum_{i\in[n]} x_{i,t} \leq 1, \forall t \in [T] \right\}, \tag{21}$$

其中，$x_{i,\,t}$ 表示时隙 t 分配给用户 i的资源分配决策，n 表示用户总数，T表示时隙总数，$D_{i,\,t}$ 表示截至时间 $t \in [T]$用户 $i \in [n]$ 的需求。随机参数$\xi_{i,\,t}$ 表示时隙 t用户 $i \in [n]$ 的可用速率随机值。

上文中，我们假设随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$是离散的，且在 20 到 40 之间独立同分布均匀分布，以生成样本 $\{\boldsymbol{\zeta}^i\}_{i\in[N]}$。我们在 ALSO-X# 算法 1 中设定 $\delta_1 = 10^{-1}$。并假设对于每个用户 $i \in [n]$，在截至时间 $t \in [T]$的时段内，需求 $D_{i,\,t}$为 $D_{i,\,t} = tD$，其中 $D = 1.0$为 1.5。我们考察数据样本数量 $N = 56$为 72、风险水平 $\varepsilon = 0.20$为 0.30、Wasserstein半径 $\theta = 0.50$、用户数量 $n = 8$以及时隙数量 $T = 60$。我们生成 5 个随机实例，并计算其平均表现。

所提出的 ALSO-X# 能够有效地找到优于精确 Big-M 模型的可行解，而且求解时间短得多；而这类解通常是许多无线通信应用所需要的。由于我们考虑的时隙数量为 $T = 60$s，为了公平比较，我们将每个实例的时间限制设为 60s（即 1 分钟），并用“UB”和“LB”分别表示 Big-M 模型在一分钟时间限制内找到的最佳上界和最佳下界。由于我们可能无法在一分钟内将 Big-M 模型求至最优，因此用 GAP 表示其最优性间隙，即 GAP (%) $=$ (|UB $-$ LB|)/(|LB|) $\times$ 100；并用“相对于 Big-M 模型的改进”表示 ALSO-X# 在解的质量上的提升，即相对于 Big-M 模型的改进 (%) =(UB $-$ ALSO-X# 值)/(|UB|) $\times$ 100。该情形的数值结果见表 5。我们发现，ALSO-X# 能够在短得多的时间内找到优于 Big-M 模型的解，这验证了所提方法的有效性。我们指出，未来可以利用 ALSO-X# 设计实时算法（例如，参见 [4–6]）。

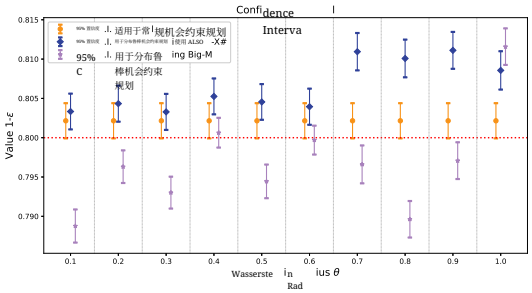
随后，我们展示如何利用 ALSO-X# 的结果节省能耗。为便于说明，我们考虑以下参数设置 $D = 1.0$、$N = 56$、$\varepsilon = 0.20$ 和 $n = 8$。我们首先通过数值方法选择合适的 Wasserstein半径。我们使用生成的数据分别求解采用 ALSO-X# 的分布鲁棒机会约束规划、采用 Big-M 模型的分布鲁棒机会约束规划，以及采用 ALSO-X# 的常规机会约束规划（即 $\theta = 0$）。然后，我们生成样本量相同的新样本，并将求得的解代入常规机会约束规划，计算相应的约束满足概率，从而得到 95% 置信区间。我们对一系列 θ 值重复相同的步骤，并选择最小的 θ，使得分布鲁棒机会约束规划中违反概率的置信区间高于常规机会约束规划的置信区间。具体而言，为了选择最小的 θ,

表5：资源分配问题 (21) 中 ALSO-X# 与 Big-M 模型的比较

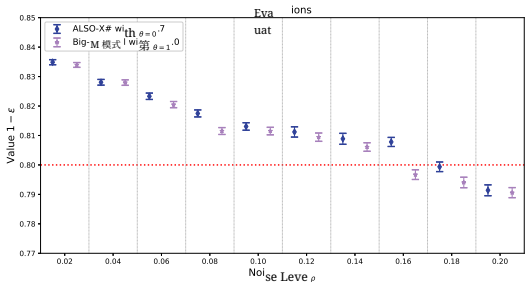
D	ε	N	Big-M 模型		ALSO-X#	
			间隙 (%)	时间（秒）	相对于 Big-M 模型（%）	时间（秒）
1.0	0.20	56	19.05	60	0.10	21.41
		72	19.88	60	0.12	36.48
	0.30	56	25.53	60	0.10	25.35
		72	28.13	60	0.21	37.07
1.5	0.20	56	19.60	60	0.14	34.19
		72	20.68	60	0.19	41.42
	0.30	56	27.50	60	0.23	36.93
		72	28.84	60	0.39	42.06

我们采取以下步骤：(i) 对每个 $\theta \in \{0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 1.0\}$，生成 $N = 56$ 个情景，并求解分布鲁棒机会约束规划及其对应的常规机会约束规划；(ii) 使用相同参数生成 $N = 56$ 个新情景；(iii) 将第 (i) 步所得的解代入新生成的情景，计算约束满足的概率；(iv) 重复上述步骤 50 次，并输出 95% 置信区间；(v) 选择最小的 θ，使得分布鲁棒机会约束规划的置信区间完全高于其对应的常规机会约束规划的置信区间。结果如图 2a 所示。采用 ALSO-X# 且 Wasserstein半径为 $\theta = 0.7$ 的分布鲁棒机会约束规划，能够确保机会约束以较高概率得到满足。相比之下，采用 Big-M 模型的结果时，最佳 Wasserstein半径为 $\theta = 1.0$。据此我们得出结论，与 Big-M 模型相比，采用 ALSO-X# 的平均节能量为 1.93%。

在采用调优后的最佳 Wasserstein 半径时，我们通过生成 100 个新情景来评估约束满足的概率，并输出相应的 95% 置信区间，从而比较 Big-M 模型和 ALSO-X# 所得解的表现。测试设置与上文的˜训练设置相同，不同之处在于，我们假设随机参数 ζ 是离散的，并在 $20 \times (1 - 1.8\rho)$ 和 $40 \times (1 + 0.4\rho)$ 之间独立同分布均匀分布，且满足 $\rho \in [0.02, 0.20]$，其中，数值 ρ 表示训练分布中的噪声水平。结果如图 2b 所示。可以看出，与 Big-M 模型相比，ALSO-X# 得到的约束违反率更低，表现理想。具体而言，当噪声水平较低时，即图 2b 中的 $0.02 \leq \rho \leq 0.16$，ALSO-X# 通常能保证较低的约束违反率。然而，当噪声水平较高时，即图 2b 中的 $\rho = 0.20$，ALSO-X# 和 Big-M 模型都无法提供机会约束保证。这一结果进一步表明，使用调优后的最佳 Wasserstein 半径的 ALSO-X#，其约束违反概率可以优于 Big-M 模型，或至少与之相当。正如上一段所述，ALSO-X# 能提供能耗更低的优质解。这表明，与 Big-M 模型相比，ALSO-X# 的解质量更高。



