arXiv:2302.01781v1 [math.AG] 3 Feb 2023

偶数 Nambu-Poisson 代数的高阶形式括号

HANS-CHRISTIAN HERBIG 和 ANA MAR´IA CHAPARRO CASTA˜NEDA

ABSTRACT. 设 $\boldsymbol{k}$ 是特征为零的域，且 $A = \boldsymbol{k}[x_1, ..., x_n]/I$ 带有 $I = (f_1, ..., f_k)$，为一个仿射代数。我们研究 A 上的元数为 $m \geq 2$的 Nambu-Poisson 括号，重点关注 m 为偶数的情形。我们在余切复形 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}$上构造一个 L_∞-拟代数丛，从而推广了先前关于 A 为泊松代数的情形的研究。这种结构称为高阶形式括号。其主要工具是 A的一个分解 R 上的 P_∞-结构。当 $m \neq 2$时，这些 P_∞-和 L_∞-结构仅为 $\mathbb{Z}_2$-分次。我们讨论了若干例子，并提出一种称为外张量积的构造新例子的方法。我们将高阶形式括号与 Vaisman 的形式括号进行比较。我们引入 Lie-Rinehart$m$-代数的概念，偶元数 Nambu-Poisson 括号的形式括号就是一个例子。我们在余法模上找到一个平坦 Nambu 连接。

CONTENTS

1. 引言 2 2. 奇异 Nambu–Poisson 代数示例 4 2.1. 对角括号 4 2.2. 行列式括号 5 2.3. 不变环 7 2.4. 外张量积 12 3. Maurer-Cartan 方程 14 4. 余法模上的平坦 Nambu 连接 16 5. Γ-分次 L_∞-代数丛与 Lie-Rinehart m-代数 18 6. 分解、余切复形与完备 Schouten 代数 21 7. 主要结果的证明 22 8. 完备交与局部完全交 25 9. 展望 25 10. 实证数据 26 10.1. 由两个单项式生成的4维完全交 26 10.2. 由两个单项式生成的4维非完全交 26 10.3. 7维中的角动量型方程 27 参考文献 28

在讨论本文的数学内容之前，我们先约定本文采用的记号和惯例。全文中，$\boldsymbol{k}$ 表示一个特征为零的域。具有微分几何或物理学背景的读者可能会想到情形 $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$，而代数几何学家可能会想到 $\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$。同样值得考虑的是，偏好计算的读者很可能会选择 $\boldsymbol{k} = \mathbb{Q}$ 。本文探讨奇点的某些代数方面，处于这些学科的交叉领域。 $\boldsymbol{k}$代数是指含幺结合交换代数。对于一个 $\boldsymbol{k}$代数 A ，我们定义 Der(A) := $\{X \in A \to A \mid X$ 是 $\boldsymbol{k}$线性的，且满足 $X(ab) = X(a)b + aX(b)\ \ \forall a, b \in A\}$。我们交替使用“向量场”和“导子”这两个术语，指代 Der(A) 的元素。

为了让代数学家满意，我们决定把坐标的指标写在下方。不过，为了照顾读者中的微分几何学家和物理学家，我们采用里奇演算的约定：对重复出现的一对指标求和，其中一个在上方（在我们的情形中是协变指标），另一个则在

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 17B63，次要分类号 13D02、58A50、17B66。
Key words and phrases. Nambu–Poisson 代数、 P_∞代数、余切复形、 L_∞代数胚、Lie-Rinehart m代数、Nambu 连接与曲率。

下方（即逆变指标）。有时，为了使公式简洁，我们采用爱因斯坦求和约定，也就是省略指标求和中的求和符号。我们承认，离开里奇演算，我们自己也无法进行计算。我们知道，每一种选择都会让另一半读者感到不满[1]。无法接受逆变指标写在上方的读者，可以在所有公式中将上下指标互换。标注幂次时，如果可能，我们会避免使用指数，以免引起混淆；例如，我们写作 xx 而不是 x^2。提及基于 Koszul 符号规则的代数结构时，我们采用物理学中惯用的前缀 super，例如，我们称之为超交换代数或李超代数。在这种语境下常用的前缀 graded 可能会造成误解。

1. 引言

微分几何中研究的大多数几何结构（如黎曼结构等）难以在奇异簇上定义。主要原因是协变张量和逆变张量并不构成向量丛的截面。然而，泊松几何可以完全通过函数代数来定义。奇异泊松代数（如辛约化（参见例如[31, 19, 14] ）或幂零轨道闭包（例如参见 [8]）） 在现代数学中扮演着重要角色。另一种此类结构是 Nambu-泊松几何 [24, 28, 29]。本文旨在介绍奇异 Nambu-Poisson 代数的例子，并将关于高阶 Koszul 括号的先前工作 [13] 从 Poisson 情形推广到偶 Nambu-Poisson 结构的情形。据我们所知，尽管奇异 Nambu-泊松结构在不变量理论中自然出现，但此前尚未有其他研究探讨过它们。

在我们能够解　释主要结果之前，我们先回顾代数 Nambu-泊松几何的一些基本概念 .

