arXiv:2302.01779v1 [physics.atom-ph] 3 Feb 2023

用于强场电离的相对论解析 R 矩阵（ARM）理论

Michael Klaiber，* Karen Z. Hatsagortsyan，† 和 Christoph H. Keitel马克斯·普朗克核物理研究所¨，德国海德堡市 *Saupfercheckweg 1*，邮编 *69117*（日期：2023年2月6日）

解析 R 矩阵理论（ARM）因能有效描述非相对论区强场电离中原子实的库仑效应而广为人知。我们将 ARM理论推广到相对论域，旨在将其应用于超强激光场中的高电荷离子强场电离。文中将其与相对论库仑修正强场近似（SFA）进行比较，并指出各自的优缺点。我们考察了弱相对论渐近行为及其与非偶极库仑修正 SFA 的一致性。作为相对论ARM的一项物理应用示例，文中讨论了直接通道截止处高电荷离子隧穿电离概率的库仑增强。

I. 引言

光电子和离子动量分布高分辨率测量实验技术的进步 [1, 2] ，使近期对强场电离的实验研究得以拓展至偶极区之外[3–13]。主要的非偶极效应是辐射压，它使强场电离中吸收的光子动量在光电子与母离子之间分配 [3, 14–19]。原子实的库仑效应与非偶极效应之间的相互作用会产生有趣的动力学性质 [4–6, 20–26]。为解释实验结果，研究者已发展出非偶极理论，其中包括强场近似（SFA） [14, 18, 19, 27–37], 、数值求解含时薛定谔方程（TDSE） [30, 38, 39], 以及经典轨迹蒙特卡罗（CTMC）模拟 [12, 40–42]。

尽管目前已能实现强度高达10^{23} W/cm^2 的强激光场 [43], , 但在超强场下激光-原子相互作用的相对论区间，仍远未得到深入的实验研究。这是因为人们预期，最有趣的动力学过程（包括电子关联）会在原子场与激光场强度相当时出现。后者要求研究由高电荷态离子（HCI）构成的原子系统，而这类系统在实验上极难操控。20多年前，Moore等人[44] 在强度为 3×10^{18} W/cm^2,的激光场下开展了该领域的开创性实验；此后，一系列精细实验致力于观测相对论强度外场电离过程中，光电子动量分布（PMD）所呈现的原子束缚态动力学特征[45–53]。研究明确表明，激光磁场诱导的电子漂移会抑制通常的电子关联通道——再碰撞，以及与之相关的高次谐波产生、阈上电离和非序贯双电离等现象，参见例如 [40, 46, 54]。然而，尚不清楚在强场电离的相对论区间，再碰撞受到抑制时，特定的电子关联过程是否仍会存在，例如摇激、摇脱过程、集体隧穿等[55]。

强场物理中用于解析研究的两大主力工具——强场近似（SFA） [56–58], 和准经典虚时间方法（ITM） [59, 60] ——分别已在 [61, 62], 和 [63–66], 中推广至相对论区间。然而，在标准的 SFA 中，忽略了原子实的库仑场对电子连续态动力学的影响。这种近似尤其不适用于高电荷态离子的情况。

在非相对论区间，ITM 已得到改进，可处理电离期间库仑场的影响，并推导出了众所周知且定量正确的 Perelomov-Popov-Terent'ev（PPT）电离率 [67] （在绝热区间也称为 Ammosov、Delone、Krainov（ ADK）电离率[68]）。PPT 理论采用准经典波函数，描述电子波包穿过由激光场和原子场形成的非绝热势垒的隧穿部分。连续态波函数与精确的束缚态 [59, 69], 相匹配，从而消除了准经典波函数在库仑中心处的相位奇点。PPT 理论并未涉及光电子在连续态中的动力学过程所受的库仑效应。后者对光电子动量分布（PMD）中各种特征的形成非常重要，并已通过库仑修正强场近似（ CCSFA）的不同版本加以处理。最简单的方法是库仑-沃尔科夫假设：在 SFA 矩阵元中，以库仑-沃尔科夫波函数 [71, 72], 取代沃尔科夫波函数 [70] ； 该波函数将精确库仑连续态波函数的渐近相位纳入沃尔科夫态的相位中。尽管库仑-沃尔科夫方法可以通过 S 矩阵展开 [73],进行严格表述，但它以微扰方式处理库仑场与激光场之间的耦合；当电子隧穿后在靠近原子实处进入连续态时，该方法便会失效 [74]。

非相对论 PPT 理论的扩展版本也采用程函近似下的电子连续态波函数，以处理连续态中的库仑效应 [75–77]。 [78, 79], 通过沿激光场和库仑场驱动的精确经典电子轨迹计算连续态电子波函数的程函相位，对基于程函近似的库仑修正强场近似进行了严格表述。 [80, 81] 通过

* klaiber@mpi-hd.mpg.de

† k.hatsagortsyan@mpi-hd.mpg.de

费曼路径积分的概念也推导出了相同的近似。 [82], 通过使用鞍点近似 [83], 消除库仑奇点，而非采用与束缚态的匹配过程，讨论了库仑修正强场近似中的高阶贡献。

在解析 R 矩阵理论（ARM） [84–87]中，提出了一种创新方法，在非相对论强场近似框架内，将连续态电子的程函波函数与原子束缚态相匹配。研究表明，严格的匹配过程等价于对 SFA 振幅中程函波函数相位的复时间积分起点进行特定的（虚数）平移。ARM理论提供了最高效的库仑修正强场近似形式。不同版本的库仑修正强场近似所采用的程函近似虽可处理再散射效应，却将再散射限制在软再散射范围内 [88]。

强场电离的相对论区间可由以下参数表征。对于势垒下动力学，参数 $\upsilon \equiv \kappa/c \sim 1$ 表征相对论域，其中原子动量为 $\kappa = \sqrt{2I_p}$，电离能为I_p，光速为c。~~对于~~连续态动力学，当相对论不变量场参数为 $\xi \equiv E_0/(c\omega) \sim 1$时，便进入相对论域，其中激光场振幅为$E_0$, , 频率为 ω。当洛伦兹偏转参数为 $\Gamma_R \gtrsim 1$时，相对论区间中的再碰撞会受到抑制，其中 $\Gamma_R \equiv (1/16)\upsilon\xi^3(c^2/\omega)$ [40, 89]。全文均采用原子单位。

由超强激光场驱动的高电荷态离子，使强场电离的相对论域成为可能。将电离过程中包含库仑修正的强场隧穿模型扩展至相对论区间 [63–66], , 从而能够定量计算相对论情形下具有实际意义的电离率。Howard Reiss 在 [61, 62] 提出了普通强场近似的相对论版本。基于连续态电子的相对论程函-沃尔科夫波函数的库仑修正强场近似 [90], , 已在 [91] 中提出。文献 [92], 给出了利用相对论CCSFA 计算相对论区间内自旋分辨电离概率的方法，并表明 CCSFA 与经过库仑修正的强场隧穿模型等效。

我们还指出，文献 [93–105] 在通过狄拉克方程数值研究相对论电离动力学方面作出了重大努力，尤其是针对高电荷态离子与超强激光场开展的研究。

本文将 ARM 理论扩展至相对论域，旨在将其应用于超强激光场中高电荷态离子的强场电离。ARM 理论 [84–87] 是一种程函近似，用于描述电子在强激光场中电离后进行连续态动力学时原子实的库仑场。ARM 理论的主要优势在于，它通过将时间积分边界沿程函特定地移入复数域，取代了将连续态波函数与束缚态进行显式匹配的过程。这样做的结果是，时间积分鞍点处（对应于库仑势中心）波函数的奇点被消除。对于将 ARM 理论扩展至相对论区间时，我们利用了后一性质，即推导出时间积分边界在复数域中的相应移动，从而消除相对论 CCSFA 波函数的相位在时间鞍点处的奇点。最后，我们应用相对论 ARM 理论，研究相对论域中高电荷态离子直接电离通道截止处的库仑增强效应。该效应在非相对论区间已为人所知，相关描述见 [88, 106]。

本文的结构如下。第二节从非相对论区间出发，阐明我们推导 ARM理论振幅的方法，随后在第三节将其应用于相对论情形。第六节讨论所推导的相对论 ARM理论的应用示例，第七节给出结论。

II. 非相对论理论

本节阐明我们在非相对论区间推导 ARM理论振幅的方法。请注意，非相对论 ARM理论中的电离振幅已在 [84–87] 中推导得出：该方法将相互作用区域划分为两个子区域（内区和外区），并通过 R矩阵方法，将外区连续态电子的程函波函数与内区的束缚态波函数进行严格匹配。这里，我们采用一种操作性方法，即考虑到上述波函数匹配过程等价于在复数域中移动时间积分边界，并在程函中推导出这种时间积分边界的移动，从而消除强场近似振幅的奇点。首先，我们采用这种操作性方法，推导短程原子势情况下的强场电离振幅，然后讨论存在库仑场的情形。

我们采用强场近似来描述激光驱动的原子束缚电子电离过程。电子具有渐近出射动量$\mathbf{p}$ 时，其强场近似电离振幅为 [107]

$$m_{\mathbf{p}} = -i \int dt \langle \psi_{\mathbf{p}}(t)|H_i(t)|\phi(t)\rangle, \tag{1}$$

其中， $\phi(t)$为束缚态波函数， $\psi_{\mathbf{p}}(t)$为电子出射连续态，而长度规范下的相互作用哈密顿量为

$$H_i(t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t), \tag{2}$$

激光电场为 $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$。

A. 短程势

首先，我们来推导短程原子势情况下电离振幅的解析表达式，其阶数为主阶 E_0/E_a ，其中 $E_a = \kappa^3$ 为原子场。

在这种情况下，式（1）中激光场内的连续态由Volkov态 [70], $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) \to \psi_{\mathbf{p}}^{(0)}(\mathbf{r},t)$ 描述：

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp\left[i(\mathbf{p}+\mathbf{A}(t))\cdot\mathbf{r} + i\int_t ds \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{A}(s))^2}{2}\right], \tag{3}$$

对于激光矢势$\mathbf{A}(t)$，这里我们考虑线偏振激光场。短程势情况下的束缚态为 $\phi(\mathbf{r},t) \to \phi^{(0)}(\mathbf{r},t)$：

$$\phi^{(0)}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi r^2}} \exp\left[-\kappa r + i\frac{\kappa^2}{2}t\right]. \tag{4}$$

