arXiv:2302.01774v1 [math.CO] 3 Feb 2023

关于圆柱图的偏序集结构

Kento Nakada*、Takeshi Suzuki†和 Yoshitaka Toyosawa‡

摘要

本文旨在将圆柱图实现为类型为 $A^{(1)}_{\kappa-1}$ 的根系的一个子集，并给出其偏序集结构的若干刻画。此外，圆柱图的所有序理想构成魏尔群的一个弱布鲁哈特区间。

引言

周期（杨）图是由 $\mathbb{Z}^2$ 中无限多个单元格组成的杨图，它在由某个称为周期的向量 $\omega \in \mathbb{Z}^2$ 生成的平移下保持不变（见图 1）。周期图在自然投影到圆柱 $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}\omega$ 下的像称为圆柱图。两个圆柱图的集合差所得到的图称为圆柱斜图。

我们注意到，圆柱斜图已被用于参数化切列德尼克代数（双仿射 Hecke 代数）([12, 13]) 以及 A 型（退化）仿射 Hecke 代数 ([1, 6]) 上某一类不可约模，其中这些图上的标准杨表也会出现。

设 $\omega = (m, -\ell) \in \mathbb{Z}_{\geqq 1} \times \mathbb{Z}_{\leqq -1}$，并设 θ 是 $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}\omega$ 中的一个圆柱图。格 $\mathbb{Z}^2$ 上有一个偏序 $\leq$，其定义如下:

$$(a, b) \leq (c, d) \iff a \geqq c \text{ and } b \geqq d,$$

这在 $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}\omega$ 上以及 θ 上分别诱导出一个偏序集结构。结合内容映射 $\mathsf{c} : \theta \to \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$，其中 $\mathsf{c}(a, b) = b - a$ 模 κ 且 $\kappa = \ell + m$，圆柱图 θ 是一个局部有限的 $\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$ 色 d 完备偏序集，其含义见 [9, 10]。

本文旨在研究偏序集 $(\theta, \leq)$，以及偏序集 $(\mathcal{J}(\theta), \subset)$，其中 $\mathcal{J}(\theta)$ 表示包含于 θ 中的圆柱斜图（或真序理想）的集合。

*冈山大学教育研究生院，日本 电子邮箱地址：nakada@okayama-u.ac.jp

†日本冈山大学自然科学与技术研究生院，电子邮箱：suzuki@math.okayama-u.ac.jp

‡电子邮箱：prkr5rq9@s.okayama-u.ac.jp

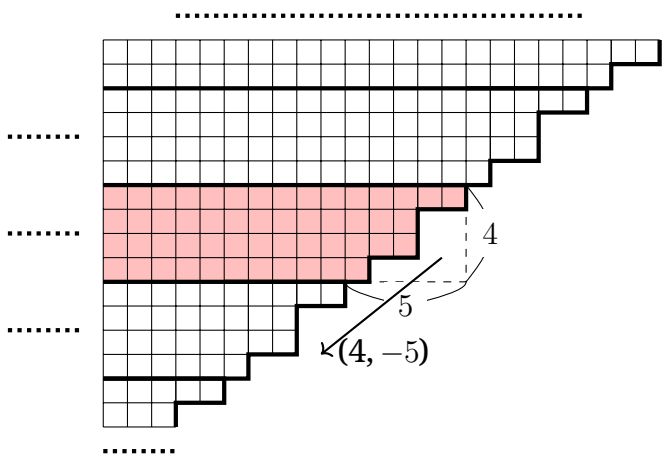


图 1：周期为 $\omega = (4, -5)$的周期图。

我们简要回顾经典情形下的一种描述。设 $\lambda \subset \mathbb{Z}^2$ 为有限杨图。相应的格拉斯曼置换 w_λ 是根系 R 的魏尔群中的一个元素，该根系为 A_n 型，其中 $n = \sharp\{\mathsf{c}(x) \mid x \in \lambda\}$。已知偏序集（$\lambda, \leq$）与偏序集（$R(w_\lambda^{-1}) \leq^{\mathrm{or}}$）对偶同构，其中 $R(w_\lambda^{-1}) := R_+ \cap w_\lambda^{-1} R_-$，而 $\leq^{\mathrm{or}}$ 是由下式定义的普通序（或标准序）：

$$\alpha \leq^{\mathrm{or}} \beta \iff \beta - \alpha \in \sum_{i \in [1,n]} \mathbb{Z}_{\geqq 0} \alpha_i$$

对于 $\alpha, \beta \in R(w_\lambda)$，其中 Π 为单根的集合（[7]）。

设 θ 为 $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}\omega$中的一个圆柱图。我们希望用 $A^{(1)}_{\kappa-1}$ 型根系（其中 $\kappa = \ell + m$）来描述偏序集（$\theta, \leq$）。

A 我们方法的关键要素是带色钩长（[2, 4]），其定义如下：

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{y \in H(x)} \alpha_{\mathbf{c}(y)} \quad (x \in \theta),$$

其中，$H(x)$表示 x 处的钩，α_i 为单根。（精确定义见第 2.1 节。）我们将证明，映射 h 将圆柱图 θ 嵌入正（实）根的集合 R_+ 中，且其像 h(θ)由与半无限字 w_θ相关联的逆序集 $R(w_\theta)$给出；该半无限字可视为格拉斯曼置换的类似物。此外，我们还将证明，像 h(θ)也可刻画为R_+ 的子集，其中包含满足以下条件的元素

$$\langle \zeta_\theta, \alpha^\vee \rangle = -1,$$

其中 ζ_θ 是一个占优整权，由 θ 确定（详见第 2.2 节和第 2.3 节）

与经典情形不同，$R(w_\theta)$ 中的普通序并不能导出偏序集同构，因此我们需要在 $R(w_\theta)$ 中引入修正序 $\trianglelefteq$，定义如下：

$$\alpha \leq^{\mathrm{or}} \beta \iff \beta - \alpha \in \sum_{\gamma \in \Pi_\theta} \mathbb{Z}_{\geqq 0} \gamma,$$

以获得偏序集同构 $(\theta, \leq) \cong (R(w_\theta), \trianglelefteq)$，其中 Π_θ 是仿射根系的某个子集（见第 3.1 节）。

偏序集 θ 的另一种描述方式，是通过 θ上的线性扩张或（反向）标准杨表 $\mathfrak{t}$；按定义，它是一个双射保序映射 $\theta \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$。线性扩张 $\mathfrak{t} : \theta \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 赋予偏序集结构，由此得到的偏序集是堆的无限类比，而堆最初由 Stembridge 引入 [7]。总之，我们有以下结论：

定理（定理 3.13 和命题 3.16）。以下均为偏序集同构：

$$(\mathbb{Z}_{\geq 1}, \leq_{\mathfrak{t}}^{\mathrm{hp}}) \xleftarrow{\mathfrak{t}} (\theta, \leq) \xrightarrow{\mathbf{h}} (R(w_\theta), \trianglelefteq).$$

本文的另一个目标是描述偏序集结构 $\mathcal{J}(\theta)$。对于有限杨图 λ，已知 λ 的序理想集合 $\mathcal{J}(\lambda)$ 与弱右布鲁哈特序下的区间$[e, w_\lambda] = \{u \in W \mid e \preceq u \preceq w_\lambda\}$ 同构（[4, 命题 I]）。对于圆柱图 θ，我们定义一个“半无限布鲁哈特区间” $[e, w_\theta)$，并有以下结论：

定理（定理 4.6）。映射

$$\Phi : (\mathcal{J}(\theta), \subset) \to ([e, w_\theta), \preceq)$$

由 $\Phi(\xi) = w_\xi$ 给出，是一个偏序集同构。

1 圆柱图

1.1 作为偏序集的圆柱图

设 $(P, \leq)$ 是一个偏序集。对于 $x, y \in P$，定义区间 $[x, y]$ 为

$$[x, y] = \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}.$$

我们称 y 覆盖 x，如果 $[x, y] = \{x, y\}$。

定义 1.1. 设 $(P, \leq)$ 是一个偏序集。若子集 J of P 满足以下条件，则称其为序滤子（分别地，序理想）：

$$x \in J,\ x \leq y \implies y \in J \qquad (\text{resp. } x \in J,\ x \geq y \implies y \in J).$$

若 $J \neq P$，则称序滤子（分别地，序理想） J 为真序滤子（真序理想）；若 $J \neq P$ nor $J \neq \emptyset$，则称其为非平凡序滤子（非平凡序理想）。

对于 $\omega \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\leq -1}$，令 $\mathbb{Z}\omega$ 表示由 ω生成的（加法群） $\mathbb{Z}^2$ 的子群，并将圆柱 $\mathcal{C}_\omega$ 定义为

$$\mathcal{C}_\omega = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}\omega.$$

令 $\pi : \mathbb{Z}^2 \to \mathcal{C}_\omega$ 为自然投影。圆柱 $\mathcal{C}_\omega$ 通过 π继承一个 $\mathbb{Z}^2$-模结构。

在 $\mathbb{Z}^2$ 上定义偏序集结构如下:

$$(a,b) \leq (a',b') \iff a \geqq a' \text{ and } b \geqq b' \text{ as integers.}$$

对于 x、$y \in \mathcal{C}_\omega$，若存在 $\tilde{x}$、$\tilde{y} \in \mathbb{Z}^2$，使得 $\pi(\tilde{x}) = x$、$\pi(\tilde{y}) = y$ 且 $\tilde{x} \leq \tilde{y}$，则记为 $x \leq y$。不难看出:

引理 1.2。设 $\omega \in \mathbb{Z}_{\geqq 1} \times \mathbb{Z}_{\leqq -1}$。那么，$\leq$ 在 $\mathcal{C}_\omega$ 上构成偏序，且投影 π 是保序的。

本节其余部分中，我们固定 $\omega \in \mathbb{Z}_{\geqq 1} \times \mathbb{Z}_{\leqq -1}$。

定义 1.3。(1) $\mathcal{C}_\omega$ 的非平凡序滤子称为圆柱图。(2) 若 $\mathbb{Z}^2$ 的非平凡序滤子 Θ 满足 $\Theta + \omega =$，则称其为周期为 ω 的周期图。 $\Theta.$

引理 1.4。(1) 对于 $\mathcal{C}_\omega$ 中的圆柱图 θ，其原像 $\pi^{-1}(\theta)$ 是周期为 ω 的周期图。

(2) 对于一个周期为 ω 的周期图 Θ，其像 $\pi(\Theta)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个圆柱图 $_\omega.$

图 1 展示了一个周期为 $\omega = (4, -5)$ 的周期图。由彩色单元格组成的集合是相对于 $\mathbb{Z}\omega$ 作用的一个基本域，并且它与相应的圆柱图一一对应。

定义 1.5。设 $m, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$。一个非递增序列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$，其项为（可能为负的）整数，称为长度为 m 的广义分拆。对于 $\omega = (m, -\ell) \in \mathbb{Z}_{\geqq 1} \times \mathbb{Z}_{\leqq -1}$，我们用 $\mathcal{P}_\omega$ 表示满足以下条件的长度为 m 的广义分拆集合

$$\lambda_1 - \lambda_m \leqq \ell.$$

对于 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{P}_\omega$，我们定义

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leqq a \leqq m,\ b \leqq \lambda_a\}, \\ \hat{\lambda} &= \boldsymbol{\lambda} + \mathbb{Z}\omega, \\ \mathring{\lambda} &= \pi(\hat{\lambda}). \end{aligned}$$

^ ^ 注意，$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \cap ([1,m] \times \mathbb{Z})$，且 $\boldsymbol{\lambda}$ 是相对于 $\mathbb{Z}(m, -\ell)$ 作用的 λ 的一个基本域。

若 $\lambda \in \mathcal{P}_\omega$，则 $\hat{\lambda}$ 是周期为 ω 的周期图，且 $\mathring{\lambda}$ 是圆柱图。此外，每个周期为 ω 的周期图（分别为圆柱图）都具有 λ（分别为 λ）的形式，其中 $\lambda \in \mathcal{P}_\omega$。