定义 1.1. 设 A 是一个 $\boldsymbol{k}$-代数。 A 上元数为 m 的 Nambu-Poisson 结构是一个 $\boldsymbol{k}$-多重线性反对称映射 $\{\,,...,\,\}$，其定义域为 A 的 m 重直积，值域为 A

$$A \times \cdots \times A \to A$$
$$(a_1, ..., a_m) \mapsto \{a_1, ..., a_m\}$$

它满足以下条件

(1) 莱布尼茨法则:

$$\{a_1, ..., a_{m-1}, ab\} = a\{a_1, ..., a_{m-1}, b\} + b\{a_1, ..., a_{m-1}, a\}$$

(2) 基本恒等式:

$$\{a_1, ..., a_{m-1}, \{b_1, ..., b_m\}\} = \sum_{l=1}^{m} \{b_1, ..., b_{l-1}, \{a_1, ..., a_{m-1}, b_l\}, ..., b_m\}$$

对于任意 $a_1, ..., a_{m-1}, b_1, ..., b_m, a, b \in A$。有时，我们使用以下记号 $X_{a_1,...,a_{m-1}}$ 表示向量场 $\{a_1, ..., a_{m-1}, \}$。这类向量场称为哈密顿向量场。它们构成 Der(A) 的一个子 Lie-Rinehart 代数，记作 $\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)$。括号 $\{\,,...,\,\}$ 称为 Nambu-Poisson 括号，而 $(A, \{\,,...,\,\})$ 称为 Nambu-Poisson 代数。

定义 1.2. 设 $(S, \{\,,...,\,\})$ 是一个 Nambu-Poisson 代数。 S 中的理想 I 称为 Nambu-Poisson 理想，若 $\{I, S, \ldots, S\} \subseteq I$。

在上述情形下，我们自动在 A 上得到一个括号，该括号由 S 上的 Nambu-Poisson 括号诱导而来。事实上，若 $a_i = g_i + I \in A$ 且在 $g_i \in S$ 中，则 $\{a_1, ..., a_m\} := \{g_1, \ldots, g_m\} + I$。

如果 $\boldsymbol{k}$-代数 A 是仿射的，即 $A = S/I$，其中 $S = \boldsymbol{k}[x_1, ..., x_n]$，且 I 是 S中的 Nambu-Poisson 理想，我们使用以下记号

$$\Pi_{i_1 \ldots i_m} = \{x_{i_1} + I, \ldots, x_{i_m} + I\} \in A.$$

那么 $\{\,,...,\,\}$ 由 $\Pi_{i_1 \ldots i_m}$ 通过以下公式唯一确定

$$\{a_1, ..., a_m\} = \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} \Pi_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial g_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_{i_m}} + I. \tag{1.1}$$

Her且在 $a_i = g_i + I \in A$ 和 $g_i \in S$ 中。更一般地，我们有如下结论（参见 [28] 或 [29]).

[1]这里我们严格遵循戈特弗里德·威廉·莱布尼茨的 *pre-established harmony* [22]原则。

命题 1.3. 若对每个 $\sigma \in \Sigma_m := \mathrm{Aut}(\{1,\dots,m\})$，都有 $\Pi_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(m)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\Pi_{i_1\dots i_m} \in S$，则

$$\{g_1,...,g_m\} := \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \Pi_{i_1\dots i_m} \frac{\partial g_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_{i_m}}$$

在 $g_i \in S$ 中，定义括号 $\{\,,\dots,\}$，其满足定义 1.1 的所有条件，唯独条件 (2) 除外。当且仅当对所有 $i_1,\dots,i_{m-1},j_1,\dots,j_m \in \{1,\dots n\}$，$S$ 上的括号 $\{\,,\dots,\}$ 定义一个 Nambu-Poisson 括号

$$\{x_{i_1},...,x_{i_{m-1}},\{x_{j_1},...,x_{j_m}\}\} = \sum_{l=1}^{m} \{x_{j_1},\dots,x_{j_{l-1}},\{x_{i_1},...,x_{i_{m-1}},x_{j_l}\},x_{j_{l+1}},...,x_{j_m}\} \tag{1.2}$$

成立。这等价于以下条件：

$$\sum_{s=1}^{n} \Pi_{i_1\dots i_{m-1}s} \frac{\partial \Pi_{j_1\dots j_{l-1}sj_{l+1}\dots j_m}}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \Pi_{j_1\dots j_{l-1}sj_{l+1}\dots j_m} \frac{\partial \Pi_{i_1\dots i_{m-1}j_l}}{\partial x_s}. \tag{1.3}$$

and

$$\sum_{l=1}^{m} \Pi_{j_1\dots j_{l-1}ij_{l+1}\dots j_{m-1}} \Pi_{ji_2\dots i_{m-1}j_l} + \Pi_{j_1\dots j_{l-1}jj_{l+1}\dots j_{m-1}} \Pi_{ii_2\dots i_{m-1}j_l} = 0, \tag{1.4}$$

对所有指标 $i,j \in \{1,\dots,n\}$ 均成立。

若 (1.2) 仅模 I 成立，则 (1.1) 在 A 上定义一个 Nambu-Poisson 括号。这等价于 和 (1.4) 模 I 成立。(1.3)

为简便起见，我们对哈密顿向量场 $X_{i_1\dots i_{m-1}} = X_{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}}} \in \mathrm{Der}(S)$ 和 $X_{i_1\dots i_{m-1}} = X_{x_{i_1}+I,\dots,x_{i_{m-1}}+I} \in \mathrm{Der}(A)$ 使用同一符号。注意，(1.4) 等价于反对称张量 $\Pi_{i_1\dots i_m}$ 可分解（见 [29, 定理]）。

根据希尔伯特基定理，S中的理想 I由有限个元素生成，设为 f_1、.....、$f_k \in S$。Nambu–Poisson 理想的条件可改述如下：

$$\{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}},f_\mu\} = \sum_{\nu} Z^{\nu}_{i_1\cdots i_{m-1}\mu} f_\nu, \tag{1.5}$$