在这种情况下，我们可以直接得到振幅$m_{\mathbf{p}} \to m_{\mathbf{p}}^{(0)}$：

$$m_{\mathbf{p}}^{(0)} = -\frac{i\sqrt{\kappa}}{4\pi^2}\int d^3\mathbf{r}\int dt \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t)}{r}\exp\left[-i(\mathbf{p}+\mathbf{A}(t))\cdot\mathbf{r} - i\int_t ds\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{A}(s))^2}{2} + i\frac{\kappa^2}{2}t - \kappa r\right]. \tag{5}$$

接下来，我们通过鞍点近似（SPA）来近似t积分。这里t-鞍点方程的解

$$(\mathbf{p}+\mathbf{A}(t))^2 + \kappa^2 + 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t) = 0, \tag{6}$$

是针对最后一项进行微扰求得的，这相当于按参数E_0/E_a展开。由此得到

$$t_s = \tilde{t}_0 + i\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\tilde{t}_0)}{|\mathbf{E}(\tilde{t}_0)|\tilde{\kappa}} \approx \tilde{t}_0 + i\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t_0)}{|\mathbf{E}(t_0)|\kappa}, \tag{7}$$

其中 $\tilde{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + p_\perp^2}$，而 $\tilde{t}_0$ 是通过 [108] 得到的共同零阶解

$$(\mathbf{p}+\mathbf{A}(\tilde{t}_0))^2 + \kappa^2 = 0. \tag{8}$$

这里，我们区分 $\tilde{t}_0$ 和 $t_0 = \tilde{t}_0(\mathbf{p}_{max})$，其中$\mathbf{p}_{max} = (-A(t_{max}), 0, 0)$ 是非相对论情形下最可能的准经典动量，对应于在t_{max}时刻的电离。在式（7）的微扰项中，我们近似处理 $\tilde{\kappa} \approx \kappa$ 和 $\tilde{t}_0 \approx t_0$, ，否则会包含关于E_0/E_a 的高阶项。注意，式（5）中前指数因子的时间依赖性 $\partial_t \ln(E(t)) \sim \omega$ 很小，可以忽略，精度为 ω/I_p。利用式（7）的解，鞍点近似下的振幅为

$$m_{\mathbf{p}}^{(0)} = -i\int d^3\mathbf{r}\,\mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r}), \tag{9}$$

$$\mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{2\pi}{|\mathbf{E}(t_0)|}}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t_0)}{r} \times \exp\left[-i(\mathbf{p}_{max}+\mathbf{A}(t_0))\cdot\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t_0))^2}{2\kappa|\mathbf{E}(t_0)|} - \kappa r - i\int_{\tilde{t}_0} ds\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{A}(s))^2 + i\frac{\kappa^2}{2}\tilde{t}_0\right], \tag{10}$$

其中保留了指数项中关于E_0/E_a 的一阶项，并以相同的精度在$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{max}$处估算前因子。随后可解析地计算剩余的$\mathbf{r}$-积分：

$$m_{\mathbf{p}}^{(0)} = \frac{i}{\sqrt{2\pi|\mathbf{E}(t_0)|}}\exp\left[-i\int_{\tilde{t}_0} ds\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{A}(s))^2}{2} + i\frac{\kappa^2}{2}\tilde{t}_0\right]. \tag{11}$$

B. 库仑势

现在，采用我们的操作方法，我们推导出原子库仑势情况下的强场电离振幅。在这种情况下，程函近似下的束缚态和连续态都会获得与 $\nu = Z/\kappa$ 成正比的指数修正，其中 Z 是原子实的电荷。库仑势中的束缚态在$r \to \infty$渐近形式下为

$$\phi(\mathbf{r},t) = \phi^{(0)}(\mathbf{r},t)\phi^{(1)}(\mathbf{r}), \qquad \phi^{(1)}(\mathbf{r}) = C\exp[\nu\ln(\kappa r)], \tag{12}$$

其中 C 是归一化常数（对于 $Z = \kappa$ 的类氢离子，该常数为 $C = \sqrt{2}$），而程函近似下的连续态为

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi^{(0)}(\mathbf{r},t)\psi^{(1)}(\mathbf{r}), \qquad \psi^{(1)}(\mathbf{r},t) = \exp\left[i\nu\int_t ds\frac{\kappa}{|\mathbf{r}+\mathbf{p}(s-t)+\boldsymbol{\alpha}(s)-\boldsymbol{\alpha}(t)|}\right], \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}(t) = \int dt\mathbf{A}(t)$。库仑修正（CC）项对$t$的依赖较弱，忽略该依赖所造成的误差为 ω/I_p。在这种情况下，式（9）的库仑修正动量振幅为，参见 [85]:

$$m_{\mathbf{p}}^{(1)} = -i\int d^3\mathbf{r}\,\mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r})C\exp\left\{\nu[\ln(\kappa r) + i\int_{t_s} ds\frac{\kappa}{|\mathbf{r}+\mathbf{p}(s-t_s)+\boldsymbol{\alpha}(s)-\boldsymbol{\alpha}(t_s)|}\right]\right\}. \tag{14}$$

式 (14) 相位中的 s 积分在下限 $t = t_s$ 处发散，此时库仑中心位于 $r = 0$。不过，采用适当的近似时，发散项可以与束缚态库仑修正项 $\phi^{(1)}_{0-}(\mathbf{r})$ 抵消。我们将式 (14) 积分中的发散项 $\int_{t_s} = \int_{t_s} + \int_{i\delta}^{t_0 - i\delta}$分离出来，并说明，选择适当的参数 δ后，在采用以下近似时，发散项 $\int_{i\delta}^{t_0-i\delta} t_s$ 将被束缚态库仑修正项抵消。首先，按照ARM 的思路，在连续态中对库仑修正进行解析计算时，我们忽略所有相对于 $\sqrt{E_0/E_a}$的高阶修正。为应用这一近似，我们估算式 (14) 被积函数中的变量，结果汇总于表 I。关于估算 $r_E = \sqrt{E_a/E_0}/\kappa$，请参阅式 (21)]下方的说明；该估算给出了式 (9) 被积函数的坐标鞍点的标度，也就是电离轨迹的起点；假设最概然轨迹

物理量	非相对论估算	相对论估算
r_E	$\sqrt{E_a/E_0}/\kappa$	$g(I_P/c^2)\ \sqrt{E_a/E_0}/\kappa$
r_k	0	0
r_B	0	0
p_{k0}	0	$c(\lambda^2-1)/(2\lambda)$
p_{E0}	0	0
p_{B0}	0	0
Δp_k	$\sqrt{E_0/E_a}\,\kappa$	$g(I_P/c^2)\sqrt{E_0/E_a}\,\kappa$
Δp_E	$\sqrt{E_0/E_a}\,E_0/\omega$	$g(I_P/c^2)\sqrt{E_0/E_a}\,E_0/\omega$
Δp_B	$\sqrt{E_0/E_a}\,\kappa$	$g(I_P/c^2)\sqrt{E_0/E_a}\,\kappa$

表 I. 利用强场近似估算变量和参数，以近似计算公式（15）中的积分，其中 $\mathbf{r}=(r_k,r_E,r_B)$, $\mathbf{p}=(p_k,p_E,p_B)$，向量分量分别沿激光传播方向、激光电场方向以及激光磁场方向定义。函数$g(I_P/c^2)$取决于I_P/c^2。

在 t_0 时靠近原子实，且碰撞参数为零。此外，我们将 $p_{k,E,B}=p_{k,E,B0}+\Delta p_{k,E,B}$表示为非相对论理论中的动量最概然值 $p_{k,E,B0}$ [和相对论理论中的动量最概然值 $p_{k0}=c(\lambda^2-1)/(2\lambda)$、$p_{E,B0}=0$，见下文式 (28)], ; 新变量 $\Delta p_{k,E,B}$则对应于隧穿波包的动量宽度。根据 PPT 理论 [60]，后者估算为 $\Delta p_E\sim\sqrt{E_0/E_a}E_0/\omega,\Delta p_k=\Delta p_B\sim\sqrt{E_0/E_a}\kappa$。在相对论估算中，还会出现一个依赖于 I_P/c^2 的附加因子 $g(I_P/c^2)$。这里，$\mathbf{r}=(r_k,r_E,r_B)$、$\mathbf{p}=(p_k,p_E,p_B)$，且各矢量分量分别沿激光传播方向 $r_k\equiv\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}$、激光电场方向 $r_E\equiv-\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}/E_0$, $p_E\equiv-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}/E_0$, 以及激光磁场方向 $r_B\equiv-\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}/B_0$, $p_B\equiv-\mathbf{p}\cdot\mathbf{B}/B_0$定义。我们引入无量纲变量 R_E, P_k, P_E, P_B，将相应变量除以表 I 中的估算值：$R_E\equiv r_E\kappa\sqrt{E_0/E_a}$,$P_k\equiv\Delta p_k/(\sqrt{E_0/E_a}\kappa)$, $P_E\equiv\Delta p_E/(\sqrt{E_0/E_a}E_0/\omega)$, $P_B\equiv\Delta p_B/(\sqrt{E_0/E_a}\kappa)$。此外，我们进行变量变换 $s=t_s+\sigma(t_0-i\delta-t_s)$，并在准静态近似下将被积函数展开至 E_0/E_a 的主阶，得到：

$$\begin{aligned}
&\exp\left[i\nu\int_{t_s}^{t_0-i\delta}ds\frac{\kappa}{|\mathbf{r}+\mathbf{p}(s-t_s)+\boldsymbol{\alpha}(s)-\boldsymbol{\alpha}(t_s)|}\right]\\
\approx&\exp\left[\nu\int_0^1 d\sigma\left(\frac{\sqrt{E_0/E_a}\left(2\delta\kappa^2-(\sigma-1)^2R_E^2\right)}{2(\sigma-1)^2R_E}+\frac{1}{\sigma-1}\right)\right]\\
&+O(\sqrt{E_0/E_a})\\
\approx&\left[\delta\kappa^2\left(1/R_E-\sqrt{E_0/E_a}\right)\sqrt{E_0/E_a}\right]^\nu+O(\sqrt{E_0/E_a})\\
\approx&(\delta\kappa/r_E)^\nu+O(\sqrt{E_0/E_a}).
\end{aligned}\tag{15}$$

