利用机器学习实现含多个非线性非对称门的线性波导中的极端声学非互易性

Anargyros Michaloliakos*[a]，Chongan Wang[b]，Alexander F. Vakakis[a]

[a] 伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校机械科学与工程系[a] 加利福尼亚大学圣迭戈分校机械与航空航天工程系 *通讯作者，*am71@illinois.edu*

摘要

本文研究一种无源（即不含有源或半有源反馈）一维（1D）线性波导所呈现的声学非互易性，该波导包含两个局部强非线性非对称闸门。假设线性波导的组成振子之间存在强耦合，从而使其在通带内具有宽带波传输能力。两个局部非线性门打破了波导的对称性和线性，使其产生强烈的整体非互易声学特性：根据谐波激励施加在哪一侧，即沿左至右（L-R）或右至左（R-L）的波传播方向不同，声学响应会有极大差异。据作者所知，本文的双门控波导能够实现极高的声学非互易性，远高于现有文献中有源或无源器件所报告的水平；此外，这种极端性能还能与波在理想（偏好）传播方向上的可接受传递率相结合。本文采用机器学习，根据传递率和非互易性指标对这一门控波导进行预测设计，旨在减少高维参数空间分析所需的计算时间。本研究为理解这类介质的物理机制带来了新见解，并探讨了使用神经网络（NN）分析此类物理问题的优势与局限。在预测得到的、可实现强非互易性的理想参数空间中，最大传递率高达 40%；根据波传输方向的不同，从上游（即施加激励的波导部分）到下游（即位于两个非线性门之后的波导部分）的传输能量可相差多达九个数量级。本文的机器学习工具及数值方法可为包含局部非线性门的实用非互易波导和声学超材料的预测设计提供参考。本文表明，非线性门的组合能够在保持理想传递率的同时实现极高的非互易性。这为未来研究如何将多个非线性门用作设计模块，以构建具有稳健无源声学非互易性的系统开辟了方向。

关键词： 声学非互易性、非线性门、波导、分岔、机器学习

1. 引言

互易性是线性时不变（LTI）弹性动力系统（如机械振子和声波导）的一项基本特性。为此，经典的麦克斯韦-贝蒂互易定理指出，当交换激励点和测量点时，LTI 弹性动力系统的响应保持不变 [1, 2]。近年来，鉴于打破互易性所带来的显著优势，人们对此越来越感兴趣。已有研究表明，可以通过有源和无源两种方式打破互易性，即通过添加外部偏置 [3, 4, 5], 、引入时变属性 [5], ，或施加结构非线性并结合某种构型不对称性。与前两种方式相比，后一种方案具有无源性的优势，因为它既不需要任何有源或半有源控制，也不需要反馈能源；本研究采用的正是这种方法。采用非线性方案打破非互易性的另一项优势，是所得系统能够被动地调谐至所施加激励的能量及其波数/频率成分；当系统响应需要适应非平稳环境输入时，这一特点尤为重要。

聚焦于声学，在声波导中打破互易性会破坏相应格林函数的对称性，并带来有趣且可能有益的效应，其中最显而易见的是波传输中的方向偏好 [6]。进而，这将为各种新型（且完全无源）声学元件铺平道路，例如声学二极管 [7, 8, 9, 10], 整流器 [11], 频率转换器 [12], 拓扑绝缘体 [13], 以及带宽特性可重构的谐振器 [3]。此外，这还将在多种领域带来广泛应用，例如具有声学逻辑和/或应力波调控特性的超材料、振动与冲击隔离设计，以及复杂系统中的优先能量重定向等。

将局部非线性元件集成到包含某种构型不对称性的线性时不变（LTI）声波导中，可能以无源方式产生整体非互易声学现象，正如近期文献 [15] 所示。该研究考察了本文所讨论的同一一维线性波导，其中耦合振子之间的相互耦合较弱，并集成了一个强非线性且不对称的局部非线性门，研究其声学非互易性。在该研究中，非线性门由两个不同的线性振子构成，它们通过三次非线性刚度耦合；研究人员利用机器学习设计局部门，以实现最大整体非互易性。文献 [17], 将这些结果扩展到更复杂的问题，即研究同一门控波导中振子之间具有强相互耦合的情形，并在更高维参数空间中开展了非线性声学的机器学习研究。

基于我们在 [15, 17], 中开发的机器学习方法，我们进一步考虑更复杂的问题：包含多个非线性门和不对称性的线性声波导（具体而言，是由两个非线性门串联而成），以说明与先前研究考察的单个门相比，由此产生的非互易性会显著增强。因此，我们旨在证明，引入多个局部非线性门是一种有前景的完全无源设计工具，可用于在空间扩展线性声波导中实现强非互易性特征。此外，当前研究使我们能够拓展对单个非线性门声波导研究所得的认识，并评估引入多个此类门在非线性声学方面带来的益处。然而，当前问题显然更具挑战性和复杂性，因为引入非线性门的级联也会扩大参数空间，因此需要运用机器学习处理宽频带和更高维度的问题。此外，强非线性声学的一些特定特征也使控制物理机制难以厘清，例如响应对能量（或所施加激励剖面）的依赖，以及可能出现的不稳定性和分岔。

然而，正如我们将在本文中展示的那样，这番努力是值得的：与单个门的情况相比，我们报告的非互易效应提升了一个数量级，同时仍保持相近的传递率，即沿声波导向下游传输的能量相近。性能大幅提升的根本原因，是两个非线性门之间实现了定向能量传递（TET），也就是说，能量被局部约束（储存）在两个门之间；此前这是无法实现的。

2. 系统描述与参数分析

所研究的一维线性波导示意图如图1所示。它由两个线性子波导（标记为L和R子波导）组成，并包含一个中心区域，其中设有两个非线性门，二者之间连接一个线性耦合振子。每个子波导由$N = 200$ 个相同的接地阻尼线性振子组成，振子按图1所示的顺序通过强线性耦合刚度与相邻振子耦合。为简化起见，忽略耦合刚度中的耗散，因为它可能显著小于接地刚度，这一点已由先前的实验研究[14, 15]证实。非线性门由两个通过本质立方非线性弹簧耦合的线性振子组成，它们的质量和阻尼系数相同，但接地刚度不同（因此，线性化固有频率也不同）。先前的研究[16], 表明，这种局部不对称性与非线性相结合，足以引起波导响应中的声学互易性破缺；也就是说，当交换激励位置和测量位置后施加单一谐波激励时，预期会得到不同的响应。图1中，谐波激励$F\ (t) = F_p \cos\ \omega t$ 施加于L子波导的振子$p = 4$ 上；但在本研究中，激励将切换至R子波导中对应的位置。在全文中，我们将包含施加激励的振子的子波导定义为上游子波导，而将另一个子波导定义为下游子波导。

系统参数如图1所示，且均视为 O(1) 量。这意味着两个子波导均由强耦合的接地振子组成，相应的无限延伸（即无边界）线性波导具有宽广的单一通带 [17]。通过为两个闸门的非线性刚度系数设置不同的值来引入波导的不对称性，即 $k_{c1} \neq k_{c2}$，同时将 L 和 R 子波导中 0 号振子的接地刚度设为 k_1 （但请注意，与其他振子的接地刚度相比，这些刚度存在失谐；其他振子的接地刚度设为 k，参见图1）。

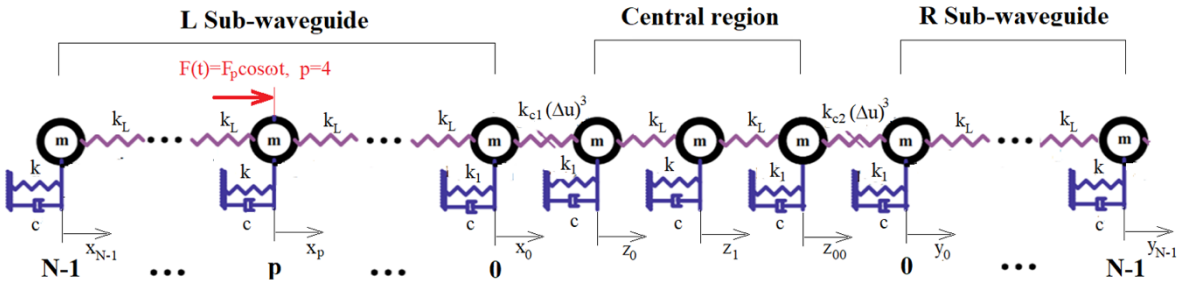


图1. 包含两个非线性闸门的强耦合波导示意图。

考虑运动方程，记 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 为线性子波导中振子的固有频率，并引入无量纲时间 $\tau = \omega_0 t$。此外，引入以下归一化量： $d = k_L/k$ （归一化相互耦合刚度）， $\xi = c/2\sqrt{mk}$ （临界黏性阻尼比）， $\hat{\omega} = \omega/\omega_0$（归一化激励频率）， $A_p = F_p/(dk)$ （归一化激励幅值）， $\alpha_1 = k_{c1}/k_L$ 以及 $\alpha_2 = k_{c2}/k_L$

（归一化非线性系数），以及 $\sigma = (k_1 - k)/k_L$ （归一化刚度失谐参数），运动方程可表示为以下归一化形式，并假设所有初始条件均为零，

$$\begin{gathered} x_i'' + 2\xi x_i' + x_i + d(x_i - x_{i-1}) + d(x_i - x_{i+1}) = \left[dA_p e^{j\hat{\omega}\tau} + cc\right]\delta(i-p),\ i = 1,2,\dots,N-1 \\ x_0'' + 2\xi x_0' + \alpha(1+d\sigma)x_0 + d\alpha_1(x_0 - z_0)^3 + d(x_0 - x_1) = 0 \\ z_0'' + 2\xi z_0' + (1+d\sigma)z_0 + d\alpha_1(z_0 - x_0)^3 + d(z_0 - z_1) = 0 \\ z_1'' + 2\xi z_1' + z_1 + d(z_1 - z_0) + d(z_1 - z_{00}) = 0 \\ z_{00}'' + 2\xi z_{00}' + (1+d\sigma)z_{00} + d\alpha_2(z_{00} - y_0)^3 + d(z_{00} - z_1) = 0 \\ y_0'' + 2\xi y_0' + (1+d\sigma)y_0 + d\alpha_2(y_0 - z_{00})^3 + d(y_0 - y_1) = 0 \\ y_n'' + y_n + 2\xi y_n' + d(y_n - y_{n-1}) + d(y_n - y_{n+1}) = 0,\ n = 1,2,\dots,N-1 \end{gathered} \tag{1}$$