对于偏序集 P及其序滤子 J，我们也用 P/J 表示集合差 $P \setminus J$。容易看出:

命题 1.6. 对于 $\mathcal{C}_\omega$ 的子集 ξ，以下条件等价：
(i) ξ 是 $\mathcal{C}_\omega$中一个圆柱图的真序理想。(ii) ξ 是 $\mathcal{C}_\omega$ 中两个圆柱图 θ、η 的集合差 θ/η，且满足 $\theta \supset \eta$。(iii) ξ 是 $\mathcal{C}_\omega$的一个真序理想与一个真序滤子的交集。(iv) ξ 是 $\mathcal{C}_\omega$ 的有限子集，并满足以下条件：

$$x, y \in \xi \implies [x, y] \subset \xi.$$

(v) ξ 是 $\mathcal{C}_\omega$ 的有限子集，并满足以下条件：

$$x, x+(1,1) \in \xi \implies x+(0,1), x+(1,0) \in \xi \quad (\textit{the skew property})$$

定义 1.7. 如果子集 $\xi \subseteq \mathcal{C}_\omega$ 满足命题 1.6 中的条件 (i)–(v) 之一，则称其为圆柱斜图。

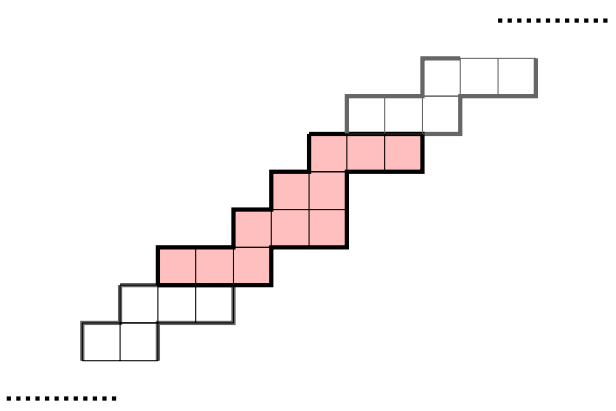


图 2：一个圆柱斜图。

我们将 θ 的真序理想集合记为 $\mathcal{J}(\theta)$，并将其视为一个按包含关系排序的偏序集。注意，任何 $\xi \in \mathcal{J}(\theta)$都是有限集，因此 $\mathcal{J}(\theta) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_n(\theta)$，其中我们记

$$\mathcal{J}_n(\theta) = \{\xi \in \mathcal{J}(\theta) \mid |\xi| = n\}.$$

1.2 标准杨表

在本节余下部分，固定一个属于 $\mathcal{C}_\omega$ 的圆柱图 θ。

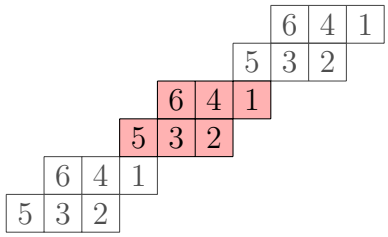
定义 1.8. (1) 对于圆柱图 θ，θ 的一个标准杨表（或线性扩张）是满足以下条件的一个双射 $\mathfrak{t}: \theta \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$x < y \implies \mathfrak{t}(x) < \mathfrak{t}(y).$$

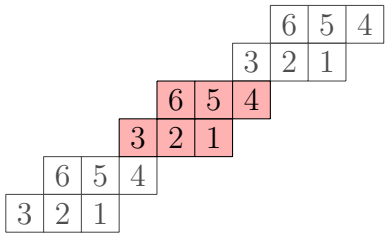
我们用 $\mathrm{ST}(\theta)$ 表示 θ 的标准杨表集合。
(2) 对于带有 $|P| = n$ 的有限偏序集 P，P 的一个标准杨表是满足以下条件的一个双射 $\mathfrak{t}: P \to [1, n]$

$$x < y \implies \mathfrak{t}(x) < \mathfrak{t}(y).$$

我们用 $\mathrm{ST}(P)$ 表示 P 的标准杨表集合。



标准杨表



非标准杨表

图3:

注1.9. 我们的标准杨表通常称为反向标准杨表。◊

设 $\mathsf{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$。不难看出，$\theta$ 的子集 $\mathsf{t}^{-1}([1,n])$ 是一个真序理想，而且限制 $\mathsf{t}|_{\mathsf{t}^{-1}([1,n])}$ 是 $\mathsf{t}^{-1}([1,n])$ 上的标准杨表。反过来，对于$\xi \in \mathcal{J}_n(\theta)$，$\xi$ 上的任意标准杨表都可以扩展为 θ 上的标准杨表。综上，我们有如下结论:

引理 1.10 。令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。对应关系 $\mathsf{t} \mapsto \mathsf{t}^{-1}([1,n])$ 给出了一个满射 ma p

$$\mathrm{ST}(\theta) \to \mathcal{J}_n(\theta).$$

此外 ，对于每个 $\mathsf{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$，限制 $\mathsf{t} \mapsto \mathsf{t}|_{\mathsf{t}^{-1}([1,n])}$ 给出一个满射

$$\mathrm{ST}(\theta) \to \mathrm{ST}(\mathsf{t}^{-1}([1,n])).$$

1.3 内容映射与底集

令 Θ 为周期为 ω 的周期图。定义内容映射

$$\mathbf{c} : \Theta \to \mathbb{Z}$$

by $\mathsf{c}(a,b) = b - a$. 令 $\kappa = |\mathsf{c}(\omega)|$。令 $\theta = \pi(\Theta)$。由于 $\mathsf{c}(x+\omega) = \mathsf{c}(x) - \kappa$，内容映射 c 诱导出映射

$$\theta \to \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z},$$

我们仍用同一符号 c 表示该映射。容易证明如下结论:

命题 1.11. 对于 x、$y \in \theta$，以下结论成立:
(1) 若 $\mathsf{c}(x) - \mathsf{c}(y) \equiv 0, \pm 1 \bmod \kappa$，则 x 和 y 可比较。(2) 若 x 被 y覆盖，则 $\mathsf{c}(x) - \mathsf{c}(y) \equiv \pm 1 \bmod \kappa$。

注 1.12. 根据命题 1.6 和命题 1.11，柱形图是 $[9, 10]$ 意义下的无限（局部有限）“$\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$-着色 d-完备偏序集”。◊

令 $i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$。根据命题 1.11 (1)，$\theta$ 的原像 $\mathsf{c}^{-1}(i)$ 是一个非空的全序子集。令 b_i 表示 $\mathsf{c}^{-1}(i)$ 中的最小元素。

定义1.13。定义 θ 的底集 Γ 为

$$\Gamma = \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}\}.$$

ˆ 图4展示了周期图 λ，其中 $\lambda = (5, 4, 4, 2) \in \mathcal{P}_{(4,-5)^\circ}$。 ˆ 每个单元格中的数字表示模 9 的内容。黄色单元格构成了 $\lambda = \pi(\lambda)$ 的底集。

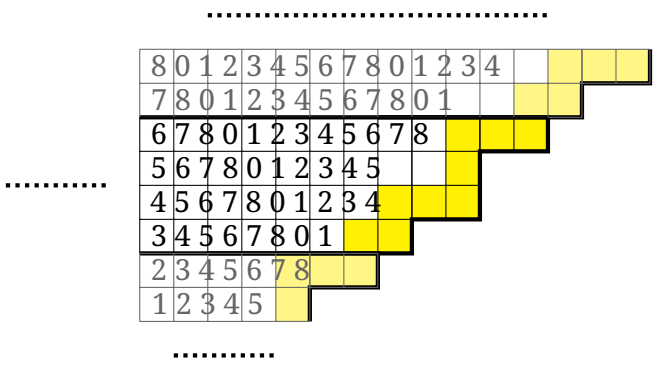


图4:

1.4 类型为 $A^{(1)}_{\kappa-1}$ 的根系与仿射魏尔群

设 $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$。在下文中，我们常将 $\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$ 与 $\{0, 1, \ldots, \kappa - 1\}$等同。设 $\mathfrak{h}$ 为一个 $(\kappa + 1)$ 维向量空间，并选取 $\alpha_i^\vee (i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z})$ 和 d，它们属于 $\mathfrak{h}$，使得

$$\{\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_{\kappa-1}^\vee, d\}$$

构成 $\mathfrak{h}$ 的基。令 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间。定义 $\mathfrak{h}^*$ 中的元素 α_j $(j \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z})$ 和 ϖ_0，使得

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{ij}, \quad \langle \varpi_0, \alpha_i^\vee \rangle = \delta_{i0} \quad (i, j \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}), \\ &\langle \alpha_j, d \rangle = \delta_{j0}, \quad \langle \varpi_0, d \rangle = 0, \end{aligned}$$

wher其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{Z}$ 是自然配对，整数 a_{ij} 定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j \\ -1 & \text{if } i - j = \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于 $\kappa \geqq 3$ 和

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j \\ -2 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

对于 $\kappa = 2$。那么 $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\kappa-1}, \varpi_0\}$ 构成了 $\mathfrak{h}^*$的一组基。定义 $\varpi_i \in \mathfrak{h}^*(i = 1, 2, \ldots, \kappa-1)$ 为

$$\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \varpi_i, d \rangle = 0 \quad (j \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}).$$

权重 ϖ_0、ϖ_1、.....、$\varpi_{\kappa-1}$称为基本权。令 $\delta = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\kappa-1}$（分别称为零根）和 $\delta^\vee = \alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \cdots + \alpha_{\kappa-1}^\vee$（分别称为零余根）。

对于 $i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$, 定义简单反射 $s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ 如下:

$$s_i(\zeta) = \zeta - \langle \zeta, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \quad (\zeta \in \mathfrak{h}^*).$$

将由简单反射生成的 $GL(\mathfrak{h}^*)$ 的子群定义为类型 $A_{\kappa-1}^{(1)}$ 的仿射魏尔群 W:

$$W = \langle s_i \mid i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z} \rangle.$$

以下是众所周知的:

命题 1.14。群 W 满足以下基本关系 :

$$s_i^2 = 1, \tag{1.1}$$
$$s_i s_j = s_j s_i \quad (i - j \neq 0, \pm 1), \tag{1.2}$$
$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \tag{1.3}$$

对于 $w \in W$, 我们将 w 的长度 $\ell(w)$ 定义为使得某个表达式（或一个字）成立的最小 r

$$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r} \in W \quad (i_j \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z})$$

存在。若表达式 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ 满足 $\ell(w) = r$, 则称其为约化的。

定义 W 在 $\mathfrak{h}$ 上的作用如下:

$$s_i(h) = h - \langle \alpha_i, h \rangle \alpha_i^\vee \quad (h \in \mathfrak{h}).$$

令

$$\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\kappa-1}\}, \quad \Pi^\vee = \{\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_{\kappa-1}^\vee\},$$
$$Q = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \;\middle|\; c_i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad Q_+ = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \;\middle|\; c_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0} \right\}.$$

集合 Π （分别为 $\Pi^\vee$）称为单根集合（分别为简单余根集合）, 而 Q 称为根格。令

$$R = W\Pi \subset \mathfrak{h}^*, \quad R^\vee = W\Pi^\vee \subset \mathfrak{h}.$$

那么, R（分别地, $R^\vee$）是实根（分别地, 余根）的集合, 而 $R \sqcup \mathbb{Z}\delta$ 是仿射根系。定义正（实）根集合 R_+ 和负（实）根集合 R_- 如下:

$$R_+ = R \cap Q_+ = \left\{ \sum_{i=0}^{\kappa-1} c_i \alpha_i \in R \mid c_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0} \right\}, \quad R_- = \left\{ \sum_{i=0}^{\kappa-1} c_i \alpha_i \in R \mid c_i \in \mathbb{Z}_{\leqq 0} \right\}.$$

对于 $\beta = \sum_{i=0}^{\kappa-1} k_i\alpha_i \in R$，定义 $\beta^\vee = \sum_{i=0}^{\kappa-1} k_i\alpha_i^\vee \in R^\vee$. 。那么，对应关系 $\beta \mapsto \beta^\vee$ 给出一个双射 $R \to R^\vee$。将正（分别地，负）余根集合 $R_+^\vee$（分别地，$R_-^\vee$）定义为此双射下 R_+（分别地，R_-）的像。

对于 i、$j \in \mathbb{Z}$，且满足 $i < j$，我们定义

$$\alpha_{ij} = \sum_{i \leqq k \leqq j-1} \alpha_{\bar{k}},$$

其中 $k = \bar{k}$ 模 $\kappa\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$。以下是众所周知的结论：

$$R_+ = \{\alpha_{ij} \mid i < j,\ j - i \notin \kappa\mathbb{Z}\} \tag{1.4}$$
$$= \{\alpha_{ij} + k\delta \mid 1 \leqq i < j \leqq \kappa,\ k \geqq 0\} \sqcup \{-\alpha_{ij} + k\delta \mid 1 \leqq i < j \leqq \kappa,\ k \geqq 1\}, \tag{1.5}$$
$$R_- = -R_+,\quad R = R_+ \sqcup R_-.$$

根据上述 R 的描述，以下两个引理很容易得出，稍后将会用到：

引理 1.15. 若 $\alpha \in R$，则对所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $\alpha + k\delta \in R$。

引理 1.16. 设 $\alpha \in R \sqcup \mathbb{Z}\delta$ 和 $\beta \in R$。那么，$\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = 2$ 当且仅当 $\alpha \equiv \beta$ 模 δ。

2 柱状图中的钩子

2.1 彩色钩长

本节将介绍带色钩长，这是本文的关键要素。

Fix $\kappa, m, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$，令 $\kappa = m + \ell$，并设 θ 为 $\mathcal{C}_{(m,-\ell}$ 中的一个圆柱图).