公式（15）中$r\to 0$ 处的奇异项将与束缚态的库仑修正中的相似项相消，见公式（14），若我们选择 $\delta=1/\kappa^2$。其次，我们近似

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{r}+\mathbf{p}(s-t_s)+\boldsymbol{\alpha}(s)-\boldsymbol{\alpha}(t_s)|\approx|\mathbf{p}_{max}(s-t_0)+\boldsymbol{\alpha}(s)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)\\
&+O(\sqrt{E_0/E_a})|,
\end{aligned}\tag{16}$$

这同样遵循表 I 中给出的标度定律。

因此，我们得到修正项近似独立于坐标，并得出动量振幅：

$$\begin{aligned}
m_{\mathbf{p}}^{(1)}=&-iC\int d^3\mathbf{r}\mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r})\\
&\times\exp\left[i\int_{t_0-\frac{i}{\kappa^2}}\frac{Z\,ds}{|\mathbf{p}_{max}(s-t_0)+\boldsymbol{\alpha}(s)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)|}\right].
\end{aligned}\tag{17}$$

后者经过最终的坐标积分后得到

$$m_{\mathbf{p}}^{(1)}=Cm_{\mathbf{p}}^{(0)}\exp\left[i\int_{t_0-\frac{i}{\kappa^2}}\frac{Z\,ds}{|\mathbf{p}_{max}(s-t_0)+\boldsymbol{\alpha}(s)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)|}\right].\tag{18}$$

III. 相对论理论

在相对论区间，我们采用基于狄拉克方程 [92] 的强场近似。电离强场近似振幅在形式上仍由式 (1) 给出，其中，在着装分区 [92] 下，G¨oppert-Mayer 规范中的相互作用哈密顿量为：

$$H_i(\mathbf{r},t)=\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta),\tag{19}$$

$$H_0=H_a-\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta)\alpha_k\tag{20}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 其中 $\alpha_k\equiv\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k}$， $\boldsymbol{\alpha}$ 为狄拉克矩阵，$\mathbf{k}$ 是沿激光传播方向的单位矢量 $\hat{}$，而 $\eta=t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/c$。自旋量子化轴选取为沿激光磁场方向。我们采用激光场在 G¨oppert-Mayer 规范下的四维矢势：$A^\mu=-\left(\hat{}\mathbf{k}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta),\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta)\right)$。我们在 [92] 中已经表明，若采用着装分区，相对论强场近似在总电离率方面给出的表达式比相对论帕洛夫–佩雷洛夫–波波夫理论 [66] 更为接近。在着装分区中，未受扰动的束缚态乘以一个因子进行修正 [92]

$$\mathcal{S}=\exp\left(i\frac{A}{2c-I_p/c}\right).\tag{21}$$

A. 短程势

对于短程势，出射态为相对论沃尔科夫态 $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)\to\psi_{\mathbf{p}}^{(0)}(\mathbf{r},t)$:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{p}}^{(0)}(\mathbf{r},t)=&\left(1+\frac{(1+\alpha_k)\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}(\eta)}{2c\tilde{\Lambda}}\right)\frac{cu_f}{\sqrt{(2\pi)^3\tilde{\varepsilon}}}\\
&\times\exp\left[i(\mathbf{p}+\mathbf{A}(\eta))\cdot\mathbf{r}-i\tilde{\varepsilon}t+i\int_\eta ds\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(s)+A(s)^2/2}{\tilde{\Lambda}}\right)\right],
\end{aligned}\tag{22}$$

其中渐近能量为 $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{c^4 + c^2\mathbf{p}^2}$,，运动常数为 $\tilde{\Lambda} = \tilde{\varepsilon}/c^2 - p_k/c$, 双旋量为

$$u_f = \left(\sqrt{\frac{c^2+\tilde{\varepsilon}}{2c^2}}\chi_f, \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2(c^2+\tilde{\varepsilon})}}\chi_f \right)^T, \tag{23}$$

其中 $\chi_+ = (1,0)^T$ 和 $\chi_- = (0,1)^T$。短程势的束缚态为

$$\phi^{(0)}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi r^2}} \exp\left[-\kappa r + i(I_p - c^2)t\right] v_i, \tag{24}$$

原子动量为 $\kappa = \sqrt{2I_p\left(1 - I_p/c^2\right)}$，以及双旋量

$$v_i = \left(\chi_i, i\frac{c(\kappa r+1)\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{(2c^2 - I_p)r^2}\chi_i\right)^T. \tag{25}$$

我们考虑两种情况：第一种是没有自旋翻转：$\chi_f = \chi_i = \chi_+$; 第二种是在电离过程中发生自旋翻转，即 $\chi_f = \chi_-$ 和 $\chi_i = \chi_+$。在第一种情况下，我们有

$$\begin{aligned} m^{(0)}_{\mathbf{p}+} = &-\frac{i\left(2I_p\right)^{1/4}}{4\pi^2}\int d^3\mathbf{r}d\eta\, \mathcal{S}(\eta)\mathcal{P}_+ \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta)}{r} \\ &\times \exp\left\{-i\left[\mathbf{p} + \mathbf{A}(\eta) + \frac{c^2 - I_p - \varepsilon}{c}\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\mathbf{r} \right. \\ &\left. -i\int_\eta ds\left[\tilde{\varepsilon} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(s) + A(s)^2/2}{\tilde{\Lambda}}\right] + i(I_p - c^2)\eta - \kappa r\right\} \end{aligned} \tag{26}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ = &\frac{2c\Lambda\left(-c\sqrt{I_p\left(2c^2 - I_p\right)}p_{k0} - c^2\left(-2\varepsilon + I_p\right) + 2c^4 - I_p\varepsilon\right) + \sqrt{2\Lambda(\varepsilon - c^2 + I_p)}\left(\sqrt{-I_p\left(-2c^2 + I_p\right)} + 2c^2 - I_p\right)(\varepsilon + c\,(c + p_{k0}))}{2c^{3/2}\Lambda\left(4c^2 - 2I_p\right)^{3/4}\sqrt{\varepsilon\,(c^2+\varepsilon)}} \\ &+O(\sqrt{E_0/E_a}), \end{aligned} \tag{27}$$

其中，振幅在最可能的准经典动量$\mathbf{p}_{max} = (0,0,p_{k0})$处求值，其中

$$p_{k0} = c(\lambda^2 - 1)/(2\lambda), \tag{28}$$

$\lambda = \sqrt{2\tilde{I}/c^2}$ 以及记号 $\Lambda(\mathbf{p}_{max})$ 和 $\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_{max})$。在第二种情况下，振幅为：

$$\begin{aligned} m^{(0)}_{\mathbf{p}-} = &-\frac{i\left(2I_p\right)^{1/4}}{4\pi^2}\int d^3\mathbf{r}d\eta\, \mathcal{S}(\eta)\mathcal{P}_- \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta)}{r} \\ &\times \exp\left\{-i\left[\mathbf{p} + \mathbf{A}(\eta) + \frac{c^2 - I_p - \varepsilon}{c}\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\mathbf{r} \right. \\ &\left. -i\int_\eta ds\left[\tilde{\varepsilon} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(s) + A(s)^2/2}{\tilde{\Lambda}}\right] + i(I_p - c^2)\eta - \kappa r\right\}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\mathcal{P}_- = 0 + O(\sqrt{E_0/E_a})$。我们沿用强场近似（SFA）的思路，将表达式按参数 E_0/E_a 展开，其中相对论性原子场为 $E_a = \kappa^3$，而 κ。从展开结果可知，该参数的主阶项中不会发生自旋翻转，因此我们只关注无自旋翻转的过程。

下一步，我们通过鞍点近似处理 η 积分。这里，η 鞍点方程为

$$\varepsilon + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(\eta) + A(\eta)^2/2}{\Lambda} + I_p - c^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta) = 0, \tag{30}$$

对最后一项进行微扰求解，得到解

$$\eta_s = \tilde{\eta}_0 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta_0)\Lambda}{[(\mathbf{p}_{max} + \mathbf{A}(\eta_0))\cdot\mathbf{E}(\eta_0)]}, \tag{31}$$

采用零阶解 $\eta_0 = \tilde{\eta}_0$ 代入 $\mathbf{p}_{max}$ 中[92]。前指数因子 $\partial_\eta \ln(E(\eta)) \sim \omega$ 的时间依赖性很弱，可以忽略。经过 η-鞍点近似后，振幅为

$$m^{(0)}_{\mathbf{p}+} = -i\int d^3\mathbf{r}\mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r}) \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r}) = &\frac{\left(2I_p\right)^{1/4}}{4\pi^2}\mathcal{S}(\eta_0)\mathcal{P}_+\sqrt{\frac{-2i\pi\Lambda}{(\mathbf{p}_{max} + \mathbf{A}(\eta_0))\cdot\mathbf{E}(\eta_0)}}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta_0)}{r}\exp\left\{-i\left[\mathbf{p}_{max} + \mathbf{A}(\eta_0) + \frac{\varepsilon - c^2 + I_p}{c}\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\mathbf{r}\right. \\ &\left. + \frac{i\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\eta_0))^2\,\Lambda}{2(\mathbf{p}_{max} + \mathbf{A}(\eta_0))\cdot\mathbf{E}(\eta_0)} - \kappa r - i\int_{\tilde{\eta}_0} ds\left(\tilde{\varepsilon} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(s) + A(s)^2/2}{\tilde{\Lambda}}\right) + i(I_p - c^2)\tilde{\eta}_0\right\}, \end{aligned} \tag{33}$$

其中，保留了E_0/E_a 中次主阶的项

指数项。随后计算剩余的$\mathbf{r}$积分

以主阶解析计算 E_0/E_a

$$m_{\mathbf{p}}^{(0)} = \frac{i}{\sqrt{2\pi|\mathbf{E}(\eta_0)|}}\,\mathcal{S}\mathcal{P}_+ Q \times \exp\left\{-i\int_{\tilde{\eta}_0} ds\left[\tilde{\varepsilon} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(s) + A(s)^2/2}{\tilde{\Lambda}}\right] + i(I_p - c^2)\tilde{\eta}_0\right\}. \tag{34}$$