其中，$j = (-1)^{1/2}$，cc 表示复共轭，所有位移均为归一化时间τ的函数，撇号表示对τ求导。最后，为方便起见，我们引入归一化临界阻尼比$\zeta = \xi/d$。

在图1所示的激励构型中，上游和下游线性子波导中振荡器的位移分别记为x_p和y_p, $p = 0, \dots, N$，而中心区域的振荡器位移记为z_0, z_1 和z_{00}。两个非线性门分别形成于响应对(x_0, z_0)和(z_{00}, y_0)之间。忽略耗散项和激励项后，无限线性均匀波导（不包含这两个闸门）的归一化色散关系为：

$$\Omega/\omega_0 = \sqrt{1 + 4d\ sin^2(\theta/2)}\ ,\qquad 0 \le \theta \le \pi \tag{2}$$

其中，Ω 和θ 分别为传播波的频率和波数，对应于$\theta = 0$、π 的频率极限值定义了每个无限延伸子波导的归一化通带；这是谐波能够不受阻碍地通过声学介质传输的频率范围。因此，通过选择归一化激励频率$\hat{\omega}$ 处于归一化通带内，半无限子波导便可在由$1 \le \hat{\omega} \le \sqrt{1+4d}$ 定义的宽频带范围内传输谐波。如[17], 所证明，门控波导中的非线性声学由谐波波在非线性门处的散射——传输与反射——所支配。最后，请注意，$\hat{\omega}$ 可通过色散关系（2）表示为波数的函数。

接下来，我们通过数值模拟研究非线性声学。为此，我们针对表1中给出的系统参数，对归一化运动方程（1）进行数值积分，仿真总时长为 $0 \le \tau \le 1500$。为了突出波导中实现的不同类型的非线性声学，我们考虑了三种不同构型（取决于系统参数和激励参数），分别标记为系统1、2和3。由于两个闸门的非线性刚度是构型不对称性的唯一来源，因此，将激励位置从左侧子波导换到右侧子波导，等同于交换非线性系数 α_1 和 α_2；在这种情况下，上游和下游子波导的定义也随之互换。

表1. 数值模拟中考虑的三种波导构型。

参数	d	$\{a_1, a_2\}$	ζ	θ	σ	A_p	p
系统 1	0.5	{0.15,0.3}	0.013	$(1/6)\pi$	-1.5	1.0	4
系统 2	0.35	{1.81,3.45}	0.023	$(2.5/6)\pi$	-1.4	0.46	4
系统3	0.4	{3.9,3.1}	0.013	$(3/6)\pi$	-1.4	0.4	4

图2展示了系统 1 的响应。（α_1, α_2）$=(0.15, 0.3)$时的结果（从左向右波传输——L-R）见图2a-d；而在子波导之间切换激励，即（α_1, α_2）$=(0.3, 0.15)$时的结果（右向左波传输）见图2e-h。在图2a、b和图2e、f中，我们比较了两个闸门振子（x_0, z_0）和（y_0, z_{00}）的稳态位移时间序列。对于L-R波传输，第一个闸门之前和第二个闸门之后的闸门振子的稳态振荡幅值相近，因此可以推断波能量传播通过了由两个闸门构成的非线性中心区域。然而，右向左波传输时并非如此，因为通过两个闸门的能量传输大幅减弱；这一点可由稳态时 y_0 的振幅远小于 x_0 推断得出。因此，稳态声学中实现了强烈的非互易性，产生了近乎单向的能量传输（具体而言，仅有右向左传输，而无L-R传输）。为进一步探究非线性非互易声学，我们接下来对计算得到的时间序列进行后处理。

通过计算响应 y_0（第二个闸门后的振子）的离散傅里叶变换幅值，研究左向右和右向左波传输时传输波的谐波成分。在图 2c 和 2g 中，仅在施加的谐波激励频率处观察到一个主导谐波，这表明两个方向上的传输波在稳态时均为（近似）单色波。此外，图 2d 和 2h 中给出的相应能量度量清楚地展示了非线性声学的非互易特性。这些度量通过计算施加的外力所做的总功，以及传输至下游子波导的能量来评估；由此可以从能量角度研究波导中的非互易性和传递率。按照 [17], ，左向右传播时截至时间 τ, $E_{input}(\tau)$ 外力所做的功（外力输入能量），以及截至时间 τ, $E_{downL-R}(\tau)$ 经闸门传输至下游波导的能量，和右向左传播时截至时间 $E_{downR-L}(\tau)$ 的传输能量，分别为：

$$
\begin{aligned}
E_{input}(\tau) &= \begin{cases} \int_0^{\tau} 2dA_p \cos(\hat{\omega}\tau_0)\, x_p' \,\mathrm{d}\tau_0 & (L-R) \\ \int_0^{T} 2dA_p \cos(\hat{\omega}\tau_0)\, y_p' \,\mathrm{d}\tau_0 & (R-L) \end{cases} \\
E_{downL-R}(\tau) &= \int_0^{\tau} d(y_0 - y_1) y_0' \,\mathrm{d}\tau_0 \\
E_{downR-L}(\tau) &= \int_0^{\tau} d(x_0 - x_1) x_0' \,\mathrm{d}\tau_0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

从图 2d 可以看出，对于左向右波传播，下游右侧子波导中的传输能量约为输入能量的 20%；而对于右向左波传输，传输能量几乎为零。这些结果展示了系统 1 中实现的强声学非互易性，使能量只能单向（即仅从左至右）通过门控波导传输。抑制另一方向（右至左）能量传输的非线性机制将在后文讨论。此外，本例中的声学非互易性是在稳态下通过近乎单色波实现的，可采用 [17] 中讨论的复化-平均方法进行解析研究；不过，本研究不再对此作进一步探讨。

系统 2 的相应数值结果如图 3 所示。图 3a–d 考察左向右波传播，图 3e–h 考察右向左波传播。同样，能量仅允许沿左至右方向传输，表明声学中存在很强的非互易性。与系统 1 相比，一个关键区别是，左向右传播时的响应具有强烈调制，称为强调制响应（SMR）。[17] 中也观察到了这类响应，它们是闸门处强非线性的结果。这一点可从图 3e 傅里叶谱中中心激励频率附近的边带看出，清楚表明存在准周期性（调制）。相反，右向左传播时的响应近乎单色，与系统 1 的响应相似。

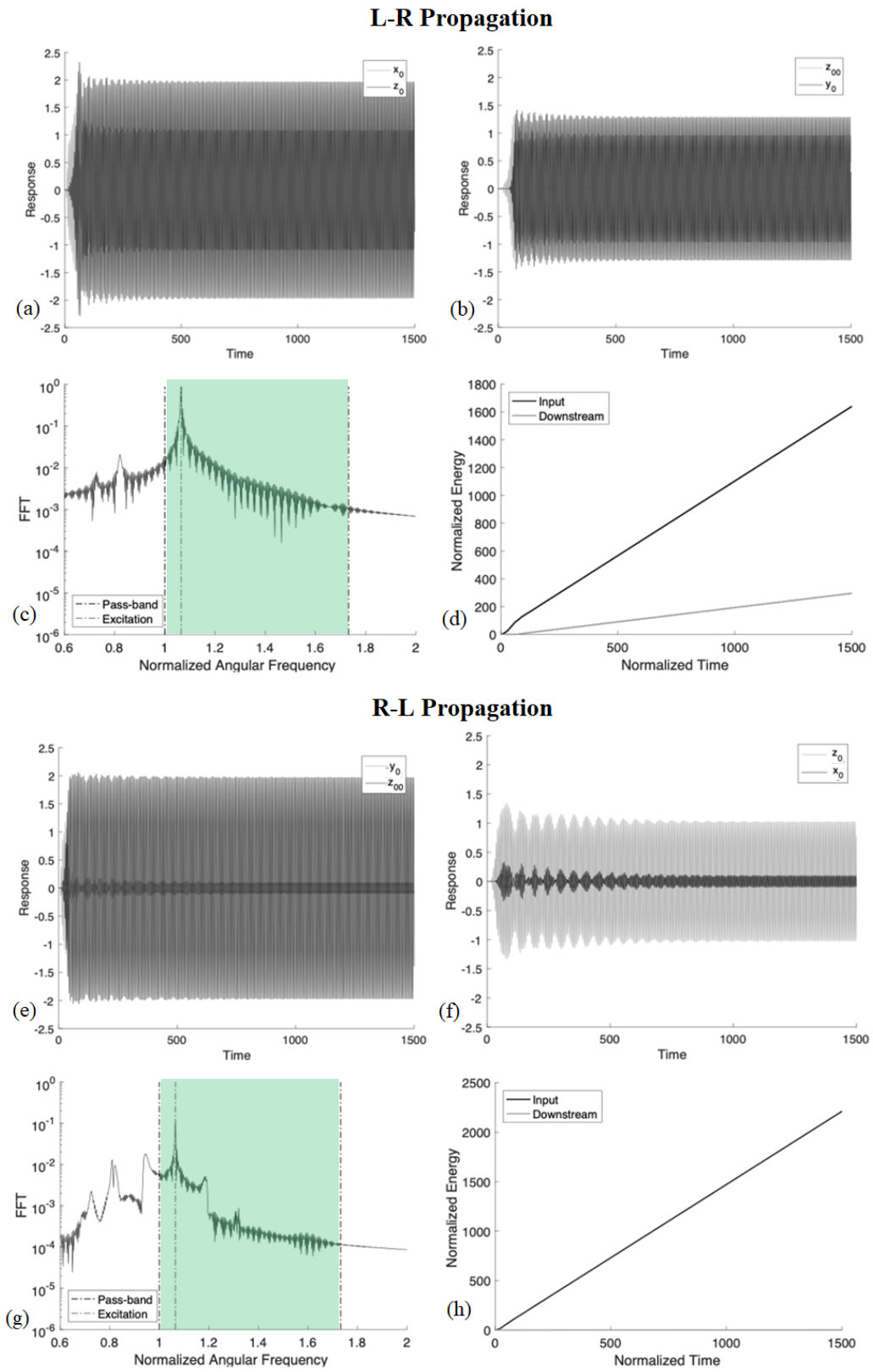


图2。系统 1 的左向右波传播：(a,b) 非线性门振荡器（x_0,z_0）和（z_{00},y_0）的时间序列，(c) 振子 y_0 的
及 (d) 能量度量；系统 1 的右向左波传输：(e,f) 非线性门振荡器（y_0,z_{00}）和（z_0,x_0）的时间序列，(
里叶谱，以及 (h) 能量度量——通带和激励频率标示于图 (c) 和 (g) 中。