本文其余部分将使用以下记号：

$$\alpha(x) = \alpha_{\mathbf{c}(x)},\quad s(x) = s_{\mathbf{c}(x)} \text{ for } x \in \theta.$$

定义 2.1. 对于 $x \in \theta$，令

$$\mathrm{Arm}(x) = \{x + (0,k) \in \theta \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}\},$$
$$\mathrm{Leg}(x) = \{x + (k,0) \in \theta \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}\},$$

并定义

$$\mathbf{h}(x) = \alpha(x) + \sum_{y \in \mathrm{Arm}(x)} \alpha(y) + \sum_{y \in \mathrm{Leg}(x)} \alpha(y).$$

我们称 $\mathbf{h}(x)$ 为 x 处的带色钩长。

对于 $x \in \mathcal{C}_{(m,-\ell)} \setminus \theta$，为方便起见，我们令 $\mathbf{h}(x) = 0$。容易看出，对于 $x \in \theta$

$$\mathbf{h}(x - (0,\ell)) = \mathbf{h}(x - (m,0)) = \mathbf{h}(x) + \delta$$

and

$$\mathbf{h}(x) = \alpha_{ij} \text{ for some integers } i < j. \tag{2.1}$$

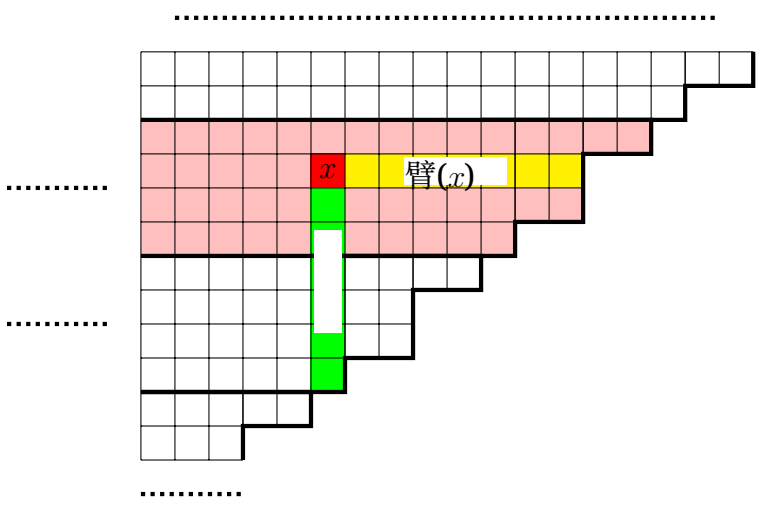


图5：圆柱图中 Arm(x) 和 Leg(x) 的集合，其中 x 。

例2.2。（见图5。）设 $\omega = (4, -5)$。则 $\lambda = (5, 3, 3, 1) \in \mathcal{P}_\omega$。对于单元格 $x = \pi(2, -4) \in \lambda$, 有 $c(x) = 3 + 9\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$。$x$ 处的带色钩长为

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(x) &= \alpha_{-6} + (\alpha_{-5} + \alpha_{-4} + \alpha_{-3} + \alpha_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1) \\ &\quad + (\alpha_{-7} + \alpha_{-8} + \alpha_{-9} + \alpha_{-10} + \alpha_{-11} + \alpha_{-12}) \\ &= \alpha_3 + (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_0 + \alpha_1) + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_8 + \alpha_7 + \alpha_6) \\ &= \delta + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,\end{aligned}$$

可表示为 $h(x) = \alpha_{-12,\ 2}$。

注2.3. (1) 对于 $x \in \theta$，“多重集” $H(x) := \{x\} \sqcup \text{Arm}(x) \sqcup \text{Leg}(x)$ 是位于 x 处的钩的圆柱类比。

(2) 关于圆柱斜图上标准杨表数量的猜想的钩公式在 [11]，中提出，其中 $x \in \theta$ 处的钩长度由 $|H(x)| = |\text{Arm}(x)| + |\text{Leg}(x)| + 1$ 给出。

对于 $\alpha \in Q_+$，定义

$$N(\alpha) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha - k\delta \in Q_+\}.$$

引理 2.4. 对于 $x \in \theta$，有

$$N(\mathbf{h}(x)) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid x + k(0, \ell) \in \theta\}.$$

证明. 令 $N(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid x + k(0, \ell) \in \theta\}$，并将证明 $N(h(x)) = N(x)$。

设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。假设 $x + k(0, \ell) \in \theta$。那么，$h(x) - k\delta = h(x + k(0, \ell)) \in Q_+$，因此 $N(h(x)) \geqq N(x)$。

假设 $x - k(0, \ell) \notin \theta$。注意到 $x - k(0, \ell) = x + k(m, 0)$，我们有

$$|\text{Arm}(x)| \leqq k\ell - 1, \quad |\text{Leg}(x)| \leqq km - 1.$$

因此，我们有 $|\{x\} \cup 臂(x) \cup 腿(x)| \leqq k(\ell+m) - 1$，从而 $\mathsf{h}(x) - k\delta \notin Q_+$。这意味着 $N(\mathsf{h}(x)) \leqq N(x)$。□

令 $\Gamma = \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}\}$ 为 θ 的底集，其中 b_i 是前面所说的 $\mathsf{c}^{-1}(i)$ 的最小元素。

对于 $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}} c_i\alpha_i \in Q_+$，将其支集定义为

$$\mathrm{Supp}(\alpha) = \{b_i \mid c_i > 0 \ (i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z})\} \subset \Gamma.$$

例如，我们有 $\mathrm{Supp}(\delta) = \Gamma$。令 $x \in \theta$ 满足 $N(\mathsf{h}(x)) = 0$。那么，$\mathrm{Supp}(\mathsf{h}(x))$ 是 Γ 的一个非空、真且连通的子集。

引理 2.5。令 $x \in \theta$。则 $\mathsf{h}(x) \in R_+$。

证明。由 (1.4) 和 (2.1)，只需证明 $\mathsf{h}(x) \notin \mathbb{Z}\delta$。

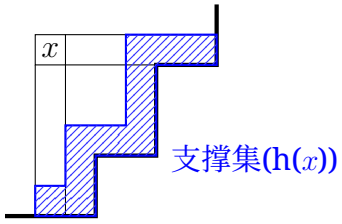
置 $k = N(\mathsf{h}(x))$ 和 $x_0 = x + k(0,\ell)$。由引理 2.4 及 $N(\mathsf{h}(x_0)) = 0$，可得 $x_0 \in \theta$。由于 $\emptyset \neq \mathrm{Supp}(\mathsf{h}(x_0)) \subsetneqq \Gamma$，我们有 $\mathsf{h}(x_0) \notin \mathbb{Z}\delta$，因此 $\mathsf{h}(x) = \mathsf{h}(x_0) + k\delta \notin \mathbb{Z}\delta$. □

令 $\Gamma_{\max}$（分别为 $\Gamma_{\min}$）表示 Γ 中的极大（分别为极小）元素集合。很容易得到以下引理。（见下图。）

引理 2.6. 设 $\alpha \in R_+$ with $N(\alpha) = 0$。那么，对于某个 $x \in \theta$，有 $\alpha = \mathsf{h}(x)$ 当且仅当

$$|\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \Gamma_{\max}| + 1 = |\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \Gamma_{\min}|.$$

Note that $|\Gamma_{\max}| = |\Gamma_{\min}|$



2.2 主导权重和钩子

定义 2.7. 我们定义 $\zeta_\theta \in \mathfrak{h}^*$ 如下

$$\zeta_\theta = \sum_{i=0}^{\kappa-1} a_i\varpi_i, \tag{2.2}$$

$$\text{where } a_i = \begin{cases} 1 & \text{if } b_i \in \Gamma_{\max} \\ -1 & \text{if } b_i \in \Gamma_{\min} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，在 Γ 中，极大元和极小元交替排列。这意味着权重 ζ_θ 是主导的，即，对于所有 $\alpha^\vee \in R_+^\vee$，$\langle\zeta_\theta,\ \alpha^\vee\rangle \geqq -1$。定义

$$D(\zeta_\theta) = \{\alpha \in R_+ \mid \langle\zeta_\theta, \alpha^\vee\rangle = -1\}.$$

定理 2.8。对应关系 $x \mapsto \mathbf{h}(x)$ 给出一个双射

$$\mathbf{h} : \theta \to D(\zeta_\theta).$$

证明。首先我们将证明 $\mathbf{h}(\theta) = D(\zeta_\theta)$。令 $\alpha \in R_+$，并设 $\bar{\alpha} = \alpha - N(\alpha)\delta$。由引理 2.4,

$$\alpha \in \mathbf{h}(\theta) \Leftrightarrow \bar{\alpha} \in \mathbf{h}(\theta).$$

另一方面，由于 $\langle \zeta_\theta, \delta^\vee \rangle = 0$，可得

$$\alpha \in D(\zeta_\theta) \Leftrightarrow \bar{\alpha} \in D(\zeta_\theta).$$

现在由引理 2.6 可得 $\mathbf{h}(\theta) = D(\zeta_\theta)$。

我们将证明单射性。假设 $\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(y)$。那么 $N(\mathbf{h}(x)) = N(\mathbf{h}(y))$。设$x_0 = x + N(\mathbf{h}(x))(0, \ell)$，$y_0 = y + N(\mathbf{h}(y))(0, \ell)$。于是我们有 $N(\mathbf{h}(x_0)) = N(\mathbf{h}(y_0)) = 0$，因此 $\mathbf{h}(x_0) = \mathbf{h}(y_0)$。现在有 $\mathrm{Supp}(\mathbf{h}(x_0)) = \mathrm{Supp}(\mathbf{h}(y_0))$，这意味着 $x_0 = y_0$，从而 $x = y$。□

2.3 魏尔群元素及其逆序集

下面的命题给出了 $\mathbf{h}(x)$ 的另一种表达式。

命题 2.9. 对任意 $x \in \theta$ 和 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$，有

$$\mathbf{h}(x) = s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(n-1))\alpha(\mathfrak{t}^{-1}(n)), \tag{2.3}$$

其中 $n = \mathfrak{t}(x)$。

命题 2.9 的证明将在下一节给出。在本节余下部分，我们将探讨该命题的一些推论。

设 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$。对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们定义根系 W 的一个元素 $w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]$ 为

$$w_{\theta,\mathfrak{t}}[n] = s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(n)), \tag{2.4}$$