带有前因子

$$Q = \sqrt{\frac{\varepsilon - c^2 + I_p}{I_p}} \tag{35}$$

也在最概然准经典动量处进行评估。

B. 库仑势

在相对论情形下，库仑势导致的波函数修正量级为 Z/κ，对于束缚态，修正如下

$$\phi(\mathbf{r},\eta) = \phi^{(0)}(\mathbf{r},\eta)\phi^{(1)}(\mathbf{r},\eta) \tag{36}$$

$$\phi^{(1)}(\mathbf{r}) = C\exp\left[\nu\ln(\kappa r)\right], \tag{37}$$

$$\nu = \frac{(c^2 - I_p)Z}{c^2\sqrt{I_p(2 - I_p/c^2)}} \tag{38}$$

归一化常数为 $C = 2^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\nu+1}{\Gamma 2\nu+1()}}$，适用于$Z=\kappa$的类氢系统；连续态则为

$$\psi(\mathbf{r},\eta) = \psi^{(0)}(\mathbf{r},\eta)\psi^{(1)}(\mathbf{r},\eta) \tag{39}$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r},\eta) = \exp\left\{i\int_{\eta} ds\frac{Z\tilde{\varepsilon}(s)}{\tilde{\Lambda}c^2} \times \frac{1}{|\mathbf{r} + (\mathbf{p}(s-\eta) + \boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(\eta))/\tilde{\Lambda} + \mathbf{r}_k(s,\eta)|}\right\} \tag{40}$$

其中 $\mathbf{r}_k(s,\eta) = \hat{}\mathbf{k}[\mathbf{p}\cdot(\boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(\eta)) + \beta(s) - \beta(\eta)]/(c\,\tilde{\Lambda}^2)$, $\beta = \int ds\mathbf{A}^2/2$, 且 $\tilde{\varepsilon}(\eta) = \tilde{\varepsilon} + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(\eta) + A(\eta)^2/2)/\tilde{\Lambda}$。

公式（39）相位中的s积分的奇点，采用与非相对论情形相同的步骤消除。积分 $\int_{\eta_s} = \int^{\eta_0 - i\eta_s}_{\delta} + \int_{\eta_0 - i\delta}$ 中的第一项发散；取参数 δ 的适当值后，该项会与束缚态库仑修正项 $\phi^{(1)}(\mathbf{r})$相消。

考虑到库仑修正项中的 η 依赖性较弱，库仑势的动量振幅可用公式（32）近似表示，并包含额外的库仑修正项:

$$m_{\mathbf{p}+}^{(1)} = -iC\int d^3\mathbf{r}\mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r})\exp\{\nu\ln(\kappa r)) + i\int_{\eta_s} ds\frac{Z\tilde{\varepsilon}(s)}{\tilde{\Lambda}c^2}\frac{1}{|\mathbf{r} + (\mathbf{p}(s-\eta_s) + \boldsymbol{\alpha}(s) - \frac{\boldsymbol{\alpha}(\eta_s)}{\tilde{\Lambda}} + \mathbf{r}_k(s,\eta_s)|}\right\}. \tag{41}$$

当采用以下近似时，可以选择 δ 来消除奇点。我们在连续态中对库仑修正进行解析积分，积分范围为 η_s:

$$\exp\left[i\int_{\eta_s}^{\eta_0 - i\delta}\frac{Z\tilde{\varepsilon}(s)ds}{\tilde{\Lambda}c^2|\mathbf{r} + (\mathbf{p}(s-\eta_s) + \boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(\eta_s))/\tilde{\Lambda} + \mathbf{r}_k(s,\eta_s)|}\right] \approx \left(\frac{\sqrt{3}\lambda\kappa\delta}{\sqrt{(4-\lambda^2)}r_E}\right)^{\nu}, \tag{42}$$

其中采用了与推导公式（15）相同的方法，即引入相同的缩放变量 R_E、P_k 和 $P_E P_B$，使用变量变换 $s = \eta_s + \sigma(\eta_0 - i\delta - \eta_s)$，然后在解析积分之前，利用表 I 中的估算，在准静态近似下将被积函数按 $\sqrt{E_0/E_a}$ 展开。此外，原子修正项在 E_0/E_a 中取主阶

$$(\kappa r)^{\nu} = \left(\kappa\frac{\sqrt{4-\lambda^2}r_E}{\sqrt{3}}\right)^{\nu}. \tag{43}$$

取 $\delta = 1/(\lambda\kappa^2) = \Lambda/\kappa^2 \approx (1 - \kappa^2/(6c^2))/\kappa^2$，即可消除束缚态库仑修正中的奇异项。然后，我们对 E_0/E_a 作主阶近似:

$$|\mathbf{r} + (\mathbf{p}(s-\eta_s) + \boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(\eta_s))/\tilde{\Lambda} + \mathbf{r}_k(s,\eta_s)| \approx |(\mathbf{p}_{max}(s-\eta_0) + \boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(\eta_0))/\Lambda + \mathbf{r}_k(s,\eta_0) + O(\sqrt{E_0/E_a})|. \tag{44}$$

因此，我们得出结论：修正项近似与坐标无关，从而得到动量振幅:

$$m_{\mathbf{p}}^{(1)} = -iC\int d^3\mathbf{r}\mathcal{M}^{(0)}(\mathbf{r}) \times \exp\left\{i\int_{\eta_0 - i\Lambda/\kappa^2}\frac{Z\varepsilon(s)/(c^2\Lambda)\;ds}{|\mathbf{p}_{max}(s-\eta_0) + \boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(\eta_0) + \mathbf{r}_k(s,\eta_0)|}\right\} \tag{45}$$

经过最后的坐标积分后，得到

$$m_{\mathbf{p}}^{(1)} = Cm_{\mathbf{p}}^{(0)} \times \exp\left\{i\int_{\eta_0 - i\Lambda/\kappa^2}\frac{Z\varepsilon(s)/(c^2\Lambda)\;ds}{|\mathbf{p}_{max}(s-\eta_0) + \boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(\eta_0) + \mathbf{r}_k(s,\eta_0)|}\right\} \tag{46}$$

方程（46）是本文的主要结果，它利用 ARM 方法给出了相对论区间的库仑修正强场电离振幅。

IV. 与相对论CCSFA的比较

图 1 展示了相对论 ARM（RARM）与 CCSFA、[92] 和PPT理论的总电离概率比较。RARM 概率与 PPT理论一致，而 CCSFA 略微高估了 PPT理论。此处的电离速率按E_0/E_a 的主阶计算，末态动量积分则通过鞍点近似在最概然动量处完成，并将渐近动量$\mathbf{p}$ 转换为隧穿出口分布（η_e,$p_{e,B}$,$p_{e,k}$），其中$p_E + A(\eta_e) = 0$,$p_B = p_{e,B}$ 和$p_k = p_{k,e} + A(\eta_e)^2/2/c/\tilde{\Lambda}$。

图 1 展示了通过 RARM、库仑修正强场近似和 PPT 得到的每个激光周期的总概率与

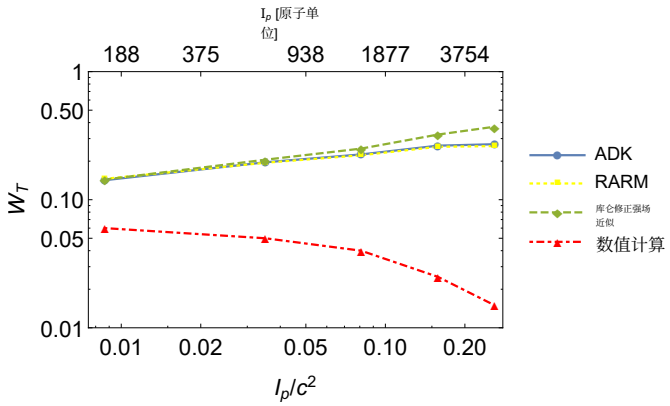

图 1. 理论计算得到的每个激光周期的总概率W_T 与数值计算结果的比较 [104]：RARM（黄色短虚线和方形标记）与 [83] 的库仑修正强场近似（绿色长虚线和菱形标记），采用着装分区；ADK 理论（蓝色实线），取$Z/\kappa = 1$；以及通过克莱因-戈登方程进行的数值计算 [104]（红色点划线和三角形标记）。

[104]
0 00866, 0 0351, 0 0809, 0 158, 0 259, $_0$ $_a \approx 1$ 16 ^{p} ^{2} = 中的数值计算采用电离能I/c……，使用$E/E/$。

Hafizi 等人利用克莱因-戈登方程进行的数值计算结果 [104], 之间的比较。尽管理论结果几乎彼此重合，但与数值计算结果相比仍有显著偏差，尤其是在 I_p/c^2 较大时。库仑修正强场近似和 RARM 这两种解析准经典理论与数值结果之间出现偏差，原因有二。我们将基于狄拉克方程的 RARM 总电离率与克莱因-戈登方程的数值解进行比较，直觉上认为自旋效应对总电离率影响不大。然而，这一假设仅在 $I_p/c^2 \ll 1$ 时成立。文献 [60, 109] 的结果表明，在 $I_p/c^2 \sim 1$ 较大时，电离过程中会出现自旋不对称性（不同自旋态的电离概率存在差异），从而改变自旋平均概率。然而，即便对类氢铀而言，这一效应至多也只有 1%，无法解释图 2 中明显存在的巨大差异。偏差的主要来源（相差 ~20 倍）可能是强场中、接近越垒电离阈值时原子态的斯塔克位移和极化。这些修正对于 $E_0/E_a \sim 1/10$ 时隧穿电离的近阈值区间尤为重要，而 Hafizi 的数值数据正属于这种情况（$E_0/E_a \sim 1/16$）。我们认为，这种偏差至少可以部分通过在程函近似中加入更高阶的准经典库仑修正来弥补。文献 [82] 中针对非相对论理论[采用一维库仑修正强场近似所得结果（见该文献中的式 (47)）], 表明，这类修正会降低隧穿电离概率。原则上，ARM 中可以纳入高阶准经典库仑修正，但这需要改变匹配过程，以

束缚态，以及由此导致的时间积分复数位移的变化。

从技术角度来看，RARM 具有明显优势相较于应用 SPA 时的相对论 eikonal CCSFA， [29, 92] 尤为如此。在 RARM 中，电离振幅通过一维 η-SPA 得出；而在 CCSFA 中，对于（$\mathbf{r}$，η）积分，至少需要采用二维（线偏振情况下）或四维（椭圆偏振情况下）SPA。