(a) Wasserstein 半径调优比较



(b) 使用调优最佳的 Wasserstein 半径评估 ALSO-X# 和 Big-M 模型 Wasserstein 半径

图 2：调节 Wasserstein 半径并比较资源分配 (21) 中 ALSO-X# 和 Big-M 模型的解

8 结论

本文提出了 ALSO-X#，通过结合 ALSO-X 和 CVaR近似来求解分布鲁棒机会约束规划（DRCCPs）。我们证明，即使该确定性集合非凸，ALSO-X# 也优于 CVaR近似。我们给出了充分条件，在这些条件下 ALSO-X# 总能优于 ALSO-X，即 ALSO-X 存在唯一最优解时。我们证明了 ALSO-X# 能为 DRCCP 求得一个最优解，并将讨论扩展到了广义 Wasserstein 模糊集。数值研究表明，ALSO-X# 有效。未来的研究可以将 ALSO-X# 算法应用于无线通信问题的实时求解。另一个值得研究的方向是考察 ALSO-X# 求解 DRCCP 时的近似保证。

致谢

本研究部分得到了美国国家科学基金会项目（编号 2246414 和 2246417）的资助。

声明

资助和/或利益冲突/竞争性利益：本研究得到了美国国家科学基金会的资助。作者声明没有其他需要报告的竞争性利益。

参考文献

1. S. Ahmed、J. Luedtke、Y. Song 和 W. Xie。机会约束随机规划的非预见性对偶、松弛与公式化。《数学规划》，162(1):51–81，2017。 2. S. Ahmed 和 A. Shapiro。通过抽样和整数规划求解机会约束随机规划。载于 信息密集时代的先进决策工具，第261–269页。In- forms，2008。 3. R. Atawia、H. Abou-zeid、H. S. Hassanein 和 A. Noureldin。预测性视频流传输的机会约束服务质量满足。载于 *2015年IEEE第40届局域计算机网络会议（LCN）*，第253–260页。IEEE，2015。 4. R. Atawia、H. Abou-Zeid、H. S. Hassanein 和 A. Noureldin。面向节能视频流传输的联合机会约束预测性资源分配。《*IEEE*通信领域精选期刊》，34(5):1389–1404，2016。 5. R. Atawia、H. S. Hassanein、H. Abou-Zeid 和 A. Noureldin。预测性无线网络中的稳健内容交付与不确定性跟踪。《*IEEE*无线通信汇刊》，16(4):2327–2339，2017。 6. R. Atawia、H. S. Hassanein、N. A. Ali 和 A. Noureldin。随机建模在网络不确定性下绿色预测性视频交付中的应用。《*IEEE*绿色通信与网络汇刊》，2(2):556–569，2018。 7. J. Blanchet 和 K. Murthy。通过最优传输量化分布模型风险。《运筹学数学》，44(2):565–600，2019。 8. Y. Cai、G. Huang、Z. Yang、Q. Lin 和 Q. Tan。不确定性下的社区规模可再生能源系统规划——一种区间机会约束规划方法。《可再生与可持续能源评论》，13(4):721–735，2009。 9. G. C. Calafiore 和 M. C. Campi。鲁棒控制设计的情景方法。《*IEEE*自动控制汇刊》，51(5):742–753，2006。 10. G. C. Calafiore 和 L. E. Ghaoui。关于分布鲁棒机会约束线性规划。《优化理论与应用杂志》，130(1):1–22，2006。

11. Z. Chen、D. Kuhn 和 W. Wiesemann。Wasserstein 球上的数据驱动机会约束规划。《运筹学》，2022。 12. Z. Chen、D. Kuhn 和 W. Wiesemann。关于 Wasserstein 球上数据驱动机会约束规划的近似。*arXiv*预印本 *arXiv:2206.00231*，2022。 13. Z. Chen 和 W. Xie。分布模糊性下风险价值的分摊。《数学金融》，31(1):531–559，2021。 14. J. Cheng、E. Delage 和 A. Lisser。分布鲁棒随机背包问题。*SIAM*优化学报，24(3):1485–1506，2014。 15. R. Gao 和 A. Kleywegt。基于 Wasserstein 距离的分布鲁棒随机优化。《运筹学数学》，2022。 16. L. E. Ghaoui、M. Oks 和 F. Oustry。最坏情形风险价值与鲁棒投资组合优化：一种锥规划方法。《运筹学》，51(4):543–556，2003。 17. G. Guill´en-Gos´albez 和 I. Grossmann。不确定性下环境友好型化学品供应链设计的全局优化策略：基于损害评估模型。《计算机与化学工程》，34(1):42–58，2010。 18. A. Gupta、C. D. Maranas 和 C. M. McDonald。需求不确定性下的中期供应链规划：客户需求满足与库存管理。《计算机与化学工程》，24(12):2613–2621，2000。 19. A. K. Gupta、T. Varga 和 T. Bodnar。统计学与投资组合理论中的椭圆等高模型。施普林格，2013。 20. G. A. Hanasusanto、V. Roitch、D. Kuhn 和 W. Wiesemann。不确定性量化与机会约束规划的分布鲁棒视角。《数学规划》，151(1):35–62，2015。 21. G. A. Hanasusanto、V. Roitch、D. Kuhn 和 W. Wiesemann。均值与离散度信息下的模糊联合机会约束。《运筹学》，65(3):751–767，2017。 22. N. Ho-Nguyen、F. Kılınc¸-Karzan、S. K¨uc¸¨ukyavuz 和 D. Lee。具有右端不确定性的 Wasserstein 模糊性下分布鲁棒机会约束规划。《数学规划》，196(1):641–672，2022。 23. N. Ho-Nguyen、F. Kilinc¸-Karzan、S. K¨uc¸¨ukyavuz 和 D. Lee。具有左端不确定性的 Wasserstein 模糊性下分布鲁棒机会约束规划的强形式。《*INFORMS* 优化杂志》，2022。 24. R. A. Horn 和 C. R. Johnson。矩阵分析。剑桥大学出版社，2012。 25. R. Ji 和 M. A. Lejeune。基于 Wasserstein 度量的数据驱动分布鲁棒机会约束优化。《全局优化杂志》，79(4):779–811，2021。 26. N. Jiang 和 W. Xie。ALSO-X 和 ALSO-X+：机会约束规划的更优凸近似。《运筹学》，70(6):3581–3600，2022。 27. N. Jiang 和 W. Xie。Dfo：一种针对内生离群值的数据驱动决策框架。2022。 28. S. Ken-Iti。*L´évy*过程与无限可分布。剑桥大学出版社，1999。 29. S. K¨uc¸¨ukyavuz 和 R. Jiang。有限分布信息下的机会约束优化：基于抽样与分布鲁棒性的重构综述。《*EURO* 计算优化杂志》，第100030页，2022。 30. C. M. Lagoa、X. Li 和 M. Sznaier。概率约束线性规划与风险调整控制器设计。*SIAM*优化学报，15(3):938–951，2005。 31. M. A. Lejeune 和 F. Margot。利用随机二次不等式求解机会约束优化问题。《运筹学》，64(4):939–957，2016。 32. B. Li、R. Jiang 和 J. L. Mathieu。具有矩与单峰性信息的模糊风险约束。《数学规划》，173:151–192，2019。 33. S. Li、Y. T. Hou、W. Lou、B. A. Jalaian 和 S. Russell。相互干扰下考虑信道不确定性的能源效率最大化。《*IEEE* 无线通信汇刊》，21(10):8476–8488，2022。