并且我们令 $w_{\theta,\,\mathfrak{t}}[0] = e$。

例 2.10。设 $\lambda = (5, 4)$ 和 $\omega = (2, -3)$。对于图6中所示的 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\lambda)$，我们有$w_{\lambda,\,\mathfrak{t}}[6] = s_4 s_2 s_1 s_3 s_0 s_2$。

命题 2.11。表达式 (2.4) 是约化的。

证明。令 $p_k = \mathfrak{t}^{-1}(k)$ 表示 $k \geqq 1$。根据命题 2.9 和定理 2.8，我们有

$$\mathbf{h}(p_k) = s(p_1)s(p_2) \cdots s(p_{k-1})\alpha(p_k) = w_{\theta,\mathfrak{t}}[k-1]\alpha(p_k) \in R_+$$

对所有 $k \in [1, n]$ 均成立。这意味着

$$\ell(w_{\theta,\mathfrak{t}}[k-1]s(p_k)) > \ell(w_{\theta,\mathfrak{t}}[k-1]) \quad (k \in [1, n]).$$

因此我们有 $\ell(w_{\theta,\,\mathfrak{t}}[n]) = n$，所以表达式 (2.4) 是约化的。 □

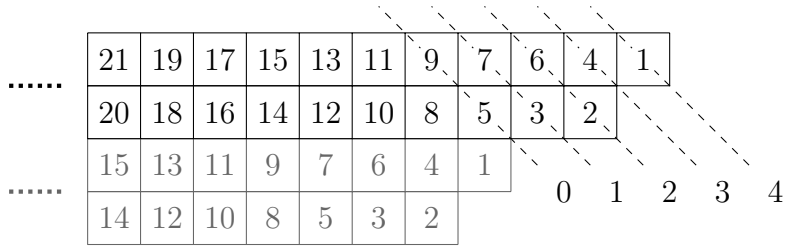


图6:

对于 $w \in W$，集合

$$R(w) = R_+ \cap wR_-$$

称为 w 的逆序集。已知对于任意约化表达式 $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_\ell}$，有 $\ell(w) = |R(w)|$，且

$$R(w) = \{\alpha_{i_1}, s_{i_1}\alpha_{i_2}, s_{i_1}s_{i_2}\alpha_{i_3}, \ldots, s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{\ell-1}}\alpha_{i_\ell}\}.$$

由 (2.3)、(2.4) 和命题 2.11，可得到以下命题 :

命题 2.12. 设 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$ 且 $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$。则有

$$R(w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]) = \{\mathbf{h}(x) \mid x \in \mathfrak{t}^{-1}([1,n])\}.$$

特别地，有 $R(w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]) \subset D(\zeta_\theta)$。

定义

$$R(w_{\theta,\mathfrak{t}}) = \bigcup_{n\geqq 1} R(w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]).$$

Then

$$R(w_{\theta,\mathfrak{t}}) = \{\mathbf{h}(x) \mid x \in \theta\} = D(\zeta_\theta).$$

特别地，$R(w_{\theta,\mathfrak{t}})$ 与 $\mathfrak{t}$ 无关，后文将仅用 $R(w_\theta)$ 表示它。

注2.13. 集合 $R(w_\theta)$ 可视为与半无限字相关联的"逆序集"

$$w_{\theta,\mathfrak{t}} := s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2))\cdots\cdots.$$

定义2.14. 设 $\zeta \in P$ 为一个整权。

(1) 若 w 属于 W，则称其为 ζ-pluscule，当且仅当

$$\langle \zeta, \alpha^\vee \rangle = -1 \quad \text{for all } \alpha \in R(w).$$

(2) 如果元素 w 属于 W，则称其为 ζ-极小的，当且仅当

$$\langle \zeta, \alpha^\vee \rangle = 1 \quad \text{for all } \alpha \in R(w^{-1}).$$

定义 2.15. 如果元素 $w \in W$ 的任意约化表达式都可以通过仅使用关系式 (1.2) 从 w 的任意其他约化表达式得到，则称该元素为完全交换的。

注记 2.16. (1) 元素 $w \in W$ 是 ζ-pluscule，当且仅当 w 是 $(w^{-1}\zeta)$-极小的。(2) 已知，若对于某个整权 ζ，w 是 ζ-极小的，则 w 是完全交换的（[8]）。

由命题 2.12，我们得到：

命题 2.17. 设 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$ 且 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。则 $w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]$ 是 ζ_θ-pluscule 且完全交换的。

2.4 命题 2.9 的证明

对于 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$ 和 $x \in \theta$，我们定义

$$\gamma_{\mathfrak{t}}(x) = s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(n-1))\alpha(\mathfrak{t}^{-1}(n)), \tag{2.5}$$

其中 $n = \mathfrak{t}(x)$。

对于 $x \in \theta$，令 $x^S = x + (1, 0)$ $x^E = x + (0, 1)$ $x^{SE} = x + (1, 1) \in \mathcal{C}_\omega$。稍后我们将使用以下引理：

引理 2.18。设 $x \in \theta$。

(1) 若 $x \notin \Gamma$，则 $x^S, x^E, x^{SE} \in \theta$ 和

$$\gamma_{\mathfrak{t}}(x) = \gamma_{\mathfrak{t}}(x^S) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) - \gamma_{\mathfrak{t}}(x^{SE}). \tag{2.6}$$

(2) 若 $x \in \Gamma$，则 $x^{SE} \notin \theta$ 和

$$\gamma_{\mathfrak{t}}(x) = \begin{cases} \alpha(x) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^S) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) & \text{if } x^S, x^E \in \theta \quad (2.7) \\ \alpha(x) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^S) & \text{if } x^S \in \theta, x^E \notin \theta \quad (2.8) \\ \alpha(x) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) & \text{if } x^E \in \theta, x^S \notin \theta \quad (2.9) \\ \alpha(x) & \text{if } x^S, x^E \notin \theta. \quad (2.10) \end{cases}$$

证明。令 $p_k = \mathfrak{t}^{-1}(k)$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$。

(1) 令 $x = p_j$, $x^{SE} = p_i$, $x^E = p_{k_1}$ 和 $x^S = p_{k_2}$。则 $j > k_1, k_2 > i$，且我们可以假设 $k_2 < k_1$。令 $\mathrm{c}(x) = r$。则 $\mathrm{c}(x^E) = r - 1$，$\mathrm{c}(x^S) = r + 1$。我们有

$$\gamma_{\mathfrak{t}}(x) = w_1 s(p_i) w_2 s(p_{k_1}) w_3 s(p_{k_2}) w_4 \alpha(p_j) = w_1 s_r w_2 s_{r+1} w_3 s_{r-1} w_4 \alpha_r,$$

其中 $w_1 = s(p_1) \cdots s(p_{i-1})$，$w_2 = s(p_{i+1}) \cdots s(p_{k_1-1})$，$w_3 = s(p_{k_1+1}) \cdots s(p_{k_2-1})$，且 $w_4 = s(p_{k_2+1}) \cdots s(p_{j-1})$。

注意，对于所有 $d \in [i+1, j-1] \setminus \{k_1, k_2\}$，$\mathrm{c}(p_d) - r \neq 0, \pm 1$。实际上，如果 $\mathrm{c}(p_d) - r = 0, \pm 1$，那么 p_d 与 p_j 和 p_i 可比较，因此 $p_j > p_d > p_i$。但是，这样的 d 必须是 k_1 或 k_2。现在我们有

$$\gamma_{\mathfrak{t}}(x) = w_1 s_r w_2 s_{r+1} w_3 s_{r-1} w_4 \alpha_r = w_1 s_r w_2 s_{r+1} w_3 s_{r-1} \alpha_r$$

$$
\begin{aligned}
&= w_1 s_r w_2 s_{r+1} w_3(\alpha_{r-1}+\alpha_r) = \gamma_{\mathfrak{t}}(x^S) + w_1 s_r w_2 s_{r+1} w_3 \alpha_r \\
&= \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) + w_1 s_r w_2 s_{r+1}\alpha_r = \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) + w_1 s_r w_2(\alpha_r+\alpha_{r+1}) \\
&= \gamma_{\mathfrak{t}}(x^S) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) + w_1 s_r w_2 \alpha_r = \gamma_{\mathfrak{t}}(x^S) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) + w_1 s_r \alpha_r \\
&= \gamma_{\mathfrak{t}}(x^S) + \gamma_{\mathfrak{t}}(x^E) - \gamma_{\mathfrak{t}}(x^{SE}).
\end{aligned}
$$

(2) 假设 $x^S, x^E \notin \theta$，或者等价地，假设 x 是 Γ 中的极小元素。令$x = p_j$。那么 p_d($d \in [1, j-1]$) 与 p_j 不可比较。因此

$$\gamma_{\mathfrak{t}}(x) = s(p_1)\cdots s(p_{j-1})\alpha(p_j) = \alpha(p_j)$$

通过与陈述（1）的证明中类似的论证，其他情形都可归结为 x 在 Γ 中为极小元的情形，

□

命题 2.9 的证明。令 $x \in \theta$。置 $x^S = x + (1, 0)$ $x^E = x + (0, 1)$ $x^{SE} = x + (1, 1)$。容易看出如下事实：

$$
\mathbf{h}(x) = \begin{cases}
\mathbf{h}(x^S) + \mathbf{h}(x^E) - \mathbf{h}(x^{SE}) & \text{if } x \notin \Gamma \\
\alpha(x) + \mathbf{h}(x^S) + \mathbf{h}(x^E) & \text{if } x \in \Gamma \text{ and } x^S, x^E \in \theta \\
\alpha(x) + \mathbf{h}(x^S) & \text{if } x \in \Gamma \text{ and } x^S \in \theta,\ x^E \notin \theta \\
\alpha(x) + \mathbf{h}(x^E) & \text{if } x \in \Gamma \text{ and } x^E \in \theta,\ x^S \notin \theta \\
\alpha(x) & \text{if } x \in \Gamma \text{ and } x^S, x^E \notin \theta
\end{cases} \tag{2.11}
$$

另一方面，我们已经证明，$\gamma_{\mathfrak{t}}(x)$ 满足引理 2.18 中的相同递推关系。□

3 圆柱图的偏序集结构

3.1 逆序集上的偏序

回顾一下，Q 表示根格：$Q = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\alpha_i$。

定义 3.1。定义 $\leq^{\mathrm{or}}$ 上的偏序 Q：

$$\alpha \leq^{\mathrm{or}} \beta \iff \beta - \alpha \in Q_+ = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$$

偏序 $\leq^{\mathrm{or}}$ 称为普通序。

普通序的限制在 $R(w_\theta)$ 上定义了一个偏序集结构。

设 θ 是 $\mathcal{C}_\omega$ 中满足 $|\omega| = \kappa$ 的一个圆柱图。我们已在 θ 上引入了偏序集结构，也已看到映射 $\mathbf{h}$ 给出了 θ 与 $R(w_\theta)$ 之间的双射。请注意，正如下例所示，这并不是偏序集同构：

例3.2. 设 $\lambda = (4, 2)$ $\omega = (2, -2)$，并考虑 $\mathcal{C}_\omega$ 中的圆柱图 λ。那么 λ 中的 $x = \pi(1, 2)$ 和 $y = \pi(2, 1)$ 不可比。另一方面，$\mathrm{h}(x) = \delta + \alpha_3$，且 $\mathrm{h}(y) = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3$，因此 $\mathrm{h}(x) - \mathrm{h}(y) = \alpha_1 + \alpha_3$。这意味着 $\mathrm{h}(y) \leq^{\mathrm{or}} \mathrm{h}(x)$。

我们将引入一种修正的普通序 $\trianglelefteq$，使得 $(\theta, \trianglelefteq) \cong (R(w_\theta), \trianglelefteq)$。设 $\Gamma = \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}\}$ 为 θ的底集，其中 b_i 是满足 $\mathrm{c}(b_i) = i$的元素。令 $\Gamma_{\max}$（分别为 $\Gamma_{\min}$）表示 Γ中的极大（分别为极小）元素集。

定义 3.3. 定义

$$\Pi_\theta = \Pi_\theta^0 \sqcup \Pi_\theta^{\mathrm{arm}} \sqcup \Pi_\theta^{\mathrm{leg}}.$$