对某个 $Z^{\nu}_{i_1\cdots i_{m-1}\mu} \in S$成立。注意，$f_1$、.....、$f_k \in S$以及系数 $Z^{\nu}_{i_1\cdots i_{m-1}\mu}$都不唯一。本文中我们固定选取其中一组。若 $Z^{\nu}_{i_1\cdots i_{m-1}\mu}$ 全为零，则称生成元f_1、.....、f_k为卡西米尔元。

为了理解我们的主要结果——定理 1.4 和推论 1.5、1.6——的表述，读者或许可以参阅第 5 节，其中给出了 Γ-分次 P_∞-结构和 Γ-分次 L_∞-代数胚的定义。若$m=2$，分次的阿贝尔群为 $\Gamma=\mathbb{Z}$；而对于偶 $m>2$，它仅仅是 $\Gamma=\mathbb{Z}_2$。

定理 1.4. 采用上述记号，设元数 $m \geq 2$为偶数。设 $I \subset S = \boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_n]$为一个 Nambu-Poisson 理想，设 $A=S/I$，且 $f_1,\dots,f_k$为 I的生成元。设 R为关于生成元 $f_1,\dots,f_k$的 $S \to A$的分解。则在 (R,∂)上存在一个 Γ-分次的 P_∞-代数结构 $(\{\,,\dots,\}_l)_{l\geq 1}$，使得 $\partial = \{\,\}_1$，且拟同构 $R \to A$与括号相容。若生成元 f_1, ..., f_k为卡西米尔元并构成完全交，则该 P_∞-代数结构是平凡的，其意义是唯一非零的 Nambu-Poisson 括号为 $\partial = \{\,\}_1$和 S中的 m元 Nambu-Poisson 括号 $\{\,,\dots,\}$。

推论 1.5. 在定理 1.4 的假设下，余切复形 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}} \to \Omega^{A|\boldsymbol{k}}$ 上存在一种带有 m 元锚映射的 Γ-分次 L_∞-algebroid 结构，该结构与形式括号和锚映射相容（参见第 5 节）。此结构的括号由下式唯一确定

$$[\mathrm{d}\phi_1,\dots,\mathrm{d}\phi_m]_m = \mathrm{d}\{\phi_1,\dots,\phi_m\}_m,$$

对于 $\phi_1,\dots,\phi_m \in R$。锚映射 $\rho(\mathrm{d}\phi_1,\dots,\mathrm{d}\phi_{m-1},) := (a \mapsto \{\phi_1,\dots,\phi_{m-1},a\}) \in \mathrm{Der}(A)$ 非零，当且仅当 $\phi_1,\dots,\phi_m \in A$。在这种情况下，它化为 Nambu-Poisson 括号：$\rho(\mathrm{d}\phi_1,\dots,\mathrm{d}\phi_{m-1},a) = \{\phi_1,\dots,\phi_m,a\}$ 对于 $a \in A$。若生成元 f_1, ..., f_k 是卡西米尔元且构成完全交，则 Γ 分次 L_∞-拟李代数结构是平凡的，其意义是唯一非零的李括号由 $[\mathrm{d}x_{i_1},\dots,\mathrm{d}x_{i_m}] = \mathrm{d}\{x_{i_1},\dots,x_{i_m}\}$ 给出，其中 $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}$。

这一陈述在 $\Omega^{A|k}$ 上的括号层面已经并非平凡。I.Vaisman [29] 指出，非恰当形式的形式括号一般不满足 Filippov 恒等式。然而，从 Γ 分次 L_∞-拟李代数出发，我们可以自然地推导出一组适用于形式括号的公理（参见第 5 节中 Lie-Rinehart m-代数的定义）。关键在于假设 m 为偶数。

推论1.6. 设 $m \geq 2$ 为偶整数。设 I 是 Nambu-Poisson 代数 $(S, \{\ ,\dots,\})$ 中的 Nambu-Poisson 理想，且 $A = S/I$ 为商 Nambu-Poisson 代数。假设余切复形 $\mathrm{D}_0(A|\boldsymbol{k}, A)$ 的零阶同调与 $\Omega^{A|k}$ 同构（当 I 是约化的时，情况确实如此）。那么 $[\mathrm{d}a_1, \dots, \mathrm{d}a_m] := \mathrm{d}\{a_1, \dots, a_m\}$ 以及 $\rho(\mathrm{d}a_1, \dots, \mathrm{d}a_{m-1},) := X_{a_1 \dots a_{m-1}}$ 对于 $a_1, \dots, a_m$ 在 K ¨ahler 微分 $\Omega^{A|k}$的 A-模上定义了一个 Lie-Rinehart$m$-代数结构。

本文的安排如下。第 2 节详细介绍几类奇异 Nambu–Poisson 代数的例子：对角型、行列式型以及源自不变量理论的代数。此外，我们引入外张量积，从而能够由较小的构件组合出 Nambu-Poisson 代数。第 3 节证明，方程 (1.5) 中的张量满足某个 Maurer-Cartan 方程。第 4 节说明，这个 Maurer-Cartan 方程可以解释为余法模 I/I^2 上的 Nambu 连接是平坦的。我们还讨论更一般的 Nambu 连接及其曲率。第 5 节定义 Γ-分次 L_∞-代数胚、 Γ-分次 P_∞-代数以及 Lie-Rinehart m-代数，并介绍它们之间关系的一些基本事实。第 6 节简要回顾预解式和余切复形的构造。第 7 节证明本文的主要结果：定理 1.4、推论 1.5 和 1.6。第 8 节讨论完全交和局部完全交的特殊情形，其中也包括正则 Nambu-Poisson 代数的情形。第 9 节讨论一些可能与进一步研究奇异 Nambu-Poisson 几何相关的课题。第 10.1 节介绍我们针对几个例子所做的计算机计算。我们使用了 Mathematica [16], Macaulay2 [9] 和 Magma [5]。