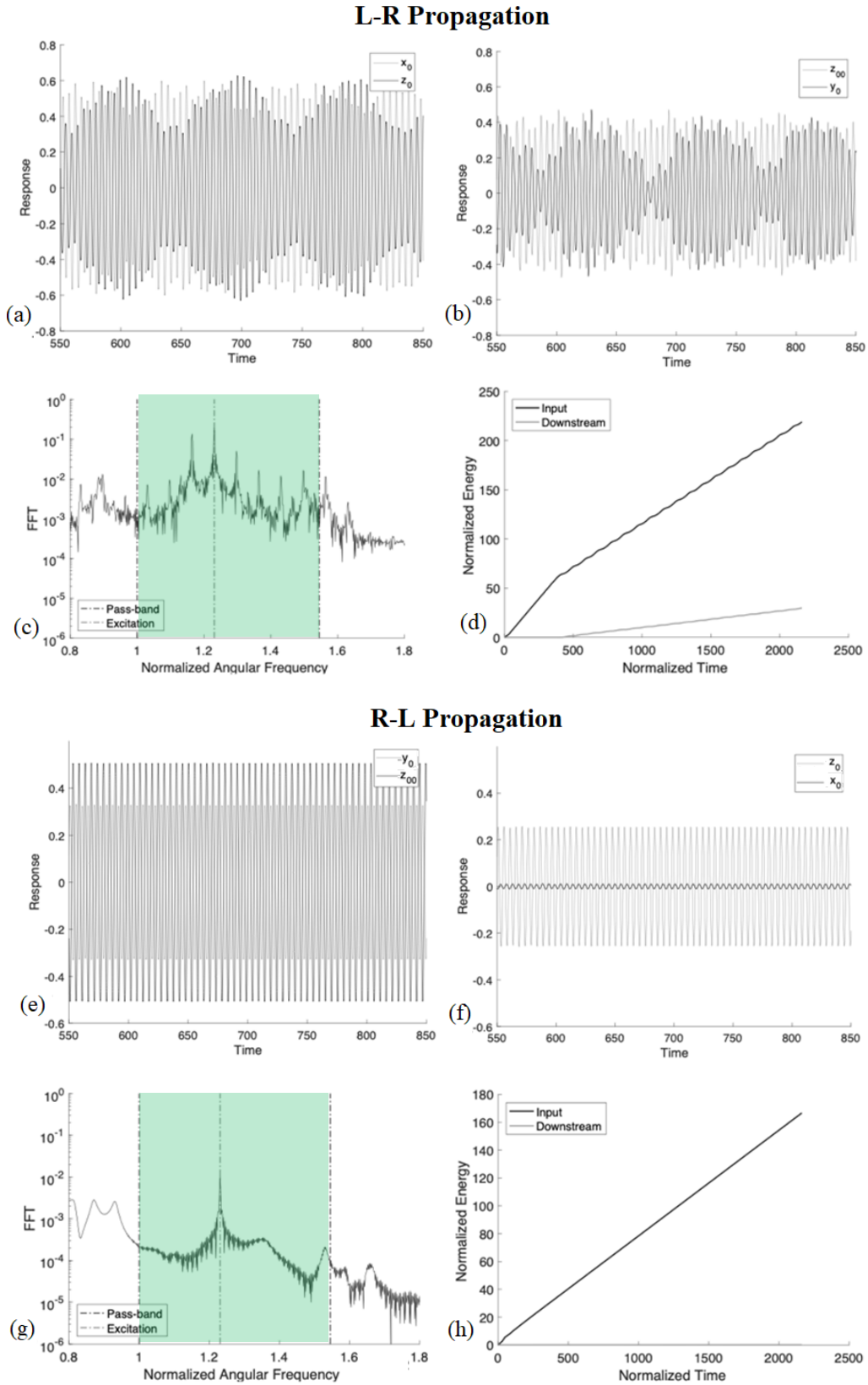


图 3. 系统 2 的左向右波传播：(a,b) 非线性门 (x_0,z_0) 和 (z_{00},y_0) 的振荡器时间序列，(c) 振子 y_0 的傅里
(d) 能量度量；系统 2 的右向左波传输：(e,f) 非线性门 (y_0,z_{00}) 和 (z_0,x_0) 的振荡器时间序列，(g) 振子
以及 (h) 能量度量——通带和激励频率在图 (c) 和 (g) 中标出。

最后，图4展示了系统3对应的模拟结果。同样，能量传输仅允许沿左至右方向进行，因此声学系统具有非互易性。此案例揭示了所研究门控波导中的新物理现象：左向右传播时，响应似乎高度不规则（混沌），而右向左传播时，响应则近似为单色。为更详细地展现声学非互易性，我们定义以下传递率度量 $\eta(T)$ 和非互易性指标 $\delta(T)$ [17],

$$\eta(T) = \begin{cases} \dfrac{E_{downL-R}(T)}{E_{input}(T)} & (L-R) \\ \dfrac{E_{downR-L}(T)}{E_{input}(T)} & (R-L) \end{cases} \qquad (4)$$

$$\delta(T) = \log_{10} \frac{W_{downL-R}(T)}{W_{downR-L}(T)}$$

其中，能量度量已在式（3）中定义，$T = 1{,}500$ 表示模拟的归一化总时间。请注意，互易性对应于 δ =0 [28]，因此 δ 衡量的是激励在 L 和 R 子波导之间切换时，下游传输能量的差异（以对数尺度表示）。除了最大化声学非互易性之外，我们还希望最大化传递率度量 η，其定义为下游传输能量与输入能量之比。最后需要指出，由于度量 η 和 δ 在稳态时会收敛，因此选择足够大的归一化时间间隔 T，以使声学系统达到稳态。

回到系统3的非互易响应，我们计算得到非互易性指标为 $\delta = 8.435$，传输率度量为 $\eta = 0.26$。考虑到所实现的非互易性，并将其与此前针对相同波导、但采用单个非线性门时报告的非互易性指标进行比较 [17], 可见，这一结果有了显著提升。具体而言，[17] 中实现的最大非互易性指标为 η~3.0；鉴于该指标采用对数尺度，这比当前结果低了几个数量级。此外，值得注意的是，在实现如此强烈的非互易性的同时，传输率仍与 [17]处于相近水平。

图4详细考察了系统3中观察到的强非互易响应的位移时间序列。从图4a和图4b可以看出，对于左向右传播，x_0 和y_0 的振荡幅值相当。然而，当激励切换到另一侧时（参见图4e、f），z_0 的振荡幅值显著降低。因此，在不失一般性的前提下，我们可以引入如下标度关系：$x_0 \sim O(1)$ 和 $z_0 \sim O(\varepsilon)$，其中 $0 < \varepsilon \ll 1$ 是一个小扰动参数。由于非线性门处的耦合刚度具有本质非线性（即其线性化刚度为零或近乎为零），因此闸门处的相互作用力 (z_{00}, y_0) 为 $O(\varepsilon^3)$，因此 $y_0 \sim O(\varepsilon^3)$。闸门振子的振幅大幅降低，从而实现极低的传递率和很高的非互易性；这种情况只有在包含多个（在本研究中为两个）本质非线性（即不可线性化）闸门的波导中才能实现。

