arXiv:2302.01758v1 [physics.class-ph] 1 Feb 2023

旋转刚体中物理约束的特征

G. J. Gutierrez Guillen*、E. Aldo Arroyo†、P. Marde˘si´c‡、D. Sugny§

2023年2月6日

摘要

我们研究刚体自由旋转中的物理约束特征。我们通过解析方法证明，系统转动惯量的物理或非物理属性，可以从蒙哥马利相位和网球拍效应中的定性变化检测出来。

1 引言

由常微分方程支配的物理动力系统通常取决于描述其性质的参数。这些参数既可以通过将理论演化拟合到实验数据中以经验方式确定，也可以依据基本物理原理通过纯理论方法求得。应用基本物理定律可能会对这些参数施加特定约束。因此，一个自然的问题是，如何找到这类约束的清晰特征，以便在系统的时间演化中识别出所研究模型系统的明确性质。本文拟以刚体的自由转动动力学为例，研究这一一般性问题 [1, 2, 3, 4, 5]。其动力学演化由欧拉方程描述，该方程取决于三个转动惯量，它们表征了系统的质量分布。我们考虑三个转动惯量彼此不同的非对称刚体这一一般情形。如下文所述，依据力学原理可以证明，任意两个转动惯量之和都必须大于第三个。对于平面物体，这一条件可以取等号。尽管如此，即使不满足转动惯量的这些条件，欧拉方程在数学上仍然成立。在物理上，它们也很有意义，因为还能描述其他系统的动力学，例如处于外部电磁场中的自旋 1/2 粒子，而这类系统并不受这些约束 [1, 2, 3, 4, 5]。

*勃艮第数学研究所 - UMR 5584，法国国家科学研究中心，勃艮第大学，法国第戎 F-21000

†自然科学与人文科学中心，ABC联邦大学，圣安德烈，圣保罗州 09210-170，巴西

‡勃艮第数学研究所 - UMR 5584，法国国家科学研究中心，勃艮第大学，法国第戎 F-21000；萨格勒布大学，理学院，数学系，Bijeni˘cka cesta 30，克罗地亚萨格勒布 10000。§勃艮第卡诺跨学科实验室 (ICB)，UMR 6303 法国国家科学研究中心-勃艮第-弗朗什-孔泰大学，9 Av. A. Savary, BP 47 870，法国第戎 Cedex F-21078，dominique.sugny@u-bourgogne.fr

因此，给定刚体的转动动力学，我们希望判断系统是否满足这一约束。为找到清晰且稳健的特征，我们分析两种几何性质的行为，即蒙哥马利相位（MP） [8, 9, 10, 11] 和网球拍效应（TRE） [12, 13, 14]。

这两种几何效应可以看作同一枚硬币的两面。蒙哥马利相位是一种几何相位，对于转动动力学而言，可将其视为量子系统中贝里相位的对应物 [8, 15]。蒙哥马利相位衡量刚体在空间固定坐标系中的特定转动。当角动量在体固定坐标系中完成一个闭环时，系统会绕初始坐标系中角动量的固定方向转过一定角度。蒙哥马利相位就是这个转动角度，记为 $\Delta\phi$；它取决于系统的能量，该能量如下所示由参数 c表征。顾名思义，网球拍效应可以通过网球拍观察到，也会出现在任何非对称刚体的转动动力学中。近年来，网球拍效应已成为经典领域 [14, 16] 和量子领域 [7, 17, 18, 19,20, 21]不同研究的主题。当刚体绕其不稳定旋转轴 [12, 13]完成一整圈转动时，角动量几乎会翻转 π，这便是网球拍效应的表现。网球拍效应通常并不完美，扭转缺陷 ε 是能量的函数，即参数 c的函数。通过函数 $\Delta\phi(c)$ 和 $\varepsilon(c)$ 的整体行为，可以判断刚体是否具有物理属性。在本研究中，如果经典系统的动力学由欧拉方程支配，且满足转动惯量的约束，我们就称其为物理系统。论文结论部分讨论了后者在量子领域中的作用 [20]。对于满足 $c < 0$的物理系统及振荡轨迹，我们在本研究中严格证明， $\Delta\phi$ 是一个大于2π的递减函数，而 ε 是一个单射函数。如果不满足物理约束，则这两种性质都不成立。基于这些观察，可以设计不同的实验来检验刚体的物理属性 [22]。最后，我们利用这项整体研究，扩展了文献 [14]关于网球拍效应存在性的证明。文献 [14] 表明，在完美非对称刚体的极限下，对于接近刚体振荡运动与旋转运动之间分界线的轨迹，可以实现完美的网球拍效应；特别是，该情形不满足转动惯量的物理约束。本研究证明了在这些约束下出现精确网球拍效应的条件。

本文结构安排如下。第 2 节回顾如何推导转动惯量的物理约束。第 3 节概述非对称刚体的转动动力学。第 4 节重点讨论蒙哥马利相位的动力学符号，第 5 节和第 6 节则介绍 TRE 的情形。第 7 节研究 TRE 的整体行为。第 8 节给出结论与展望。技术性结果见附录 A 和 B。

2 转动惯量的物理约束

刚体的自由转动可以通过体固定坐标系相对于空间固定坐标系的位置来描述，分别由坐标组（x， y， z）和（X， Y， Z） [2]给出。在体固定坐标系中，角

刚体的动量$\mathbf{J}$ 与角速度 ω 之间满足关系$\mathbf{J} = I\omega$，其中 I 是一个对称矩阵，称为惯性矩阵。其特征值为转动惯量，记作 I_x、 I_y 和 I_z，分别对应于体固定坐标系的三个坐标轴。对于任意刚体，转动惯量的取值都受到以下物理限制

$$I_i + I_j \geq I_k \tag{1}$$

满足 $\{i, j, k\} = \{x, y, z\}$ 且不相等。该约束可根据转动惯量的定义得出

$$I_i = \int_V \rho(\mathbf{r})(x_j^2 + x_k^2)d\mathbf{r},$$

其中， ρ 为质量密度， V 为刚体的体积， x_j 为位置矢量$\mathbf{r}$的坐标（x_1， x_2， x_3）$\equiv$（x， y， z）。由此可推得

$$I_i = \int \rho(\mathbf{r})(x_j^2 + x_k^2)d\mathbf{r} \leq \int \rho(\mathbf{r})(2x_i^2 + x_j^2 + x_k^2)d\mathbf{r} = I_j + I_k.$$

对于满足以下条件的非对称刚体

$$I_z < I_y < I_x, \tag{2}$$

需要满足的唯一约束是

$$I_y + I_z \geq I_x. \tag{3}$$

定义 1. 设 I_x、 I_y、 I_z 为满足 $I_z < I_y < I_x$的非对称刚体的转动惯量。若刚体的转动惯量满足式(3)，则称该刚体为物理 刚体。

在 [14], 中，定义了描述刚体非对称性的两个参数 a 和 b，分别为

$$a = \frac{I_y}{I_z} - 1\,, \quad b = 1 - \frac{I_y}{I_x}. \tag{4}$$

注意，根据定义， $a > 1$ 和 $0 < b < 1$。通过引入常数 $\mathcal{I} = \mathcal{I}$（$a$， b），即可轻松写出物理约束（3），我们称其为几何常数。为便于后续使用，我们还引入第二几何常数 $\mathcal{J} = \mathcal{J}$（$a$， b）。我们有

$$\mathcal{I} = \frac{1-b}{\sqrt{b(a+b)}}, \quad \mathcal{J} = \frac{a+1}{\sqrt{a(a+b)}} - 1. \tag{5}$$

命题 1. 设 I_x、 I_y、 I_z 为某非对称刚体的转动惯量，且满足 $I_z < I_y < I_x$。当且仅当几何常数 $\mathcal{I}$ 满足不等式$\mathcal{I} \geq 1$时，转动惯量 I_x、 I_y、 I_z 描述一个物理刚体。

证明。 由式（4）可得

$$I_y = (1-b)I_x\,, \quad I_z = \Big(\frac{1-b}{1+a}\Big)I_x.$$

由于 $I_x \neq 0$，我们有 $I_y + I_z \geq I_x$，当且仅当

$$(1-b) + \left(\frac{1-b}{1+a}\right) \geq 1.$$

利用 $0 < 1+a$，当且仅当下式成立时，式（2）得到验证

$$(1-b)(1+a) + (1-b) \geq 1+a,$$

这等价于 $ab + b^2 \leq 1 - 2b + b^2$，最终等价于 $\mathcal{I} \geq 1$。 □

满足约束条件 $\mathcal{I} \geq 1$ 的坐标为（a，b）的点集如图1所示。

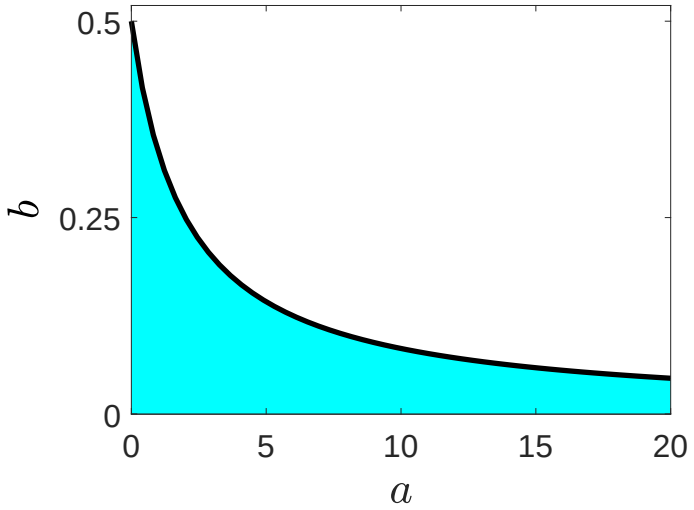

图1：满足 $\mathcal{I} = \frac{1-b}{\sqrt{b(a+b)}} \geq 1$的点（$a$，$b$）的集合（蓝色~~区域）~~。黑色实线表示满足 $\mathcal{I} = 1$的点。

3 动力系统的描述

本节回顾如何描述刚体 [1, 2] 的转动动力学。体固定坐标系相对于空间固定坐标系的相对运动可用三个欧拉角（θ，ψ，ϕ）描述。这组角度并非唯一；本文采用与 [14], 中相同的定义，该定义非常适合研究蒙哥马利相位和 TRE。系统的角动量 **J** 在空间固定坐标系中是一个运动常量，并按惯例假设其沿 Z 轴方向。即使其模长 $J = |\mathbf{J}|$ 与时间无关，在体固定坐标系中情况也并非如此。两个角度（θ，ψ）描述 **J** 的位置，其分量为 $J_x = -J\sin\theta\cos\psi$、$J_y = J\sin\theta\sin\psi$ 和 $J_z = J\cos\theta$。不失一般性，下面令 $J = 1$ 。欧拉角的动力学