34. S. Li、Y. Huang、C. Li、B. A. Jalaian、Y. T. Hou 和 W. Lou。通过利用干扰阈值违规来应对共存中的不确定性。载于第二十届 *ACM* 移动自组织网络与计算国际研讨会论文集，第 71–80 页，2019 年。35. A. Nemirovski 和 A. Shapiro。机会约束的情景近似。载于不确定性下设计的概率与随机化方法，第 3–47 页，2006 年。36. A. Nemirovski 和 A. Shapiro。机会约束规划的凸近似。*SIAM*优化学报，17(4)：969–996，2007 年。37. B. K. Pagnoncelli、S. Ahmed 和 A. Shapiro。机会约束投资组合选择问题的计算研究。《优化理论与应用杂志》，142(2)：399–416，2009 年。38. B. K. Pagnoncelli、D. Reich 和 M. C. Campi。实践中的情景方法风险—收益权衡：投资组合选择案例研究。《优化理论与应用杂志》，155(2)：707–722，2012 年。39. A. Pr´ekopa。具有随机技术矩阵的概率约束规划。*Statistics*：理论与应用统计学杂志，5(2)：109–116，1974 年。40. A. Pr´ekopa。随机规划，第 324 卷。Springer Science & Business Media，2013 年。41. R. T. Rockafellar、S. Uryasev 等。条件风险价值的优化。风险杂志，2：21–42，2000 年。42. R. T. Rockafellar 和 R. J. Wets。关于凸泛函的次微分与条件期望的交换。*Stochastics*：概率与随机过程国际期刊，7(3)：173–182，1982 年。43. A. Shapiro、D. Dentcheva 和 A. Ruszczynski。随机规划讲义：建模与理论。SIAM，2021 年。44. H. Shen 和 R. Jiang。具有 Wasserstein 模糊性的凸机会约束规划。*arXiv* 预印本 *arXiv:2111.02486*，2021 年。45. H. Shen 和 R. Jiang。具有 Wasserstein 模糊性的机会约束集合覆盖。《数学规划》，第 1–54 页，2022 年。46. Z. Shi、H. Liang、S. Huang 和 V. Dinavahi。孤岛微电网的分布鲁棒机会约束能量管理。*IEEE*智能电网汇刊，10(2)：2234–2244，2018 年。47. S. Uryasev。概率函数与百分位数（风险价值）理论导论。载于概率约束优化，第 1–25 页。施普林格，2000 年。48. K.-Y. Wang、A. M.-C. So、T.-H. Chang、W.-K. Ma 和 C.-Y. Chi。多用户 MISO 下行链路的停机约束鲁棒传输优化：基于锥优化的可处理近似。*IEEE*信号处理汇刊，62(21)：5690–5705，2014 年。49. W. Xie。关于基于 Wasserstein 距离的分布鲁棒机会约束规划。《数学规划》，186(1)：115–155，2021 年。50. W. Xie 和 S. Ahmed。关于分布鲁棒联合机会约束优化问题的确定性重构。*SIAM*优化学报，28(2)：1151–1182，2018 年。51. W. Xie 和 S. Ahmed。机会约束覆盖问题的双准则近似。《运筹学》，68(2)：516–533，2020 年。52. J. Yeh。实分析：测度与积分理论（第二版）。World Scientific Publishing Company，2006 年。53. M.-C. Yue、D. Kuhn 和 W. Wiesemann。关于 Wasserstein 球上的线性优化。《数学规划》，195(1)：1107–1122，2022 年。54. S. Zymler、D. Kuhn 和 B. Rustem。具有二阶矩信息的分布鲁棒联合机会约束。《数学规划》，137(1)：167–198，2013 年。

A 证明

A.1 定理5的证明

定理 5 假设在单个分布鲁棒机会约束规划(2)中，确定性集合 $\mathcal{X}$ 是凸的，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}$ 是连续且非退化的，其支撑集为 $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_p$，且满足 $p \in (1,\infty)$，仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$和 $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$。那么，当 $t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 且$v^A(t) > 0$时，下层ALSO-X (3b) 存在唯一最优解。

证明 我们通过讨论是否存在一个最优解 $\boldsymbol{x}^*$，使得下层 ALSO-X (3b) 满足 supp($\boldsymbol{x}^*$) $= n$，将证明分为两部分。

(i) 假设存在一个最优解 $\boldsymbol{x}^*$，使得下层 ALSO-X 满足 supp($\boldsymbol{x}^*$) $= n$。首先，对于任意满足 supp($\boldsymbol{x}$) $= n$ 的 $\boldsymbol{x}$，根据函数 $f(\tau) = \max\{\tau, 0\}$ 的连续性以及 [42], 中的定理1，我们可以交换次微分算子与期望，一阶导数$\nsim F'(\boldsymbol{x})$ 为

$$\widehat{F}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \widehat{F}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \int_{\mu(\boldsymbol{x})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\theta \|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\zeta}\right] \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}),$$

其中 $\mu(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta}\colon \theta\|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta} \geq b_1\}$ 及其边界 $\partial\mu(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta}\colon \theta\|\boldsymbol{x}\|_* + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\zeta} = b_1 \quad\}$.
根据 [47], 中的方程 (4)，海森矩阵为 $\widehat{F}(\boldsymbol{x})$ 是

$$H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \int_{\partial\mu(\boldsymbol{x})} \left(\frac{\partial\theta\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\zeta}\right)\left(\frac{\partial\theta\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\zeta}\right)^\top \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) + \theta\int_{\mu(\boldsymbol{x})} \frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}^2}\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}).$$

回顾一下，$\boldsymbol{x}^*$ 是下层 ALSO-X (3b) 的最优解，且 $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{0}$。要证明 $\boldsymbol{x}^*$ 是唯一最优解，只需证明其对应的海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x})$ 是正定（PD）。对于任意 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$，我们有

$$\boldsymbol{y}^\top H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\int_{\partial\mu(\boldsymbol{x})} \left(\boldsymbol{y}^\top\frac{\partial\theta\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\zeta}\right)^2 \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) + \theta\int_{\mu(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{y}^\top\left(\frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{y}\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}).$$

对于满足 $p \in (1,\infty)$ 的 $\|\boldsymbol{x}\|_* = \|\boldsymbol{x}\|_p$，对每个 $i \in [n]$, 我们有

$$\frac{\partial\|\boldsymbol{x}\|_p}{\partial x_i} = \operatorname{sign}(x_i)|x_i|^{p-1}\left[\sum_{j\in[n]}|x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}-1}, \forall i \in [n],$$

and

$$\frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_p}{\partial x_i^2} = |x_i|^{p-2}\left[\sum_{j\in[n]\setminus\{i\}}|x_j|^p\right](p-1)\left[\sum_{j\in[n]}|x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}-2}, \forall i \in [n],$$

$$\frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_p}{\partial x_i\partial x_k} = \operatorname{sign}(x_i)|x_i|^{p-1}\operatorname{sign}(x_k)|x_k|^{p-1}(1-p)\left[\sum_{j\in[n]}|x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}-2}, \forall i \in [n], k \in [n]\setminus\{i\}.$$

也就是说,

$$\frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_*}{\partial\boldsymbol{x}^2} = \frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_p}{\partial\boldsymbol{x}^2} = (p-1)\left(\sum_{j\in[n]}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}-2}\left[\left(\sum_{j\in[n]}|x_j|^p\right)\operatorname{Diag}\begin{pmatrix}|x_1|^{p-2}\\ \vdots\\ |x_n|^{p-2}\end{pmatrix}\right.$$

$$- \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(x_1)|x_1|^{p-1} \\ \vdots \\ \operatorname{sign}(x_n)|x_n|^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(x_1)|x_1|^{p-1} \\ \vdots \\ \operatorname{sign}(x_n)|x_n|^{p-1} \end{pmatrix}^\top \Bigg].$$