致谢。本文是 AMCC 博士论文的一部分。她感谢 CAPES（Coordena ̧c ̃ao de Aperfei ̧coamento de Pessoal de N´ıvel Superior）提供的经费支持。我们感谢 Miles Reid 在计算机代数方面提供的建议。我们感谢 Chris Seaton 的慷慨支持；在改编他的 Mathematica 代码时，他的建议至关重要。他还在我们推导命题 2.8 以及处理例 2.12 中的问题时给予了指导。我们受益于 Jos ́e Antonio Vallejo 对形式括号的 Filippov 恒等式相关问题所作的解释，并由衷感谢 Theodore Voronov 就高阶导出括号提出的建议。

2. 例子：奇异 Nambu-Poisson 代数

本节将详细讨论奇异 Nambu-Poisson 代数的例子，旨在找出其中能导出有趣 P_∞结构的代数。若 Nambu-Poisson 代数由卡西米尔元生成，通常不会出现这种情况。我们还将介绍一种构造方法——外张量积，它可以利用低元数的基本构件来构造 Nambu-Poisson 代数。

2.1. 对角括号。设 $S = \boldsymbol{k}[x_1, ..., x_n]$ 和 $c_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 是取值于 $\boldsymbol{k}$ 的全反对称张量。考虑对角括号

$$\Pi_{i_1 \dots i_m} = \{x_{i_1}, ..., x_{i_m}\} := c_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}.$$

引理 2.1. 若 m 为偶，则 $\{\ ,\dots,\ \}$ 是 Nambu–Poisson 括号。

证明。对于固定的 i，若 $i = j_l$，则有 $\dfrac{\partial \Pi_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} = c_{j_1 \dots j_m} x_{j_1} \cdots \widehat{x_i} \cdots x_{j_m}$，其中某个 $l = 1, ..., m$；否则为零。于是

$$\sum_i \Pi_{i_1 \dots i_{m-1} i} \frac{\partial \Pi_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} = c_{i_1 \dots i_{m-1} j_l} c_{j_1 \dots j_m} x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}} x_{j_1} \cdots x_{j_m}.$$

因此，方程 (1.3) 可写为

$$\left(\sum_{k=1}^{m} -c_{i_1 \dots i_{m-1} j_k} c_{j_1 \dots j_m} + \sum_{i_m=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_{i_1 \dots i_{l-1} i_m i_l \dots i_{m-1}} c_{j_1 \dots j_{m-1} i_l} \right) x_{j_1} \cdots x_{j_m} x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}} = 0$$

这意味着系数必须满足

$$\sum_{k=1}^{m} -c_{i_1\dots i_{m-1}j_k}c_{j_1\dots j_m} + \sum_{i_m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} c_{i_1\dots i_{l-1}i_m i_l\dots i_{m-1}}c_{j_1\dots j_{m-1}i_l} = 0. \tag{2.1}$$

根据 [28, 2]，全反对称标量张量是 Nambu–Poisson 张量，因此可得（2.1）。 □

引理 2.2. 设 $\boldsymbol{m}=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$。考虑 $f(x_1,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}=\prod_{i=1}^n x_i^{m_i}$。那么 $\{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}},f\}$与 f 成比例。事实上，$g=\sum_{i=1}^n m_i c_{i_1\dots i_{m-1}i}x_{i_1}\cdots x_{i_{m-1}}$满足 $\{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}},f\}=gf$。

证明. 我们发现

$$\{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}},f\}=\sum_{i=1}^n \Pi_{i_1\dots i_{m-1}i}\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^n c_{i_1\dots i_{m-1}i}x_{j_1}\cdots x_{j_{m-1}}x_i\, m_i x_i^{-1}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}=gf$$

□

单项式理想 $I=(f_1,\dots,f_k)$ 可由指数向量 $\boldsymbol{n}_\mu=(n_{1,\ \mu},\dots,m_{n,\ \mu})\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$（其中 $\mu=1,\dots,k$ 满足 $f_\mu=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}_\mu}$）刻画。由该引理可知，（1.5）中的 Z可以选为

$$Z^\nu_{i_1,\dots,i_{m-1},\mu}=\delta^\nu_\mu\sum_{i=1}^n n_{i,\mu}c_{i_1\dots i_{m-1},i}x_{i_1}\cdots x_{i_{m-1}}$$

如果所有 $Z^\nu_{i_1,\dots,i_{m-1},\mu}$ 都与 δ^ν_μ 成比例，我们就称这些 Z为对角的。即使对于单项式理想，如果这样更方便，我们也可以选择非对角的 Z。

2.2. 行列式括号。本小节旨在证明定理 2.5，并给出行列式 Nambu–Poisson 括号。若光滑流形 P上的 $\mathcal{C}^\infty(P)$ 是一个 Nambu-Poisson 代数，我们就称其为 Nambu-Poisson 流形。类似地，若复流形 P 上的全纯函数层$\mathcal{O}(P)$ 是 Nambu–Poisson 代数层，我们就称其为 Nambu-Poisson 流形。