RARM的缺点在于，它能准确地纳入隧穿出口附近的库仑修正，但会高估再散射造成的库仑修正。为考虑剧烈再碰撞中的库仑修正，研究者基于库仑修正强场近似发展了广义程函近似（GEA）。这两种方法（RARM/库仑修正强场近似）均可推广至椭圆偏振情形。

V. 与非偶极库仑修正强场近似的比较 CSFA

为检验所推导的RARM理论，将其结果与非偶极库仑修正强场近似的结果进行比较会很有帮助；后者描述了非偶极区强场电离中的库仑效应。非偶极库仑修正强场近似仅纳入了偶极理论的一阶相对论修正，其阶数为1/c。我们预期，在$I_p/c^2 \ll 1$的极限下，完整的相对论理论将与非偶极理论一致；而在$I_p \sim c^2$, 时，两者会出现显著偏差，因为非偶极理论忽略了$1/c^2$ 项。

在非相对论理论中，隧穿出口处的电子横向动量分布在零动量处有一个峰值；而在相对论处理中，由于激光磁场的势垒下效应，该峰值沿激光传播方向偏移$p_{k0} = I_p/3c$ [14]。最近，我们在非偶极库仑修正强场近似中表明 [19]，势垒下库仑效应反直觉地增大了非偶极

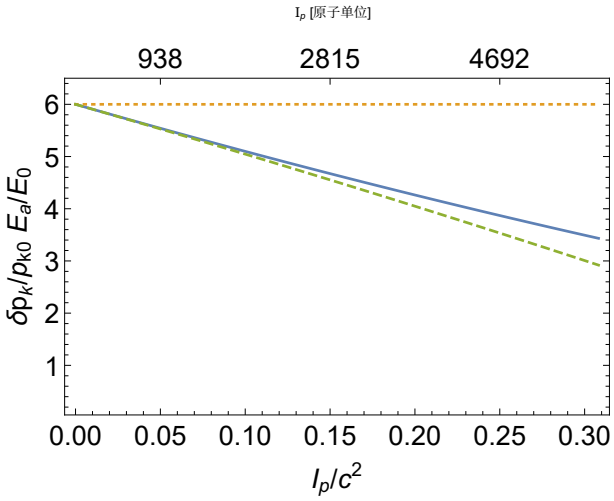

图 2. 势垒下库仑修正导致的类氢高电荷离子纵向动量峰值的非偶极位移：通过 RARM（蓝色实线）、通过公式（49）、通过非偶极库仑修正强场近似 [19]（橙色短虚线），以及通过含有主导修正项 $\sim I_p/c^2$ 的近似公式（50）（绿色长虚线）。

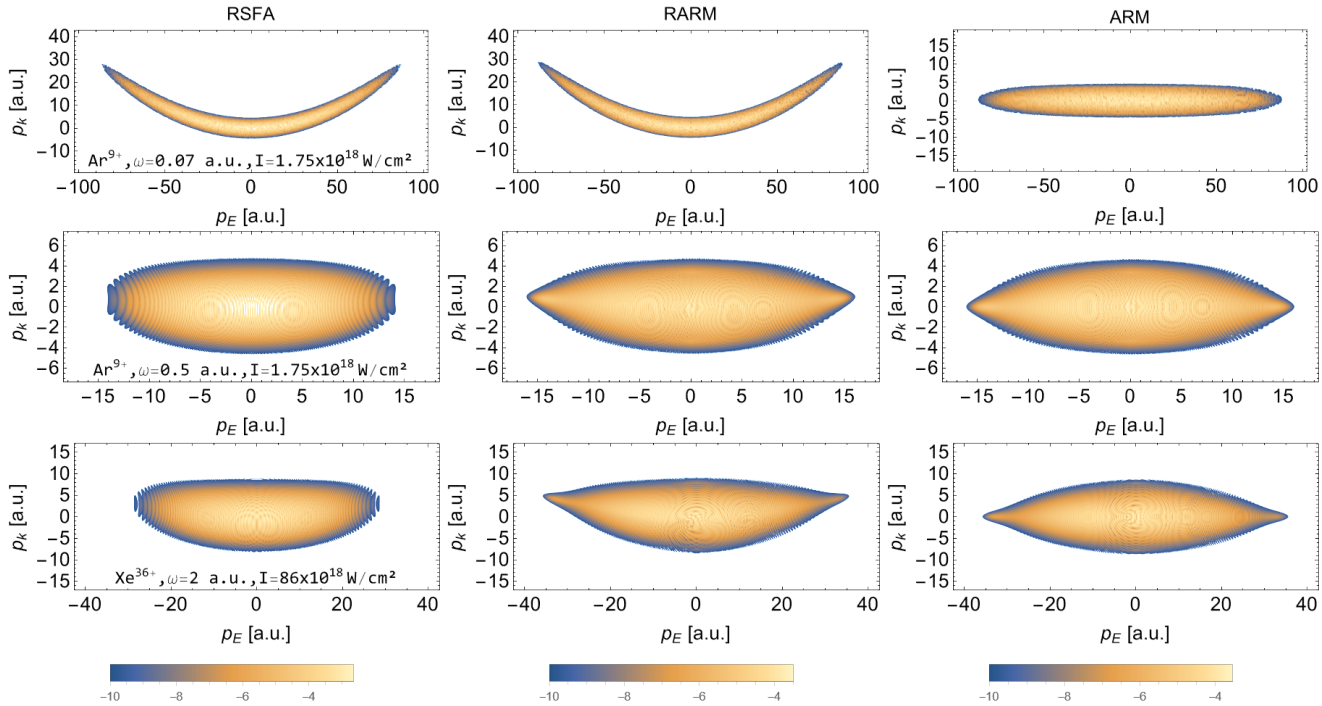

图3. 高能库仑效应情况下的光电子动量分布：（第1列）采用相对论平面 SFA（相对论平面波强场近似），（第2列）采用 RARM，（第3列）采用非相对论 ARM；（第1行）对应 Ar^{9+}, $\nu = 2.34$、$I_p = 17.63$ a.u.、激光强度 1.75×10^{18} W/cm^2（$E_0 = 7.07$ a.u.）以及 $\omega = 0.07$ a.u.（$\upsilon = 0.043$，$\xi = 0.74$，$Z\omega/E_0 = 0.14$）；（第2行）对应 Ar^{9+}，以及强度为 1.75×10^{18} W/cm^2 的 XUV 光束 $\omega = 0.5$ a.u.（$\upsilon = 0.043$，$\xi = 0.1$，$Z\omega/E_0 = 0.99$）；（第3行）对应 Xe^{36+}, $\nu = 2.626$、$I_p = 93.94$ a.u.，以及强度为 8.6×10^{19} W/cm^2（$E_0 = 65.4$ a.u.）的 X 射线光束和 $\omega = 2$ a.u.（$\upsilon = 0.1$，$\xi = 0.24$，$Z\omega/E_0 = 1.13$）。

隧穿出口处纵向动量p_k 的位移：

$$p_k = p_{k0} + \delta p_k \qquad (47)$$
$$\delta p_k = 6(E_0/E_a)p_{k0}.$$

库仑修正效应使纵向动量偏移额外依赖于E_0/E_a。下面将 RARM 对势垒下库仑修正引起的纵向动量峰值相对论偏移的结果，与 [19], 的非偶极理论进行比较，见图 2，其中给出了类氢高电荷态离子的 $\delta p_k/[(E_0/E_a)p_{k0}]$。根据非偶极近似理论 [19], $\delta p_k/[(E_0/E_a)p_{k0}] = 6$ [，见式（47）]。图 2 所示的纵向动量峰值相对论偏移，是利用精确相对论原子重散射模型理论进行解析计算得到的。为此，将原子作用量和激光作用量按E_0/E_a展开至次主阶：

$$S_0(p_k) = S_0(p_{k0}) - \frac{2\kappa\lambda\left(\lambda^2+2\right)}{\sqrt{12-3\lambda^2}\left(\lambda^2+1\right)^2}\frac{(p_k-p_{k0})^2}{E_0}.$$
$$S_1(p_k) = S_1(p_{k0}) + \frac{2\sqrt{-\lambda^4+5\lambda^2-4}\left(1-\frac{\lambda^2+\lambda-2}{\lambda}\right)}{(\lambda^2+1)\kappa}(p-p_{k0}). \qquad (48)$$

纵向动量分布为 $\exp\{S\} = \exp[S_0(p_k) + S_1(p_k)]$。它在 $p_k - p_{k0}$ = 处达到最大值 $-S_1'(p_{k0})/S_0''(p_{k0})$，使用关于$\lambda - 1 \sim I_p/c^2$的展开后，可得：

$$p_k - p_{k0} = -\frac{\sqrt{3}\left(4-\lambda^2\right)^{3/2}\left(\lambda^2-2\right)\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda^2\left(\lambda^2+2\right)}\frac{E_0}{\kappa^3}p_{k0} \qquad (49)$$
$$\approx [6-28(\lambda-1)]\frac{E_0}{\kappa^3}p_{k0} + O(\lambda-1) \qquad (50)$$

取 $p_{k0} = c(\lambda^2-1)/2\lambda \approx I_p/3c$。因此，势垒下库仑修正导致的传播方向上最概然动量偏移的第一项对应于非偶极结果，而第二项 $\sim \lambda - 1 = I_p/(3c^2)$ 是相对论库仑修正。当 $I_p/c^2 \ll 1$ 较小时，动量偏移与非偶极结果一致。计入相对论修正 $\sim I_p/c^2$ 后，动量偏移会减小。这是因为势垒下库仑修正源自束缚态库仑修正，正如 [19] 中所讨论的那样。参数 $\nu \approx 1 - I_p/c^2$ 随着 I_p/c^2，增大而减小（见式 (38)），使束缚态在动量空间中的宽度增大。因此，最概然的势垒下隧穿轨迹从原子实处以较大的 p_k 出发，最终到达隧穿出口时动量较小，因为沿传播方向的磁场诱导的动量漂移是固定的。

Heuristically, the momentum shift can be estimated via $S_a'(p_k) \sim \partial_{p_k}\{\ln[\kappa\sqrt{\mathbf{r}(\eta)^2}]\} \sim \partial_{p_k}\{\ln[\kappa\sqrt{\mathbf{p}_i^2(s-t_i)^2}/\Lambda]\} \sim \partial_{p_k}\{\ln(\kappa^2(s-t_i)/\Lambda)\} \sim \partial_{p_k}\{\ln(\Lambda)\} \sim \partial_{p_k}\{p_k/c\} \sim 1/c$. With