由以下微分方程支配 [14]

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= (\frac{1}{I_y}-\frac{1}{I_x})\sin\theta\sin\psi\cos\psi \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{I_y}\sin^2\psi+\frac{1}{I_x}\cos^2\psi \\ \dot{\psi} &= (\frac{1}{I_z}-\frac{1}{I_y}\sin^2\psi-\frac{1}{I_x}\cos^2\psi)\cos\theta.\end{aligned} \tag{6}$$

该动力系统具有两个运动常数 H 和 J，其中 $H=\frac{J_x^2}{2I_x}+\frac{J_y^2}{2I_y}+\frac{J_z^2}{2I_z}$，因此构成一个经典的哈密顿可积动力系统。非对称刚体的相空间结构相对简单，由一条分界线构成；对于 $H=\frac{J^2}{2I_y}$，这条分界线划分了振荡轨迹和旋转轨迹，它们分别围绕角动量空间中 $H=\frac{J^2}{2I_x}$ 和 $\overline{H}=\frac{J^2}{2I_z}$ 对应的稳定不动点排列。我们引入参数 $c=2I_yH-1$，表示到分界线的有符号距离，并满足 $-b\le c\le a$。蒙哥马利相位和 TRE 是两个不随时间变化的几何性质。因此，值得考察 ψ 和 θ 相对于 ϕ的相对运动。这可通过式 (6) 实现。利用公式替换 $\sin\theta$和 $\cos\theta$

$$c=a-\sin^2\theta(a+b\cos^2\psi), \tag{7}$$

可得

$$\frac{d\theta}{d\phi}=\pm\frac{b\sqrt{a-c}\sin\psi\cos\psi}{(1-b\cos^2\psi)\sqrt{a+b\cos^2\psi}} \tag{8}$$

$$\frac{d\psi}{d\phi}=\pm\frac{\sqrt{(a+b\cos^2\psi)(c+b\cos^2\psi)}}{1-b\cos^2\psi}. \tag{9}$$

约化相空间（ψ，$\frac{d\psi}{d\phi}$）的示意图见图2。注意，方程（7）并未确定 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的符号，因此方程（8）和（9）中的导数有两种可能的表达式（分别对应 $\pm$ 符号）。正确选择该符号对于描述几何性质至关重要。

4 蒙哥马利相位

本节研究命题1中引入的物理约束对蒙哥马利相位的影响。定理 1 和定理2所描述的振荡轨迹与旋转轨迹具有不同的解析性质。

定理1。

1. 对于任意 $(a,b)\in(0,\infty)\times(0,1)$，振荡轨迹的蒙哥马利相位的最大下界 $\inf_{c\in(-b,0)}\Delta\phi(a,b)$ $\Delta\phi$ 为

$$\inf_{c\in(-b,0)}\Delta\phi(a,b)=2\pi\mathcal{I},$$

其中 $\mathcal{I}=\mathcal{I}(a,b)$ 是由 (5) 给出的几何常数。

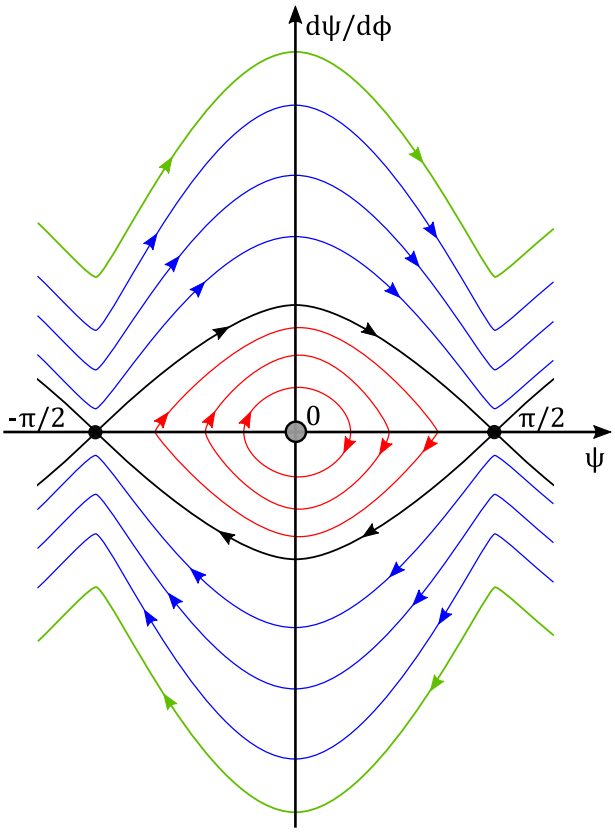

图 2：约化相空间（ψ，$\frac{d\psi}{d\phi}$）的示意图。红色、黑色和蓝色曲线分别表示振荡轨迹、分界线和旋转轨迹。灰点和绿色曲线分别表示振荡运动和旋转运动的不动点位置（即 分别为 $c=-b$ 和 $c=a$）。全文采用相同的颜色编码。

2. 刚体是物理的（即满足 $\mathcal{I}\geq 1$），当且仅当

$$\inf_{c\in(-b,0)}\Delta\phi(a,b)\geq 2\pi.$$

定理 2. 对于任意 $(a,b)\in(0,\infty)\times(0,1)$，旋转轨迹的蒙哥马利相位 $\Delta\phi(a,b)$ 的最大下界 $\inf_{c\in(0,a)}\Delta\phi(a,b)$ 为

$$\inf_{c\in(0,a)}\Delta\phi(a,b)=2\pi\mathcal{J},$$

其中 $\mathcal{J}=\mathcal{J}(a,b)$ 是由 (5) 给出的第二几何常数。

相应的证明如下。我们注意到，定理 1 提供了一种直接判断刚体物理属性的方法。图3展示了两个通用参数对（a，b）所对应的物理刚体和非物理刚体在振荡和旋转情况下，$\Delta\phi$ 相对于 c 的演化。

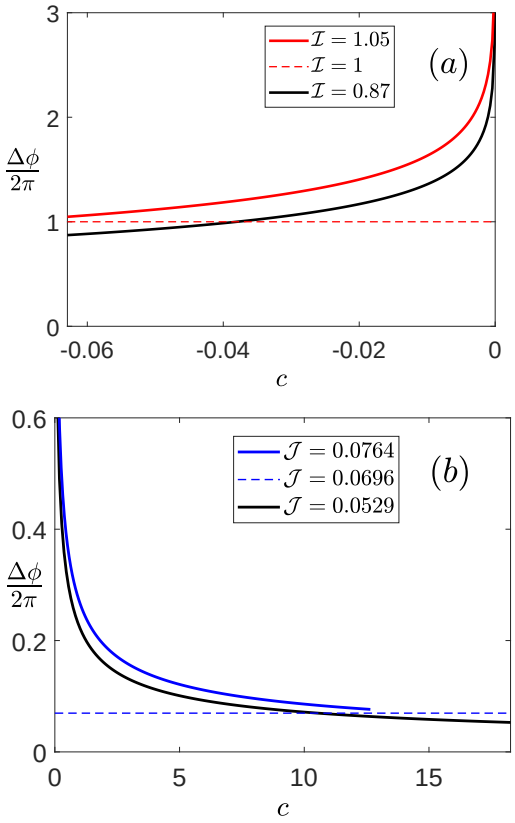

图 3：振荡轨迹（面板 (a)）和旋转轨迹（面板 (b)）的蒙哥马利相位 $\Delta\phi$ 随参数c 变化的图。分别考察参数为 ($a = 12.65,\ \ b = 0.0629$) 和 ($a = 18.27,\ b = 0.0629$) 的物理刚体和非物理刚体。注意，参数 c属于区间 $[-b, a]$。物理情形和非物理情形分别以红色或蓝色以及黑色表示。水平虚线表示物理刚体与非物理刚体之间的边界。小插图给出了 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$的相应取值。

振荡轨迹的情形

蒙哥马利相位定义为约化相空间（$\psi,\ \frac{d\psi}{d\phi}$）中闭环对应的角度 ϕ 的变化，如图2所示。对于振荡轨迹，条件$c + b\cos^2\psi \geq 0$ 限制了 ψ 的演化，并导出 $\sin^2\varepsilon \geq \frac{|c|}{b}$。我们将这个最小值记为 $\varepsilon^* = \arcsin\sqrt{\frac{-c}{b}}$。利用轨迹关于 $\frac{d\psi}{d\phi} = 0$ 的对称性，变化量 $\Delta\phi$ 可表示为

$$\Delta\phi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon^*}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon^*} \frac{1 - b\cos^2\psi}{\sqrt{(a + b\cos^2\psi)(c + b\cos^2\psi)}} d\psi. \tag{10}$$

定理*1*的证明。 积分 (10) 关于直线也具有对称性

该直线由 $\psi = 0$ 定义，因此

$$\Delta\phi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sqrt{\frac{-c}{b}})} \frac{1-b\cos^2\psi}{\sqrt{(a+b\cos^2\psi)(c+b\cos^2\psi)}}d\psi. \tag{11}$$

进行变量代换 $x = \cos^2\psi$，得到：

$$\Delta\phi = \frac{2}{\sqrt{ab}}\int_{-c/b}^{1} \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x+\frac{c}{b})}}dx. \tag{12}$$

引入 $u = -c/b$，使得对于 $c \in (-b, 0)$、 $u \in (0,1)$，我们得到

$$\Delta\phi = 2F_{a,b}(-bu, u), \tag{13}$$

其中，A 中描述的函数 $F_{a,b}(-bu, u)$ 是不完全椭圆积分

$$F_{a,b}(-bu, u) = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_u^1 \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x-u)}}dx. \tag{14}$$

根据 A 中的引理 6（给出了函数 $F_{a,b}(-bu, u)$ 的单调性），我们知道函数 $F_{a,b}(-bu, u)$ 的最大下界在 $u \to 1$ 时取得，该值由引理 7 计算得出，即

$$\lim_{u\to 1} F_{a,b}(-bu, u) = \frac{1-b}{\sqrt{b(a+b)}}\pi = \pi\mathcal{I}, \tag{15}$$