这里,

$$\Pi_\theta^0 = \{\alpha(x) \mid x \in \Gamma \setminus (\Gamma_{\max} \sqcup \Gamma_{\min})\},$$

$$\Pi_\theta^{\mathrm{arm}} = \left\{ \alpha(x) + \sum_{y \in \mathrm{Arm}(x)} \alpha(y) \;\middle|\; x \in \Gamma_{\max} \right\},$$

$$\Pi_\theta^{\mathrm{leg}} = \left\{ \alpha(x) + \sum_{y \in \mathrm{Leg}(x)} \alpha(y) \;\middle|\; x \in \Gamma_{\max} \right\}.$$

注意，$\Pi_\theta \subset R_+ \sqcup \mathbb{Z}_{\geqq 0}\delta$。

例3.4. 对于图4所示的圆柱图，我们有

$$\Pi_\theta^0 = \{\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\},$$
$$\Pi_\theta^{\mathrm{arm}} = \{\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_0 + \alpha_1\},$$
$$\Pi_\theta^{\mathrm{leg}} = \{\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_0 + \alpha_8\}.$$

例3.5. 设 $\lambda = (n)$ 和 $\omega = (1, -n + 1)$。那么，对于相应的圆柱图 λ，我们有

$$\Pi_{\mathring{\lambda}}^0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}\},$$
$$\Pi_{\mathring{\lambda}}^{\mathrm{arm}} = \{\delta\},$$
$$\Pi_{\mathring{\lambda}}^{\mathrm{leg}} = \{\alpha_0 + \alpha_{n-1}\}.$$

定义3.6. 定义偏序 $\trianglelefteq$ 在 $R(w_\theta)$ 上如下:

$$\alpha \trianglelefteq \beta \iff \beta - \alpha \in \sum_{\gamma \in \Pi_\theta} \mathbb{Z}_{\geqq 0}\gamma = \left\{ \sum_{\gamma \in \Pi_\theta} k_\gamma \gamma \;\middle|\; k_\gamma \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\ (\forall \gamma \in \Pi_\theta) \right\}. \tag{3.1}$$

命题 3.7. 设 x、$y \in \theta$。则

$$x \leq y \implies \mathbf{h}(x) \trianglelefteq \mathbf{h}(y).$$

换言之，双射

$$\mathbf{h} : (\theta, \leq) \to (R(w_\theta), \trianglelefteq)$$

是保序的。

证明。我们假设 y 覆盖 x，并将通过关于 θ 上偏序集结构的 y归纳法证明 $\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x) \in \Pi_\theta$。

Put $y^S = y + (1,0)$ $y^E = y + (0,1)$ $y^{SE} = y + (1,1)$。那么 $x = y^S$ 或 $x = y^E$.
当 $y \in \Gamma$ 时，由 (2.11) 可得 $\mathbf{h}(y)$ –$\mathbf{h}(x) \in \Pi_\theta$。
假设 $y \notin \Gamma$。注意到 $y^{SE} \in \theta$。由于 y^E 覆盖 y^{SE} 和 $y > y^E$，由归纳假设可得 $\mathbf{h}(y^E) - \mathbf{h}(y^{SE}) \in \Pi_\theta$。根据递推关系 (2.11)，我们有

$$\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(y^S) = \mathbf{h}(y^E) - \mathbf{h}(y^{SE}) \in \Pi_\theta.$$

类似的论证可得 $\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(y^E) \in \Pi_\theta$。在这两种情况下，我们都有 $\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x) \in \Pi_\theta$。因此，命题得证。□

容易看出

$$\alpha \trianglelefteq \beta \implies \alpha \leq^{\mathrm{or}} \beta$$

对于任意 $\alpha, \beta \in R(w_\theta)$。因此我们有如下结论：

推论 3.8. 设 $x, y \in \theta$。则

$$x < y \implies \mathbf{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y).$$

3.2 偏序集同构

我们的下一个目标是证明这个保序映射

$$\mathbf{h} : (\theta, \leq) \to (R(w_\theta), \trianglelefteq)$$

实际上是一个偏序集同构。我们先做一些准备。
与之前一样，我们用 $\mathrm{Supp}(\alpha)$ 表示 $\alpha \in Q$ 的支集。以下引理由定义 3.3 几乎显而易见。

引理 3.9. 设 $\alpha \in \Pi_\theta$。则

$$|\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \Gamma_{\max}| = |\mathrm{Supp}(\alpha) \cap \Gamma_{\min}| = \begin{cases} 0 & (\alpha \in \Pi_\theta^0) \\ 1 & (\alpha \in \Pi_\theta^{\mathrm{arm}} \sqcup \Pi_\theta^{\mathrm{leg}}). \end{cases} \tag{3.2}$$

容易看出下述引理：

引理 3.10. (1) 设 $\alpha \in R_+$。则 $N(\alpha) = \max\{N \in \mathbb{Z} \mid \alpha - N\delta \in R_+\}$.
(2) 设 $x, y \in \theta$。若 $x < y$则 $N(\mathbf{h}(x)) \leqq N(\mathbf{h}(y))$。

证明. (1) 由引理 1.15 得出。
(2) 假设 $x < y$。由推论 3.8，得到 $N(\mathbf{h}(x))\delta \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y)$.
由于根据引理 1.15，$\mathbf{h}(y) - N(\mathbf{h}(x))\delta$ 属于 R，因此它必定是一个正根。这意味着$N(\mathbf{h}(x)) \leqq N(\mathbf{h}(y))$。□

引理 3.11. 设 $x, y \in \theta$ 满足 $N(\mathbf{h}(x)) = N(\mathbf{h}(y)) = 0$。那么

$$x < y \iff \mathbf{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y).$$

特别地，若 x 和 y 不可比，则 $\mathbf{h}(x)$ 和 $\mathbf{h}(y)$ 关于 $\leq^{\mathrm{or}}$ 也不可比。

证明。由推论 3.8，得

$$x < y \implies \mathbf{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y).$$

我们将证明反向蕴含。设 $\mathbf{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y)$。注意到 $0 <^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(x)$、$\mathbf{h}(y) <^{\mathrm{or}} \delta$，可得 $\mathrm{Supp}(\mathbf{h}(x)) \subset \mathrm{Supp}(\mathbf{h}(y)) \subsetneq \Gamma$。这意味着 $x < y$。□

引理 3.12。设 $x, y \in \theta$。假设 x 和 y 在 θ 中不可比。则 $N(\mathbf{h}(y)) - N(\mathbf{h}((x)) = 1$，0 或 -1。此外，以下结论成立：

(1) 若 $N(\mathbf{h}(y)) - N(\mathbf{h}(x)) = 1$，则

$$\mathbf{h}(y) - \delta \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y).$$

(2) 若 $N(\mathbf{h}(y)) - N(\mathbf{h}(x)) = -1$，则

$$\mathbf{h}(x) - \delta \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(x).$$

(3) 如果 $N(\mathbf{h}(y)) - N(\mathbf{h}(x)) = 0$，那么关于 $\leq^{\mathrm{or}}$，$\mathbf{h}(x)$ 与 $\mathbf{h}(y)$ 不可比。

证明。在本证明中，对于 $x \in \theta$，我们将 $N(\mathbf{h}(x))$ 记为 $N(x)$。令

$$x_k = x + (N(x) - k)(0, \ell), \quad y_k = y + (N(y) - k)(0, \ell)$$

对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$。则 $N(x_k) = N(y_k) = k$。令 $n = N(x)$，可见

$$\theta \setminus (\{z \in \theta \mid z \geqq x\} \sqcup \{z \in \theta \mid z \leqq x\}) = [x_{n-1} - (1,1), x_{n+1} + (1,1)].$$

由于 x 和 y 不可比，y 属于该区间，因此

$$x_{n-1} < y < x_{n+1} \tag{3.3}$$

并且根据引理 3.10，$n - 1 \leqq N(y) \leqq n + 1$。也就是说，我们有 $N(y) - N(x) = -1$，0 或 1。(1) 假设 $N(y) - N(x) = 1$。在这种情况下，

$$\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(y_0) + \delta - \mathbf{h}(x_0).$$

根据定义，$\mathbf{h}(x_0)$ 和 $\mathbf{h}(y_0)$ 是正根。根据引理 1.15，$\mathbf{h}(x_0) - \delta$ 也是一个根，且不是正根。因此，$\delta - \mathbf{h}(x_0) \in R_+$ 和 $\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x)$ 是两个正根之和。这意味着 $\mathbf{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y)$。结合 (3.3)，我们有 $x - \delta \leq^{\mathrm{or}} y \leq^{\mathrm{or}} x$。( )

2 由.....得出 (1).

(3) 假设 $N(y) - N(x) = 0$。注意，在这种情况下，x_0 和 y_0 不可比较；由引理 3.11 可知，$\mathbf{h}(y_0)$ 和 $\mathbf{h}(x_0)$ 相对于 $\leq^{\mathrm{or}}$ 也不可比较。现在我们有

$$\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(y_0) + N(y)\delta - \mathbf{h}(x_0) - N(x)\delta = \mathbf{h}(y_0) - \mathbf{h}(x_0).$$

因此，$\mathbf{h}(x)$ 和 $\mathbf{h}(y)$ 关于 $\leq^{\mathrm{or}}$ 不可比较。 □

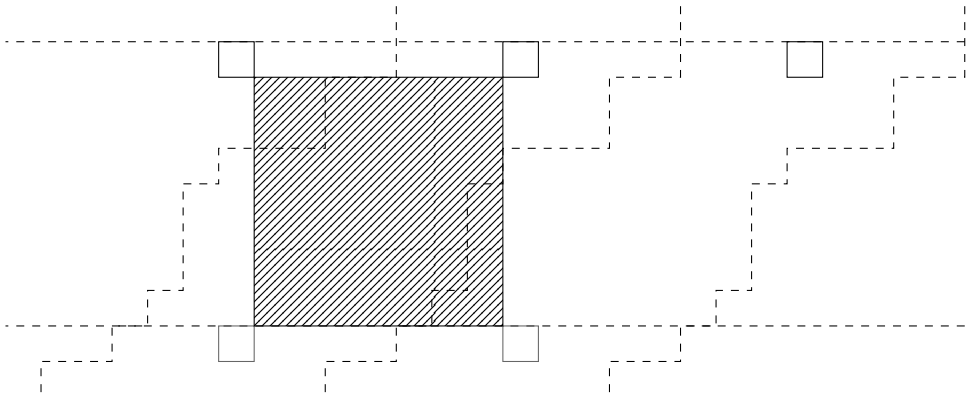


图 7：阴影中的单元格与 $x = x_n$ 不可比较。

定理 3.13。映射

$$\mathbf{h} : (\theta, \leq) \to (R(w_\theta), \trianglelefteq)$$

是一个偏序集同构。

证明。由命题 3.7，得

$$x \leq y \implies \mathbf{h}(x) \trianglelefteq \mathbf{h}(y),$$

$$y \leq x \implies \mathbf{h}(y) \trianglelefteq \mathbf{h}(x).$$

因此，只要证明以下结论即可：

x 与 y 不可比较，$\implies$ h(x) 与 h(y) 关于 $\trianglelefteq$ 不可比较

假设 x 与 y 不可比较。令 $n = N(\mathbf{h}(x))$，则有 $N(\mathbf{h}(y)) = n+1$、n 或 $n-1$，由引理 3.12 得。

首先，假设 $N(y) = n$。那么，由引理 3.12 可知，h(x) 和 h(y) 必定不可比较。

接下来，假设 $N(y) = n+1$。那么

$$\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(y_0) + \delta - \mathbf{h}(x_0),$$

其中 $x_0 = x + n(0, \ell)$ 且 $y_0 = y + (n+1)(0, \ell)$。根据引理 2.6，我们有

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Supp}(\mathbf{h}(y_0)) \cap \Gamma_{\max}| + 1 = |\mathrm{Supp}(\mathbf{h}(y_0)) \cap \Gamma_{\min}|, \\ &|\mathrm{Supp}(\delta - \mathbf{h}(x_0)) \cap \Gamma_{\max}| = |\mathrm{Supp}(\delta - \mathbf{h}(x_0)) \cap \Gamma_{\min}| + 1. \end{aligned}$$