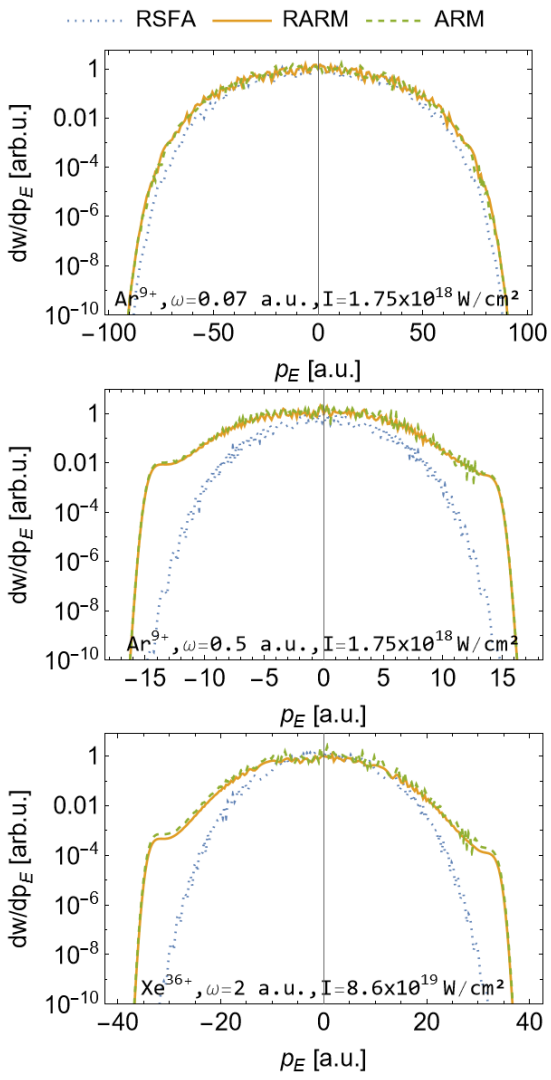

图4. 图3中的高能库仑增强谱对p_k积分，针对相同的物种和激光场：（蓝色点线）通过相对论平面 SFA（RSFA）计算，（橙色实线）通过 RARM 计算，（绿色虚线）通过非相对论 ARM 计算；（第一行）Ar^{9+}, $\nu = 2.34$, $I_p = 17.63$ a.u., 激光强度为1.75×10^{18} W/cm^2（$E_0 = 7.07$ a.u.），以及 $\omega = 0.07$ a.u.（$\upsilon = 0.043$, $\xi = 0\ 74$, $\omega \quad _0 = 0\ 14$ $.Z/E.$）；（第二行）Ar^{9+}，以及强度为1.75×10^{18} W/cm^{2}的XUV 光束$\omega = 0.5$ a.u.（$\upsilon = 0.043$, $\xi = 0.1$, $Z\omega/E_0 = 0.99$）；（第三行）Xe^{36+}, $\nu = 2.626$, $I_p = 93.94$ a.u.，以及强度为8.6×10^{19} W/cm^2 的 X 射线光束（$E_0 = 65.4$ a.u.）和$\omega = 2$ a.u.（$\upsilon = 0.1$, $\xi = 0.24$, $Z\omega/E_0 = 1.13$）。各分布均按峰值进行了归一化。

$p_{k,0} \sim \kappa^2/(6c)$，以及 $S_0''(p_{k0}) \sim \kappa/E_0$，动量偏移$-S'_a(p_{k0})/S_0''(p_{k0}) \sim 6E_0/\kappa^3 p_{k0}$ 如下。

VI. 高电荷态离子中的高能库仑增强

我们运用相对论 ARM理论，研究相对论域中高电荷态离子作用下直接电离通道截止处的库仑增强效应。非相对论区间内的高能库仑增强（HECE）效应已广为人知，相关描述见[88, 106]。该效应源于连续态中的库仑动量转移。最终到达直接通道截止处的电子轨迹，在较弱场下始于隧穿出口，并在出口附近停留较长时间，从而获得相当大的库仑动量转移 [106]。量化 HECE 的参数为 $Z\omega/E_0$ [88]。计算连续态 CC 时，将连续态作用量按 E_0/E_a 展开，由此得到对复轨迹虚部的展开：

$$S_1(\mathbf{r}(\eta)) = S_1(\mathrm{Re}[\mathbf{r}(\eta)]) + i\mathrm{Im}[\mathbf{r}(\eta)] \cdot \nabla S_1(\mathrm{Re}[\mathbf{r}(\eta)]). \quad (51)$$

我们通过式（46）计算了三种情形下的光电子动量分布，如图3所示。第一种情形中，我们考虑 Ar^{9+} $I_p = 479.76$ eV 的高能库仑效应，其中 $Z_{eff} = 14.008$, $\nu = 2.34$，激光强度为 1.75×10^{18} W/cm^2（$E_0 = 7.07$ a.u.），采用 $\omega = 0.07$ a.u. 的红外激光束（$\upsilon = 0.043$, $\xi = 0.74$, $Z\omega/E_0 = 0.14$）。第二种情形使用相同的原子种类，采用同样高强度的 1.75×10^{18} W/cm^2 激光（$\upsilon = 0.043$,$\xi = 0.1$，$Z\omega/E_0 = 0.99$），但使用 XUV 激光束（$\omega = 0.5$ a.u.）。第三个例子中，我们考虑 Xe^{36+}（$I_p = 2556$ eV，$\nu = 2.626$）暴露于强 X 射线场（$\omega = 2$ a.u.）中，$E_0 = 65.4$ a.u.（$\upsilon = 0.1$, $\xi = 0.24$，$Z\omega/E_0 = 1.13$）。为阐明高能库仑效应，我们将 RARM 得到的光电子动量分布与普通相对论强场近似进行比较。光电子动量分布的横向宽度为 $p_B = \sqrt{E_0/\kappa}/2$。

在第一个例子中，连续谱相对论参数 ξ最大。因此，我们可以看到p_k 相对于p_E呈抛物线关系，这是连续谱中电子相对论动力学的典型特征，在非相对论处理中则不存在（图3第3列）。然而，第一个例子中的库仑增强（高能库仑效应）参数$Z\omega/E_0$ 最小，因此看不到显著的库仑效应（高能库仑效应）：对p_k积分后的谱与普通强场近似结果一致。第二和第三种情况下，高能库仑效应参数增大，因此在光电子动量分布的 $2U_P$ 能量处出现显著的肩峰。光电子动量分布中的连续谱相对论特征也有所增强。通过p_k 对p_E的依赖关系中的抛物线特征，可以清楚地区分 ARM 得到的相对论与非相对论光电子动量分布（第2列和第3列）；然而，对p_k 积分后，高能库仑效应特征相同（图4）。在给出的例子中，束缚态的相对论特征并不十分显著，因为 $\upsilon < 0$。1。

VII. 结论

我们将 ARM 理论推广至强场电离的相对论区间。基于连续态电子程函波函数的 CCSFA（考虑逸出电子与原子实之间的库仑相互作用）在库仑中心处的程函相位存在奇点，而强场电离正是从此处在虚时间开始的。在 PPT 理论中，这一奇点通过将连续态波函数与未受扰动的

束缚态相匹配来消除；而在 ARM 理论中，这一过程等效于在电离振幅的时间积分中，将起始点移动一个适当的虚数值。本文发现了相应虚时间位移在相对论区间中的变化规律，该位移消除了相对论 CCSFA 电离振幅中的奇点。

与库仑修正强场近似相比，RARM 的优势在于，它利用鞍点近似简化了电离振幅的计算。然而，库仑修正强场近似提供了一种可能性，可系统地计算二阶库仑修正：在坐标积分中使用鞍点近似，而非与束缚态进行匹配。此外，库仑修正强场近似使得广义 eikonal 近似得以发展，从而处理剧烈再碰撞中的库仑修正。对于势垒下库仑修正，RARM 给出的结果与非偶极库仑修正强场近似相似。