由此证明了第一个结论。接下来，证明第二个结论也很直接。

□

旋转轨迹的情形

对于旋转轨迹，当角度ψ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变为 $\frac{3\pi}{2}$ 时，角动量会形成一个闭环。利用 $\cos^2(\psi)$ 的对称性，我们得到 ϕ 的相应变化为

$$\Delta\phi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-b\cos^2\psi}{\sqrt{(a+b\cos^2\psi)(c+b\cos^2\psi)}}d\psi. \tag{16}$$

定理 2 的证明。证明总体上沿用定理 1 的证明思路。可以证明函数 $c \mapsto \Delta\phi(c)$ 是递减的。因此，由于$0 \le c < a$，最大下界在 $c \to a$ 时取得。通过直接计算，我们得到，

$$\begin{aligned}\lim_{c\to a}\Delta\phi &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-b\cos^2\psi}{a+b\cos^2\psi}d\psi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\frac{1+a}{a+b\cos^2\psi} - 1\Big]d\psi \\ &= 2\pi\Big[\frac{a+1}{\sqrt{a(a+b)}} - 1\Big] = 2\pi\mathcal{J}.\end{aligned} \tag{17}$$

□

5 网球拍效应

在先前的研究中， [12, 13, 14], 已对分界线附近的 TRE 进行了研究。假定相应的轨迹表现出 TRE，因为分界线是连接两个不稳定点的曲线，而这两个点正是这种几何效应的起源 [1, 12]。简言之，当 $\Delta\psi = \pi - 2\varepsilon$时，TRE 的特征是 $\Delta\phi = 2\pi$ 发生变化。完美 TRE 由 $\varepsilon = 0$ 描述，而 ε 描述偏离完美 TRE 的缺陷。数值对 $(c,\ \varepsilon)$ 定义了一条记作 $\mathcal{C}$ 的曲线。除了物理约束对 TRE 施加的符号外，我们还利用这一分析对 TRE 进行全局研究。因此，对 TRE 的局部研究与全局研究，分别对应于对曲线 $\mathcal{C}$ 在局部（靠近 $c = 0$）和全局范围内的研究。

我们研究约化系统的动力学

$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{(a + b\,\text{余弦}^2\,\psi)\,\text{余弦}\,\theta}{1 - b\text{余弦}^2\,\psi} \tag{18}$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{b\sin\theta\sin\psi\cos\psi}{1 - b\cos^2\psi}, \tag{19}$$

其第一积分为 $c = a - \sin^2\theta(a + b\cos^2\psi)$。该系统的约化相空间如图 4 所示。在这个约化相空间中，也可以分析角度 ϕ 的演化，因为在该系统中， ϕ 起到时间的作用。

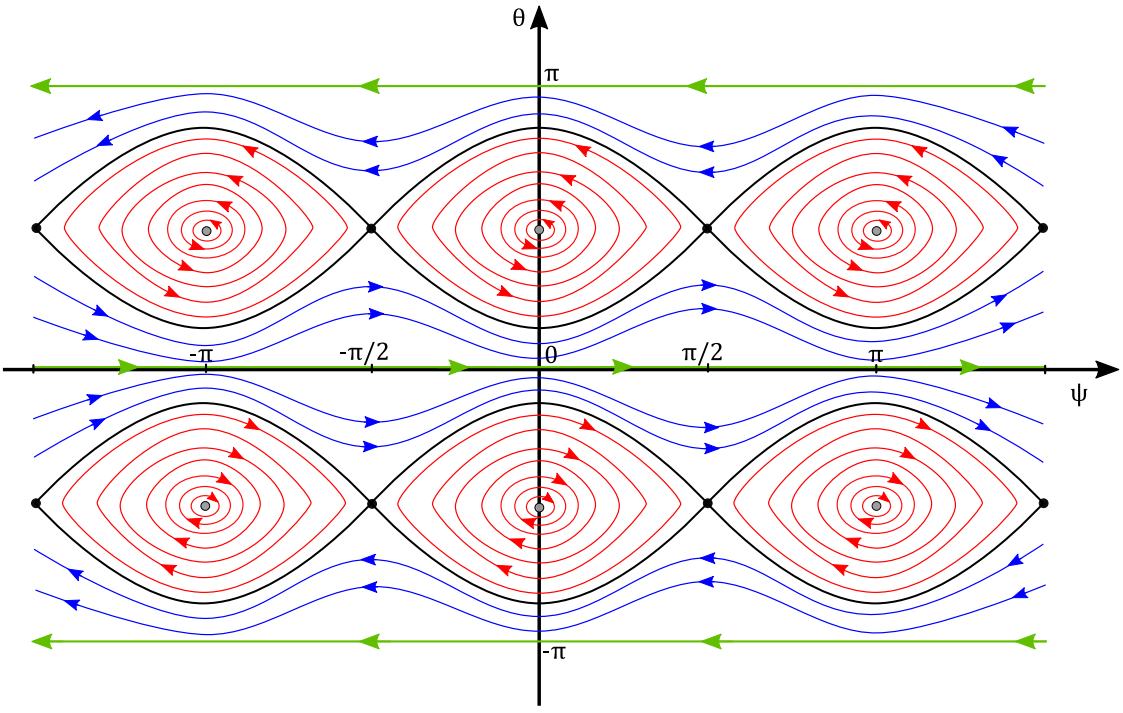

图 4：相空间的示意图（ψ， θ）。蓝线和红线分别对应旋转轨迹和振荡轨迹。分界线以黑色绘制（$c = 0$）。灰色点和绿色曲线的值分别为 $c = -b$ 和 $c = a$。

我们将曲线 $\mathcal{C}$ 定义为满足以下条件的点对 (c,ε) 的集合：当 ψ、$\psi_i = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ 和 $\psi_f = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$取对称的初始值和终值时，对于由 c的值所确定的轨迹，沿轨迹从初始点到终点所需的时间为 2π (即 $\Delta\phi = 2\pi$)。如前所述，可以利用方程 (18) 研究这一效应。困难在于，由下式给出的项 $\cos\theta$ 的符号

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{c + b\cos^2\psi}{a + b\cos^2\psi}}, \tag{20}$$

接下来，导数 $d\psi/d\phi$ 的符号取决于我们所考虑的相空间区域。为检测符号变化，我们引入曲线

$$\mathcal{S} = \{(c,\varepsilon) \mid c = -b\sin^2(\varepsilon)\}$$

该曲线上，$\cos\theta$ 等于 0，而 ε 由初始条件 $\psi = -\pi/2 + \varepsilon$ 确定。因此，符号变化对应于曲线 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 的一个交点。

本节中，我们证明曲线 $\mathcal{C}$ 是函数 $\varepsilon = \varepsilon(c)$ 的图像。我们推导描述该函数的隐式方程，并研究曲线的不同性质，从而得到 TRE 的全局描述。关于 TRE 上物理约束的符号，主要结果如下。

定理 3。函数 $\varepsilon(c)$ 是单射，当且仅当几何常数 $\mathcal{I}$ 满足 $\mathcal{I} \geq 1$，也就是说，当且仅当该刚体是物理的。

定理 3 的证明见第 6.1 节。

曲线 $\mathcal{C}$的描述

我们首先确立关于集合 $\mathcal{C}$ 的不同结果。

引理 1. 集合 $\mathcal{C}$ 是平面 (c,ε) 中的一条曲线，可表示为函数$c \mapsto \varepsilon(c)$的图像。

证明. 我们需要证明，对于固定的 c ，只存在一个 ε的取值。假设存在两个 ε的取值，即 ε_1 和 ε_2 ，它们都满足曲线 $\mathcal{C}$ 的定义。沿曲线从 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon_k$ 到 $\frac{\pi}{2} - \varepsilon_k$ 所需的时间，对于 $k = 1,2$，等于 2π 。由此可知，从一个点到另一个点（例如从 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1$ 到 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2$）所需的时间为 0。我们得出结论：$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$。 □

第一个隐式方程

我们考虑 $\frac{d\psi}{d\phi}$ for $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$的导数，即 $\cos\theta > 0$ 的情形。利用公式（18）和（20），可得 TRE 可表示为隐式方程的解（c，ε）：

$$2\pi = \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a)(b\cos^2(\psi) + c)}} d\psi. \tag{21}$$

公式（21）的被积函数中的平方根有定义，当 $c \geq -b\sin^2(\varepsilon)$ 时，即 在与曲线 $\mathcal{S}$ 相交之前。

对于 ε 的非负值，可以考虑如下坐标变换： $x = \cos^2(\psi)$，由此得到

$$2\pi = F_{a,b}(c,u) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_u^1 \frac{1 - bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x+\frac{c}{b})}} dx, \tag{22}$$

其中 $u = \sin^2 \varepsilon$、 a 和 b 是固定参数， c 和 u 是变量。注意， $u \geq 0$ 和 $\mathcal{S} = \{(c, u) \mid c = -bu\}$。

接下来，我们研究曲线由公式（21）描述的区域内 $\mathcal{C}$ 的一些性质。

命题 2. 由隐式方程的解给出的函数 $\varepsilon(c)$ 是一个单射递减函数。 (21)

证明. 利用被积函数的对称性，我们可以将公式（21）变换为

$$\pi = I_{a,b}(c,\varepsilon) = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(b\cos^2(\psi)+a)(b\cos^2(\psi)+c)}} d\psi. \tag{23}$$

我们分析曲线由公式（23）描述的点 (c_1, ε_1) 附近的集合 $\mathcal{C}$ 。由 $I_{a,\,b}(c, \varepsilon) - \pi$ 给出的函数是连续可微函数，且 $I_{a,\,b}(c_1, \varepsilon_1) - \pi = 0$。因此，我们可以使用隐函数定理来计算函数 $\varepsilon(c)$ 的导数。该函数关于 ε 的偏导数为

$$\frac{\partial(I_{a,b}(c,\varepsilon) - \pi)}{\partial \varepsilon}(c_1, \varepsilon_1) = -\frac{1 - b\cos^2(\pi/2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{(b\cos^2(\pi/2-\varepsilon_1)+a)(b\cos^2(\pi/2-\varepsilon_1)+c_1)}} \neq 0.$$

该偏导数不等于 0，因此根据隐函数定理，在点 (c_1, ε_1) 附近存在局部解，并得到以下导数表达式

$$\frac{d\varepsilon}{dc} = -\left(\frac{\partial I_{a,b}}{\partial c}\right) \Big/ \left(\frac{\partial I_{a,b}}{\partial \varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon(c)}.$$