它们与引理 3.9 不相容，因此我们有

$$\mathbf{h}(y_0) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi_\theta, \quad \delta - \mathbf{h}(x_0) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi_\theta \tag{3.4}$$

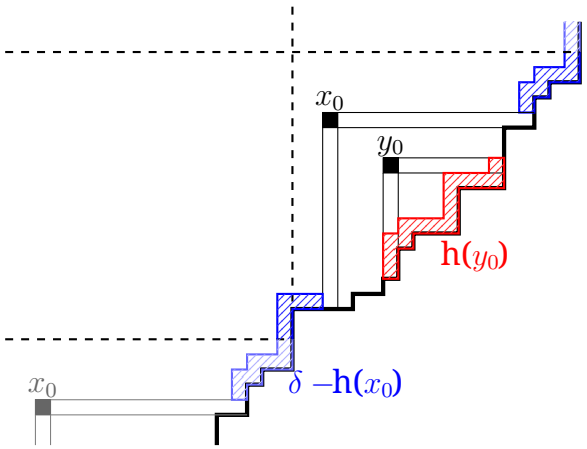


图 8:

我们需要　证明 $\mathbf{h}(y_0)+(\delta-\mathbf{h}(x_0)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi_\theta$. 由引理 3.12 可知

$$0 \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y_0) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(x_0) \leq^{\mathrm{or}} \delta$$

因此我们有

$$0 \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(y_0)+(\delta-\mathbf{h}(x_0)) \leq^{\mathrm{or}} \delta,$$

and

$$\mathrm{Supp}\left(\mathbf{h}(y_0)+(\delta-\mathbf{h}(x_0))\right) = \mathrm{Supp}(\mathbf{h}(y_0)) \sqcup \mathrm{Supp}(\delta-\mathbf{h}(x_0)).$$

由 (3.3) 可知，$y = y_{n+1} < x_{n+1}$。因此，$y_0 < x_0$，而且 x_0 和 y_0 不位于同一行或同一列。因此

$$x_0^{\mathrm{arm}}, x_0^{\mathrm{leg}} \notin \mathrm{Supp}\left(\mathbf{h}(y_0)+(\delta-\mathbf{h}(x_0))\right), \tag{3.5}$$

其中，x_0^{arm}（分别地，x_0^{leg}）是 $\{x_0\} \cup$ 臂(x_0)（分别地，$\{x_0\} \cup$ 腿(x_0)）中的最小元素。

假设

$$\mathbf{h}(y_0)+(\delta-\mathbf{h}(x_0)) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i$$

其中 $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \Pi_\theta$。那么 $0 \leq^{\mathrm{or}} \beta_i \leq^{\mathrm{or}} \delta\,(i=1,\ldots,r)$，$0 \leq^{\mathrm{or}} \sum_{i=1}^{r} \beta_i \leq^{\mathrm{or}} \delta$ 一个 d

$$\mathrm{Supp}\left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^{r} \mathrm{Supp}(\beta_i).$$

注意　每个 Supp(β_i) 都是 θ 中的一个区间。结合 (3.5)，这意味着

$$\mathrm{Supp}(\beta_i) \subset \mathrm{Supp}\left(\mathbf{h}(y_0)\right) \quad \text{or} \quad \mathrm{Supp}(\beta_i) \subset \mathrm{Supp}\left(\delta-\mathbf{h}(x_0)\right).$$

因此，存在 $i_1, \ldots, i_s$，使得我们有 $\mathsf{h}(y_0) = \beta_{i_1} + \cdots + \beta_{i_s}$，但这与 (3.4) 矛盾。因此，$\mathsf{h}(y) - \mathsf{h}(x) = \mathsf{h}(y_0) + (\delta - \mathsf{h}(x_0))$ 不可能是 Π_θ 中元素的和，因此 $\mathsf{h}(x)$ 和 $\mathsf{h}(y)$ 关于 $\trianglelefteq$ 不可比较。

同样的论证表明，在 $N(\mathsf{h}(y)) = n - 1$ 的情况下，$\mathsf{h}(x)$ 和 $\mathsf{h}(y)$ 也不可比较。□

Prop命题 3.14. 设 $\alpha, \beta \in R(w_\theta)$，且 $\alpha \trianglelefteq \beta$。那么存在一个序列

$$\alpha = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k = \beta$$

属于 $R(w_\theta)$，使得 $\gamma_{i+1} - \gamma_i \in \Pi_\theta\, (i = 1, \ldots, k-1)$。

换言之，$\trianglelefteq$ 在 $R(w_\theta)$ 上的偏序与以下关系的传递闭包一致

$$\alpha \trianglelefteq\!\cdot\, \beta \ \textit{whenever}\ \beta - \alpha \in \Pi_\theta. \tag{3.6}$$

证明。令 $\trianglelefteq^{\mathrm{tc}}$ 表示上述关系的传递闭包。由命题 3.7 的证明中相同的论证可知

$$x \leq y \implies \mathbf{h}(x) \trianglelefteq^{\mathrm{tc}} \mathbf{h}(y)$$

对于任意 $x, y \in \theta$。显然，

$$\mathbf{h}(x) \trianglelefteq^{\mathrm{tc}} \mathbf{h}(y) \implies \mathbf{h}(x) \trianglelefteq \mathbf{h}(y).$$

结合定理 3.13，即得所述结论。 □

3.3 堆

设 θ 是一个圆柱图。回忆一下，θ 上的标准杨表已定义为从 $(\theta, \leq)$ 到 $(\mathbb{Z}_{\geq 1}, \leqq)$ 的保序双射。通过双射 $\mathfrak{t}$，集合 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 从 θ 继承了一个偏序，我们将在本节中研究该偏序。

定义 3.15。设 $\mathfrak{t} \in \in \mathrm{ST}(\theta)$。在 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 上定义偏序 $\preceq_{\mathfrak{t}}$，使其为以下关系的传递闭包：

$$a \preceq_{\mathfrak{t}} b \text{ whenever } a \leqq b \text{ and either } s_{i_a} s_{i_b} = s_{i_b} s_{i_a} \text{ or } i_a = i_b.$$

其中，对于 $k \in \mathbb{Z}$，有 $i_k = \mathsf{c}(\mathfrak{t}^{-1}(k))$。偏序集 $(\mathbb{Z}_{\geq 1}, \preceq_{\mathfrak{t}})$ 称为 w_θ 的$\mathfrak{t}$ 堆。

命题 3.16。设 θ 是一个圆柱图，且 $\mathfrak{t}$ 是 θ 上的一个标准杨表。那么，映射 $\mathfrak{t} : \theta \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 给出一个偏序集同构

$$(\theta, \leq) \cong (\mathbb{Z}_{\geq 1}, \preceq_{\mathfrak{t}}).$$

证明。令 $x, y \in \theta$。假设 $x < y$是 θ中的一个覆盖关系。那么 $y = x - (1, 0)$ 或 $y = x - (0, 1)$，很容易看出 $\mathfrak{t}(x) < \mathfrak{t}(y)$ 且 $s(x)s(y) \neq s(y)s(x)$。因此$\mathfrak{t}(x) \preceq_{\mathfrak{t}} \mathfrak{t}(y)$。

反过来，假设 $\mathfrak{t}(x) \prec_{\mathfrak{t}} \mathfrak{t}(y)$ 在 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$中构成覆盖关系。那么 $s(x)s(y) \neq s(y)s(x)$ 或 $\mathsf{c}(x) = \mathsf{c}(y)$，因此 $\mathsf{c}(x) - \mathsf{c}(y) \neq 0, \pm 1$。根据命题 1.11 (1)，$x$ 和 y可比较。由于 $\mathfrak{t}$ 保序，我们必有 $x < y$，因此 h 是一个偏序集同构。□

偏序集 $(\mathbb{Z}_{\geq 1}, \preceq_{\mathrm{t}})$ 被视为 Stem- bridge [8] 引入的堆的半无限类比。Stembridge 还在逆序集上引入了堆序。我们采用 Nakada [2] 提出的略作修改的堆序版本。

定义 3.17。 在 $R(w_\theta)$ 上定义偏序 $\leq^{\mathrm{hp}}$，使其为关系的传递闭包 s

$$\alpha \leq^{\mathrm{hp}} \beta \text{ whenever } \alpha \leq^{\mathrm{or}} \beta \text{ and } \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0.$$

命题 3.18。映射 $\mathrm{h}: \theta \to R(w_\theta)$ 给出一个偏序集同构

$$(\theta, \leq) \cong (R(w_\theta), \leq^{\mathrm{hp}}).$$

换言之， $R(w_\theta)$ 上的偏序 $\leq^{\mathrm{hp}}$ 和 $\trianglelefteq$ 一致。

证明。令 $x, y \in \theta$。假设 $x < y$ 是 θ 中的覆盖关系。那么 $\mathrm{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathrm{h}(y)$ 且 $\mathrm{h}(y) - \mathrm{h}(x) \in \Pi_\theta \subset R \sqcup \mathbb{Z}\delta$。我们有

$$\langle \mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x), \mathbf{h}(y)^\vee \rangle = 2 - \langle \mathbf{h}(x), \mathbf{h}(y)^\vee \rangle.$$

若 $\langle \mathrm{h}(y), \mathrm{h}(x)^\vee \rangle = 0$，则根据引理 1.16，$\mathrm{h}(y) - \mathrm{h}(x) \equiv \mathrm{h}(y) \bmod \mathbb{Z}\delta$，因此对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，有 $\mathrm{h}(x) = k\delta$。这就产生了矛盾。因此 $\langle \mathrm{h}(x), \mathrm{h}(y)^\vee \rangle \neq 0$，由此可得 $\mathrm{h}(x) \leq^{\mathrm{hp}} \mathrm{h}(y)$。

接下来，假设 $\mathrm{h}(x) \leq^{\mathrm{hp}} \mathrm{h}(y)$ 是一个覆盖关系。令 $x_0 = x + N(\mathrm{h}(x))(0, \ell)$，并令 $y_0 = x + N(\mathrm{h}(y))(0, \ell)$。于是 $\mathrm{h}(x_0) = \mathrm{h}(x) - N(\mathrm{h}(x)\delta$，$\mathrm{h}(y_0) = \mathrm{h}(y) - N(\mathrm{h}(y)\delta$，且

$$\langle \mathbf{h}(x_0), \mathbf{h}(y_0)^\vee \rangle = \langle \mathbf{h}(x), \mathbf{h}(y)^\vee \rangle \neq 0 \tag{3.7}$$

根据假设。

假设 x 和 y 不可比较。那么，由于 $\mathrm{h}(x) \leq^{\mathrm{or}} \mathrm{h}(y)$，我们有 $N(\mathrm{h}(y)) = N(\mathrm{h}(x)) + 1$，且

$$\mathbf{h}(y_0) \leq^{\mathrm{or}} \mathbf{h}(x_0) \leq^{\mathrm{or}} \delta \tag{3.8}$$

根据引理 3.12。此外，由定理 3.13 的证明中的 (3.5)，我们有

$$y_0 \notin \mathrm{Arm}(x_0) \cup \mathrm{Leg}(x_0). \tag{3.9}$$

（另见图 8。）

回忆一下，正根 $\mathrm{h}(x_0)$ 和 $\mathrm{h}(y_0)$ 可表示为 $\mathrm{h}(x_0) = \alpha_{ij}$ 和 $\mathrm{h}(y_0) = \alpha_{kl}$，其中 i、j、k、$l \in \mathbb{Z}$ 满足 $i < j$、$k < l$。由 (3.8) 和 (3.9)，可以选取指标 i、j、k 和 l，使它们满足 $j - i \leqq \kappa - 1$ 和 $i < k < l < j$。因此我们有