最后，我们采用 RARM 理论计算了相对论区间内直接电离电子在阈上电离产额截止处的库仑增强。

[1] J. Ullrich, R. Moshammer, A. Dorn, R. D¨orner, L. P. H. Schmidt, and H. Schmidt-B¨ocking, 《反冲离子与电子动量谱学: 反应显微镜》, 《Reports on Progress in Physics》**66**, 1463 (2003). [2] M. Weger, J. Maurer, A. Ludwig, L. Gallmann, and U. Keller, 《将阿秒钟技术应用于速度映射成像》, 《Optics Express》**21**, 21981 (2013). [3] C. T. L. Smeenk, L. Arissian, B. Zhou, A. Mysyrowicz, D. M. Villeneuve, A. Staudte, and P. B. Corkum, Phys. Rev. Lett. **106**, 193002 2011( ). [4] A. Ludwig, J. Maurer, B. W. Mayer, C. R. Phillips, L. Gall- mann, and U. Keller, 《强场电离中偶极近似的失效》, Phys. Rev. Lett. **113**, 243001 (2014). [5] J. Maurer, B. Willenberg, B. W. Mayer, C. R. Phillips, L. Gall- mann, J. Danˇek, M. Klaiber, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, and U. Keller, 《在非偶极区利用椭圆偏振强激光场探测电离波包与再碰撞动力学》, Phys. Rev. A **97**, 013404 (2018). [6] B. Willenberg, J. Maurer, B. W. Mayer, and U. Keller, 《强场电离中多光子动量转移的亚周期时间分辨》, 《Nature Communications》**10**, 5548 (2019). [7] A. Hartung, S. Eckart, S. Brennecke, J. Rist, D. Trabert, K. Fehre, M. Richter, H. Sann, S. Zeller, K. Henrichs, et al., 《磁场改变强场电离》, 《Nature Physics》**15**, 1222 2019( ). [8] N. Haram, I. Ivanov, H. Xu, K. T. Kim, A. Atia-tul Noor, U. S. Sainadh, R. D. Glover, D. Chetty, I. V. Litvinyuk, and R. T. Sang, 《中等强度下强场原子电离中的相对论性非偶极效应》, Phys. Rev. Lett.**123**, 093201 (2019). [9] N. Haram, R. T. Sang, and I. V. Litvinyuk, 《强场电离中的横向电子动量分布：非偶极效应与库仑聚焦效应》, J. Phys. B **53**, 154005 (2020). [10] A. Hartung, S. Brennecke, K. Lin, D. Trabert, K. Fehre, J. Rist, M. S. Sch¨offler, T. Jahnke, L. P. H. Schmidt, M. Kunitski, M. Lein, R. D¨orner, and S. Eckart, 《强场电离中的电非偶极效应》, Phys. Rev. Lett. **126**, 053202 (2021). [11] K. Lin, S. Brennecke, H. Ni, X. Chen, A. Hartung, D. Trabert, K. Fehre, J. Rist, X.-M. Tong, J. Burgd¨orfer, L. P. H. Schmidt, M. S. Sch¨offler, T. Jahnke, M. Kunitski, F. He, M. Lein, S. Eckart, and R. D¨orner, 《高阶阈上电离中的磁场效应》, Phys. Rev. Lett. **128**, 023201 2022( ). [12] K. Lin, X. Chen, S. Eckart, H. Jiang, A. Hartung, D. Trabert, K. Fehre, J. Rist, L. P. H. Schmidt, M. S. Sch¨offler, T. Jahnke, M. Kunitski, F. He, and R. D¨orner, 《将磁场效应作为研究强场电离中电子关联的工具》, Phys. Rev. Lett. **128**, 113201 (2022). [13] K. Lin, S. Eckart, A. Hartung, D. Trabert, K. Fehre, J. Rist, L. P. H. Schmidt、M. S. Sch¨offler、T. Jahnke、M. Kunitski 和 R. D¨orner, 《强场电离中光电子能峰逆辐射压偏移》, 《科学进展》**8**, eabn7386（2022年）。[14] M. Klaiber、E. Yakaboylu、H. Bauke、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel, 《激光诱导相对论隧穿中的势垒下动力学》, Phys. Rev. Lett.**110**, 153004（2013年）。[15] S. Chelkowski、A. D. Bandrauk 和 P. B. Corkum, 《光电离中电子与离子间的光子动量分配：从单光子（光电效应）到多光子吸收》, Phys. Rev. Lett. **113**, 263005（2014年）。[16] D. Cricchio、E. Fiordilino 和 K. Z. Hatsagortsyan, 《激光诱导隧穿电离过程中奇异原子组分间的动量分配》, Phys. Rev. A **92**, 023408（2015年）。[17] S. Chelkowski、A. D. Bandrauk 和 P. B. Corkum, 《多光子电离及光电子时间分辨全息中的光子动量转移》, Phys. Rev. A **92**, 051401 2015( )。[18] P.-L. He、D. Lao 和 F. He, 《非相对论区域中超越偶极近似的强场理论》, Phys. Rev. Lett. **118**, 163203 2017( )。[19] P.-L. He、M. Klaiber、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel, 《非偶极库仑势垒下电离动力学与光子动量分配》, Phys. Rev. A **105**, L031102（2022年）。[20] M. Førre、J. P. Hansen、L. Kocbach、S. Selstø 和 L. B. Mad- sen, 《超强高频阿秒脉冲中原子的非偶极电离动力学》, Phys. Rev. Lett. **97**, 043601（2006年）。[21] T. Keil 和 D. Bauer, 《超越偶极近似的库仑修正强场量子轨迹》, J. Phys. B **50**, 194002 2017( )。[22] J. F. Tao、Q. Z. Xia、J. Cai、L. B. Fu 和 J. Liu, 《原子与强激光场非偶极相互作用中的库仑再散射》, Phys. Rev. A **95**, 011402（2017年）。[23] J. Danˇek、M. Klaiber、K. Z. Hatsagortsyan、C. H. Keitel、B. Wil- lenberg、J. Maurer、B. W. Mayer、C. R. Phillips、L. Gallmann 和 U. Keller, 《椭圆偏振强场电离中库仑聚焦与非偶极效应的相互作用》, J. Phys. B **51**, 114001（2018年）。[24] J. Danˇek、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel, 《强场电离中库仑聚焦的解析方法。I. 非偶极效应》, Phys. Rev. A**97**, 063409（2018年）。[25] J. Danˇek、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel, 《强场电离中库仑聚焦的解析方法。II. 多次再碰撞》, Phys. Rev. A **97**, 063410（2018年）。[26] B. Willenberg、J. Maurer、U. Keller、J. Danˇek、M. Klaiber、N. Teeny、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel, 《超越偶极近似的强场电离中的全息干涉：峰值及焦体积平均激光强度的影响,

平均激光强度，Phys. Rev. A 100，033417（2019年）。[27] M. Klaiber、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel，《超越偶极近似的阈上电离》，Phys. Rev. A 71，033408（2005年）。[28] P.-L. He、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel，《隧穿电离中的非偶极时间延迟与双缝干涉》，Phys. Rev. Lett. 128，183201（2022年）。[29] M. Klaiber、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel，《隧穿电离中的亚周期时间分辨非偶极动力学》，Phys. Rev. A 105，053107（2022年）。[30] H. Ni、S. Brennecke、X. Gao、P.-L. He、S. Donsa、I. B˘rezinov´a、F. He、J. Wu、M. Lein、X.-M. Tong 和 J. Burgd¨orfer，《强场隧穿电离中的亚周期线性动量转移理论》，Phys. Rev. Lett. 125，073202（2020年）。[31] D. Habibovi´c 和 D. B. Milo˘sevi´c，《超越偶极近似的原子强场电离》，Phys. Rev. A 106，033101 2022( )。[32] M. M. Lund 和 L. B. Madsen，《长脉宽中红外激光脉冲强场电离中的非偶极光电子动量偏移》，J. Phys. B 54，165602（2021年）。[33] B. B¨oning 和 S. Fritzsche，《高斯激光束驱动的阈上电离：超越电偶极近似》，J. Phys. B 54，144002（2021年）。[34] L. B. Madsen，《强激光脉冲诱导隧穿电离中的非偶极效应》，Phys. Rev. A 105，043107（2022年）。[35] S. Fritzsche 和 B. B¨oning，《中红外激光场强场电离中的洛伦兹力导致的偏移》，Phys. Rev. Research 4，033031（2022年）。[36] R. Kahved˘zi´c 和 S. Gr¨afe，《含领先阶非偶极修正的强场近似》，Phys. Rev. A 105，063102（2022年）。[37] X. Mao、H. Ni、X. Gong、J. Burgd¨orfer 和 J. Wu，《亚周期分辨强场隧穿电离：磁偶极效应与电四极效应的识别》，（2022年），arXiv:2206.04229。[38] S. Brennecke 和 M. Lein，《超越电偶极近似的高阶阈上电离：对原子和分子结构的依赖》，Phys. Rev. A 98，063414（2018年）。[39] S. Brennecke 和 M. Lein，《阈上电离中交流斯塔克效应的非偶极修正》，Phys. Rev. A 104，L021104（2021年）。[40] M. Klaiber、K. Z. Hatsagortsyan、J. Wu、S. S. Luo、P. Grugan 和 B. C. Walker，《相对论区间强场再散射的极限》，Phys. Rev. Lett. 118，093001（2017年）。[41] E. Jones、Z. Germain、J. Niessner、D. Milliken、J. Scilla、L. Kel- ley、J. MacDonald 和 B. C. Walker，《终极高能截止附近激光驱动再散射的辐射：单原子响应与韧致辐射极限》，Phys. Rev. A 103，023113 2021( )。[42] L. Kelley、Z. Germain、E. C. Jones、D. Milliken 和 B. C. Walker，《强场激光再散射引发的内壳层激发：实现高能再碰撞的最佳激光条件》，J. Opt. Soc. Am. B 38，3646（2021年）。[43] J. W. Yoon、Y. G. Kim、I. W. Choi、J. H. Sung、H. W. Lee、S. K. Lee、C. H. Nam、J. H. Sung、H. W. Lee、S. K. Lee、S. K. Lee、S. K. Lee、C. H. Nam、C. H. Nam 和 C. H. Nam，实现超过 10^{23} W/cm^2, 的激光强度，Optica 8，630（2021年）。[44] C. I. Moore、A. Ting、S. J. McNaught、J. Qiu、H. R. Burris 和 P. Sprangle，《基于激光电离和电子有质动力加速的激光加速器注入器》，Phys. Rev. Lett. 82，1688（1999年）。[45] E. A. Chowdhury、C. P. J. Barty 和 B. C. Walker，《氩中 L壳层态的“非相对论”电离，由“相对论”