根据 $I_{a,\,b}$ 的定义，我们得到

$$\frac{d\varepsilon}{dc} = -\frac{\int_0^{\pi/2-\varepsilon(c)} \frac{1-b\cos^2(\psi)}{\sqrt{b\cos^2(\psi)+a}} \left(\frac{1}{2(b\cos^2(\psi)+c)^{\frac{3}{2}}}\right) d\psi}{\frac{1-b\cos^2(\pi/2-\varepsilon(c))}{\sqrt{(b\cos^2(\pi/2-\varepsilon(c))+a)(b\cos^2(\pi/2-\varepsilon(c))+c)}}} \leq 0. \tag{24}$$

由于方程 (24) 对曲线 $\mathcal{C}$ 由第一个隐式方程描述的任意点附近均成立，因此我们得出结论：曲线的这一部分严格递减（表达式 (24) 的零点构成离散零点集）。由此可知其具有单射性。 □

方程（22）可用于研究分界线上是否存在 TRE，以及完美 TRE 是否存在，具体结果如下。

命题 3。

1. TRE 总是出现在分界线上。

2. 当且仅当 $\mathcal{J} < 2.$ 时，才会出现完美 *TRE*

证明。 1. 在分界线上存在 TRE，等价于找到 u_0 =$\sin^2(\varepsilon_0)$，使得

$$2\pi = F_{a,b}(0, u_0) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{u_0}^{1} \frac{1 - bx}{x\sqrt{(1-x)(1+\frac{b}{a}x)}} dx. \tag{25}$$

利用公式（25）右侧的表达式，我们观察到$F_{a,\ b}(0,\ u)$ 在 u 趋于 0 和 1 时，分别趋于 $+\infty$ 和 0。因此我们得出结论，存在 $u_0 \in (0,\ 1)$，使得 $2\pi = F_{a,\ b}(0,\ u_0)$。

2. 要证明完美 TRE（$\varepsilon = 0$）存在，就需要证明存在 $c_0 \in (-b,\ a)$，使得

$$2\pi = F_{a,b}(c_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{0}^{1} \frac{1 - bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x+\frac{c_0}{b})}} dx.$$

我们有 $F_{a,\ b}(c,\ 0)$ 在 c 趋于 0 时趋于 ∞；根据第 4 节中的计算，我们知道 $2F_{a,\ b}(c,\ 0)$ 是一个递减函数，其最大下界等于 $2\pi\mathcal{J}$。由此得出结论：当且仅当 $\mathcal{J} < 2$ 时，才会出现完美 TRE。

□

ε_0 和 c_0 分别表示分界线上的 TRE 和完美 TRE。示意图见图 5。在第 7 节中，我们将研究这些效应随参数 a 变化时的行为。

$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$的交点

在前一个小节中，我们使用第一个隐式方程来推导曲线 $\mathcal{C}$ 的性质，并说明该方程在曲线 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$ 相交的点之前均成立（即当 $\cos\theta$ 变号时）。现在，我们将说明这两条曲线在什么条件下相交。

首先请注意，在区域 $b\sin^2(\varepsilon) + c < 0$ 中，公式（21）的积分被积函数没有明确的定义，而曲线 $\mathcal{S}$ 是该区域的边界。如果 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$存在交点，那么 c 必须为负值；由于此时 $\mathcal{C}$ 是一条递减曲线，这对应于 ε 为正值，见图 5。因此，我们可以使用公式（22）。

引理 2. 曲线 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 在$(0, 1]$, 处相交，当且仅当 $\mathcal{I} \leq 2$。

证明。 如果 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$ 在 $(0, 1]$, 相交，那么存在 $u^* \in (0, 1]$ 使得$F_{a,\ b}(-bu^*,\ u^*) = 2\pi$。利用附录 A 的引理 6 和引理 7，我们推得 $u = 1$ 是函数 $F_{a,\ b}(-bu,\ u)$ 的最小值。因此 $F_{a,\ b}(-b,\ 1) \leq F_{a,\ b}(-bu^*,\ u^*)$，这意味着 $\mathcal{I} \leq 2$。

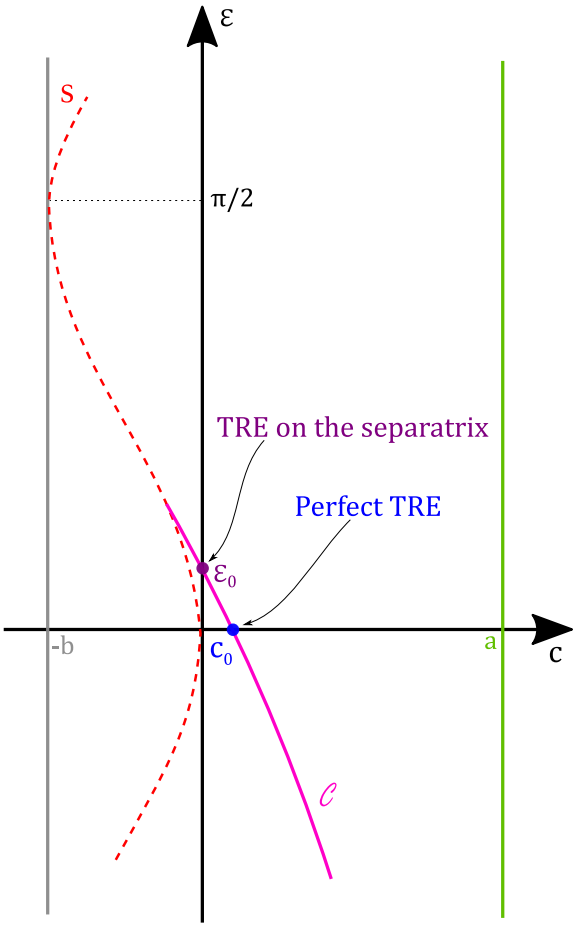

图5：曲线$\mathcal{C}$（洋红色实线）所描述部分在空间$(c,\ \varepsilon)$中的示意图，该部分由第一个隐式方程描述。红色虚线表示集合$\mathcal{S}$。灰色和绿色垂直线的方程分别为$c=-b$和$c=a$。点ε_0和c_0表示TRE在分界线上的位置以及完美TRE的位置（详见正文）。

反过来，两条曲线的交点由方程$F_{a,\ b}(c,\ u)\ =2\pi$刻画，其中$c=-bu$。函数$F_{a,\ b}(-bu,\ u)$是一个连续函数，当u趋于0时趋于∞，并满足

$$F_{a,b}(-bu,u)\to\pi\mathcal{I}\leq 2\pi,$$

当u趋于1时（利用引理7）。我们得出结论，存在$u^*\in(0,1]$,使得$F(-bu^*,\ u^*)\ =2\pi$，因此存在一个交点。□

注意，$u\in(0,1]$等价于$\varepsilon\in(0,\ \frac{\pi}{2}]$，并且交点是唯一的，因为$F_{a,\ b}(-bu,\ u)$是一个递减函数（见引理6）。

注1. 利用前面的证明，我们推得交点恰好位于$u=1$中，当且仅当$\mathcal{I}=2$。

我们推导出了一个关于参数的条件，该条件可确保 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$ 之间存在交点。在此交点之后，描述解曲线 $\mathcal{C}$ 的隐式方程会如下所述发生变化。我们首先回顾一下，第一个隐式方程描述的是区域 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 中的曲线 $\mathcal{C}$，即 $\cos\theta > 0$。注意，如果 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$ 之间存在交点，则 $c < 0$，这对应于振荡轨迹。这些闭合轨道的周期 T_ϕ 可通过以下关系计算

$$\frac{d\phi}{d\psi} = \pm \frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a)(b\cos^2(\psi) + c)}}.$$

确实，由于这些解具有对称性，并且我们考虑整个轨道来计算周期，因此可得

$$T_\phi(c) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon^*}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon^*} \frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a)(b\cos^2(\psi) + c)}} d\psi = 2F_{a,b}(-bu, u). \quad (26)$$

公式（26）中的最后一个等式，是通过执行我们之前使用过的坐标变换得到的：$x = \cos^2(\psi)$ 和 $c = -bu = -b\sin^2(\varepsilon)$。引理 6 证明，当 c 减小时，周期 $T_\phi(c)$ 也会减小。在图 4 中，这意味着较小的轨道具有较短的周期（ϕ 在此相空间中起时间的作用）。由此可知，在 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$ 的交点之后，$\cos(\theta)$ 的符号会发生变化，因为当 c 取介于 $-b$ 与该交点对应的值之间的数值时，周期更短。

第二个隐式方程具有如下形式

$$2\pi = \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{-\pi/2+\varepsilon^*} -h_{a,b,c}(\psi)d\psi + \int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c}(\psi)d\psi + \int_{\pi/2-\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon} -h_{a,b,c}(\psi)d\psi, \quad (27)$$

其中 $\varepsilon^* \in (0, \frac{\pi}{2})$，并且

$$h_{a,b,c}(\psi) = \frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(a + b\cos^2(\psi))(c + b\cos^2(\psi))}}.$$

注意到 $\varepsilon \in [\varepsilon^*, \pi - \varepsilon^*]$。因此 $\varepsilon^* < \varepsilon$。通过直接计算，可得到以下用 $F_{a,\,b}$ 表示的表达式

$$2F_{a,b}(c, -\frac{c}{b}) - F_{a,b}(c, u) = 2\pi, \quad (28)$$

对于 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ 和

$$2F_{a,b}(c, -\frac{c}{b}) + F_{a,b}(c, u) = 2\pi, \quad (29)$$

对于 $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$。

每经过曲线 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$之间的一个交点，描述曲线 $\mathcal{C}$ 的隐式方程就会发生变化，如 B 中明确所示。

6 物理和非物理情形下的曲线 $\mathcal{C}$

在本节中，我们证明，可以从曲线 $\mathcal{C}$ 的结构检测出刚体的物理属性，因为物理刚体与非物理刚体的曲线 $\mathcal{C}$ 性质不同。

6.1 物理情形

定理 3 的证明将在本小节末尾给出。首先，我们展示定理 3 的证明所依据的两个结果。

引理 3. 存在一个交点$(c_1, \varepsilon(c_1))$ 位于 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 之间，并且存在一点$(c^*, \frac{\pi}{2}) \in \mathcal{C}$，使得 $c^* \in (\bar{c_2}, c_1)$，当且仅当 $\mathcal{I} < 1$。这里， c_2 要么是第二个交点的坐标，要么在不存在第二个交点时等于 $-b$ 。