在光滑流形 P 上，m-向量场指切丛的第 m 次外幂 $\bigwedge^m TP$ 的一个截面。光滑截面 $\Gamma(P,\bigwedge^m TP)$ 构成的 $\mathcal{C}^\infty(P)$-模记作 $\mathfrak{X}^m(P)$，并记$\mathfrak{X}(P):=\bigoplus_{m\geq 0}\mathfrak{X}^m(P)$。$\mathfrak{X}^m(P)$ 的元素称为 m-向量场，而更一般地，$\mathfrak{X}(P)$ 的元素称为多向量场。类似地，对于复流形 P，m-向量场是层$\mathfrak{X}^m(P):=\bigwedge^m \mathcal{T}P$ 的一个截面。

为清楚起见，我们先证明以下命题。

引理 2.3（[10]）。设 P 是一个光滑流形。令 $\Pi\in\mathfrak{X}^m(P)$，并定义 $\{f_1,\dots,f_m\}:=\Pi(df_1,\dots,df_m)$。括号 $\{\,,\dots,\,\}$ 满足基本恒等式，当且仅当

$$\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}\Pi=0 \tag{2.2}$$

对所有 $f_1,\dots,f_{m-1}\in\mathcal{C}^\infty(P)$ 都成立。这里，$X_{f_1\dots f_{m-1}}$ 理解为向量场 $\{f_1,\dots,f_{m-1},\ \}$，而 $\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}$ 是沿 $X_{f_1\dots f_{m-1}}$ 的李导数。

证明。事实上，$\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}\Pi=0$ 意味着对所有 $g_{i_1},\dots,g_{i_m}\in C^\infty(P)$，都有 $(\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}\Pi)(dg_{i_1},\dots,dg_{i_m})=0$。根据李导数的一般性质，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}(\Pi(dg_1,\dots,dg_m)) &= (\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}\Pi)(dg_1,\dots,dg_m)+\Pi(\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}dg_1,\dots,dg_m)+\cdots\\ &\quad+\Pi(dg_1,\dots,\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}dg_m).\end{aligned} \tag{2.3}$$

现在应用嘉当公式，并利用 $d^2=0$ 这一事实，可得

$$\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}dg_j=i_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}d^2g_j+d(i_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}dg_j)=d(i_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}dg_j)=d(\{f_1,\dots,f_{m-1},g_j\})$$

对于 $j=1,\dots,m$。将此等式代入等式 (2.3)，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}(\Pi(dg_1,\dots,dg_m)) &= (\mathcal{L}_{X_{f_1\dots f_{m-1}}}\Pi)(dg_1,\dots,dg_m)+\{\{f_1,\dots,f_{m-1},g_1\},\dots,g_m\}+\cdots\\ &\quad+\{g_1,\dots,\{f_1,\dots,f_{m-1},g_m\}\}.\end{aligned}$$

左边化简为

$$X_{f_1\dots f_{m-1}}(\{g_1,\dots,g_m\})=\{f_1\dots f_{m-1},\{g_1,\dots,g_m\}\}.$$

这意味着 $\mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\Pi = 0$ 等价于基本恒等式。 □

对于复流形，也有类似的结论。若 A 是光滑仿射 Nambu-Poisson 簇的坐标代数，则可用 $\{f_1, ..., f_m\} = \Pi(df_1, ..., df_m)$ 来定义 $\Pi \in \bigwedge_A \mathrm{Der}(A)$。由于李导数可以通过嘉当魔法公式定义，等式 (2.2) 在这种情形下同样成立。

引理 2.4. 设 $h_1, \ldots, h_n$ 是关于变量 $t_1, \ldots, t_n$ 的二次连续可微函数。则 $\sum_i \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial (h_1,\ldots,h_{n-1},t_i)}{\partial (t_1,\ldots,t_n)} = 0$.

证明.

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial(h_1,\ldots,h_{n-1},t_i)}{\partial(t_1,\ldots,t_n)} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial t_i}\sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial h_1}{\partial t_{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial h_{n-1}}{\partial t_{\sigma(n-1)}}\delta^i_{\sigma(n)} \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial t_i}\sum_{\sigma,\ \sigma(n)=i}(-1)^\sigma \frac{\partial h_1}{\partial t_{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial h_{n-1}}{\partial t_{\sigma(n-1)}} \\
&= \sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial}{\partial t_{\sigma(n)}}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t_{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial h_{n-1}}{\partial t_{\sigma(n-1)}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial h_1}{\partial t_{\sigma(1)}}\cdots\widehat{\frac{\partial h_j}{\partial t_{\sigma(j)}}}\cdots\frac{\partial h_{n-1}}{\partial t_{\sigma(n-1)}}\frac{\partial^2 h_j}{\partial t_{\sigma(n)}\partial t_{\sigma(j)}} = 0.
\end{aligned}$$

□

定理 2.5. 设 $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 和 $S = \boldsymbol{k}[x_1, ..., x_n]$。假设 $X^1, X^2, ..., X^{k+m} \in \mathrm{Der}(S)$ 是两两可交换的导子， $g \in S$ 和 $f_1, ..., f_k \in S$。对于 $a_1 = f_{k+1}, ..., a_m = f_{k+m} \in S$， 令

$$\{a_1, ..., a_m\} := g\,\mathrm{Det}(X^\nu(f_\mu))_{\mu,\nu=1,2,\ldots,k+m}.$$

那么， $\{\,, ..., \}$ 在 S 上定义了一个 Nambu–Poisson 括号。

证明。若 $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$ 令 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 X^1、...、X^{k+m} 线性无关的开子集。在 $\mathbb{R}^n \backslash U$ 上，该括号恒为零，因此无需证明。令 $x \in U$ 和 ϕ 为从 V（ $0 \in$ {的一个邻域）$(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$} 到 U 中的 x 的一个邻域 U_x 的微分同胚，使得对于 $\nu = 1, ..., k+m$， $T\phi$ 将 $\frac{\partial}{\partial t_\nu}$ 映射到 X^ν。考虑 $F_\mu := f_\mu \circ \phi$（其中 $\mu = 1, ..., k$）以及 $G := g \circ \phi$。对于 $A_1 = F_{k+1}, ..., A_l = F_{k+m} \in C^\infty(V)$,

$$\{A_1, ..., A_m\} := G\,\mathrm{Det}\left(\left(\frac{\partial F_\mu}{\partial t_\nu}\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,k+m}\right)$$