这里， $\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_p/\partial\boldsymbol{x}^2$ 是一个秩为 $n-1$的半正定（PSD）矩阵。这意味着：（i）当且仅当 $\boldsymbol{y}=\tau\boldsymbol{x}$ 且 $\tau\neq 0$ 时，值$\boldsymbol{y}^\top(\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_*/\partial\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{y}=0$ （回想一下，我们有 $\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$）；（ii）如果 $\boldsymbol{z}$ 是其他最优解，那么必有 $\boldsymbol{z}=\ell\boldsymbol{x}^*$。因此，如果 $\boldsymbol{y}\not\propto\boldsymbol{x}^*$，那么必有$\boldsymbol{y}^\top(\partial^2\|\boldsymbol{x}^*\|_*/\partial\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{y}>0$，这意味着海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ 是正定的，从而确认最优解 $\boldsymbol{x}^*$具有唯一性。接下来需要证明，如果解 $\boldsymbol{x}^*$ 不唯一，则所有最优解都应与 $\boldsymbol{x}^*$成比例。我们根据 b_1的符号将证明分为两步。

步骤 I. 当 $b_1\neq 0$ 时，我们证明海森矩阵 $H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ 是正定的。也就是说，只需证明若 $\boldsymbol{y}=\ell\boldsymbol{x}^*$ 且 $\ell\neq 0$，则必有

$$\int_{\partial\mu(\boldsymbol{x}^*)}\left(\boldsymbol{y}^\top\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}^*\|_*}{\partial\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\zeta}\right)^2\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta})>0.$$

事实上，我们注意到

$$\boldsymbol{y}^\top\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}^*\|_*}{\partial\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\zeta}=(\ell\boldsymbol{x}^*)^\top\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}^*\|_*}{\partial\boldsymbol{x}}+(\ell\boldsymbol{x}^*)^\top\boldsymbol{\zeta}=\ell\left[\theta\,\|\boldsymbol{x}^*\|_*+(\boldsymbol{x}^*)^\top\boldsymbol{\zeta}\right]=\ell b_1\neq 0.$$

因此，

$$\int_{\partial\mu(\boldsymbol{x}^*)}\left(\boldsymbol{y}^\top\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}^*\|_*}{\partial\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\zeta}\right)^2\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta})=\int_{\partial\mu(\boldsymbol{x}^*)}\ell^2b_1^2\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta})>0,$$

这意味着 $\boldsymbol{y}^\top H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y}>0$。

步骤 II. 当 $b_1=0$ 时，我们证明 $\boldsymbol{x}^*$ 必须是唯一解。假设存在另一个最优解 $\boldsymbol{z}$。那么，根据证明开头的陈述，必有 $\boldsymbol{z}=\ell\boldsymbol{x}^*$ 使得 $\ell\neq 1$。还需讨论三种子情况：

子情况 *(i)* 当 $0<\ell<1$ 时，根据下层 ALSO-X (3b) 中目标函数的齐次性，即，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}}\left[\theta\,\|\boldsymbol{z}\|_*+\boldsymbol{z}^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right]_+=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}}\left[\theta\,\|\ell\boldsymbol{x}^*\|_*+(\ell\boldsymbol{x}^*)^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right]_+=\ell v^A(t).$$

因此， $\boldsymbol{z}=\ell\boldsymbol{x}^*$ 的目标值严格优于 $\boldsymbol{x}^*$，因为 $v^A(t)>0$，矛盾；子情况 *(ii)* 类似地，当 $\ell>1$ 时，当前最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 严格优于 $\boldsymbol{z}$，矛盾；子情况 *(iii)* 当 $\ell<0$ 时，由于下层 ALSO-X (3b) 中的目标函数和可行域均为凸， $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{z}=\ell\boldsymbol{x}^*$ 的任意凸组合也是一个最优解。也就是说，如果我们选择

$$\frac{-\ell}{|\ell|+1}\boldsymbol{x}^*+\frac{1}{|\ell|+1}(\ell\boldsymbol{x}^*)=\mathbf{0},$$

那么 0 是一个目标值为 0 的最优解，严格小于 $\boldsymbol{x}^*$的目标值，矛盾。因此，我们得到： $\boldsymbol{x}^*$ 满足 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)|=n$，且为唯一最优解，因为我们有 $v^A(t)>0$。

因此，下层 ALSO-X(3b) 的目标函数存在唯一解。

(ii) 假设不存在一个下层 ALSO-X (3b) 的最优解 $\boldsymbol{x}^*$，使得$|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)|=n$。令 $\boldsymbol{x}^*$ 为支撑集最大的一个最优解。若 $\boldsymbol{z}$ 是下层 ALSO-X (3b) 的另一个最优解，且 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)=\operatorname{supp}(\boldsymbol{z})$，则按照第 (i) 部分的证明，我们必有 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{z}$。因此，$\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)\neq\operatorname{supp}(\boldsymbol{z})$。现在定义

$$\gamma=\frac{1}{2}\frac{\min\{|x_i^*|:i\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)\}}{\min\{|x_i^*|:i\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)\}+\max\{|z_i|:i\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{z})\}}.$$

那么，根据下层 ALSO-X 可行集的凸性， $\bar{\boldsymbol{x}}:=(1-\gamma)\boldsymbol{x}^*+\gamma\boldsymbol{z}$ 也是一个最优解。然而， $|\operatorname{supp}(\bar{\boldsymbol{x}})|\geq|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)|+1$，这与 $\boldsymbol{x}^*$ 具有最大的支撑集相矛盾。证明完毕。□

A.2 $q \in \{1, \infty\}$下定理 5 的证明

引理 1 假设在单个分布鲁棒机会约束规划(2)中，确定性集合 $\mathcal{X}$ 是凸集，参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}$ 是连续的，其支撑集为 $\mathbb{R}^n$，$\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_p$ 满足 $p \in \{1, \infty\}$，且仿射映射 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ 和 $b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$。那么，当 $t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ 且 $v^A(t) > 0$时，下层ALSO-X (3b) 存在唯一最优解。

证明 我们根据 p 的取值将证明分为两种情形。

情形 I. $p = 1$。我们通过讨论是否存在一个最优解 $\boldsymbol{x}^*$，将证明分为两部分 to 下层 下层 ALSO-X (3b)，满足 supp($\boldsymbol{x}^*$) $= n$。

(i) 假设下层 ALSO-X 存在一个最优解 $\boldsymbol{x}^*$，使得 supp($\boldsymbol{x}^*$) $= n$。 ^回顾一下， $F(\boldsymbol{x})$ 表示下层 ALSO-X (3b) 中海森矩阵为

$$H_{\widehat{F}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \int_{\partial\mu(\boldsymbol{x})} \left(\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}\|_1}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\zeta}\right)\left(\frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}\|_1}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\zeta}\right)^\top \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) + \theta \int_{\mu(\boldsymbol{x})} \frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_1}{\partial\boldsymbol{x}^2}\mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}).$$

对于满足 supp($\boldsymbol{x}$) $= n$ 的函数 $\|\boldsymbol{x}\|_1$，有

$$\frac{\partial\|\boldsymbol{x}\|_1}{\partial x_i} = \text{sign}(x_i), \forall i \in [n]; \frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \forall i \in [n], j \in [n].$$

这里，在假设 supp($\boldsymbol{x}^*$) $= n$ 的条件下，我们有 $\partial^2\|\boldsymbol{x}^*\|_1/\partial\boldsymbol{x}^2 = 0$，这意味着 $\boldsymbol{y}^\top(\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_1/\partial\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{y}$ =0。按照定理 5 的类似证明，我们有

$$\int_{\partial\mu(\boldsymbol{x}^*)} \left(\boldsymbol{y}^\top \frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}^*\|_1}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\zeta}\right)^2 \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0.$$

(ii) 情形 当 |supp($\boldsymbol{x}^*$)| $< n$ 时的情形与定理 5 证明中的 (ii) 部分相同，因此省略 d.