证明。 由于点 $(c^*, \frac{\pi}{2}) \in \mathcal{C}$ 位于第一个交点和第二个交点之间（即 $c^* \in (c_2, c_1)$），因此描述该点处 $\mathcal{C}$ 的隐式方程由方程（27）给出，从而对于 $c = c^*$ 和 $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$，可得以下表达式

$$2\int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} \frac{1-b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(a+b\cos^2(\psi))(c^*+b\cos^2(\psi))}} = 2\pi,$$

这等价于

$$F_{a,b}(-bu^*, u^*) = \pi,$$

其中 $u^* = -\frac{c^*}{b}$。由于 $F_{a,b}(-bu, u)$ 的最小值为 $\mathcal{I}\pi$ 和 $c^* \neq -b$，我们得出 $\pi\mathcal{I} < \pi$，从而得到 $\mathcal{I} < 1$。

反过来，条件 $\frac{1-b}{\sqrt{b(a+b)}} < 1 < 2$（根据引理 2）意味着区间 $u \in (0,1)$ 上存在一个交点，这就得到$-b < c_1$。令 $u_1 = -\frac{c_1}{b}$。首先，我们证明条件 $\mathcal{I} < 1$ 保证存在一个解 $u^* \in (u_1,1)$，满足隐式方程$F_{a,b}(-bu, u) = \pi$。通过采用引理 2 中相同的分析，我们发现，当 u 等于 u_1时，$F_{a,b}(-bu, u)$ 等于 2π；而当u 趋于 1 时，它趋于 $\pi\mathcal{I}$。根据假设 $\pi\mathcal{I} < \pi$，我们得出结论：存在 $u^* \in (u_1,1)$，使得 $F_{a,b}(-bu^*, u^*) = \pi$。

现在，我们定义 $c^* = -bu^* < c_1$ 并证明点 $(c, \varepsilon) = (c^*, \frac{\pi}{2})$ 属于 $\mathcal{C}$。我们考虑表达式 (27)，因为我们分析的是第一个交点之后的 $\mathcal{C}$ 。

$$\int_0^{-\pi/2+\varepsilon^*} -h_{a,b,c^*}(\psi)d\psi + \int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c^*}(\psi)d\psi + \int_{\pi/2-\varepsilon^*}^{0} -h_{a,b,c^*}(\psi)d\psi = 2\int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c^*}(\psi)d\psi.$$

使用坐标变换 $x = \cos^2(\psi)$，我们得到

$$2\int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c^*}(\psi)d\psi = 2F_{a,b}(c^*, \frac{-c^*}{b}) = 2F_{a,b}(-bu^*, u^*) = 2\pi.$$

因此，$(c^*, \frac{\pi}{2})$ 属于 $\mathcal{C}$。由于它是第二个隐式方程的一个解，我们还得到 $c^* \in (c_2, c_1)$，其中 c_2 要么是第二个交点的坐标，要么在不存在第二个交点时为 $-b$。 □

沿用前面的证明，当 $c^* = -b$ 和 $\mathcal{I} = 1$ 时，也可以得到相同的结果。

命题 4。 函数 $\varepsilon(c)$ 不是单射，当且仅当存在一点 $(c^*, \frac{\pi}{2}) \in \mathcal{C}$，其中 $c^* \in (-b, 0)$。

证明。由于函数 $\varepsilon(c)$不是单射，因此在 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$之间存在一个交点（$c_1, \varepsilon(c_1)$）；这是因为我们已经证明，函数 $\varepsilon(c)$ 在第一个隐式方程所描述的部分上是单射的。既然存在交点，我们便分析方程（28），并证明 $\varepsilon(c)$在由最后这个方程描述时是严格递减函数。考虑$c_3 < c_2 < c_1 < 0$。周期 $T_\phi(c)$ 随着 c 减小而减小，这意味着$2F_{a,b}(c_3, \frac{-c_3}{b}) < 2F_{a,b}(c_2, \frac{-c_2}{b})$。因此，我们有

$$2F_{a,b}\left(c_3, \frac{-c_3}{b}\right) - 2\pi < 2F_{a,b}\left(c_2, \frac{-c_2}{b}\right) - 2\pi. \tag{30}$$

利用 $c_3 < c_2$，我们得到

$$0 < \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x+\frac{c_2}{b})}} < \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x+\frac{c_3}{b})}}. \tag{31}$$

因此，若 u_2 和 u_3 满足

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\int_{u_2}^{1} \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x+\frac{c_2}{b})}} = 2F_{a,b}\left(c_2, \frac{-c_2}{b}\right) - 2\pi,$$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\int_{u_3}^{1} \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x+\frac{c_3}{b})}} = 2F_{a,b}\left(c_3, \frac{-c_3}{b}\right) - 2\pi,$$

利用方程（30）和（31），我们得到 $u_2 < u_3$，这等价于

$$\varepsilon(c_2) = \arcsin\left(\sqrt{u_2}\right) < \varepsilon(c_3) = \arcsin\left(\sqrt{u_3}\right). \tag{32}$$

我们刚刚证明，当函数 $\varepsilon(c)$由方程（28）描述时，它是严格递减函数。因此，$\varepsilon(c)$在由第一个隐式方程和方程（28）描述的区域内是单射。由于 $\varepsilon(c)$在整体上不是单射，我们得出结论：存在一点 $(c^*, \frac{\pi}{2}) \in \mathcal{C}$，且$c^* \in (-b, 0)$。

反过来，我们有 $\varepsilon(c^*) = \frac{\pi}{2}$，并且请注意，对于分界线上的 TRE，我们有 $\varepsilon(0) \in (0, \frac{\pi}{2})$。因此，$[\varepsilon(0) \frac{\pi}{2}]$ 中的所有值都由函数 $\varepsilon(c)$ 取到。如果函数 $\varepsilon(c)$ 在 $c \in (-b, c^*)$ 时小于 $\frac{\pi}{2}$，则该函数不是单射。若非如此，则存在 $\delta_1 > 0$ 和 $\delta_2 > 0$，使得

$$(\frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2} + \delta_2) \subset \varepsilon\left((c^* - \delta_1, c^* + \delta_1)\right).$$

我们还有

$$\varepsilon(c) \in \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{-c}{b}}\right), \pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{-c}{b}}\right)\right].$$

由于 $\arcsin\left(\sqrt{\frac{-c}{b}}\right) \to \frac{\pi}{2}$，当 $c \to -b$ 时，存在 $\tilde{c}$，使得 $\tilde{c} < c^* - \delta_1$，且足够接近 $-b$，从而

$$\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{-\tilde{c}}{b}}\right), \pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{-\tilde{c}}{b}}\right)\right] \subset \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2} + \delta_2\right).$$

最后，我们得出 $\varepsilon(\tilde{c}) \in (\frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2} + \delta_2)$，即，函数 $\varepsilon(c)$ 不是单射函数。

□

定理 3 的证明。 如果函数 $\varepsilon(c)$ 不是单射函数，那么在 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 之间存在一个交点 $(c_1,\ \varepsilon(c_1))$ 以及一个点 $(c^*,\ \frac{\pi}{2}) \in \mathcal{C}$，其中 $c^* \in (-b,\ c_1)$。这是命题 4 的证明的结果。利用引理 3，我们得到 $\mathcal{I} < 1$。反之，如果 $\mathcal{I} < 1$ 利用引理 3，我们推得在 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 之间存在一个交点 $(c_1,\ \varepsilon(c_1))$ 以及一个点 $(c^*,\ \frac{\pi}{2}) \in \mathcal{C}$，其中 $c^* \in (-b,\ c_1)$，这意味着函数 $\varepsilon(c)$ 不是单射函数（由命题 4 得出）。第一个结论得证。

第二个结论现在可直接由命题 1 得出。 □

6.2 非物理情形下的曲线 $\mathcal{C}$

定理 3 表明，对于物理刚体，曲线 $\mathcal{C}$ 由一个单射递减函数描述；而对于非物理系统，该函数不是单射。在后一种情形下，该函数相对于曲线 $\mathcal{S}$ 呈现振荡行为，即曲线 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 有多个交点。此外，交点的数量取决于几何常数 $\mathcal{I}$ 的取值，以下定理将说明这种依赖关系。数值计算展示了图 6 中这些不同的行为。

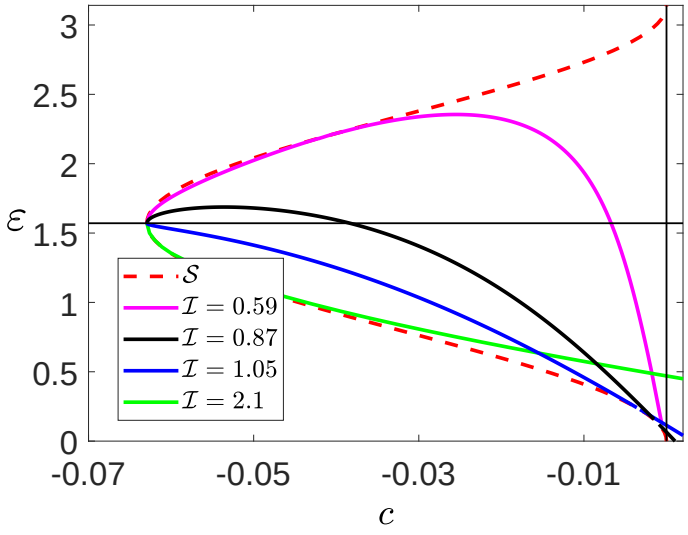

图 6：函数 $\varepsilon(c)$ 的图像。我们固定 $b = 0.0629$ 的值，并改变 a 的值。紫色、黑色、蓝色和绿色实线分别对应于 $a = 39.95$，$a = 18.27$、$a = 12.65$ 和 $a = 3.1$，其取值分别为 $\mathcal{I} = 0.59$、0。87、1.05 和 2.1。红色虚线曲线表示集合 $\mathcal{S}$。黑色水平线和垂直线的方程分别为 $\varepsilon = \pi/2$ 和 $c = 0$。

定理 4. 对于每个 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，如果参数 a 和 b 满足 $\mathcal{I} < \frac{2}{2n+1}$，则 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$ 之间至少存在 n 个交点。此外，如果 $(c_n, \varepsilon(c_n))$ 是第 n 个交点的坐标，那么存在 $c^* \in (-b, c_n)$ 使得 $\varepsilon(c^*) = \frac{\pi}{2}$，并且还存在另一个交点 $(c_{int}, \varepsilon(c_{int}))$，使得 $c_{int} \in (-b, c_n)$。