只需证明这是一个 Nambu–Poisson 括号，因为 $\{a_1, \ldots, a_m\} \circ \phi = \{A_1, \ldots, A_m\}$。对于 $\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$ 的情形，也可以用类似的论证。令 $\Pi \in \mathfrak{X}(V)$ 满足 $\Pi(dA_1, ..., dA_m) = \{A_1, ..., A_m\}$， 并令 $X = X_{g_1,\ldots,g_{m-1}} \in \mathfrak{X}(V)$ 满足对于所有 $g \in C^\infty(V)$， $X_{g_1\ldots g_{m-1}}(g) = \{g_1, ..., g_{m-1}, g\}$。我们要证明 $\mathcal{L}_{X_{g_1\cdots g_{m-1}}}\Pi = 0$。注意

$$\begin{aligned}
\{A_1, ..., A_m\} &= G\,\mathrm{Det}\left(\left(\frac{\partial F_\mu}{\partial t_\nu}\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,k+m}\right) \\
&= G dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_k \wedge dA_1 \wedge \cdots \wedge dA_m\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial t_{k+m}}\right)
\end{aligned}$$

注意，根据 Π 的构造， F_μ 是卡西米尔元。我们需要证明

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_X G) dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_k \wedge dA_1 \wedge \ldots \wedge dA_l\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial t_{k+l}}\right) \\
&+ G dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_k \wedge dA_1 \wedge \ldots \wedge dA_l \mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial t_{k+l}}\right).
\end{aligned}$$

我们有 $\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial t_j} = -\sum_i \frac{\partial(\{g_1,\ldots,g_{m-1},t_i\})}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial t_i}$，由此可得

$$\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial t_{k+l}}\right) = -\left(\sum_i \frac{\partial(\{g_1,\ldots,g_{m-1},t_i\})}{\partial t_i}\right)\frac{\partial}{\partial t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial t_{k+l}}.$$

采用简写 $X_i := \{g_1,\ldots,g_{m-1},t_i\}$，我们得到

$$\sum_i \frac{\partial(\{g_1,\ldots,g_{m-1},t_i\})}{\partial t_i} = \sum_i X_i\frac{\partial G}{\partial t_i} + G\sum_i \frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial(F_1,\ldots,F_k,g_1,\ldots,g_{m-1},t_i)}{\partial(t_1,\ldots,t_{k+l})},$$

根据引理，$\mathcal{L}_X G$。 □

当 $g=1$ 且 $X^i=\partial/\partial x_i$ 对于 $i=1,\ldots,n$ 时，这一特殊情形称为纳姆布括号（纳姆布在 [24] 中考察了 $n=3$ 的情形）。我们相当确信该命题存在一种无需坐标变换的代数证明，并且期望该定理对特征为零的任意域 $\boldsymbol{k}$ 都成立。

推论 2.6. 沿用定理 2.5 的记号，考虑 S 中的理想 $I=(f_1,\ldots,f_k)$。由于 $f_1,\ldots,f_k$ 是卡西米尔元，因此 $A=S/I$ 是一个 Nambu-Poisson 代数。

2.3. 不变环。设 G 是一个复约化李群，V 是 G 的有限维表示。设 $\mathbb{C}[V]$ 是 V 上的正则函数代数，$\mathbb{C}[V]^G$ 是 G 的不变量子代数。注意，$\mathbb{C}[V]^G$ 可视为范畴商 $V/\!\!/G$ 上的正则函数代数。若 Nambu–Poisson 括号 $\{\,,\ldots,\,\}$ 在 $\mathbb{C}[V]$ 中满足以下条件，则称其为 G-不变：对每个 $g\in G$

$$g^*\{f_1,\ldots,f_m\} = \{g^*f_1,\ldots,g^*f_m\},$$

其中 f_1、…、$f_m\in\mathbb{C}[V]$ 和 $(g^*f_i)(v) = f_i(gv)$，$v\in V$。在这种情况下，$\mathbb{C}[V]^G$ 构成 $\mathbb{C}[V]$ 的一个 Nambu-Poisson 子代数。根据 D. 希尔伯特和 H. 外尔的定理，存在一组完备的齐次多项式不变量 φ_1、…、$\varphi_n\in\mathbb{C}[V]^G$。因此，代换 $x_i\mapsto\varphi_i$ 是一个满同态 $S=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]\to\mathbb{C}[V]^G$。令 I 为此代换同态的核，则 $A=S/I$ 与不变环 $\mathbb{C}[V]^G$ 作为 $\mathbb{C}$-代数同构。通过这一同构，A 成为一个 Nambu-Poisson 代数。