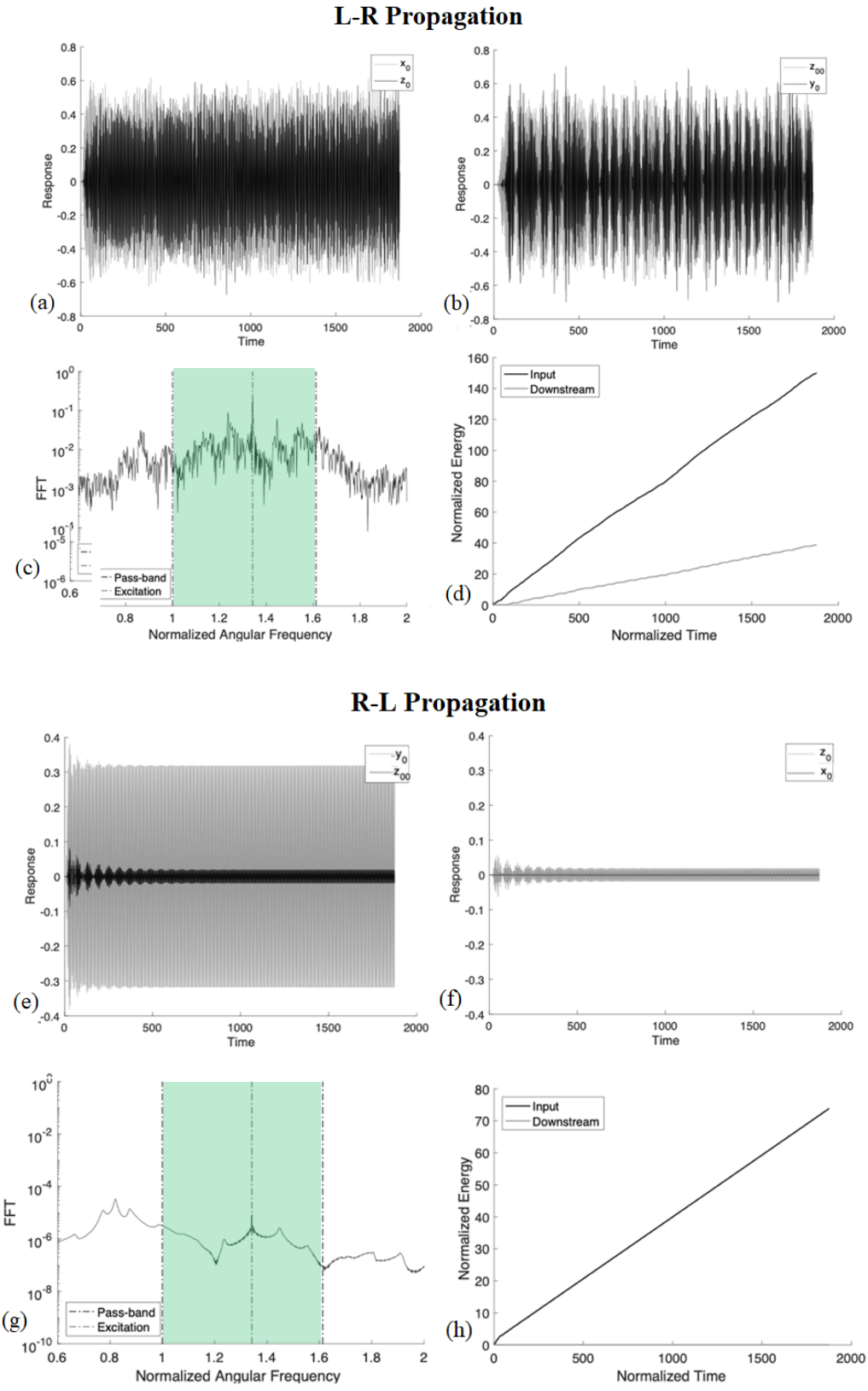


图4. 系统3的左向右波传播：(a,b) 分别为非线性门 (振子 x_0, z_0) 和 (振子 z_{00}, y_0) 的时间序列，；(c) 振子 y_0 的傅里叶谱；(d) 能量度量。系统 2 的右向左波传输：(e,f) 分别为非线性门 (y_0, z_{00}) 和 (z_0, x_0) 振荡器的时间序列，，(g) 振子 y_0 的傅里叶谱；(h) 能量度量——通带和激励频率标示于图 (c) 和 (g) 中。

受这些初步数值结果的启发，我们进一步探究是否存在具有极强非互易性的声学系统。为此，我们在目标参数空间内改变系统参数，对门控波导（1）进行了数值模拟。我们共进行了约 60,000 次模拟，其中随机选取 35% 的结果绘制于图5中；图中将所得非互易性指标 δ 与传输率度量 η进行对比。在这些模拟中，非线性参数的范围为 $(\alpha_1, \alpha_2) \in [0,6]$, 耦合刚度的范围为 $d \in [0.2,0.6]$, , 激励幅值的范围为 $A_p \in [0.2,1]$, , 波数的范围为 $\theta \in [0, \pi]$。数据集中的参数均在上述范围内，通过从均匀分布中随机抽样生成，其余参数保持不变。结果清楚地显示，关于相应的非互易性指标，存在三个截然不同的解分支。聚焦于传输率度量为 $\eta > 0.2$ 的区域，我们定义了三个解分支，即：（i）高度非互易分支（HNRB），对应于 $5 < \delta < 9$；（ii）中间非互易分支（INRB），对应于 $1 < \delta < 5$；以及（iii）近互易分支（NRB），对应于 $[\delta] \ll 1$（参见图5）。显然，这些分支对应于门控波导中不同的非线性声学响应。因此，我们将进一步详细研究门控波导振子的非互易响应，以阐明两个闸门在产生声学非互易性中的作用。

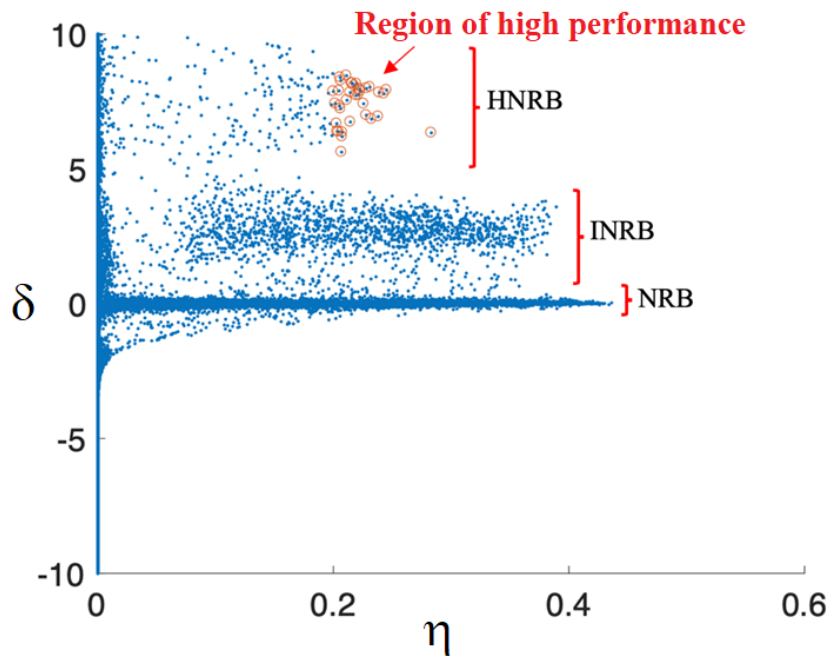


图5. 基于门控波导（1）数值模拟的非互易性与传递率关系图。

我们首先比较两个案例，它们分别对应于被归类为 HNRB（高非互易性）和 INRB（中等非互易性）的分支，且具有相同的传递率；此举旨在更好地理解导致非互易性指标截然不同的声学特性。我们注意到，系统3（见图4）的声学特性属于 HNRB 分支，因此它构成了本比较研究的第一组数据。对于 INRB 分支中的案例，我们考虑参数为 $(\alpha_1, \alpha_2) =$ [1.7033,3.0437], $\sigma = -1.4, d = 0.275, \zeta = 0.013, A_p = 0.54$, and $\theta =$ 的波导系统及其激励

$1.67\pi/6$，对应于 $\delta = 2{,}42$ 和 $\eta = 0.26$（即与系统3的传输率度量相同）。我们将此案例称为系统4。

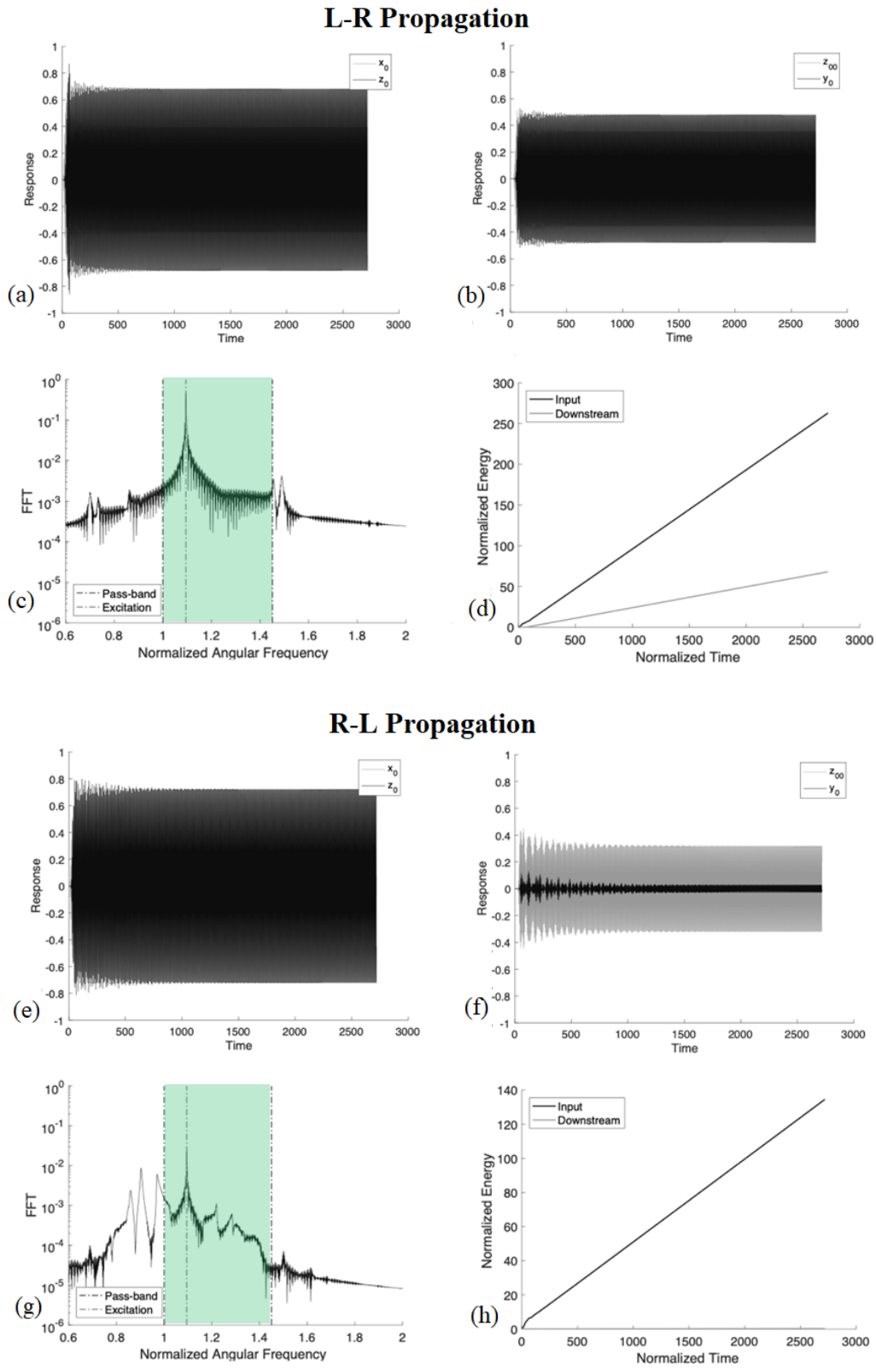
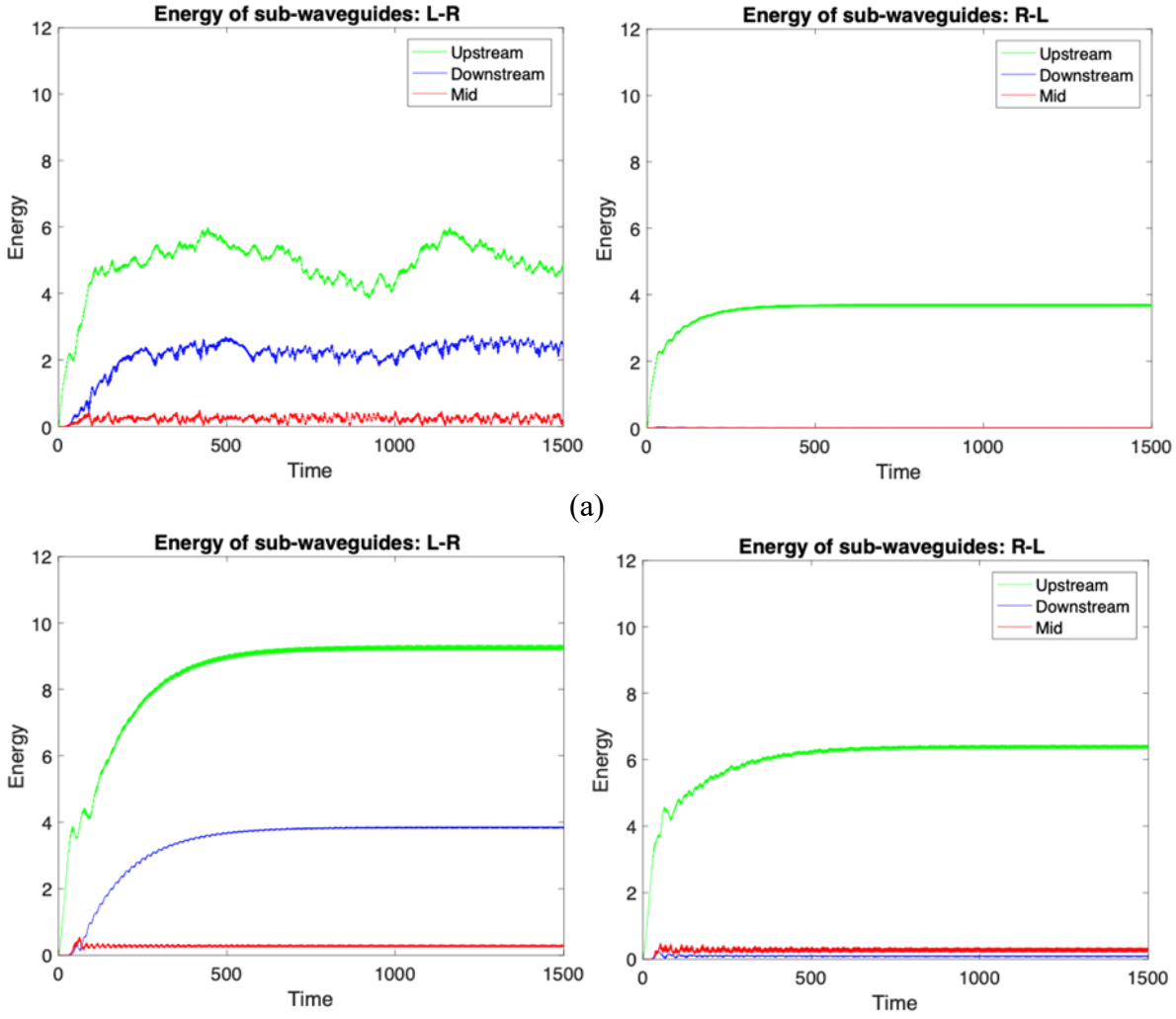