证明推广了前述引理中使用的思路，详见附录 B。

7 网球拍效应相对于几何参数 a 和 b的整体行为

c_0 和 ε_0 随 a的变化

回顾一下，命题 3 中引入的 c_0 和 ε_0分别表示完美 TRE 和分界线上的 TRE。本节证明，当 a 增大时，$c_0(a,\ b)$ 和 $\varepsilon_0(a,\ b)$ 的值会减小。该结果有助于分析参数 a变化时 $\mathcal{C}$ 的行为。由于我们考虑了 $(a,\ b)$ 的不同取值，本节使用记号 $\mathcal{C}_{a,\ b}$ 代替 $\mathcal{C}$。

引理 4. 考虑参数 a 的两个取值，使得 $0 < a_1 < a_2$，以及解 $(0, c_0(a_1)) \in \mathcal{C}_{a_1,b}$, $(0, c_0(a_2)) \in \mathcal{C}_{a_2,b}$。则 $c_0(a_1) > c_0(a_2)$。

证明。 我们有 $(0, c_0(a_1)) \in \mathcal{C}_{a_1,b}$ 以及 $(0, c_0(a_2)) \in \mathcal{C}_{a_2,b}$。因此

$$\pi = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - b\cos^2(\psi))d\psi}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_1)(b\cos^2(\psi) + c_0(a_1))}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - b\cos^2(\psi))d\psi}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_2)(b\cos^2(\psi) + c_0(a_2))}}.$$

由于 $a_1 < a_2$，因此 $\sqrt{b\cos^2(\psi) + a_1} < \sqrt{b\cos^2(\psi) + a_2}$。后一个不等式意味着

$$\frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{b\cos^2(\psi) + a_2}} < \frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{b\cos^2(\psi) + a_1}}.$$

由前两个方程可得

$$\frac{1}{\sqrt{b\cos^2(\psi) + c_0(a_2)}} > \frac{1}{\sqrt{b\cos^2(\psi) + c_0(a_1)}},$$

这将得到

$$c_0(a_1) > c_0(a_2).$$

□

引理 5. 考虑参数 a 的两个取值，使得 $0 < a_1 < a_2$，并且解 $(\varepsilon_0(a_1), 0) \in \mathcal{C}_{a_1,b}$, $(\varepsilon_0(a_2), 0) \in \mathcal{C}_{a_2,b}$。则 $\varepsilon_0(a_1) > \varepsilon_0(a_2)$。

证明。 我们沿用前一个证明中的相同思路。由于 $(\varepsilon_0(a_1), 0) \in \mathcal{C}_{a_1,b}$ 以及 $(\varepsilon_0(a_2), 0) \in \mathcal{C}_{a_2,b}$，可得

$$\pi = \int_0^{\pi/2-\varepsilon_0(a_1)} \frac{(1 - b\cos^2(\psi))d\psi}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_1)b\cos^2(\psi)}} = \int_0^{\pi/2-\varepsilon_0(a_2)} \frac{(1 - b\cos^2(\psi))d\psi}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_2)b\cos^2(\psi)}}.$$

由于 $a_1 < a_2$，因此 $\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_1)b\cos^2(\psi)} < \sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_2)b\cos^2(\psi)}$，得

$$\frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_2)b\cos^2(\psi)}} < \frac{1 - b\cos^2(\psi)}{\sqrt{(b\cos^2(\psi) + a_1)b\cos^2(\psi)}}.$$

由前面的两个方程可得

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0(a_1) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0(a_2).$$

我们得出结论： $\varepsilon_0(a_1) > \varepsilon_0(a_2)$。 □

对于 a和 b的任何允许取值，这些性质都成立。注意，当改变 a的值而不改变 b 的值时，我们得到相同的极限曲线 $\mathcal{S}_b$ ，该曲线无法被穿越，但集合$\mathcal{C}_{a,\ b}$ 会发生变化。根据这些结果，我们知道，随着 a 增大，曲线$\mathcal{C}_{a,\ b}$ 会向下移动，也就是说，它与两条坐标轴的交点会减小（见图5和图7）。图7给出了一个物理刚体和非物理刚体的数值示例。我们观察到，在这两种情形下， ε 随 c 变化的规律相似。当 a 在 b固定时趋近于 ∞ ，曲线 $\mathcal{C}$ 在 $c = \varepsilon = 0$处与 $\mathcal{S}$ 相切。[14]描述了这一极限情形。

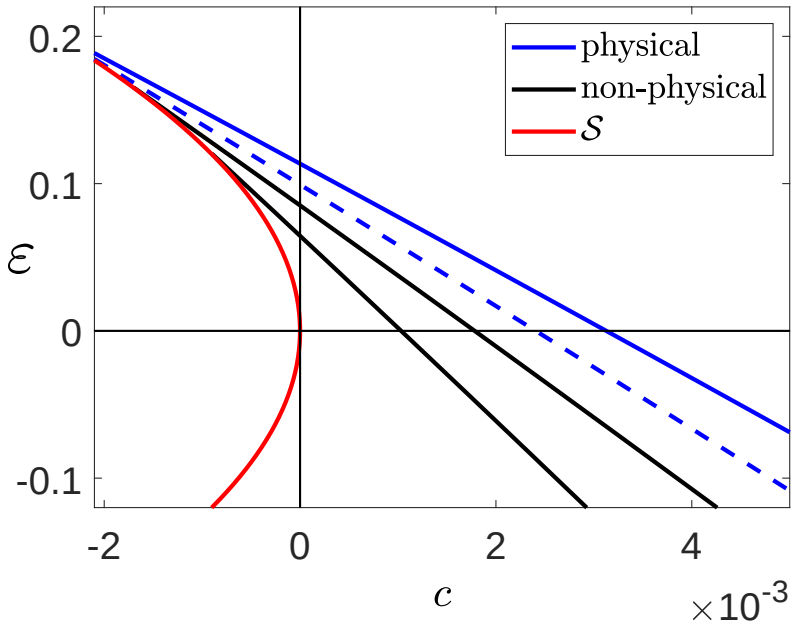

图7：缺陷 ε 随 c 变化的曲线图（曲线$\mathcal{C}_{a,\ b}$），其中 a取不同值，参数 b 固定为0.06。参数 a 依次取值12.65、13.89、15.38和18.27（蓝色实线、蓝色虚线和两条黑色实线），对应的 $\mathcal{I}$ 分别为1.045、1、0.951和0.872。水平和垂直实线分别表示完美 TRE（$\varepsilon = 0$）和分界线（$c = 0$）的位置。集合 $\mathcal{S}$ 以红色绘出。

备注 2。要在分界线上获得完美 *TRE*，唯一的可能是考虑抽象极限 $a \to \infty$。这一情形见 *[14]*。此外，如第 *2* 节所述，物理约束对应于 $2b + ab \leq 1$。若在 $a \to \infty$ 时满足这一不等式，则 $b \to 0$。这一情形（$a \to \infty$， $b \to 0$）

将在下文中描述。注意，当 $a \to \infty$ *and* $b \to 0$ 时，物理约束变为 $ab \leq 1$。

当 $a \to \infty$ 且 $b \to 0$时翻转缺陷 ε 的行为

为了在极限情形 $a \to \infty$且 $b \to 0$下推导翻转缺陷 ε 的显式表达式，我们从以下隐式方程出发

$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{1-b\cos^2\psi}{\sqrt{(a+b\cos^2\psi)(c+b\cos^2\psi)}}d\psi = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{1-b\cos^2\psi}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a}\cos^2\psi)(\frac{c}{b}+\cos^2\psi)}}d\psi = \pi. \tag{33}$$

因此，当 $a \to \infty$ 且 $b \to 0$时，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{b}+\cos^2\psi}}d\psi = \pi. \tag{34}$$

若将参数 χ 和 β 定义如下

$$\chi = ab, \qquad \beta = \frac{c}{b}, \tag{35}$$

并使用恒等式 $\cos^2\psi = 1 - \sin^2\psi$，则方程（34）可写为

$$\frac{1}{\sqrt{\chi(1+\beta)}}\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\beta}\sin^2\psi}}d\psi = \frac{1}{\sqrt{\chi(1+\beta)}}F\big(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\Big|\frac{1}{1+\beta}\big) = \pi, \tag{36}$$

其中，函数 F 是由下式定义的第一类不完全椭圆积分

$$F(\varphi|m) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}dt. \tag{37}$$

因此，根据方程（36），我们可以得到翻转缺陷 ε

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \mathrm{am}\left(\pi\sqrt{\chi(1+\beta)}\Big|\frac{1}{1+\beta}\right), \tag{38}$$

其中 am 是雅可比振幅。回想一下，雅可比振幅定义为第一类不完全椭圆积分的反函数，即如果 $u = F(\varphi|m)$，那么 $\varphi = \mathrm{am}(u|m)$。

根据引理 5，我们知道，分界线 ε_0 上的翻转缺陷会随着 a 的增加而减小，因此，ε_0 的可能最小值将在 $a \to \infty$时出现。因此，我们可以使用表达式（38）来确定满足物理约束 $\chi \leq 1$时 ε_0 的最小值。结果表明，在 $c < 0$的情况下，当 $\chi \to 1$ 且 $\beta \to 0$时，ε 存在最小值。在这一极限情形下，我们有

$$\varepsilon_{0,min} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{am}(\pi|1) = \pi - 2\arctan\left(e^{\pi}\right) = 0.086374. \tag{39}$$

而在 $c > 0$ 的情况下，$\beta \neq 0$ 存在一个最小值，使得 $\varepsilon = 0$，这发生在 $\chi \to 1$ 时，即

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{am}\left(\pi\sqrt{(1+\beta)}\Big|\frac{1}{1+\beta}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0.028973. \tag{40}$$

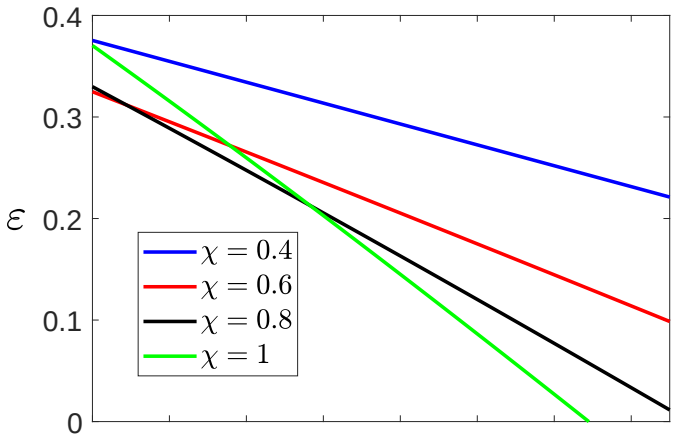

图8：函数 $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \mathrm{am}\left(\pi\sqrt{\chi}(1+\beta)\middle|\frac{1}{1+\beta}\right)$ 的图像。$\chi = 1$、0.8、0.6 和 $\chi = 0.4$ 的取值分别对应绿色、黑色、红色和蓝色曲线。