值得考虑的一类自然例子是 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的子群 G。在这种情况下，$n=m$，且 Nambu-Poisson 括号由 Nambu-Poisson 括号给出（参见 2.2），显然是 G-不变的。事实上，对于所有 $g\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\{g^*f_1,\ldots,g^*f_n\}(v) &= \operatorname{Det}\left(\frac{\partial(g^*f_i)}{\partial x_j}(v)\right)_{ij} = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(gv)\frac{\partial(gv)_i}{\partial x_j}\right)_{ij} = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(gv)\right)_{ij}\operatorname{Det}(g)\\ &= (g^*\{f_1,\ldots,f_n\})(v).\end{aligned}$$

2.3.1. 维数为 d 的复环面。给定一个 $n\times d$ 矩阵 $\mathcal{A}$，我们将其与一个对角 $n\times n$ 矩阵群关联起来：

$$\Gamma_{\mathcal{A}} := \left\{\operatorname{diag}\left(\prod_{i=1}^d t_i^{a_{1i}},\prod_{i=1}^d t_i^{a_{2i}},\ldots,\prod_{i=1}^d t_i^{a_{ni}}\right)\,\middle|\; t_1,\ldots,t_d\in\mathbb{C}^*\right\}$$

矩阵群 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ 与可逆对角 $d\times d$ 矩阵群 $(\mathbb{C}^\times)^d$ 同构，称为 d 维复环面。我们将 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ 称为由 $\mathcal{A}$ 定义的环面。在 ([27]) 中，Bernd Sturmfels 描述了一种计算其不变环 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\Gamma_{\mathcal{A}}}$ 的生成元的算法。如果 $\mathcal{A}$ 的每一行的行和均为零，那么 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的子群。

例 2.7. 考虑向量 $\mathcal{A}=(1,1,-1,-1)$。一组基本不变量为 i s

$$u_1 = x_1x_3,\quad u_2 = x_1x_4,\quad u_3 = x_2x_3,\quad u_4 = x_2x_4.$$

借助 Macaulay2，我们发现这些多项式满足关系

$$u_1u_3 - u_2u_4 = 0.$$

如上所述，不变环 $\mathbb{C}(V)^{\Gamma_{\mathcal{A}}}$ 成为一个 Nambu–Poisson 代数，其诱导括号完全由方程 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}=0$ 确定

这可以解释如下。

2.3.2. 括号消失的不变环。范畴商 $V/\!\!/G$ 被视为代数 $\mathbb{C}[V]^G$ 的谱。令 H 为表示 V 的主各向同性群（详情参见，例如 [14]）。

命题 2.8。若 $\dim(G) > \dim(H)$，则由 Nambu–Poisson 括号诱导的 $\mathbb{C}[V]^G$ 上的括号为零。若 $\mathbb{C}[V]^G$ 上的诱导括号非零，则存在一个有限群 Γ 在线性地作用于 V，使得 $\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[V]^\Gamma$。

证明。设 $u_1, \ldots, u_k$ 为基本的 G-不变量，并令 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_k) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$。Nambu–Poisson 括号

$$\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_n}\} = \frac{\partial(u_{j_1}, \ldots, u_{j_n})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

可以理解为雅可比矩阵 $T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,\, j}$ 的一个 $n \times n$-子式。回顾一下，范畴商 $V/\!\!/G$ 的维数满足公式

$$\dim(V) - \dim(G) + \dim(H) = \dim(V/\!\!/G) \overset{(*)}{=} \operatorname{rank}(T_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}),$$

wh此处等式 (*) 成立，是因为不变环是 Cohen-Macaulay [15]. □

按照 Vaisman 的意义（见 [29, 式 (2.26)]），在 $V = \boldsymbol{k}^n$ 上取 $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$ 的线性括号，是指具有以下形式的 Nambu-Poisson 括号（ [28] 中提出了一个更一般的定义）。我们取标准黎曼度量，并考虑 Hodge 星算子 $*: \bigwedge^{n-1} V^* \to V^*$。将 V 上的典范线性坐标 x_1，...，x_n 视为余向量，该括号定义为 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}\} = *(x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{n-1}})$。显然，该括号在 $\mathrm{O}(n, \boldsymbol{k})$ 下不变。

命题 2.9. 设 $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$ （分别为 $=\mathbb{C}$）和 G 是 $\mathrm{O}(n, \boldsymbol{k})$ 的闭李子群（分别为约化子群），其主各向同性群为 H。若 $\dim(G) > \dim(H)$，则由 Vaisman 意义下的线性 Nambu-Poisson 括号在 $\boldsymbol{k}[x_1, \cdots, x_n]^G$ 上诱导的括号为零。特别地，若这样的 Nambu-Poisson 括号非零，则可找到一个有限群 Γ 在线性作用于 V，使得$\boldsymbol{k}[x_1, \cdots, x_n]^G = \boldsymbol{k}[x_1, \cdots, x_n]^\Gamma$。

证明。首先，我们注意到该括号可以理解为

$$\begin{aligned} \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} &= x_n, \\ \{x_n, x_2, \ldots, x_{n-2}\} &= x_{n-1}, \\ \{x_{n-1}, x_n, x_2, \ldots, x_{n-3}\} &= x_{n-2}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

设 $u_1, \ldots, u_k$'s 为基本的 $\mathrm{O}(n, \boldsymbol{k})$-不变量。相应地，它们的括号可写为

$$\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n-1}}\} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_3} & & \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_3} & & \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

但 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 =: f(u_1, \ldots, u_k)$，因为它是一个 $\mathrm{O}(n, \boldsymbol{k})$-不变量。因此

$$\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n-1}}\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_3} & & \frac{\partial u_{j_1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_3} & & \frac{\partial u_{j_2}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_{j_{n-1}}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial f}{\partial u_l} \frac{\partial(u_l, u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n-1}})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \overset{\text{Prop. } 2.8}{=} 0.$$