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{h}(x_0), \mathbf{h}(y_0)^\vee \rangle &= \langle \alpha_{ij}, \alpha_{kl}^\vee \rangle = \langle \alpha_{k-1\,l+1}, \alpha_{kl}^\vee \rangle \\
&= \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{kl}^\vee \rangle + \langle \alpha_k, \alpha_{kl}^\vee \rangle + \sum_{d=k+1}^{l-1} \langle \alpha_d, \alpha_{kl}^\vee \rangle + \langle \alpha_{l-1}, \alpha_{kl}^\vee \rangle + \langle \alpha_l, \alpha_{kl}^\vee \rangle \\
&= -1 + 1 + 0 + 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

这与 (3.7) 矛盾。因此 x 和 y 可比较，从而 $x < y$ as $\mathrm{h}(x) < \mathrm{h}(y)$。 □

4 序理想集合的偏序集结构

4.1 圆柱斜图上的标准杨表

对于偏序集 P，令 $\mathcal{J}(P)$ 表示真序理想的集合，并将 $\mathcal{J}(P)$ 视为以包含关系为序的偏序集。

设 $\omega \in \mathbb{Z}_{\geqq 1} \times \mathbb{Z}_{\leqq -1}$，并固定一个圆柱图 θ，其中 $\mathcal{C}_\omega$。本节将研究 θ 的序理想集合 $\mathcal{J}(\theta)$ 的偏序集结构，换言之，即包含于 θ 中的圆柱斜图。

回顾一下，任意圆柱斜图 $\xi \in \mathcal{J}(\theta)$ 都是有限集，且 $\mathcal{J}(\theta) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_n(\theta)$，其中

$$\mathcal{J}_n(\theta) = \{\xi \in \mathcal{J}(\theta) \mid |\xi| = n\}.$$

对于 $\xi \in \mathcal{J}_n(\theta)$ 和 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\xi)$，定义一个字 $w_{\xi,\,\mathfrak{t}}$，其定义为

$$w_{\xi,\mathfrak{t}} = s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(n)). \tag{4.1}$$

我们有时将 $w_{\xi,\,\mathfrak{t}}$ 视为一个魏尔群元素。

命题 4.1. 单词 $w_{\xi,\mathfrak{t}}$ 是约化的。作为魏尔群的元素，$w_{\xi,\mathfrak{t}}$ 是完全交换的，且与 $\mathfrak{t}$ 无关。

证明. 由引理 1.10 可知，$\mathfrak{t}$ 上的标准杨表 ξ 可扩展为 θ上的标准杨表 $\tilde{\mathfrak{t}}$，由此有 $w_{\theta,\,\tilde{\mathfrak{t}}}[n] = w_{\xi,\mathfrak{t}}$。根据命题 2.11 和命题 2.17，(4.1) 右侧是一个约化表达式，且 $w_{\xi,\mathfrak{t}}$ 是根系 W 中的一个完全交换元素。由命题 2.12 可知

$$R(w_{\xi,\mathfrak{t}}) = \{\mathbf{h}(x) \mid x \in \xi\}.$$

因此，集合 $R(w_{\xi,\mathfrak{t}})$ 与 $\mathfrak{t}$ 无关，$w_{\xi,\mathfrak{t}}$也与之无关。 □

对于任意标准杨表 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\xi)$，我们将由单词 $w_{\xi,\mathfrak{t}}$ 确定的魏尔群元素记为 w_ξ。

引理 4.2（见 [8,定理 3.2]）。映射

$$\mathfrak{t} \mapsto w_{\xi,\mathfrak{t}} = s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(n))$$

给出了从 $\mathrm{ST}(\xi)$ 到 w_ξ 的约化表达式集合的双射。

证明。首先，我们证明该对应关系是单射的。对于 $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathrm{ST}(\xi)$，考虑两个字 $w_{\xi,\,\mathfrak{t}_1} = s(p_1)s(p_2) \cdots s(p_n)$ 和 $w_{\xi,\,\mathfrak{t}_2} = s(q_1)s(q_2) \cdots s(q_n)$，其中 $p_k = \mathfrak{t}_1^{-1}(k)$ 且$q_k = \mathfrak{t}_2^{-1}(k)$。假设 $w_{\xi,\,\mathfrak{t}_1} = w_{\xi,\,\mathfrak{t}_2}$ 是字。于是 $\mathrm{c}(p_1) = \mathrm{c}(q_1)$，并且 p_1 和q_1 是 ξ 的极小元。因此我们有 $p_1 = q_1$。通过类似的论证，归纳可得，对于任意$k \in [1, n]$，都有 $p_k = q_k$。

接下来，我们证明该映射是满射。取 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\xi)$，并令 $p_j = \mathfrak{t}^{-1}(j)$ $(j \in [1, n])$。于是 $w_{\xi,\,\mathfrak{t}} = s(p_1)s(p_2) \cdots s(p_n)$，这是 w_ξ 的一个约化表达式。

假设 $s(p_k)s(p_{k+1}) = s(p_{k+1})s(p_k)$。那么 $\mathsf{c}(p_k) - \mathsf{c}(p_{k+1}) \neq \pm 1$，因此 p_k 不被 p_{k+1} 覆盖。这意味着 p_k 和 p_{k+1} 不可比较。定义映射$\mathfrak{t}^{(k)} : \xi \to [1, n]$ 如下：

$$\mathfrak{t}^{(k)}(p_j) = \begin{cases} k+1 & \text{if } j = k, \\ k & \text{if } j = k+1, \\ j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是 $\mathfrak{t}^{(k)} \in \mathsf{ST}(\xi)$ 和 $w_{\xi,\ \mathfrak{t}^{(k)}} = s(p_1)s(p_2)\cdots s(p_{k+1})s(p_k)\cdots s(p_n)$。现在，$w_\xi$ 的全交换性蕴含满射性。□

4.2 布鲁哈特区间

对于 v、$w \in W$，若 $\ell(w) = \ell(v) + 1$，且 $w = vs_i$ 对某个简单反射 s_i 成立，我们记作 $v \prec w$。若存在序列 $v = w_0 \prec w_1 \prec \cdots \prec w_n = w$，则记作 $v \prec w$。显然，关系 $\preceq$ 是 W 上的偏序，称为弱右布鲁哈特序。

对于 $w \in W$，我们定义

$$[e, w] = \{x \in W \mid e \preceq x \preceq w\}.$$

注意，当 $\ell(w) = n$ 时，我们有

$$[e, w] = \left\{ s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k} \in W \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leqq k \leqq n \text{ and there exist } i_{k+1}, \ldots, i_n \text{ such that} \\ s_{i_1}\cdots s_{i_k}s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_n} \text{ is a reduced expression for } w \end{array} \right\}. \quad (4.2)$$

设 θ 为一个圆柱图。对于 $\mathfrak{t} \in \mathsf{ST}(\theta)$，我们定义

$$[e, w_{\theta,\mathfrak{t}}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [e, w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]].$$

我们将看到，“半无限布鲁哈特区间” $[e, w_{\theta,\mathfrak{t}})$ 实际上与 $\mathfrak{t} \in \mathsf{ST}(\theta)$ 无关。

引理 4.3. 设 $\mathfrak{t}_1$ 和 $\mathfrak{t}_2$ 是 θ上的两个标准杨表。那么对每个 $n \geqq 1$，存在 $r \geqq n$ 和 $\mathfrak{s} \in \mathsf{ST}(\theta)$，使得 $w_{\theta,\mathfrak{s}}[r] = w_{\theta,\mathfrak{t}_1}[r]$ 作为 W 的元素成立，并且 $w_{\theta,\mathfrak{s}}[n] = w_{\theta,\mathfrak{t}_2}[n]$ 作为字成立。

证明. 选取 $r \geqq n$ 使得 $\mathfrak{t}_2^{-1}[1, n] \subset \mathfrak{t}_1^{-1}[1, r]$. 令 $\xi_1 = \mathfrak{t}_1^{-1}[1, r]$ 和 $\xi_2 = \mathfrak{t}_2^{-1}[1, n]$. 注意，$\xi_1 \setminus \xi_2$ 是圆柱图 $\theta \setminus \xi_2$的一个序理想。取 $\mathfrak{t} \in \mathsf{ST}(\theta \setminus \xi_2)$，使得$\mathfrak{t}^{-1}[1, r-n] = \xi_1 \setminus \xi_2$ （引理 1.10）。定义一个映射 $\mathfrak{s} : \theta \to \mathbb{Z}_{\geqq 1}$ 如下

$$\mathfrak{s}(p) = \begin{cases} \mathfrak{t}(p) + n & (p \in \theta \setminus \xi_2) \\ \mathfrak{t}_2(p) & (p \in \xi_2) \end{cases}$$

于是我们得到 $\mathfrak{s} \in \mathsf{ST}(\theta)$，根据命题 4.1，它满足所需条件。 □

命题 4.4. 设 $\mathfrak{t}_1$ 和 $\mathfrak{t}_2$ 是 θ的两个标准杨表。那么

$$[e, w_{\theta,\mathfrak{t}_1}) = [e, w_{\theta,\mathfrak{t}_2}) \text{ as subsets of } W.$$

证明. 设 $n \geqq 1$。根据引理 4.3，存在 $r \geqq n$ 和 $\mathfrak{s} \in \mathrm{ST}(\theta)$，使得 $w_{\theta,\mathfrak{s}}[r] = w_{\theta,\mathfrak{t}_1}[r]$且 $w_{\theta,\mathfrak{s}}[n] = w_{\theta,\mathfrak{t}_2}[n]$。现在我们有

$$[e, w_{\theta,\mathfrak{t}_2}[n]] = [e, w_{\theta,\mathfrak{s}}[n]] \subset [e, w_{\theta,\mathfrak{s}}[r]] \subset [e, w_{\theta,\mathfrak{t}_1}[r]].$$

因此，我们得到

$$[e, w_{\theta,\mathfrak{t}_2}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [e, w_{\theta,\mathfrak{t}_2}[n]] \subset [e, w_{\theta,\mathfrak{t}_1}).$$

同理，我们得到 $[e, w_{\theta,\mathfrak{t}_1}) \subset [e, w_{\theta,\mathfrak{t}_2})$，因此 $[e, w_{\theta,\mathfrak{t}_1}) = [e, w_{\theta,\mathfrak{t}_2})$。 □

下文中我们将 $[e, w_{\theta,\mathfrak{t}})$ 简记为 $[e, w_\theta)$。我们有

$$[e, w_\theta) = \bigcup_{\xi \in \mathcal{J}(\theta)} [e, w_\xi]$$

由以下引理可得:

引理 4.5。设 $v \in W$。那么 $v \in [e, w_\theta)$ 当且仅当对于某个 $\xi \in \mathcal{J}(\theta)$，有 $v = w_\xi$。

证明。设 $v \in [e, w_\theta)$。那么对于某个 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$，有 $v \in [e, w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]]$，且 n。根据引理 4.2，存在 $\mathfrak{t}' \in \mathrm{ST}(\theta)$ 和 k，使得 $v = w_{\theta,\mathfrak{t}'}[k]$。令 $\xi = \mathfrak{t}'^{-1}[1, k]$，我们有 $v = w_\xi$。

设 $\xi \in \mathcal{J}(\theta)$。则存在 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$ 和 n，使得 $w_\xi = w_{\theta,\mathfrak{t}}[n]$。因此$w_\xi \in [e, w_\theta)$。□

下述定理可视为[8] 中所建立结果的半无限版本（另见 [3, 5]）。

定理 4.6. 设 θ 是 $\mathcal{C}_\omega$ 中的一个柱状杨图。
(1) 映射

$$\Phi : (\mathcal{J}(\theta), \subset) \to ([e, w_\theta), \preceq)$$

由 $\Phi(\xi) = w_\xi$ 给出，是一个偏序集同构。
(2) 映射

$$\Psi : ([e, w_\theta), \preceq) \to (\mathcal{J}(R(w_\theta)), \subset)$$

由 $\Psi(w) = R(w)$ 给出的是一个偏序集同构。

证明。我们将同时证明 (1) 和 (2)。注意，偏序集同构 $\mathbf{h} : \theta \to R(w_\theta)$ 诱导出一个偏序集同构 $\mathcal{J}(\theta) \to \mathcal{J}(R(w_\theta))$，在该同构下，$\xi \in \mathcal{J}(\theta)$ 对应于

$$\{\mathbf{h}(x) \mid x \in \xi\} = R(w_\xi) = \Psi \circ \Phi(\xi).$$

因此 $\Psi \circ \Phi$ 是双射，从而 Φ 是单射。由于根据引理 4.5，Φ 是满射，Φ 是双射。因此 Ψ 也是双射。

我们将证明 Φ 和 Ψ 是保序的。

假设 ξ' 覆盖 ξ，或者等价地，对于 ξ'中的极大元 x，有 $\xi' = \xi \sqcup \{x\}$。那么存在满足 $\mathfrak{t}^{-1}(n) = x$ 的 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\xi')$，对此我们有

$$w_{\xi'} = s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(n-1))s(\mathfrak{t}^{-1}(n)) = w_\xi s(x),$$

这意味着 $w_{\xi'}$ 覆盖 w_ξ。因此， Φ 是保序的。

显然， $v \preceq w$ 意味着 $R(v) \subset R(w)$。因此， Ψ 是保序的。

由于我们知道 $(\Psi \circ \Phi)^{-1}$ 是保序的，因此 Φ^{-1} 和 Ψ^{-1} 也都是保序的。□

命题 4.7。设 θ 为一个圆柱图。则

$$[e, w_\theta) = \{w \in W \mid w \ is \ \zeta_\theta\text{-}pluscule\}$$

证明。由命题 2.17可知， $[e, w_\theta$中的任意元素都是 ζ_θ-pluscul e.