图6. INRB分支中系统4的非线性声学：(a-d) 左向右传播，(e-h) 右向左传播（图注同图2-4）。

首先值得指出的是，图6所示系统4的响应由单一谐波主导，其频率与激励频率相同；因此，声学响应近乎单色。此外，通过比较系统3和系统4的响应，我们可以辨识出近互易分支和 INRB 分支中波导响应所受不同非线性声学机制的支配。通过计算左侧和右侧子波导以及中心区域的总能量（即其组成振子的动能和势能；参见图1），可以辨识这些情形之间的定性差异，因为这将揭示能量如何经由两个非线性门，从上游（即施加谐波激励的子波导）流向下游。图7展示了系统3和系统4在左向右和右向左波传播时，子波导及中心区域的瞬时能量。值得注意的是，两种情形下，左向右传播时传输至下游的能量都多于右向左传播；这是两个闸门之间中心区域的非线性与不对称性共同作用的结果。主要区别在于，虽然系统3和系统4在右向左传播时传输至下游的能量都很少，但 HNRB 系统的能量几乎全部集中在上游子波导中；这是因为受阻能量在两个非线性门之间的中心区域发生反射，返回上游。闸门处这种近乎完全的能量反射，似乎是系统3的非互易性指标远高于系统4的主要原因。



) 图7. (a) 系统3和 (b) 系统4中 L和R子波导及两个闸门之间的中心区域的瞬时能量；同时考虑左向右传播和右向左传播。

通过比较图4和图6中系统3和系统4的响应，也可以观察到声学响应的这种定性差异。事实上，在图4e、f中，我们注意到，闸门振子 z_0 和 z_{00}的振荡振幅远小于图6e、f中相应振子的振幅。这一比较支持这样的结论：与 INRB 情形相比，HNRB情形下更多能量被“困”在上游子波导中。在系统3中，大部分输入能量在第一个非线性门处反射（按上游传来的受阻波遇到闸门的顺序）；而在系统4中，这种情况发生在第二个非线性门处。

上述结果充分说明，有必要进一步、更详细地探究双门控波导的非互易声学特性，尤其是考虑到所实现的非互易性强度相比于具有单个门的对应波导高出多个数量级 [17]。为此，在下一节中，我们将借助机器学习来处理该问题参数空间的高维特性。然而，作为初步模拟的最后一步，我们将更详细地探究闸门振子上的阻尼对声学特性的影响。在图 8 中，我们展示了当归一化阻尼比 ζ 从 0 变化到 0.05 时，系统 1、系统 2 和系统 3 在左向右传播和右向左波传输两种情况下的非互易传递率 η 和下游能量 E_{down} 度量。这些结果清楚地表明，闸门的黏性耗散对声学特性具有重要影响。

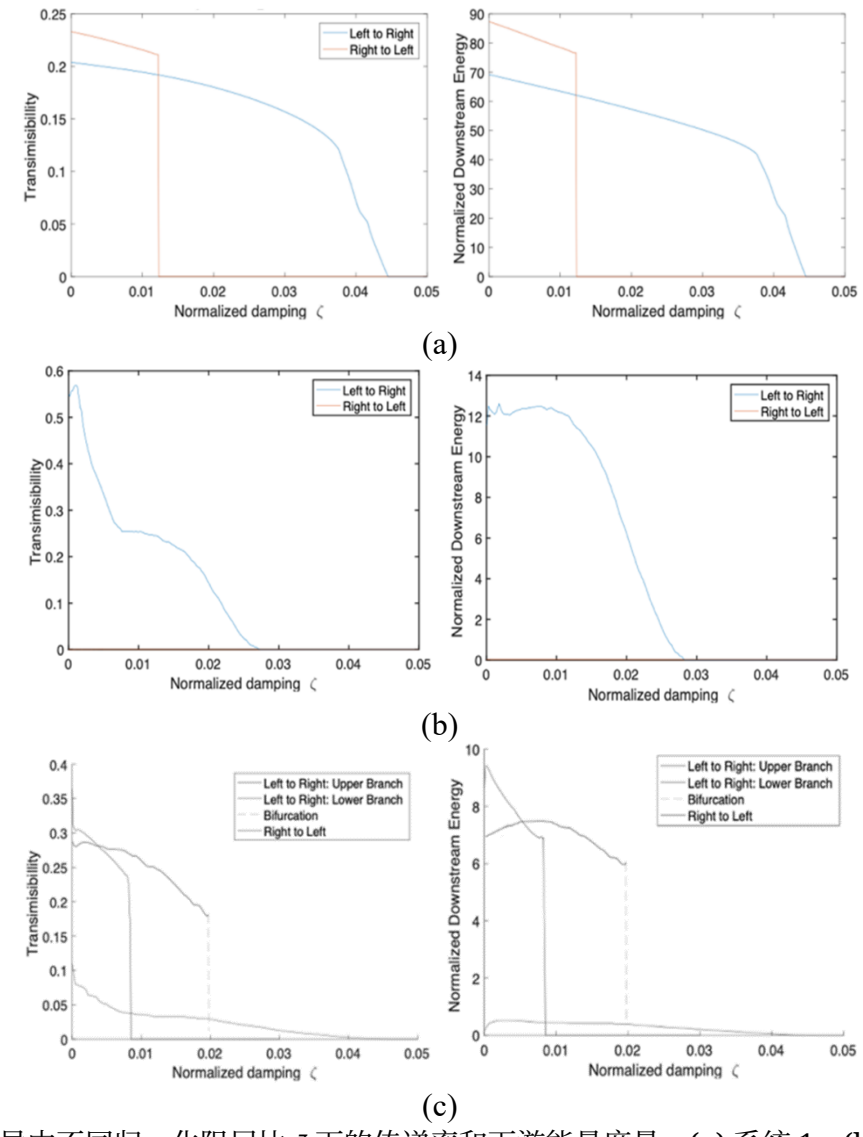


图 8. 双闸门波导中不同归一化阻尼比 ζ 下的传递率和下游能量度量：(a) 系统 1，(b) 系统 2 和 (c) 系统3。

考虑系统 1 的结果（参见图 8a），随着归一化阻尼比 ζ 增加，传递率和下游能量度量会降低；此外，在阻尼的临界值处还观察到了分岔现象。这与单门控波导 [17], 的情况相似：在阻尼比达到某些临界阈值时，左向右传播和右向左传播的下游能量都会出现陡降。分岔对应的临界阻尼比为：右向左传播为 ζ_{cr_RL}~0.012，左向右传播为 ζ_{cr_LR}~0.04。正如 [17], 中所指出的，临界阻尼比的这种差异形成了一个强非互易性区域，在该区域内，能量可以从左向右传输，却被禁止从右向左传播。与 [17] 中所述的具有单个门的系统相比，这是双非线性门系统的另一项优势，因为我们看到，相对于归一化参数 ζ，其设计空间更大，可以利用这一点实现高声学非互易性。