图8 展示了上述分析。例如，我们观察到，当非常接近分界线 $\beta = 0$ 时，不存在能够实现完美 $\Delta\psi = \pi$ 扭转的物理刚体（也就是说，$\chi \leq 1$）（即 $\varepsilon_0 = 0$）。不过，我们观察到，当 $\beta = 0$ 时，ε_0 的可能最小值出现在 $\chi \to 1$，因此，具有 $\chi = 1$ 特征的物理刚体将在分界线上实现最佳的准完美扭转 $\Delta\psi = \pi - 2\varepsilon_{0,\ min} = 2.96884$。

8 结论

总之，本研究展示了如何通过两种几何效应——蒙哥马利相位和网球拍效应——的行为，来检测刚体的物理或非物理属性。这两种效应刻画了非对称刚体的自由转动动力学。我们证明，物理约束的特征具有几何性质，即它们对应于这两种几何效应的定性变化。这些特征的存在本身就是一个令人瞩目且出乎意料的结果。我们还引入了两个自然的几何常数 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$，它们取决于刚体的转动惯量。我们证明，只有通过这两个常数才能刻画这些几何特征。例如，我们证明，系统能量变化时，缺陷向完美 TRE 演化的过程可由一个单射函数描述，当且仅当 $\mathcal{I} > 1$，也就是说，物理约束得到满足。我们通过数值模拟展示这些发现，以说明这些特征具有普遍性。

我们的研究为探索不同问题开辟了道路。首先要探讨的问题是如何实验检测这些物理约束。我们确立了关于刚体几何性质的一系列结果。

一个有趣的问题是，能否通过实验观测到这些几何特征。对于手机 [22] 这类标准刚体，这种测量相当简单。根据 [14], 中确立的结果，另一个尚待解决的问题是，能否在 Monster Flip 效应中找到几何特征。Monster Flip 是一种自由式滑板技巧，可以在任何非对称刚体的转动动力学中观察到。另一个引人深思的问题是，这类物理约束在量子领域中的作用 [23, 24, 20]。与本研究相契合，一个值得首先探索的问题是，这些物理约束对系统量子动力学性质的几何特征。一个可能的特征基于量子旋转数；它是分子光谱结构的特征，与蒙哥马利相位密切相关，如 [7] 所示。需要注意转动常数及其与转动惯量的关系。水分子就是一个例子，其振动基态的转动常数为$A = 9.28$ cm^{-1}、 $B = 14.52$ cm^{-1} 和 $C = 27.88$ cm^{-1} [25]。然而，只有平衡转动常数与转动惯量成反比，例如 $A_e = h/(8\pi^2 c I_A)$。在我们的例子中， $A_e = 9.5077$ cm^{-1}、$B_e = 14.5924$ cm^{-1} 和 $C_e = 27.2660$ cm^{-1} ，由此得到 $\mathcal{I} = 1.001$，该值约为 1（在实验不确定度范围内），符合平面经典分子的预期。根据第一组转动常数直接计算得到 $\mathcal{I} = 0.946$。两组转动常数之间的差异源于振动修正 [25]。在这种情况下，量子系统不能视为刚体，这解释了为何几何常数小于 1。最后，研究这类物理约束在控制经典或量子刚体方面的作用也很有意义 [20, 26, 27, 28]。

致谢。 本工作得到 Ecole Universitaire de Recherche (EUR)-EIPHI Graduate School（资助编号：17- EURE-0002）的支持。感谢 V. Boudon 就量子情形进行的有益讨论。本研究得到 ANR-DFG 项目‘CoRoMo’的支持。

A 函数 $F_{a,\ b}\ (-bu,\ \ u)$

在本附录中，我们证明正文中所用的函数 $F_{a,\ b}(-bu,\ \ u)$ 的性质。

引理 6。 函数 $F_{a,\ b}\ (-bu,\ \ u)$ 在区间$[0,1]$ 上是递减函数，因此，其最小值在 $u = 1$ 中取得。

证明。 回顾一下，函数 $F_{a,\ b}(-bu,\ \ u)$ 的定义为

$$F_{a,b}(-bu,u) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_u^1 \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x-u)}} dx. \tag{41}$$

我们进行如下变量代换

$$x = u + (1-u)y^2, \tag{42}$$

因此，对于以 y 表示的 $x \in (u,1)$，我们有 $y \in (0,1)$。因此，积分 (41) 可写为

$$F_{a,b}(-bu,u) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \frac{1-b\left(u+(1-u)y^2\right)}{\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(u+(1-u)y^2\right)\left(1+\frac{b(u+(1-u)y^2)}{a}\right)}} dy. \quad (43)$$

由于现在积分上下限 (43) 不依赖于变量 u，要计算导数 $\partial_u F_{a,\,b}(-bu,\ u)$，只需进行如下计算

$$\begin{aligned}\partial_u F_{a,b}(-bu,u) &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^1 \partial_u \Big[\frac{1-b\left(u+(1-u)y^2\right)}{\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(u+(1-u)y^2\right)\left(1+\frac{b(u+(1-u)y^2)}{a}\right)}} \Big] dy \\ &= -\frac{b}{(ab)^{3/2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-y^2}\left(a+(a+2)b\left(u+(1-u)y^2\right)\right)}{\left(\left(u+(1-u)y^2\right)\left(1+\frac{b(u+(1-u)y^2)}{a}\right)\right)^{3/2}} dy.\end{aligned} \quad (44)$$

注意，方程 (44) 右侧有一个明确的负号；由于被积函数中的所有量均为正，我们可以得出导数 $\partial_u F_{a,\,b}(-bu,\ u)$ 始终为负。这意味着函数 $F_{a,\,b}(-bu,\ u)$ 在区间 $u \in [0,1]$ 上是单射递减函数，因此其全局最小值对应于满足 $u \to 1$ 的点。

□

引理 7. 函数 $F_{a,\,b}(-bu, u)$ 具有以下渐近行为

$$\lim_{u\to 0} F_{a,b}(-bu,u) = \infty, \quad (45)$$

$$\lim_{u\to 1} F_{a,b}(-bu,u) = \frac{1-b}{\sqrt{b(a+b)}}\pi. \quad (46)$$

证明。 根据函数 $F_{a,\,b}(-bu,\ u)$ 的方程 (41)，不难推得该函数在 $u \to 0$ 时发散。引理的第二个结论可证明如下。当 u 接近 1 时，函数 $F_{a,\,b}(-bu,\ u)$ 可近似表示为

$$F_{a,b}(-bu,u) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_u^1 \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x-u)}} dx \sim \frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-u)}} dx.$$

计算第二个积分后，我们得到

$$\frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-u)}} dx = \frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}}\pi. \quad (47)$$

然后我们估算这个近似的误差 $\mathcal{E}$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{E}| =& \left| \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_u^1 \frac{1-bx}{\sqrt{x(1-x)(1+\frac{b}{a}x)(x-u)}} dx - \frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-u)}} dx \right| \\
=& \frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}} \left| \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-u)}} \left(\frac{(1-bx)\sqrt{1+\frac{b}{a}}}{(1-b)\sqrt{x(1+\frac{b}{a}x)}} - 1 \right) dx \right| \\
\leq& \frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}} \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x-u)}} \ max_{\ x\in[u,1]} \left| \frac{(1-bx)\sqrt{1+\frac{b}{a}}}{(1-b)\sqrt{x(1+\frac{b}{a}x)}} - 1 \right| \\
=& \frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}} \pi \ max_{\ x\in[u,1]} \left| \frac{(1-bx)\sqrt{1+\frac{b}{a}} - (1-b)\sqrt{x(1+\frac{b}{a}x)}}{(1-b)\sqrt{x(1+\frac{b}{a}x)}} \right|,
\end{aligned}
$$

并且我们得到，当 $u \to 1$ 时， $|\mathcal{E}| \to 0$。

利用这一结果和式（47），我们得到

$$
F_{a,b}(-bu, u) \to \frac{1-b}{\sqrt{ab(1+\frac{b}{a})}} \pi,
$$

当 $u \to 1$ 时。 □

B 非物理情形下的一般隐式方程

由于周期 $T_\phi(c)$ 是递减函数，因此在 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 之间的每个交点之后，都可以进行与推导第二个隐式方程相同的推导。由此可知，描述 $\mathcal{C}$ 的隐式方程取决于交点的数量。

在前 n 个交点之后，描述 $\mathcal{C}$ 的隐式方程为

$$
2\pi = \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{-\pi/2+\varepsilon^*} -h_{a,b,c}(\psi)d\psi + (2n-1)\int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c}(\psi)d\psi + \int_{\pi/2-\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon} -h_{a,b,c}(\psi)d\psi, \tag{48}
$$

对于 n 奇数且

$$
2\pi = \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c}(\psi)d\psi + (2n-1)\int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c}(\psi)d\psi + \int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon} h_{a,b,c}(\psi)d\psi, \tag{49}
$$

对于 n 偶数。利用 $x = \cos^2(\psi)$，我们得到四个不同的表达式

$$
2nF_{a,b}(c, -\frac{c}{b}) - F_{a,b}(c,u) = 2\pi, \ n \text{ odd}, \ \varepsilon < \frac{\pi}{2} \tag{50}
$$

$$
2nF_{a,b}(c, -\frac{c}{b}) + F_{a,b}(c,u) = 2\pi, \ n \text{ odd}, \ \varepsilon \geq \frac{\pi}{2} \tag{51}
$$

$$
2nF_{a,b}(c, -\frac{c}{b}) - F_{a,b}(c,u) = 2\pi, \ n \text{ even}, \ \varepsilon > \frac{\pi}{2} \tag{52}
$$

$$
2nF_{a,b}(c, -\frac{c}{b}) + F_{a,b}(c,u) = 2\pi, \ n \text{ even}, \ \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \tag{53}
$$

引理 8。假设参数 a 和 b 满足 $\mathcal{I} < \frac{2}{3}$。令$(c_1, \varepsilon(c_1))$ 为 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{S}$之间第一个交点的坐标。那么存在一个交点$(c_{int}, \varepsilon(c_{int}))$，使得 $c_{int} \in (-b, c_1)$。