情形 II. $p = \infty$. </style}我们将证明分成两部分，分别讨论是否存在下层 ALSO-X (3b) 的最优解 $\boldsymbol{x}^*$，使得 supp($\boldsymbol{x}^*$) $= n$。

(i) 假设存在下层 ALSO-X 的最优解 $\boldsymbol{x}^*$，使得 supp($\boldsymbol{x}^*$) $= n$。我们将接下来的证明分为两个步骤。

步骤 I. 我们将 $\mathcal{S}$ 记为对应于绝对值最大的分量的指标集，也就是说，对于任意子集 $\mathcal{S} \subseteq [n]$，我们假设对每个 $i \in \mathcal{S}$ 均有 $|x_i^*| = \|\boldsymbol{x}^*\|_\infty$。对于固定的子集 $\mathcal{S}$ 以及满足 supp($\boldsymbol{x}$) $= n$ 的函数$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$，我们有

$$\frac{\partial\|\boldsymbol{x}\|_\infty}{\partial x_i} = \begin{cases} \text{sign}(x_i), & i \in \mathcal{S}, \\ 0, & i \notin \mathcal{S} \end{cases}, \forall i \in [n],$$

and

$$\frac{\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_\infty}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \forall i \in [n], k \in [n].$$

在这里，根据上述假设，我们有 $\partial^2\|\boldsymbol{x}^*\|_\infty/\partial\boldsymbol{x}^2 = 0$，这意味着 $\boldsymbol{y}^\top(\partial^2\|\boldsymbol{x}\|_\infty/\partial\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{y} = 0$。沿用定理 5 的类似证明，我们有

$$\int_{\partial\mu(\boldsymbol{x}^*)} \left(\boldsymbol{y}^\top \frac{\partial\theta\,\|\boldsymbol{x}^*\|_\infty}{\partial\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\zeta}\right)^2 \mathbb{P}(d\boldsymbol{\zeta}) > 0.$$

因此，给定子集 $\mathcal{S}$，最优解是唯一的。

步骤 II. 接下来需要证明，对于任意子集 $\mathcal{S}$，最优解都是唯一的，其中 $\mathcal{S}$ 是与 $\boldsymbol{x}^*$ 中绝对值分量最大的项相对应的指标集。假设 $\boldsymbol{x}^*$ 的大小最小

且由绝对值最大的分量组成。假设 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}^*$ 是下层 ALSO-X (3b) 的另一个最优解， $\mathcal{S}_1$ 是与其绝对值分量最大的项相对应的指标集。根据我们的假设，必有 $|\mathcal{S}_1| \geq |\mathcal{S}|$。现在定义

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\min\{|x_i^*| : i \in \operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)\}}{\min\{|x_i^*| : i \in \operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)\} + \max\{|z_i^*| : i \in \operatorname{supp}(\boldsymbol{z}^*)\}}.$$

接着，下层 ALSO-X 的可行集的凸性意味着 $\bar{\boldsymbol{x}} := (1-\gamma)\boldsymbol{x}^* + \gamma \boldsymbol{z}^*$ 是另一个最优解。然而，新解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 要么 $\boldsymbol{x}^*$ 是下层 ALSO-X 的唯一解，要么与 $\boldsymbol{x}^*$ 具有最大的绝对值分量中最小的规模这一事实相矛盾。

(ii) 当 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}^*)| < n$ 时，情形与定理 5 证明中的第 (ii) 部分相同，因此省略。 □

B Wasserstein 模糊集类型为 $q-$ 时分布鲁棒机会约束问题的等价重构

在类型为 $q-$、且 $q \in [1, \infty)$ 的 Wasserstein 模糊集下，分布鲁棒机会约束规划 (1) 可写为 a s

$$v_q^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_q} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \leq b_i(\boldsymbol{x}), \forall i \in [I] \right\} \geq 1-\varepsilon \right\}. \tag{22}$$

为方便记号，我们将分布鲁棒机会约束规划 (22) 中最坏情形机会约束所诱导的决策空间记为以下分布鲁棒机会约束（DRCC）集

$$Z_q \colon = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_q} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \colon \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} \leq b_i(\boldsymbol{x}), \forall i \in [I] \right\} \geq 1-\varepsilon \right\}. \tag{23}$$

B.1 分布鲁棒机会约束问题的等价重构

我们可以将 [49] 关于任意$q \in [1, \infty$以及任意参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$下分布鲁棒机会约束集 Z_q (23) 的等价重构的现有研究进行推广。

命题 3 （*[49]*中推论 *1* 的推广）在类型为 $q-$的*Wasserstein*模糊集下，分布鲁棒机会约束集 Z_q （23）等价于

$$Z_q = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \begin{array}{l} \theta^q \varepsilon^{-1} + \mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}\left[-f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}})^q \right] \leq 0, \\ \theta^q \varepsilon^{-1} + \mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}\left[-f(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}})^q \right] \leq 0 \end{array} \right\}. \tag{24}$$

其中

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta}) = \min\left\{ \min_{i \in [I] \setminus \mathcal{I}(\boldsymbol{x})} \frac{(b_i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta})_+}{\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*}, \min_{i \in \mathcal{I}(\boldsymbol{x})} \chi_{\{\boldsymbol{x} \colon b_i(\boldsymbol{x}) < 0\}}(\boldsymbol{x}) \right\},$$

且 $\mathcal{I}(\boldsymbol{x}) = \emptyset$ 当 $\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$且 $\mathcal{I}(\boldsymbol{x}) = [I]$。

证明 我们通过讨论 $\theta = 0$ 是否成立，将证明分为两种情况。

Case 1 当 $\theta = 0$ 时，分布鲁棒机会约束集 Z_q 退化为参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}$ 下的常规机会约束规划，即 .,

$$Z_q = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall i \in [I] \right\} \geq 1-\varepsilon \right\}.$$

另一方面，在 (24) 中，当 $\theta = 0$ 时，第一个约束是冗余的。因此，结论得证。情形 2 当 $\theta > 0$ 时，由 (24) 中第一个约束所确定的决策空间等价于分布鲁棒机会约束集 Z_q，这一事实可直接由 [49] 中推论 1 的证明得出。因此，在此情形下，~ ~ ~(24) 中的第二个约束是冗余的，因为对于任意随机变量 $\boldsymbol{X}$，都有 $\mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}[\boldsymbol{X}] \geq \mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}[\boldsymbol{X}]$。

□

如果对于所有 $i \in [I]$, $\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_* = \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_*$，则命题 3 中的重构可进一步简化。在这种情况下，该条件可视为对所有 $i \in [I]$ 时 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})$ 的推广；这一条件已在分布鲁棒机会约束规划文献中讨论过（例如，参见 [11, 49]）。请注意，对于单个分布鲁棒机会约束规划，该条件始终成立，其中 $I = 1$。

命题 4 假设 $\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_* = \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_*$ 对所有 $i \in [I]$均成立。那么，分布鲁棒机会约束集 Z_q (23) 可以简化为

$$Z_q = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \theta^q \varepsilon^{-1} \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_*^q + \mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}\left[-\min\limits_{i\in[I]} \left(b_i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \right)_+^q \right] \le 0, \\ \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} : \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \forall i \in [I] \right\} \ge 1 - \varepsilon \end{array} \right\}. \tag{25}$$

证明 我们根据 $\|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* = 0$ 是否成立，将证明分为两种情形。

情形 1 当 $\|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* = 0$ (即 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$)时，根据 (24)，集合 $Z_q \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* = 0\}$ 等价于集合

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* = 0, b_i(\boldsymbol{x}) \ge 0, \forall i \in [I]\},$$

由于其第一个约束是冗余的，这等价于 (25) 右侧与集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* = 0\}$ 的交集。

情形 2 当 $\|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* > 0$ 时，根据命题 3，函数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta})$ 变为