10^{19} w/cm^2 激光场，Phys. Rev. A 63, 042712 (2001). [46] M. Dammasch, M. D¨orr, U. Eichmann, E. Lenz, 和 W. Sa nd- ner，《相对论激光场漂移对非顺序多重电离的抑制》，Phys. Rev. A 64, 061402 (2001). [47] K. Yamakawa, Y. Akahane, Y. Fukuda, M. Aoyama, N. Inoue, 和 H. Ueda，峰值强度大于 10^{19} w/cm^2, 的超快激光脉冲对多电子原子的电离，Phys. Rev. A 68, 065403 (2003). [48] A. Maltsev 和 T. Dit mire，紧密聚焦的强相对论激光场中的阈上电离，Phys. Rev. Lett. 90, 053002 2003( ). [49] E. Gubbini, U. Eichmann, M. Kalashnikov, 和 W. Sandner，原子在超强激光场中的电离中的芯层弛豫，Phys. Rev. Lett. 94, 053602 (2005). [50] A. D. DiChiara, I. Ghebregziabher, R. Sauer, J. Waesche, S. Palaniyappan, B. L. Wen, 和 B. C. Walker，氩对 10^{19} w/cm^2 激光场的单原子响应所产生的相对论性兆电子伏光电子，Phys. Rev. Lett. 101, 173002 (2008). [51] S. Palaniyappan, R. Mitchell, R. Sauer, I. Ghebregziabher, S. L. White, M. F. Decamp, 和 B. C. Walker，强场和超强相对论场中的甲烷电离，Phys. Rev. Lett. 100, 183001 2008( ). [52] A. D. DiChiara, I. Ghebregziabher, J. M. Waesche, T. Stanev, N. Ekanayake, L. R. Barclay, S. J. Wells, A. Watts, M. Videtto, C. A. Mancuso, 和 B. C. Walker，超强激光场引发的光电离：氩原子的响应，Phys. Rev. A 81, 043417 (2010). [53] N. Ekanayake, S. Luo, P. D. Grugan, W. B. Crosby, A. D. Camilo, C. V. McCowan, R. Scalzi, A. Tramontozzi, L. E. Howard, S. J. Wells, C. Mancuso, T. Stanev, M. F. Decamp, 和 B. C. Walker，原子的电子壳层电离与经典相对论散射，Phys. Rev. Lett. 110, 203003 (2013年). [54] M. C. Kohler, T. Pfeifer, K. Z. Hatsagortsyan, 和 C. H. keitel，强场过程中的电子关联和干涉效应，Adv. At. Mol. Phys. 61, 159 (2012). [55] C. J. Joachain 和 N. J. Kylstra，超短红外激光脉冲引发的类氢离子多光子电离中的相对论效应，Phys. Rev. A 100, 013417 (2019). [56] L. V. Keldysh，强电磁波场中的电离，Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47, 1945 (1964). [57] F. H. M. Faisal，原子对激光光子的多重吸收，J. Phys. B 6, L89 (1973). [58] H. R. Reiss，强电磁场对弱束缚系统的影响，Phys. Rev. A 22, 1786 (1980). [59] A. M. Perelomov 和 V. S. Popov，原子在交变电场中的电离，Zh. Exp. Theor. Fiz. 50, 1393 (1966). [60] V. S. Popov，Phys. Usp. 47, 855 (2004). [61] H. R. Reiss，完整的 Keldysh 理论及其极限情形，Phys. Rev. A 42, 1476 (1990). [62] H. R. Reiss，相对论强场光电离，J. Opt. Soc. Am. B 7, 574 (1990). [63] V. Popov, V. Mur, 和 B. Karnakov，相对论问题的虚时间方法，JETP Letters 66, 229 (1997). [64] V. Mur, B. Karnakov, 和 V. Popov，虚时间形式体系的相对论版本，JETP Letters 87, 433 (1998). [65] N. Milosevic, V. P. Krainov, 和 T. Brabec，隧穿电离的半经典狄拉克理论，Phys. Rev. Lett. 89, 193001 (2002). [66] N. Milosevic, V. P. Krainov, 和 T. Brabec，隧穿电离的相对论理论，J. Phys. B 35, 3515 (2002). [67] A. M. Perelomov 和 V. S. Popov，原子在交变电场中的电离。iii，Zh. Exp. Theor. Fiz. 52, 514 (1967). [68] M. V. Ammosov, N. B. Delone, 和 V. P. Krainov，复杂原子和原子离子在交变电磁场中的隧穿电离

, Zh. Eksp. Teor. Fiz.**91** , 2008（1986）。

[69] V. S. Popov、V. P. Kuznetsov 和 A. M. Perelomov，《非定常问题的准经典近似》，Zh. Exp. Theor. Fiz. 53, 331（1967）。[70] D. M. Wolkow，《狄拉克方程的一类解》，Z. Phys. 94, 250（1935）。[71] M. Jain 和 N. Tzoar，《相干电磁辐射存在下的康普顿散射》，Phys. Rev. A 18, 538（1978）。[72] G. L. Yudin、S. Chelkowski 和 A. D. Bandrauk，《分子干涉中的库仑连续态效应》，J. Phys. B 39, L17（2006年）。[73] F. H. M. Faisal，《包含所有阶末态库仑相互作用的强场 S 矩阵理论》，Phys. Rev. A 94, 031401（2016）。[74] O. Smirnova、M. Spanner 和 M. Y. Ivanov，《激光辅助 XUV 电离中的库仑效应与极化效应》，J. Phys. B 39, S323（2006年）。[75] J. I. Gersten 和 M. H. Mittleman，《强电磁波存在下带电粒子散射的程函理论》，Phys. Rev. A 12, 1840（1975）。[76] V. P. Krainov，《复杂原子和原子离子发生势垒抑制电离时的电离率及能量和角分布》，J. Opt. Soc. Am. B 14, 425（1997）。[77] C. C. Chirilˇa 和 R. M. Potvliege，《强少周期激光脉冲中的低阶阈上电离》，Phys. Rev. A 71, 021402 2005( )。[78] S. V. Popruzhenko、G. G. Paulus 和 D. Bauer，《强场电离中的库仑修正量子轨迹》，Phys. Rev. A 77, 053409（2008）。[79] S. V. Popruzhenko 和 D. Bauer，J. Mod. Opt. 55, 2573（2008）。[80] X.-Y. Lai、C. Poli、H. Schomerus 和 C. Figueira de Moris- son Faria，《库仑势对阈上电离的影响：超越强场近似的量子轨道分析》，Phys. Rev. A 92, 043407（2015年）。[81] A. S. Maxwell、A. Al-Jawahiry、T. Das 和 C. F. d. M. Faria，《阈上电离中的库仑修正量子干涉：迈向多轨迹电子全息术》，Phys Rev A 96, 023420（2017年）。[82] M. Klaiber、J. Danˇek、E. Yakaboylu、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel，《通过高阶库仑修正强场近似实现的强场电离》，Phys. Rev. A 95, 023403（2017年）。[83] M. Klaiber、E. Yakaboylu 和 K. Z. Hatsagortsyan，《超强激光场中高电荷态离子的阈上电离。I. 库仑修正强场近似》，Phys. Rev. A 87, 023417（2013年）。[84] O. Smirnova、M. Spanner 和 M. Ivanov，《强场驱动的原子和分子单电子及双电子连续态的解析解及其在强场问题中的应用》，Phys. Rev. A 77, 033407（2008）。[85] L. Torlina 和 O. Smirnova，《强场动力学的含时解析 R 矩阵方法。I. 单电子系统》，Phys. Rev. A 86, 043408（2012）。[86] L. Torlina、J. Kaushal 和 O. Smirnova，《在圆偏振场中强场电离期间对电子-原子核动力学进行时间分辨》，Phys. Rev. A 88, 053403（2013年）。[87] J. Kaushal 和 O. Smirnova，《圆偏振激光场中强场电离的非绝热库仑效应》，Phys. Rev. A 88, 013421（2013年）。[88] T. Keil、S. V. Popruzhenko 和 D. Bauer，《库仑势垒下的激光驱动再碰撞》，Phys. Rev. Lett. 117, 243003（2016）。[89] S. Palaniyappan、I. Ghebregziabher、A. DiChiara、J. MacDon- ald 和 B. C. Walker，《从非相对论强场中涌现——场再散射与超强场激光原子物理：半经典分析，Phys. Rev. A 74, 033403 (2006)。[90] H. K. Avetissian、K. Z. Hatsagortsian、A. G. Markossian 和 S. V. Movsissian，任意势与辐射场相互作用的狄拉克粒子的广义程函波函数，Phys. Rev. A 59, 549 (1999)。[91] H. K. Avetissian、A. G. Markossian 和 G. F. Mkrtchian，超强激光场中类氢原子的阈上多光子电离的相对论理论，Phys. Rev. A 64, 053404 2001( )。[92] M. Klaiber、E. Yakaboylu 和 K. Z. Hatsagortsyan，超强激光场中高电荷态离子的阈上电离。II. 相对论库仑修正强场近似，Phys. Rev. A 87, 023418 (2013)。[93] S. X. Hu 和 C. H. Keitel，强激光与离子相互作用中的自旋特征，Phys. Rev. Lett. 83, 4709 (1999)。[94] M. Casu、C. Szymanowski、S. Hu 和 C. H. Keitel，激光驱动离子产生相干X射线，J. Phys. B 33, L411 (2000)。[95] C. H. Keitel 和 S. X. Hu，亚埃ngstr¨om能区的相干X射线脉冲产生，Appl. Phys. Lett. 80, 541 (2002)。[96] M. W. Walser、D. J. Urbach、K. Z. Hatsagortsyan、S. X. Hu 和 C. H. Keitel，强激光场中的自旋与辐射，Phys. Rev. A 65, 043410 (2002)。[97] G. R. Mocken 和 C. H. Keitel，兆电子伏特能区的束缚原子动力学，J. Phys. B 37, L275 (2004)。[98] G. Mocken 和 C. H. Keitel，用于求解 2+1 维狄拉克方程的快速傅里叶变换分裂算符代码，Comp. Phys. Comm. 178, 868 (2008)。[99] H. G. Hetzheim 和 C. H. Keitel，激光驱动多重带电离子中的电离动力学与激光强度的关系，Phys. Rev. Lett. 102, 083003 (2009)。[100] S. Selstø、E. Lindroth 和 J. Bengtsson，强电磁脉冲作用下类氢系统狄拉克方程的求解，Phys. Rev. A 79, 043418 (2009)。[101] Y. V. Vanne 和 A. Saenz，多光子电离高电荷态类氢离子的含时狄拉克方程求解，Physical Review A 85, 033411 (2012)。[102] F. Fillion-Gourdeau、E. Lorin 和 A. D. Bandrauk，在坐标空间中无费米子倍增地数值求解含时狄拉克方程，Computer Physics Communications 183, 1403 (2012)。[103] T. Kjellsson、S. Selstø 和 E. Lindroth，超强XUV激光脉冲作用下氢原子的相对论电离动力学，Phys. Rev. A 95, 043403 (2017)。[104] B. Hafizi、D. F. Gordon 和 J. P. Palastro，相对论光电离理论与三维从头算模拟的首次基准比较，Physical Review Letters 118, 133201 (2017)。[105] D. A. Telnov 和 S.-I. Chu，强电磁场中类氢离子的相对论电离动力学：含时狄拉克方程的广义伪谱方法，Physical Review A 102, 063109 (2020)。[106] P.-L. He、M. Klaiber、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel，强场电离中的高能直接光电子能谱，Phys. Rev. A 98, 053428 (2018)。[107] W. Becker、F. Grasbon、R. Kopold、D. B. Milo˘sevi´c、G. G. Paulus 和 H. Walther，阈上电离：从经典特征到量子效应，Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. 48, 35 (2002)。[108] G. Gribakin 和 M. Kuchiev，负离子中电子的多光子脱附，Phys. Rev. A 55, 3760 (1997)。[109] M. Klaiber、E. Yakaboylu、C. M¨uller、H. Bauke、G. G. Paulus 和 K. Z. Hatsagortsyan，超强激光场中高电荷态离子相对论电离的自旋动力学

物理学 B**47**, 065603 (2014年)。