证明。首先注意到，条件 $\mathcal{I} < \frac{2}{3} < 2$ 意味着区间 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上存在一个交点，这是由引理 2 得出的，它给出 $-b < c_1$。接着，我们强调，$\mathcal{I} < \frac{2}{3} < 1$ 意味着存在一个点$c^* \in (-b, c_1)$，使得 $\varepsilon(c^*) = \frac{\pi}{2}$。

如果 c^* 与 c_1 之间还存在另一个交点，证明便完成了。否则，我们就在 c^* 之后寻找一个交点，即在区间 $(-b, c^*)$ 上。为此，我们对 $n = 1$ 使用表达式 (51)

$$2F_{a,b}(c, -\frac{c}{b}) + F_{a,b}(c, u) = 2\pi.$$

我们沿着曲线 $c = -bu$ 分析这个方程以寻找交点，得到

$$2\pi = 2F_{a,b}(-bu, u) + F_{a,b}(-bu, u) = 3F_{a,b}(-bu, u).$$

因此，我们的问题等价于寻找下列隐式方程的解：

$$F_{a,b}(-bu, u) = \frac{2\pi}{3}.$$

使用与之前相同的方法，我们注意到 $F_{a,b}(-bu, u)$ 等于 π，当 $u^* = \frac{c^*}{-b}$ 时，并且当 u 趋于 1 时趋于 $\mathcal{I}\pi < \frac{2}{3}\pi$。由此可知，存在$u_{int} \in (u^*, 1)$，使得 $F_{a,b}(-bu, u)$ 等于 $\frac{2\pi}{3}$。于是，点 (c_{int}, u_{int})（其中 $c_{int} = -bu_{int}$）是一个满足 $-b < c_{int} < c^* < c_1$ 的交点。

□

定理 *4* 的证明。我们通过归纳进行证明

- 基本情形。对于 $n = 1$，我们得到条件 $\mathcal{I} < \frac{2}{3} < 1 < 2$。利用引理 2，我们可知至少存在一个交点。利用引理 3 和引理 8，我们分别可知存在 c^* 以及交点（c_{int}，ε（c_{int}））。

- 归纳步骤。假设该陈述对 $n > 1$ 成立，我们证明其对 $n + 1$ 也成立。条件 $\mathcal{I} < \frac{2}{2n+1}(n+1) < \frac{2}{2n+1}$ 意味着至少存在 $n + 1$ 个交点（该陈述对 n 成立）。设（c_{n+1}，ε（c_{n+1}））为第（$n + 1$）个交点的坐标，并且 $u_n + 1 = -\frac{c_{n+1}}{b}$。注意到 $-b < c_{n+1}$，因此 $u_{n+1} < 1$（该陈述对 n 成立）。首先我们证明，条件 $\mathcal{I} < \frac{2}{2n+1}(n+1) < \frac{1}{n+1}$ 意味着隐式方程 F_a 存在一个解 $u^* \in$（u_{n+1}，1），$_b$（$-bu$，u）$= \frac{\pi}{n+1}$。利用与引理 2 中相同的分析，我们注意到 F_a，$_b$（$-bu$，u）等于 $\frac{2\pi}{2n+1}$（当 u 等于 u_{n+1} 时），并且当 u 趋近于 1 时趋近于 $\mathcal{I}\pi$。利用该假设，我们得到

$$\mathcal{I}\pi < \frac{\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{2n+1}.$$

我们得出结论，存在 $u^* \in (u_{n+1}, 1)$，使得 $F_{a,\ b}(-bu^*, u^*) = \frac{\pi}{n+1}$。现在，我们定义 $-b < c^* = -bu^* < c_{n+1}$，并证明该点

$(c,\ \varepsilon) = (c^*, \frac{\pi}{2})$ 属于 $\mathcal{C}$。我们研究前几个交点之后的集合 $\mathcal{C}$，并注意到，式（48）和（49）变为

$$2(n+1)\int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c^*}(\psi)d\psi,$$

对于点 $(c^*, \frac{\pi}{2})$。使用坐标变换 $x = \cos^2(\psi)$，我们得到

$$2(n+1)\int_{-\pi/2+\varepsilon^*}^{\pi/2-\varepsilon^*} h_{a,b,c^*}(\psi)d\psi = 2(n+1)F_{a,b}(c^*, \frac{-c^*}{b}) = 2(n+1)F_{a,b}(-bu^*, u^*) = 2\pi.$$

因此，$(c^*, \frac{\pi}{2})$ 属于 $\mathcal{C}$，这意味着 $\varepsilon(c^*) = \frac{\pi}{2}$。

最后，我们证明交点 $(c_{int}, \varepsilon(c_{int}))$ 的存在性。如果 c^* 与 c_{n+1} 之间存在另一个交点，证明便完成。否则，我们就在 c^* 之后寻找一个交点，即在区间 $(-b, c^*)$ 上。为此，我们沿曲线 $c = -bu$ 使用隐式方程 (51) 或 (53)。这两个方程都可变为

$$2\pi = 2(n+1)F_{a,b}(-bu, u) + F_{a,b}(-bu, u) = (2(n+1)+1)F_{a,b}(-bu, u).$$

因此，我们的问题等价于寻找满足以下隐式方程的解：

$$F_{a,b}(-bu, u) = \frac{2\pi}{2(n+1)+1}.$$

使用与之前相同的方法，我们注意到，对于 $u^* = \frac{c^*}{-b}$，$F_{a,b}(-bu, u)$ 等于 $\frac{\pi}{n+1}$；当 u 趋近于 1 时，它趋近于 $\frac{1-b}{\sqrt{b(a+b)}}\pi$。我们得到

$$\frac{1-b}{\sqrt{b(a+b)}}\pi < \frac{2\pi}{2(n+1)+1} < \frac{\pi}{n+1}.$$

我们得出，存在 $u_{int} \in (u^*, 1)$，使得 $F_{a,b}(-bu, u)$ 等于 $\frac{2\pi}{n+1}$。然后，点 (c_{int}, u_{int}) 是一个交点，其中 $c_{int} = -bu_{int}$，且满足 $-b < c_{int} < c^* < c_{n+1}$。

□

参考文献

[1] Arnold VI.《经典力学》的数学方法。Springer-Verlag，纽约；1989。

[2] Goldstein H.《经典力学》。Addison-Wesley，雷丁（马萨诸塞州）；1950。

[3] O'Reilly O.《工程师中级动力学》：牛顿–欧拉与拉格朗日力学。剑桥，剑桥大学出版社；2020。

[4] Landau LD、Lifshitz EM。《力学》。Pergamon Press，牛津；1960。

[5] Cushman RH、Bates L。《经典可积系统的全局层面》。Birkhauser，巴塞尔；1997。[6] Glaser SJ、Boscain U、Calarco T、Koch CP、K¨ockenberger W、Kosloff R 等。《训练薛定谔的猫：量子最优控制》。关于欧洲研究现状、愿景与目标的战略报告。《欧洲物理学杂志 D》。2015；69：279。[7] Van Damme L、Leiner D、Mardesic P、Glaser SJ、Sugny D。《将刚体转动与薛定谔方程联系起来：量子网球拍效应及其他》。Sci Rep。2017；7：3998。[8] Montgomery R。《刚体转动了多少？一个源自18世纪的贝里相位》。《美国物理学杂志》。1991；59(5)：394-8。[9] Nat´ario J。《欧拉陀螺蒙哥马利相位公式的初等推导》。《几何力学杂志》。2010；2(1)：113-8。[10] Levi M。《刚体运动中的几何相位》。《力学分析档案》。1993；122：213-29。[11] Cabrera A。《旋转自变形物体的广义蒙哥马利相位公式》。《几何与物理学杂志》。2007；57(5)：1405-20。[12] Ashbaugh MS、Chicone CC、Cushman RH。《扭转网球拍》。《动力系统与微分方程杂志》。1991；3：67。[13] Van Damme L、Marde˘si´c P、Sugny D。《三维刚体中的网球拍效应》。《物理学 D：非线性现象》。2017；338：17-25。[14] Marde˘si´c P、Gutierrez Guillen GJ、Van Damme L、Sugny D。《网球拍效应的几何起源》。《物理评论快报》。2020年8月；125：064301。[15] Bohm A、Mostafazadeh A、Koizumi H、Niu Q、Zwanziger J。《量子系统中的几何相位》。施普林格，柏林；2003。[16] Petrov AG、Volodin SE。《贾尼别科夫效应与力学定律》。《物理学报告》。2013；58：349-53。[17] Ma Y、Khosla KE、Stickler BA、Kim MS。《纳米转子的量子持久网球拍动力学》。《物理评论快报》。2020年7月；125：053604。[18] Stickler BA、Hornberger K、Kim MS。《纳米粒子的量子转动》。《自然综述：物理学》。2021；3：589。[19] Hamraoui K、Van Damme L、Marde˘si´c P、Sugny D。《不对称陀螺分子的经典与量子转数》。《物理评论 A》。2018年3月；97：032118。[20] Koch CP、Lemeshko M、Sugny D。《分子转动的量子控制》。《现代物理学评论》。2019；91：035005。[21] Opatrny T、Richterek L、Opatrny M。《经典欧拉陀螺与转子的类比：广义Lipkin-Meshkov-Glick模型中的自旋压缩和量子相变》。《科学报告》。2018；8：1984。

[22] Wheatland MS、Murphy T、Naoumenko D、Schijndel Dv、Katsifis G。《手机作为自由旋转实验室》。《美国物理学杂志》。2021;89(4):342-8。[23] Zare RN。《角动量：理解化学与物理学中的空间层面》。约翰·威立父子出版公司，纽约；1988年。[24] Landau LD、Lifshitz EM。《量子力学》。Pergamon Press，牛津；1973年。[25] Pawlowski F、Jorgensen P、Olsen J、Hegelund F、Helgaker T、Gauss J等。根据实验转动常数和计算得到的振动–转动相互作用常数确定分子平衡结构。《化学物理学杂志》。2002;116(15):6482-96。[26] Pozzoli E。《旋转的不对称分子的经典与量子可控性》。Appl Math Optim。2022年;85:8。[27] Pozzoli E、Leibscher M、Sigalotti M、Boscain U、Koch CP。受驱动的不对称陀螺的转动子系统的李代数。《物理学杂志A：数学与理论》。2022年5月;55(21):215301。[28] Babilotte P、Hamraoui K、Billard F、Hertz E、Lavorel B、Faucher O等。在高温下通过太赫兹激光脉冲观测对称陀螺分子的无场取向。《物理评论 A》。2016年10月;94:043403。