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta}) = \min_{i\in[I]} \frac{\left(b_i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta}\right)_+}{\|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_*}.$$

根据相干风险度量条件风险价值的正齐次性，集合 $Z_q \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* > 0\}$ 等价于集合

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* > 0, \\ \theta^q \varepsilon^{-1} \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_*^q + \mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}\left[-\min\limits_{i\in[I]} \left(b_i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \right)_+^q \right] \le 0, \\ \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} : \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \forall i \in [I] \right\} \ge 1 - \varepsilon \end{array} \right\}.$$

证明至此完成。 □

作为命题 4 的直接推论，我们指出，对于具有椭圆分布参考分布 $\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}$（参见第 5.1 节中的讨论）的单个分布鲁棒机会约束规划（即 $I = 1$），分布鲁棒机会约束集 Z_q 有一个简单的表示形式。

推论 11 对于单个分布鲁棒机会约束规划 (22)，当仿射映射为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$、$b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$，随机参数 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 服从联合椭圆分布，且其参数为 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \sim \mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \widehat{g})$，并且定义 *Wasserstein* 距离的范数为与矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 相关的广义马氏范数时，分布鲁棒机会约束集 Z_q (23) 变为

$$Z_q = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : b_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) \ge \eta_q^* \sqrt{\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})} \right\}, \tag{26a}$$

且 η_q^* 是.....的唯一极小化解

$$\eta_q^* = \min_{\eta} \left\{ \eta : \int_{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}^{\eta} (\eta - t)^q \bar{k} \widehat{g}(t^2/2) dt \ge \theta^q, \eta \ge \Phi^{-1}(1-\varepsilon) \right\}. \tag{26b}$$

证明 我们注意到，若 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$，根据命题 4，集合 $Z_q \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \ \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ 变为

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, b_1(\boldsymbol{x}) \geq 0\},$$

这等价于 (26a) 的右侧与集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \ \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ 相交。因此，不失一般性，我们假设 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$。

注意，线性函数 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta}$ 仍服从椭圆分布（例如，参见 [19]）。为方便记号，我们将线性函数 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\zeta}$ 的分布记为 $\mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\mu_{\boldsymbol{x}}, \sigma_{\boldsymbol{x}}, \widehat{g})$，并将其概率密度函数记为

$$h(y) = \frac{\bar{k}}{\sigma_{\boldsymbol{x}}} \widehat{g}\left(\frac{(y-\mu_{\boldsymbol{x}})^2}{2\sigma_{\boldsymbol{x}}^2}\right),$$

其中，$\mu_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})$ 且 $\sigma_{\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})}$。

根据命题 4，分布鲁棒机会约束集 Z_q 为

$$Z_q = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \begin{array}{l} \theta^q \varepsilon^{-1} \left\|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\right\|_*^q + \mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon}\left[-\left(b_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right)_+^q\right] \leq 0, \\ \mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \colon \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_1(\boldsymbol{x}) \leq 0\right\} \geq 1-\varepsilon \end{array} \right\}.$$

按照定理 7 [13] 中类似的推导，并根据条件风险价值的定义（例如，参见 [41]），集合 Z_q 等价于

$$Z_q = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}[\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}}]}^{b_1(\boldsymbol{x})} (b_1(\boldsymbol{x}) - y)^q h(y) dy \geq \theta^q \varepsilon^{-1} \left\|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\right\|_*^q, b_1(\boldsymbol{x}) \geq \mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}\left[\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right] \right\}.$$

根据 [39], 中的定理 3，我们有

$$\mathrm{VaR}_{1-\varepsilon}\left[\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right] = \mu_{\boldsymbol{x}} + \Phi^{-1}(1-\varepsilon)\sigma_{\boldsymbol{x}}.$$

现在令 $t = (y - \mu_{\boldsymbol{x}})/\sigma_{\boldsymbol{x}}$、$y = t\sigma_{\boldsymbol{x}} + \mu_{\boldsymbol{x}}$ 和 $\eta = (b_1(\boldsymbol{x}) - \mu_{\boldsymbol{x}})/\sigma_{\boldsymbol{x}}$，则分布鲁棒机会约束集 Z_q 进一步等于

$$Z_q = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon b_1(\boldsymbol{x}) - \mu_{\boldsymbol{x}} \geq \eta\sigma_{\boldsymbol{x}}, \int_{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}^{\eta} (\eta\sigma_{\boldsymbol{x}} - t\sigma_{\boldsymbol{x}})^q h(t\sigma_{\boldsymbol{x}} + \mu_{\boldsymbol{x}}) dt \geq \theta^q \sigma_{\boldsymbol{x}}^{q-1}, \eta \geq \Phi^{-1}(1-\varepsilon) \right\}.$$

其中我们利用了这样一个事实：$\left\|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\right\|_* = \sigma_{\boldsymbol{x}}$。我们看到，随着 η 减小，集合 Z_q 会扩大，因此可以用式 (26b) 定义的最小 η_q^* 代替它。代入生成函数 $\widehat{g}(\cdot)$，即可得到式 (26a)。最后，我们注意到 $\int_{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}^{\eta} (\eta - t)^q \bar{k} \widehat{g}(t^2/2) dt$ 随 η 单调递增，这证明了 η_q^* 的唯一性。

□

B.2 ALSO-X 的等价重构

与 ALSO-X (3) 类似，我们将 ALSO-X 扩展到类型为 $q-$ 的 Wasserstein 模糊集。对于任意 $q \in [1, \infty)$, ALSO-X 的形式化定义如下：

$$v_q^A = \min_t \quad t, \tag{27a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_q} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\max_{i \in [I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} - b_i(\boldsymbol{x})\right)_+\right] : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq t \right\}, \tag{27b}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in Z_q. \tag{27c}$$

然后，我们推导出类型为 $q-$Wasserstein模糊集下铰链损失近似（27b）的等价重构。

命题5 在类型为 $q-$*Wasserstein*模糊集且满足 $q \in [1,\infty)$的条件下，铰链损失近似(27b) 等价于

$$v_q^A(t) = \min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\\ \lambda\geq 0}} \left\{ \lambda\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}}\left[\max_{i\in[I]}\left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) + P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda)\right)_+\right] : \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\leq t \right\}, \tag{28}$$

其中，对于每个 $i\in[I]$, $P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda) = (\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*)^{\frac{q}{q-1}}\lambda^{-\frac{1}{q-1}}q^{-\frac{q}{q-1}}(q-1)$ 其极限为

$$\lim_{q\to 1_+} P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda) = \lim_{q\to 1_+}(\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*)^{\frac{q}{q-1}}\lambda^{-\frac{1}{q-1}}q^{-\frac{q}{q-1}}(q-1) = \chi_{\{\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*\leq\lambda\}}(\boldsymbol{x}).$$

证明 根据定理 1 [15] 1 [7], $\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_q}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\max_{i\in[I]}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^\top\tilde{\boldsymbol{\xi}}-$ 或定理，(b) 中内层上确界 $\max_{i\in[I]}[b_i(\boldsymbol{x})_+]$ 27 $\sup\max(\,(\,)\,(\,))$ 可改写为

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\lambda\geq 0}\lambda\theta^q - \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}}\left[\inf_{\boldsymbol{\xi}}\left\{\lambda\left\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q - \max_{i\in[I]}(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\xi} - b_i(\boldsymbol{x}))_+\right\}\right].$$

接下来，我们将证明分为两个步骤。

步骤1. 我们首先改写项 $\inf_{\boldsymbol{\xi}}\{\lambda\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|^q - \max_{i\in[I]}(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\xi} - b_i(\boldsymbol{x}))_+\}$。将负号移入最大值算子后，可得

$$\inf_{\boldsymbol{\xi}}\left\{\min_{i\in[I]}\min\left\{\lambda\left\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\xi} + b_i(\boldsymbol{x}), \lambda\left\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q\right\}\right\}.$$