从系统 2 的响应中还观察到另一种有趣的声学特性（参见图 8b）。事实上，在左向右传播的传递率曲线中，我们观察到两个陡降点，分别对应两个临界阻尼比；与此同时，右向左传播的传递率可忽略不计，因此在阻尼比方面存在很大的范围，可实现声学中的强非互易性。这些结果为这种门控波导构型在传递率和非互易性方面提供了不同的设计方案。

最后，考虑系统3的结果（参见图 8c），该系统对应于 HNRB 分支中的情形，我们注意到非线性声学中还有其他有趣的特性。除了随着归一化阻尼比 ζ 变化而出现的熟悉分岔外，在这种情况下，左向右传播还存在两个共存分支解（而右向左传播只有一个分支）。这些共存解完全由闸门处的强非线性产生，具体实现哪一个解取决于初始条件。显然，共存解的存在，以及该系统实现的极高声学非互易性（比单个门 [17] 情形所能实现的高出若干数量级），为双门控波导的鲁棒设计提供了更多机会，使其能够同时实现高传递率和高声学非互易性。此时需要着重指出，极高非互易分支解所展现的前景令人振奋。在我们的工作中，谐波激励施加在晶格的中间位置（而非晶格末端），因此若没有非线性门，晶格是均匀的，50% 的输入能量向上游传播，另外 50% 向下游传播。因此，传递率的理论极限为 $\eta_{max} = 0.5\ \eta$。通过采用系统3中特定的非线性门组合，我们实现了极高的非互易性度量 δ~10，同时在图 8c 所示的所有情形中保持了 0.2 的高传输率度量。

据作者所知，现有文献中尚无已报道的有源或无源、线性或非线性非互易器件能够达到如此高的性能水平 [18, 19, 20] 。在先前的研究 [15, 17], 中，已证明单个非线性门对于所研究的波导有多么有效。在本研究中，我们表明，结合使用两个非线性门可使非互易性指标提高三倍；根据式（4），这意味着能量差异达到 10^9 的比例。这一结果表明，在扩展的线性波导中采用多个局部非线性门，能够实现极强的声学非互易性，同时不牺牲波传播在期望（优选）方向上的传递率。从更广的视角来看，当前的双门控波导可视为一类更广泛系统中的一个实例，这类系统包含分层局部非线性门的级联；本研究提出的方法（以及 [15, 17] 中讨论的解析方法）可推广至这一更广泛的类别。此外，本文阐述的非线性声学见解以及下一节讨论的机器学习方法，可用于设计一大类受谐波或瞬态（例如冲击）激励的非线性声子晶格。

3. 可预测设计的机器学习方法

本节构建了一个可学习模拟器，用于在多维参数空间中可靠地预测双门控波导的传递率和非互易性。除归一化激励幅值 A_p 外，我们还考虑四个用于描述非线性声学的额外归一化独立参数，即闸门振子的非线性系数 α_1、α_2、激励频率 $\hat{\omega}$，以及最后的（强）波导内耦合系数 d。下文中，失谐（不对称性）系数固定为 $\sigma = -1.4$，而闸门振子的阻尼比随归一化耦合刚度 d 变化，即 $\xi = d\zeta$，其中 $\zeta = 0.013$。请注意，由于闸门具有强非线性，声学响应预计取决于能量（或激励），因此将 A_p 纳入设计变量十分重要，因为不同激励水平下可能出现不同的声学现象。此外，遵循先前研究对线性波导中非均匀阻尼分布的假设 [14, 15, 17], ，我们假定各组成线性振子的接地刚度对应的黏性阻尼比均匀且等于 $\zeta = 0.013$。我们旨在运用机器学习，预测性地确定这些参数的取值，从而在五维参数空间 $\{A_p$、α_1、α_2、$\hat{\omega}$、$d\}$ 中实现波导的最优（最大）非互易性和传递率。

为应用机器学习方法，我们创建了一个包含五个变量的数据集。其目的是将激励频率 $\hat{\omega}$ 限制在线性（无栅极）波导的通带范围内，该范围由波数 $\theta = 0$、π的极限值定义。不过需要注意的是，如果将 $\hat{\omega}$ 选在接近通带边界的位置，传播波的相应群速度会变得非常小，声波需要很长时间才能达到稳态。此外，非线性参数被限制在范围（α_1，α_2）$\in [0, 6]$ 内，另外两个参数的范围为 $A_p \in [0。2,1]$ 和 $d \in [0。2,0。6]$。该数据集包含约60,000组此类参数，这些参数通过从均匀分布中随机采样生成。

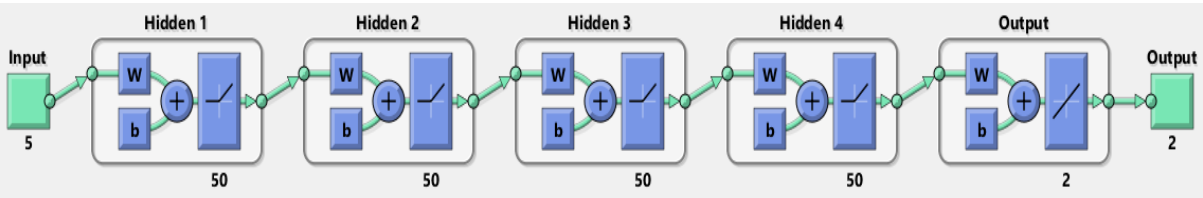


图9。神经网络模型示意图。

我们开发了一种机器学习模型，作为对强耦合门控波导（1）进行直接数值模拟的一种经济高效的替代方案。该模型基于 [15, 17] 中开发的类似模型，能够显著缩短所需的仿真时间，同时维持对非线性声学预测结果可接受的准确性和可靠性。模型以五个变量 $\{A_p, \alpha_1, \alpha_2, \hat{\omega}, d\}$ 为输入，并分别输出非互易性和传输率度量 δ 和 η。首先，使用人工神经网络（NN）和上述数据集对机器学习模型进行训练。输入和输出经归一化后，分别组装为维度为 (5 x 1) 和 (2 x 1) 的向量，其中最小值映射至 -1，最大值映射至 $+1$。神经网络由 4 个隐藏层组成，每层含 50 个神经元（参见图9）；与 [17] 中一样，输出层采用 ReLU激活函数。具体而言，归一化输入被映射为归一化输出，如图9所示；每一层的估计值均根据前一层迭代计算，形式为 $\boldsymbol{a}_i = f(\boldsymbol{w}_i \boldsymbol{a}_{i-1} + \boldsymbol{b}_i)$，其中 $\boldsymbol{a}_i$ 表示第 $i-$th 层的数值向量，$\boldsymbol{w}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_i$ 分别表示可学习的权重矩阵和偏置向量，而 $f($·

) 为激活函数。与 [17] 中一样，隐藏层的激活函数采用修正线性单元（ReLU）函数，其中 $f(x) = \max(0, x)$；输出层的激活函数为线性函数（恒等变换）。整个神经网络模型使用 MATLAB® 深度学习工具箱开发并训练。

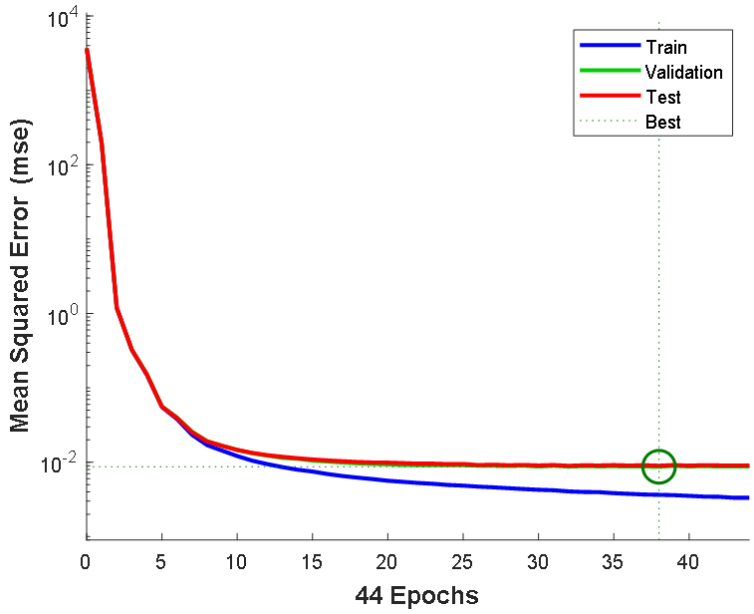


图10. 收敛性研究：神经网络在每个训练轮次的损失函数。

整体数据集被随机划分为三个子集，其中 50% 用于训练，15% 用于验证，35% 用于测试。采用 Levenberg-Marquardt反向传播算法训练权重 $\boldsymbol{w}_i$ 和偏置 $\boldsymbol{b}_i$，并以均方误差作为损失函数。每个训练轮次后（定义为完整遍历一次训练集）评估验证子集的损失函数；如果连续六个训练轮次中验证子集上的损失函数均未改善，则停止训练。图10显示了每个训练轮次的损失函数。该收敛性研究表明，在第 38 个训练轮次检测到验证集上的损失函数最小值（等于 0.0087），说明神经网络已得到恰当训练。按照 [17] 中讨论的类似验证步骤，通过绘制预测的非互易性和传输性指标，并将其与测试子集上直接数值模拟所得结果进行比较，来评估训练后的神经网络模拟器的有效性；结果如图 11 所示，其中散点图突出显示了对应于 $0.2 < \eta$ 和 $5 < \delta$ 的理想区域内的情况。从这些结果可以清楚看出，神经网络能够准确预测训练集上门控波导的非互易性和传递率，因为模拟生成的目标值与神经网络模拟器预测的输出之间的相关值 R 大于 0.96。事实上，从图 11d 可以看出，高非互易性分支（HNRB）、中等非互易性分支（INRB）和近互易分支（NRB）这三个不同分支在测试集中都得到了完整复现。因此，神经网络模拟器能够准确捕捉门控波导的非线性声学特性，而且与直接数值模拟相比，计算开销大幅降低，从而证实了其有效性。因此，现在可以利用神经网络模型，在指定的 5 维参数空间中优化门控波导的非线性声学特性，以实现最大非互易性和理想传递率。

此处我们指出，我们的目标是设计一种门控波导，使其在传输能量的优选方向上同时具有很高的非互易性和传输性指标。具体而言，理想情况下，$\eta > 0.2$ 和 δ 应尽可能大，这意味着至少 20% 的输入能量应沿优选