令 $w \in W$ 为 ζ_θ-pluscule， $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_n}$ 为其约化表达式。我们将对 $n = \ell(w)$ 进行归纳，证明 $w \in [e, w_\theta)$。根据归纳假设， $v := s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{n-1}}$ 属于 $[e, w_\theta)$，因此对于某个 $\xi \in \mathcal{J}(\theta)$，有 $v = w_\xi$。

令 x 为 $\mathfrak{c}^{-1}(i_n) \cap (\theta \setminus \xi)$ 的最小元素，并设 $\xi' = \xi \sqcup \{x\}$。取 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\xi')$，使得 $\mathfrak{t}(n) = x$。那么 $w = s(\mathfrak{t}^{-1}(1))s(\mathfrak{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(n))$。由于 w 是 ζ_θ-pluscule，若 $i_n = i_k$，则根据命题 2.3]，存在 j_+、 $j_- \in [k, n]$，使得 $j_+ = i_n + 1$ 且 $j_- = i_n - 1$。这意味着子集 ξ' 满足命题 1.6 中的条件 (v)。因此， ξ' 是 θ 和 $w = w_{\xi \sqcup \{x\}}$ 中的一个圆柱斜图。因此 $w \in [e, w_\theta)$。□

4.3 斜图与经典情形

设 θ 是 $\mathcal{C}_\omega$ 中的一个圆柱图。令 $\xi \in \mathcal{J}_n(\theta)$，并取 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\theta)$，使得 $\xi = \mathfrak{t}^{-1}[1, n]$。于是我们有 $w_{\theta,\ \mathfrak{t}}[n] = w_\xi$ ，且 $\mathrm{h}(\xi) = R(w_\xi)$。因此，下面的定理可由定理 3.13 轻易推出：

定理 4.8。设 $\xi \in \mathcal{J}_n(\theta)$。

(1) 映射 $\mathrm{h} : (\xi, \trianglelefteq) \to (R(w_\xi)\ \trianglelefteq)$ 是偏序集同构。(2) 对于 $\mathfrak{t} \in \mathrm{ST}(\xi)$，映射 $\mathfrak{t} : (\xi, \trianglelefteq) \to ([1, n], \leq_{\mathfrak{t}}^{\mathrm{hp}})$ 是偏序集同构。

注意， $\mathcal{J}(\xi) = \{\eta \in \mathcal{J}(\theta) \mid \eta \subset \xi\}$。定理 4.6 蕴含以下结论：

定理 4.9。设 $\xi \in \mathcal{J}(\theta)$。

(1) 由 $\Phi(\eta) = w_\eta$ 给出的映射 $\Phi : (\mathcal{J}(\xi)\ \subset) \to ([e, w_\xi], \preceq)$ 是偏序集同构。(2) 由 $\Psi(w) = R(w)$ 给出的映射 $\Psi : ([e, w_\xi], \preceq) \to (\mathcal{J}(R(w_\xi))\ \subset)$ 是偏序集同构。

接下来，我们将看到，非圆柱图的描述可以从上述结果推导出来。设 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，并设 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ 为满足 $\lambda_i \geqq \mu_i \geqq 0$ $(i \in [1, m])$ 的分拆。采用第 1.1 节中的记号，相应的经典斜杨图可表示为 $\mathbb{Z}^2$ 的子集 $\boldsymbol{\lambda/\mu}$ ：

$$\boldsymbol{\lambda/\mu} = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \in [1, m],\ b \in [\mu_a + 1, \lambda_a]\right\}.$$

注意，与 λ 相对应的经典正规杨图是一个特殊的斜杨图$\boldsymbol{\lambda/\phi}$，其中 $\phi=(0,0,\ldots,0)$。

为了连 接经典杨图和柱形图，我们取 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得

$$\ell \geqq \lambda_1-\mu_m.$$

那么分拆 λ、μ 是 ℓ-受限的，而且很容易看出，斜杨图$\boldsymbol{\lambda/\mu}$ 与圆柱斜图 $\lambda/\mathring{\mu}=\pi(\boldsymbol{\lambda/\mu})$ 作为偏序集同构。在此$^{\circ}$ $^{\circ}$对应 $\boldsymbol{\lambda/\mu}=\lambda/\mathring{\mu}$下，关于圆柱图 λ 的序理想 $\lambda/\mathring{\mu}$ 的定理 4.8 和引理 3.11 得出以下结论：

$$([1,n],\leq_{\mathfrak{t}}^{\mathrm{hp}})\cong(\boldsymbol{\lambda/\mu},\leq)\cong(R(w_{\boldsymbol{\lambda/\mu}}),\trianglelefteq)=(R(w_{\boldsymbol{\lambda/\mu}}),\leq^{\mathrm{or}})$$

$^{\circ}$对于每个 $\mathfrak{t}\in\mathrm{ST}(\boldsymbol{\lambda/\mu})=\mathrm{ST}(\lambda/\mathring{\mu})$，并且由定理 4.9 可得

$$(\mathcal{J}(\boldsymbol{\lambda/\mu}),\subset)\cong([e,w_{\boldsymbol{\lambda/\mu}}],\preceq)\cong(\mathcal{J}(R(w_{\boldsymbol{\lambda/\mu}}),\subset).$$

注意，重新定义内容为

$$\mathbf{c}(a,b)=b-a+m-\mu_m,$$

我们有 $\mathbf{c}(\boldsymbol{\lambda/\mu})\subset[1,\kappa-1]$，并且

$$w_{\boldsymbol{\lambda/\mu}}\in\bar{W},\ R(w_{\boldsymbol{\lambda/\mu}})\subset\bar{R},$$

$^{-}$ $^{-}$其中，W 和 R 分别表示 $A_{\kappa-1}$ 型的魏尔群和根系。

我们将看到上述结果与先前工作的关系。设 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和λ 是 n的一个划分。取 $\mathfrak{t}\in\mathrm{ST}(\boldsymbol{\lambda/\phi})$，并令

$$w_\lambda:=w_{\boldsymbol{\lambda/\phi}}=s(\mathfrak{t}^{-1}(n))s(\mathfrak{t}^{-1}(n-1))\cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(1)).$$

元素 w_λ 与 $\mathfrak{t}$ 无关，称为与 λ对应的格拉斯曼置换。

文献 [7, 3] 已证明，映射

$$\mathbf{coh}:\boldsymbol{\lambda/\phi}\to R(w_\lambda^{-1})$$

定义为

$$\mathbf{coh}(x)=s(\mathfrak{t}^{-1}(n))s(\mathfrak{t}^{-1}(n-1))\cdots s(\mathfrak{t}^{-1}(k+1))\alpha(\mathfrak{t}^{-1}(k)),\tag{4.3}$$

其中 $k=\mathfrak{t}^{-1}(x)$，给出了偏序集之间的对偶同构：

$$\mathbf{coh}:(\boldsymbol{\lambda/\phi},\leq)\to(R(w_\lambda^{-1}),\leq^{\mathrm{or}}),\tag{4.4}$$

其中，$\leq^{\mathrm{or}}$ 是前面所述的普通序。

另一方面，作为定理 4.8 的经典版本，我们有一个偏序集同构

$$\mathbf{h}:(\boldsymbol{\lambda/\phi},\leq)\to(R(w_\lambda),\trianglelefteq).\tag{4.5}$$

现在定义映射 $\iota\colon\ R\to R$，使得 $\iota(\alpha)=-w_\lambda^{-1}\alpha$。由表达式 (2.3) 和 (4.3) 可立即推出，对于所有 $x\in\boldsymbol{\lambda/\phi}$，$\iota\circ\mathbf{h}(x)=\mathbf{coh}(x)$。因此我们有如下结论：

命题 4.10. ι 的限制给出了一个对偶偏序集同构

$$\iota : (R(w_\lambda), \trianglelefteq) \to (R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\mathrm{or}})$$

而且 $\iota \circ \mathsf{h} = \mathsf{coh}$。换句话说，下面的偏序集同构图是交换的：

$$\begin{array}{ccc} (\boldsymbol{\lambda}/\boldsymbol{\phi}, \leq) & \xrightarrow{\mathbf{h}} & (R(w_\lambda), \trianglelefteq) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{coh}} & \swarrow{\scriptstyle \iota} & \\ (R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\mathrm{or}})^{\mathrm{op}} & & \end{array} \tag{4.6}$$

其中 $(R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\mathrm{or}})^{\mathrm{op}}$ 表示将 $(R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\mathrm{or}})$ 的顺序反转后得到的偏序集。

参考文献

[1] A. Kleshchev，《对称群的完全可分表示》，《代数杂志》181 (1996)，第 2 期，584–592。[2] K. Nakada，《广义杨图的带色钩公式》，《大阪数学杂志》45 (2008)，1085–1120。[3] H. Naruse 和 S. Okada，《通过等变 K 理论得到 d-完备偏序集的斜钩公式》，《代数与组合》2 (2019)，第 4 期，541–571。[4] R. A. Proctor，《 d-完备偏序集将杨图推广为钩积公式：证明的部分陈述》，RIMS 讲究录，1913 (2014)，120–140。[5] R. A. Proctor，《魏尔群的极小元、数字游戏与 d-完备偏序集》，《代数杂志》213 (1999)，第 1 期，272–303。[6] O. Ruff，《对称群和仿射 Hecke 代数的完全可分表示》，《代数杂志》305 (2006)，第 2 期，1197–1211。[7] J. R. Stembridge，《魏尔群的极小元》，《代数杂志》235 (2001)，722–743。[8] J. R. Stembridge，《关于 Coxeter 群中的完全可交换元》，《代数与组合》5 (1996)，第 4 期，353–385。[9] M. Strayer，《由带色偏序集构造的极小 Kac–Moody 表示的统一刻画》，《电子组合学杂志》27 (2020)，第 2 期，#P2.42。[10] M. Strayer，《 Γ-带色 d-完备偏序集及上部 P-极小 Borel 表示的分类》，《电子组合学杂志》28 (2021)，第 1 期，#P1.15。[11]T. Suzuki，Y. Toyosawa，《关于圆柱斜图的钩公式》，《冈山大学数学杂志》64 (2022)，191–213。

[12] Takeshi Suzuki, 《 A型双仿射 Hecke 代数的有理与三角退化》，国际数学研究通知 (2005)，第 37 期，2249–2262。[13] Takeshi Suzuki 和Monica Vazirani, 《周期斜图上的杨表与 A型双仿射 Hecke 代数的不可约表示》，国际数学研究通知 (2005)，第 27 期，1621–1656。