然后交换最小值与下确界，可得

$$\min_{i\in[I]}\min\left\{\inf_{\boldsymbol{\xi}}\left\{\lambda\left\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\xi} + b_i(\boldsymbol{x})\right\}, \inf_{\boldsymbol{\xi}}\lambda\left\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q\right\}.$$

注意到 $\inf_{\boldsymbol{\xi}}\lambda\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|^q = 0$，接下来只需对每个 $i\in[I]$ 简化 $\inf_{\boldsymbol{\xi}}\{\lambda\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\|^q - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\xi} + b_i(\boldsymbol{x})\}$。令 $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}$，我们有

$$\inf_{\boldsymbol{\xi}}\left\{\lambda\left\|\boldsymbol{\xi}-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\xi} + b_i(\boldsymbol{x})\right\} = \inf_{\widehat{\boldsymbol{\zeta}}}\left\{\lambda\left\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\widehat{\boldsymbol{\zeta}}\right\} - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}} + b_i(\boldsymbol{x}).$$

根据 H¨older 不等式以及下确界可取到这一事实，我们有

$$\begin{aligned}\inf_{\widehat{\boldsymbol{\zeta}}}\left\{\lambda\left\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\widehat{\boldsymbol{\zeta}}\right\} &= \inf_{\widehat{\boldsymbol{\zeta}}}\left\{\lambda\left\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}\right\|^q - \|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*\left\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}\right\|\right\}\\ &= (\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*)^{\frac{q}{q-1}}\lambda^{-\frac{1}{q-1}}q^{-\frac{q}{q-1}}(1-q).\end{aligned}$$

注意，当 $q\to 1_+$ 时，铰链损失近似化简为

$$\lim_{q\to 1_+}(\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*)^{\frac{q}{q-1}}\lambda^{-\frac{1}{q-1}}q^{-\frac{q}{q-1}}(q-1) = \chi_{\{\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*\leq\lambda\}}(\boldsymbol{x}).$$

步骤1。根据步骤1，铰链损失近似 (27b) 变为

$$\begin{aligned}v_q^A(t) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\lambda\geq 0}\Bigg\{&\lambda\theta^q - \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\zeta}}}\left[\min_{i\in[I]}\min\left(-\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\zeta}} + b_i(\boldsymbol{x}) - (\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_*)^{\frac{q}{q-1}}\lambda^{-\frac{1}{q-1}}q^{-\frac{q}{q-1}}(q-1), 0\right)\right] :\\ &\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\leq t\Bigg\}.\end{aligned}$$

将负号移入期望中，我们得出结论。 □

B.3 CVaR近似的等价重构

对于分布鲁棒机会约束规划 (22)，其 CVaR 近似定义如下：

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_q} \inf_{\beta\le 0} \left[\beta + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} - b_i(\boldsymbol{x}) \right) - \beta \right)_+ \right] \right] \le 0 \right\}.$$

根据假设A1和定理1，模糊集 P_q 是弱紧的，因此我们可以交换下确界与上确界，并将两边乘以 ε。于是，对于任意 $q \in [1,\infty)$，CVaR 近似可表述为

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \inf_{\beta\le 0} \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_q} \left[\varepsilon\beta + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} - b_i(\boldsymbol{x}) \right) - \beta \right)_+ \right] \right] \le 0 \right\}.$$

按照命题 3 和命题5的类似推导，我们得到分布鲁棒机会约束规划 (22) 的 CVaR 近似的等价重构。

命题 n 6 在类型为 $q-$*Wasserstein* 模糊集下，CVaR 近似的分布鲁棒机会约束规划 (22) 等价于 *to*

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\lambda\ge 0,\beta\le 0} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \varepsilon\beta + \lambda\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}} \left[\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) + P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda) - \beta \right)_+ \right] \le 0 \right\}, \tag{30}$$

其中，对于每个 $i \in [I]$, $P_{q,\ i}(\boldsymbol{x},\ \lambda)$，其定义见命题*5*。

证明 根据命题 3 和命题5中的类似推导，我们有

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \inf_{\beta\le 0} \left\{ \varepsilon\beta + \lambda\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}} \left[\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) + P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda) - \beta \right)_+ \right] \right\} \le 0, \lambda \ge 0 \right\}.$$

注意，由于左侧函数连续且关于 β 凸，并且当$\beta \to -\infty$时，左侧函数趋于正无穷，因此下确界可以达到。证明完毕。□

等价地，我们也可以将 CVaR近似 (30) 重写为一个双层规划。也就是说，

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{t} \quad t, \tag{31a}$$

$$\text{s.t.} \quad (\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\beta^*) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\le t,\\ \lambda\ge 0,\beta\le 0}} \left\{ \varepsilon\beta + \lambda\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}} \left[\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) + P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda) - \beta \right)_+ \right] \right\}, \tag{31b}$$

$$\varepsilon\beta^* + \lambda^*\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}} \left[\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x}^*)^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}^*) + P_{q,i}(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*) - \beta \right)_+ \right] \le 0. \tag{31c}$$

在下面的结果中，我们发现，在与命题 4 相同的前提下，CVaR近似 (30) 可以简化。

命题 7 假设对于所有 $i \in [I]$, $\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_* = \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_*$。则条件风险价值 近似(30) 为

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \theta\varepsilon^{-\frac{1}{q}} \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_* + \mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon} \left[\max_{i\in[I]} \left\{ \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) \right\} \right] \le 0 \right\}. \tag{32}$$

证明 由于对于所有 $i \in [I]$, $\|\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})\|_* = \|\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x})\|_*$，因此我们必须有 $P_{q,\ i}(\boldsymbol{x},\lambda) = P_{q,\ 1}(\boldsymbol{x},\lambda)$。对于所有 $i \in [I]$, CVaR近似等价于

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\lambda,\beta} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \begin{array}{l} \lambda\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\xi}}} \left[\max \left\{ \max_{i\in[I]} \left\{ \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) + P_{q,1}(\boldsymbol{x},\lambda) \right\}, \beta \right\} \right] - (1-\varepsilon)\beta \le 0, \\ \lambda \ge 0 \end{array} \right\}.$$

从内层最大算子中减去 β，并重新定义 $\beta := \beta - P_{q,\,1}(\boldsymbol{x},\lambda)$，我们得到

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \begin{array}{l} \lambda\theta^q + \varepsilon P_{q,1}(\boldsymbol{x},\lambda) + \varepsilon\beta + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}} \left[\max\limits_{i\in[I]} \left\{ \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) - \beta \right\}_+ \right] \le 0, \\ \lambda \ge 0 \end{array} \right\}.$$

将第一个约束左端中对 β 和 $\lambda \ge 0$ 取最小算子，替代 β 和 $\lambda \ge 0$ 的存在性，我们得到

$$v_q^{\mathrm{CVaR}} = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \colon \min_{\lambda\ge 0} \{\lambda\theta^q + \varepsilon P_{q,1}(\boldsymbol{x},\lambda)\} + \varepsilon \mathrm{CVaR}_{1-\varepsilon} \left[\max_{i\in[I]} \left\{ \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) \right\} \right] \le 0 \right\}.$$

注意，对于任意给定的 $\boldsymbol{x}$，函数 $\lambda\theta^q + \varepsilon P_{q,1}(\boldsymbol{x},\lambda)$ 在定义域 $\lambda \in [0,\infty)$ 上关于 λ 是凸的。对其关于 λ 求一阶导数，并令其为 0，可得一个非负根

$$\lambda^* = \varepsilon^{\frac{q-1}{q}} \left\| \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) \right\|_*^{} q^{-1} \theta^{\frac{1}{q-1}} \ge 0.$$