波传播方向向下游传输，并且该方向上的传输能量应比相反方向高出若干数量级。事实上，从图 5 和图 11 所示的结果可以看出，在 $0.2 < \eta < 0.4$ 和 $5 < \delta < 10$ 的范围内，η 和 δ 可以达到较高数值，即图 5 和图 11 中理想的 HNRB 分支。

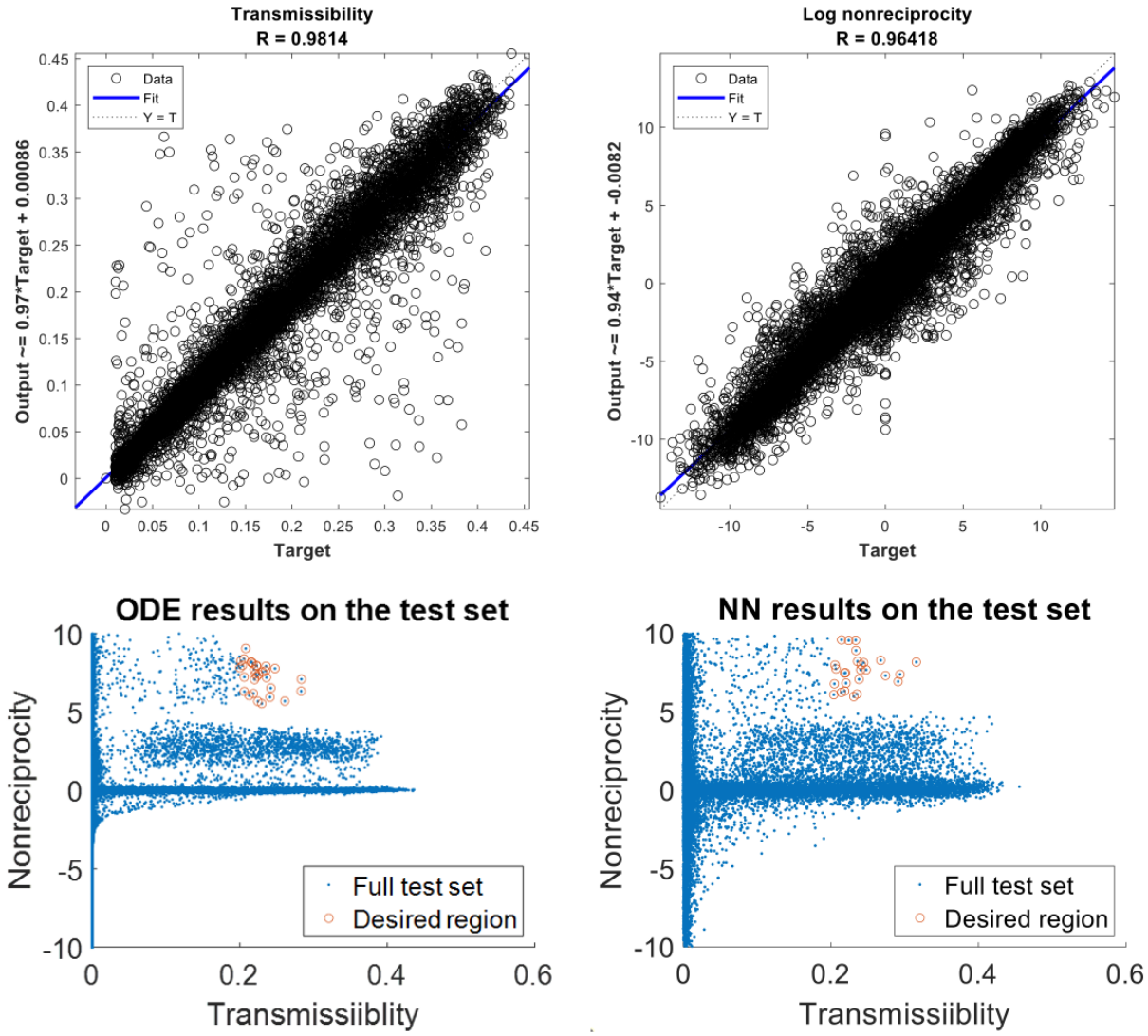


图 11. 测试集中目标值与输出（预测值）之间的相关性：(a) 传输率度量，(b) 非互易性指标，以及基于 (c) 式 (1) 的直接数值模拟和 (d) 神经网络预测的非互易性与传递率关系图。

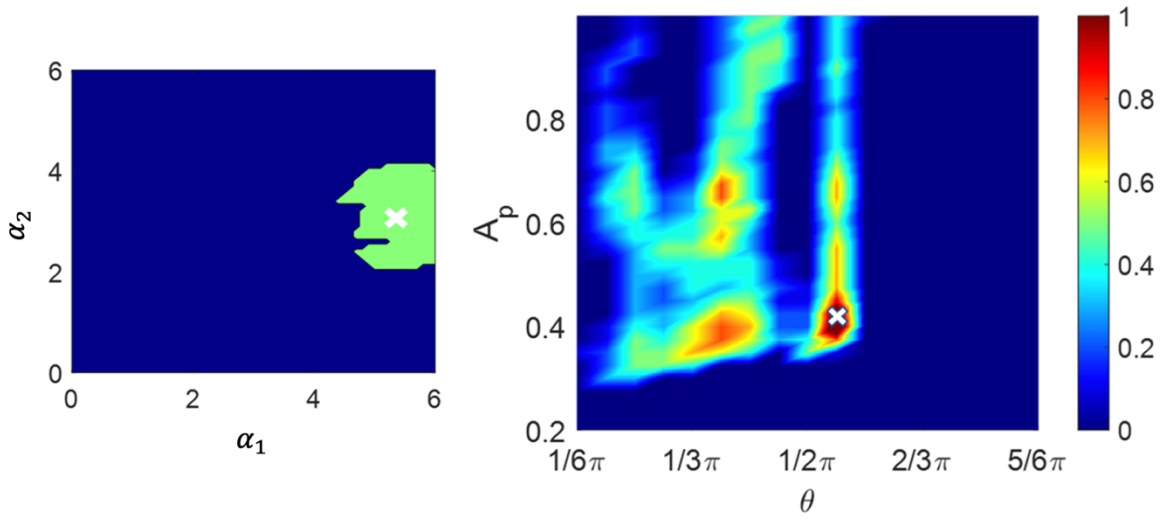
根据训练好的神经网络模拟器在测试集上的输出，我们采用与 [17] 相同的指标，填入表 2 所示的混淆矩阵。如 [17] 所示，该矩阵将测试子集分为四个不同类别，即真阳性（TP）、真阴性（TN）、假阳性（FP）和假阴性（FN）。具体而言，TP 表示神经网络模拟器和直接数值模拟均判定为理想的真阳性值的数量；TN 表示神经网络模拟器和数值模拟均判定为不理想的真阴性值的数量；FP 表示神经网络模拟器判定为理想、但数值模拟判定为不理想的假阳性值的数量；FN 表示神经网络模拟器判定为不理想、但数值模拟判定为理想的假阴性值的数量。基于上述定义，敏感度、特异度和精确率的计算公式如下：

$$Sensitivity = \frac{TP}{TP + FN}, \qquad Specificity = \frac{TN}{TN + FP}, \qquad Precision = \frac{TP}{TP + FP} \quad (5)$$

从表 2 可以看出，敏感度、精确率和特异度均接近 1，因此我们认为神经网络模拟器是可靠的，也就是说，它能够准确预测具有较大传递率和非互易性指标的双门控波导类别。

表1. 神经网络在测试子集上的预测混淆矩阵。

测试集中的数据点: 测试集: $N = 21{,}000$	预测条件		性能
实际条件	理想 TP = 726 假阳性 = 165	不理想 FN = 160 真阴性 = 19,949	敏感度: 0.8254 特异度: 0.9920 精确率: 0.8160



(a) (b)

图12。神经网络模拟器的预测：(a) 平面上的期望参数区域 (α_1, α_2) 对于$(d, A_P, \theta) = (0.2, 0.4, 3.2659/6\pi)$，以及 (b) (α_1, α_2)中期望区域的核大小等高线图，适用于 $d = 0.2$；(b) 的等高线图仅根据对应于 $\delta > 4$ 和 $\eta > 0.2$ 的情况绘制。

为了突出 NN 模拟器所得的结果，图12展示了基于测试集上的神经网络输出预测的性能分类可视化结果。图12a所考虑的情形对应于 $(d, A_p, \theta) = (0.2, 0.4, 3.2659/6\pi)$，并改变非线性系数 (α_1, α_2)。理想性能区域的预测结果以浅绿色显示，我们选取其中标记为 (×) 的情形，对应于 $\alpha_1 = 5.0$ 和 $\alpha_2 = 3.1$。为了在更高维的参数空间中显示理想区域，我们在其中拟合一个正方形，其边长标记为

“核大小”；随后用它来量化其他参数变化时理想性能的鲁棒性。实际上，在图12b中，归一化波导内耦合刚度固定为 $d = 0.2$，并绘制了核大小随 A_p 和 θ 变化的等高线图。对于这些取值，我们进一步绘制了 $d = 0.2$ 时核大小的等高线图（见图12b），并针对 $A_p = 0.4$ 和 $\theta = 3.2659/6\pi$ 选取了鲁棒性最佳的情形，该情形对应于 (×) 所指示的点。

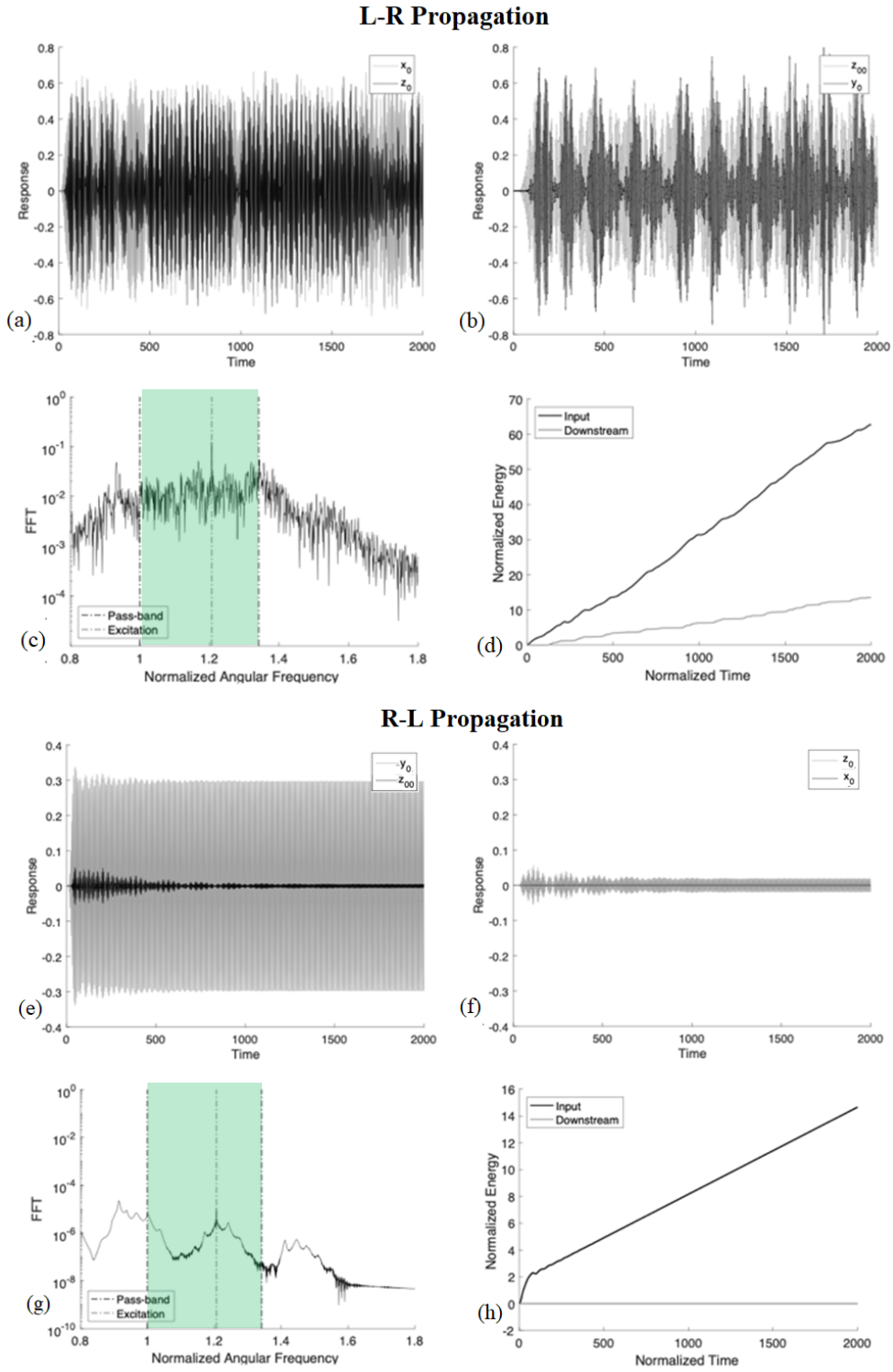


图13. 图12中对应于(×)的非线性声学：（a-d）左向右传播，（e-h）右向左传播（图注同图2-4）。

该案例预测的传递率和非互易性指标分别为 $\eta = 0.2257$ 和 $\delta = 8.2700$。图13展示了该案例中非线性门处的响应，由此可推断声学系统具有极强的非互易性，并且在优选的左至右传播方向上实现了良好的传递率。这个最后的示例表明，本文提出的机器学习方法能够为设计具有最大非互易性的声波导提供可靠的预测工具，同时确保在优选的波传播方向上具有良好的传递率。此类工具可用于构思实用的非互易波导和声学超材料，并在其中引入局部强非线性和不对称性。根据应用需求，可利用神经网络模拟器，基于所需的传递率、非互易性和此类波导的鲁棒性水平，确定合适的系统参数（即使是在维数相对较高的参数空间中）。

4. 结论

本研究探讨了如何在一维被动线性波导中产生强声学非互易性，该波导包含两个强非线性的非对称闸门。对波导中的一个振子施加谐波激励。假设波导振子之间存在强刚度耦合，从而使未加闸门的波导形成通带，行波可在左至右（L-R）和右至左（R-L）两个方向上无衰减传播。局部非线性非对称闸门打破了波导的对称性和线性，进而产生全局强非互易声学。据作者所知，所研究的双闸门波导可能产生极强的声学非互易性，其强度远超当前有源或无源器件所报道的水平；此外，这种极端的互易性破缺还兼具波传播优先方向上的理想传递率。更有意思的是，对非线性声学的分析揭示了互易性破缺背后丰富的物理机制，而这本身也可成为进一步分析的起点。

我们通过数值分析证明，波导中的声学非互易性既可通过单色响应实现，也可通过强烈调制的响应实现。此外，我们利用机器学习，针对传输率和非互易性进行预测设计，从而缩短高维参数空间分析所需的计算时间。神经网络（NN）模型证明能够根据定义的非互易性和传输率度量，准确捕捉波导响应。在性能理想的区域内，传输率度量最高达到 40%（无闸波导的上限为 50%），而非互易性指标最高达到 9；这些结果优于以往有源和无源非互易器件的性能 [15, 17, 18, 19, 20]。此外，与一项针对相同波导但采用单个门的类似研究 [17]，相比，本文报告的非互易性水平最高比该研究此前的结果高出 9 个数量级。此外，神经网络模拟器还使我们能够研究强非互易响应对系统参数和激励参数变化的鲁棒性。

总而言之，本研究探讨了在声波导中应用强非线性和不对称性以实现被动互易性破缺的新理论与实践层面。研究表明，在空间延展线性波导中加入多个局部非线性门是可行的，能够在整体互易性破缺和传递率方面实现高性能。因此，本研究可视为更广泛一类波导的一个具体案例：通过级联局部层级门，可以调控其声学特性以实现非互易性。这类问题面临的一项挑战是设计参数空间的维数很高；然而，正如本研究所示，可以借助机器学习工具应对这一挑战。这些工具不仅能够预测高性能设计，还能为此类解决方案的鲁棒性研究提供参考。当然，这也意味着需要大量训练

数据集，并根据解析和数值预测对数据进行有针对性的预采样，从而帮助优化神经网络模拟的训练。因此，物理信息机器学习方法似乎是解决这类复杂问题的合适设计工具。

5. 参考文献

[1] J. Achenbach, 《弹性动力学中的互易性》, 英国剑桥: 剑桥大学出版社, 2009年。[2] J.C. Maxwell, 《框架的平衡与刚度计算》, 《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》, 27, 294-299, 1864年。[3] K. Tsakmakidis, L. Shen, S. Schulz, X. Zheng, J. Upham, X. Deng, H. Altug, A.F. Vakakis 和 R. W. Boyd, "打破洛伦兹互易性, 以突破物理学和工程学中的时间带宽极限", 《科学》, 356:6344, 1260-1264, 2017年。[4] R. Fleury, D. Sounas, C. Sieck, M. Haberman 和 A. Alù, "紧凑型声学环行器中的声音隔离与巨大线性非互易性", 《科学》, 343:6170, 516-519, 2014年。[5] S.A. Cummer, "选择声音传输方向", 《科学》, 343:6170, 495-496, 2014年。[6] S.A. Cummer, J. Christensen 和 A. Alù, "利用声学超材料控制声音", 《自然综述: 材料》, 1:3, 1-13, 2016年。[7] I. Grinberg, A.F. Vakakis 和 O.V. Gendelman, "声学二极管: 非线性耦合波导中的波非互易性", 《波动》, 83, 49-66, 2018年。[8] A. Darabi, L. Fang, A. Mojahed, M. D. Fronk, A.F. Vakakis 和 M.J. Leamy, "宽带无源非线性声学二极管", Physical Review B, 99:21, 214305, 2019年。[9] G. Trainiti 和 M. Ruzzene, "时空周期结构中的非互易弹性波传播", 《新物理学杂志》, 18:8, 083047, 2016年。[10] A.A. Maznev, A.G. Every 和 O.B. Wright, "反射与传输中的互易性: 什么是'声子二极管'? ", 《波动》, 50: 4, 776-784, 2013年。[11] B. Liang, X.S. Guo, J. Tu, D. Zhang 和 J.C. Cheng, "声学整流器", 《自然·材料》, 9:12, 989-992, 2010年。[12] C. Fu, B. Wang, T. Zhao 和 C.Q. Chen, "高效率宽带声学二极管", 《应用物理快报》, 112:5, 051902, 2018年。[13] S.H. Mousavi, A.B. Khanikaev 和 Z. Wang, "声子超材料中的拓扑保护弹性波", Nature Communications, 6:1, 1-7, 2015年。

[14] C. Wang, A. Kanj, A. Mojahed, S. Tawfick 和 A.F. Vakakis，“非线性波导中用于波导向的实验性朗道-齐纳隧穿（LZT）”，Physical Review Applied，14:3，034053，2020年。[15] C. Wang, A. Mojahed, S. Tawfick 和 A.F. Vakakis，“局域非线性非对称情形下线性波导非互易性的机器学习：弱耦合”，Journal of Sound and Vibration，537，117211，2022年。[16] A. Blanchard, T.P. Sapsis 和 A.F. Vakakis，“非线性弹性动力学中的非互易性”，Journal of Sound and Vibration，412，326-335，2018年。[17] C. Wang, A. Mojahed, S. Tawfick 和 A.F. Vakakis，“线性波导非互易性的机器学习：局域非线性非对称闸门情形——强耦合”，Journal of Computational and Nonlinear Dynamics，即将刊出。[18] Y. Zhai, H. Kwon 和 B. Popa，“用于超紧凑非互易线性声学器件的有源威利斯超材料”，Physical Review B，99，220301(R)，2019年。[19] B. Popa 和 S.A. Cummer，“非互易且高度非线性的主动声学超材料”，Nature Communications，5，3398，2014年。[20] N. Geib, A. Sasmal, Z. Wang, Y. Zhai, B. Popa 和 K. Grosh，“可调非局域纯主动非互易声学介质”，Physical Review B，103，165427，2021年。

声明与说明

资助

作者声明，在撰写本文期间未获得任何资金、拨款或其他支持。

利益冲突

作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

数据可用性

本研究中生成和/或分析的数据集未公开，但可应合理请求向通讯作者获取。