因此，λ^* 是 $\min_{\lambda\ge 0}\{\lambda\theta^q + \varepsilon P_{q,1}(\boldsymbol{x},\lambda)\}$ 的解。将 λ^* 代入 CVaR近似，我们得到等价表示式 (30)。□

B.4 ALSO-X# 和 ALSO-X# 的等价重构

根据上述重构，对于具有 $q \in [1,\infty)$ 的类型 $q-$Wasserstein模糊集，ALSO-X# 可表示为

$$v_q^{A\#} = \min_{t} \quad t, \tag{33a}$$

$$\text{s.t.} \quad (\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\beta^*) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\le t,\\ \lambda\ge 0,\beta\le 0}} \left\{ \varepsilon\beta + \lambda\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}} \left[\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) + P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda) - \beta \right)_+ \right] \right\}, \tag{33b}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in Z_q. \tag{33c}$$

在类型为 $q-$Wasserstein 模糊集且带有 $q \in [1,\infty)$ 的情况下，我们证明 ALSO-X# 优于 CVaR近似。

命题 1 对于类型为 $q-$*Wasserstein* 模糊集且带有 $q \in [1,\infty)$ 的情形，假设对于任意满足 $t \ge$ 最小值$_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}}\, \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$ 的目标上界 t，ALSO-X# 优于 条件风险价值 近似。

证明 对于给定的目标上界 t，如果下层条件风险价值近似（31b）的解满足（31c），则该解对于分布鲁棒机会约束规划是可行的。由于下层 ALSO-X#（33b）与下层条件风险价值近似（31b）一致，因此，如果条件风险价值近似能够找到一个可行解，ALSO-X# 也能找到一个分布鲁棒机会约束规划的可行解。证明完毕。□

类似地，我们通过在下层 ALSO-X#（33b）中去掉约束 $\beta \le 0$，引入 ALSO-X#，其形式如下：

$$v_q^{\underline{A\#}} = \min_{t} \; t, \tag{34a}$$

$$\text{s.t.} \quad (\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\beta^*) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\le t,\\ \lambda\ge 0,\beta}} \left\{ \varepsilon\beta + \lambda\theta^q + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}} \left[\max_{i\in[I]} \left(\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - b_i(\boldsymbol{x}) + P_{q,i}(\boldsymbol{x},\lambda) - \beta \right)_+ \right] \right\}, \tag{34b}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in Z_q. \tag{34c}$$

按照定理 2 中类似的证明，我们可以证明，在类型为 $q-$Wasserstein 模糊集（$q \in [1,\infty)$）下，ALSO-X# 优于 ALSO-X#。

命题 2 在类型为 $q-$*Wasserstein* 模糊集（$q \in [1,\infty)$）下，假设对于任意目标上界 t，只要 $t \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$，且下层 ALSO-X# 存在唯一的最优 $\boldsymbol{x}$-解，ALSO-X#就优于ALSO-X#。

证明 只需证明，对于给定的目标上界 t，如果下层 ALSO-X# (34b) 为分布鲁棒机会约束规划提供一个可行解，即满足 (34c)，那么下层 ALSO-X# (33b) 也会提供一个可行解。设 $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \beta)$ 表示下层 ALSO-X# (33b) 的一个最优解，$(\bar{\boldsymbol{x}}, \beta)$ 表示下层 ALSO-X# (34b) 的一个最优解。假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 对分布鲁棒机会约束规划 (23) 可行，即满足 $\bar{\boldsymbol{x}} \in Z_q$ (24)。现在令 $\mathbb{P}^*$ 表示下层 ALSO-X# (34b) 中 $\boldsymbol{\xi}$ 的最坏情形分布，并令

$$\bar{\beta}^* := \bar{\mathbb{P}}^*\text{-VaR}_{1-\varepsilon}\left\{\max_{i\in[I]} \boldsymbol{a}_i(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} - b_i(\bar{\boldsymbol{x}})\right\} \leq \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{P}\text{-VaR}_{1-\varepsilon}\left\{\max_{i\in[I]} \boldsymbol{a}_i(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \tilde{\boldsymbol{\xi}} - b_i(\bar{\boldsymbol{x}})\right\} \leq 0.$$

那么，根据 [41] 中的定理1（例如，参见 [41] 中的公式 (7)）以及定理 2 中的讨论，我们可知，$(\widehat{\boldsymbol{x}}, \beta^*)$ 是下层 ALSO-X# (34b) 的另一个最优解。由于下层 ALSO-X# (33b) 与下层 ALSO-X# (34b) 之间唯一的区别是约束 $\beta \leq 0$，且假设下层 ALSO-X# (34b) 对 $\boldsymbol{x}$ 有唯一最优解，因此我们必有$\bar{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{x}}$。也就是说，对于给定的目标上界 t，两个下层问题具有相同的最优值和最优 $\boldsymbol{x}$解。这意味着下层 ALSO-X# (33b) 为分布鲁棒机会约束规划提供了一个可行解。□

我们指出，在许多分布鲁棒机会约束规划中，下层 ALSO-X# 的唯一性可以得到保证。例如，一个条件是仿射映射为 $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, b_1(\boldsymbol{x}) = b_1$，随机参数 $\boldsymbol{\zeta}$服从参数为 $\boldsymbol{\zeta} \sim \mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \widehat{g})$ 的联合椭圆分布，并且定义 Wasserstein 距离的范数是与正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 相关的广义马氏范数。在这种设定下，下层 ALSO-X# 可以写为

$$\boldsymbol{x}^* \in \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}, \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\leq t} \left\{\overline{F}(\boldsymbol{x}) \colon = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} + \left[\overline{G}\left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2/2\right)/\varepsilon + \theta\varepsilon^{-\frac{1}{q}}\right]\sqrt{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}} - b_1\right\},$$

其一阶导数和二阶导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{F}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{\mu}^\top + \left[\overline{G}\left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2/2\right)/\varepsilon + \theta\varepsilon^{-\frac{1}{q}}\right]\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^\top, \\
\frac{\partial^2 \overline{F}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^2} &= \left[\overline{G}\left(\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2/2\right)/\varepsilon + \theta\varepsilon^{-\frac{1}{q}}\right]\boldsymbol{\Sigma} \succ \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因此，只要集合 $\mathcal{X}$ 是凸集，下层 ALSO-X# 就存在唯一解。

本节最后，我们对类型为 $q-$Wasserstein模糊集且满足$q \in [1,\infty)$ 的条件下，ALSO-X#、ALSO-X#、ALSO-X 和 CVaR近似的输出目标值进行理论比较，结果如图 3 所示。

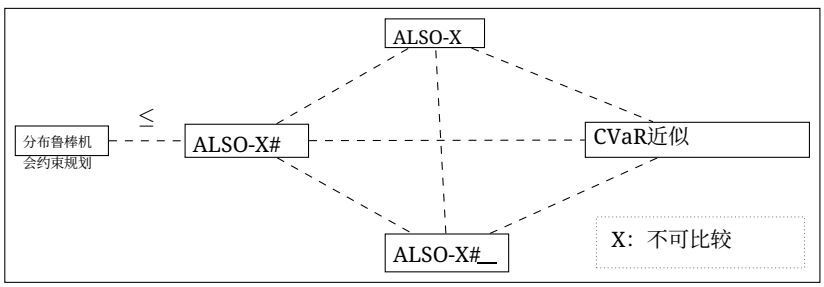


图 3：在类型为 $q-$Wasserstein模糊集下的比较总结（$q \in [1,\infty)$