因此，若括号 $\{\,,\ldots,\,\}$ 非零，我们必有 $\dim(G)=\dim(H)$。但若 $H\subseteq G$ 是一个维数为 $H=\dim G$ 的子群，则 H 由 G 的连通分支构成。这意味着商是平凡的，除非 G 不连通。假设 G 不连通。那么，$\dim G=\dim H$ 意味着 H 包含单位元的连通分支 G^0，且该分支是正规子群。若 G^0 在一个具有主各向同性群的点上作用平凡，那么它在每个具有平凡各向同性群的点上也作用平凡。因此，由连续性可知，它在整个表示空间上作用平凡。更一般地，若主各向同性群非平凡，则该作用经由$G':=G/G^0$分解。但 $\dim G'=\dim(H/G^0)$，且 G' 的主各向同性群 $H':=H/G^0$ 在每个具有平凡各向同性群的点上作用平凡。令 $\Gamma=G'/H'$。□

对于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中的每个有限子群 G，都有三个满足一个关系式 $\varphi_G\in S=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ 的不变量。相应的超曲面环 $A=S/I$ 称为 Kleinian 奇点 [18, 21]。

定理 2.10（参见例如 [21] 或 [13]）。对于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中的每个有限子群 G，多项式 φ_G 都是一个卡西米尔元。

例 2.11。设 G 是 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ 的一个阶为 24 的对角子群，由下列元素生成

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_4^2&0&0\\0&\varepsilon_4&0\\0&0&\varepsilon_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varepsilon_6&0&0\\0&\varepsilon_6^3&0\\0&0&\varepsilon_6^2\end{pmatrix},$$

其中 ε_4 和 ε_6 分别是四次和六次本原单位根。使用 Macaulay2 [9],，我们找到了多项式不变量基本系：

$$u_1=x^6,\ u_2=y^4,\ u_3=z^{12},\ u_4=xyz,\ u_5=y^2z^6,\ u_6=x^4z^4,\ u_7=x^2z^8.$$

这些生成元出现在 [33, 第 45 页–46]。这些多项式满足以下关系

$$\begin{aligned}u_4^4-u_2u_6=0,\ u_4^2u_5-u_2u_7=0,\ u_4^2u_6-u_1u_5=0,\ u_5^2-u_2u_3=0,\ u_5u_6-u_4^2u_7=0,\\ u_5u_7-u_3u_4^2=0,\ u_6^2-u_1u_7=0,\ u_6u_7-u_1u_3=0,\ u_7^2-u_3u_6=0.\end{aligned}$$

$\mathbb{C}[\mathbb{C}^3]^G$ 的希尔伯特级数为

$$\begin{aligned}&\frac{1-t^{12}-2t^{14}-3t^{16}-2t^{18}+t^{20}+4t^{22}+4t^{24}+4t^{26}+t^{28}-2t^{30}-3t^{32}-2t^{34}-t^{36}+t^{48}}{(1-t^{12})(1-t^{10})(1-t^8)^2(1-t^6)(1-t^4)(1-t^3)}\\&\quad=\frac{1}{24}(1-t)^{-3}+\frac{53}{288}(1-t)^{-1}+\frac{53}{288}+\frac{2017}{3456}(1-t)+\frac{1699}{1728}(1-t)^2+O((t-1)^3).\end{aligned}$$

不变量之间的 Nambu-Poisson 括号为

$$
\begin{aligned}
&\{u_1,u_2,u_3\}=288u_4^3u_7, && \{u_1,u_2,u_4\}=24u_1u_2, && \{u_1,u_2,u_5\}=144u_2u_4u_6,\\
&\{u_1,u_2,u_6\}=96u_1u_4^3, && \{u_1,u_2,u_7\}=192u_4^3u_6, && \{u_1,u_3,u_4\}=-72u_1u_3,\\
&\{u_1,u_3,u_5\}=-144u_4u_6u_3, && \{u_1,u_3,u_6\}=0, && \{u_1,u_3,u_7\}=0,\\
&\{u_1,u_4,u_5\}=24u_1u_5, && \{u_1,u_4,u_6\}=54u_1u_6, && \{u_1,u_4,u_7\}=48u_6^2,\\
&\{u_1,u_4,u_5\}=24u_1u_5, && \{u_1,u_4,u_6\}=54u_1u_6, && \{u_1,u_4,u_7\}=48u_6^2,\\
&\{u_1,u_5,u_6\}=48u_1u_4u_7, && \{u_1,u_5,u_7\}=96u_1u_3u_4, && \{u_1,u_6,u_7\}=0,\\
&\{u_2,u_3,u_4\}=48u_2u_3, && \{u_2,u_3,u_5\}=0, && \{u_2,u_3,u_6\}=192u_4^3u_3,\\
&\{u_2,u_3,u_7\}=96u_4u_5u_3, && \{u_2,u_4,u_5\}=-24u_2u_5, && \{u_2,u_4,u_6\}=0,\\
&\{u_2,u_4,u_7\}=-24u_2u_7, && \{u_2,u_3,u_4\}=48u_2u_3, && \{u_2,u_3,u_5\}=0,\\
&\{u_2,u_3,u_6\}=192u_4^3u_3, && \{u_2,u_3,u_7\}=96u_4u_5u_3, && \{u_2,u_4,u_5\}=0,\\
&\{u_2,u_4,u_6\}=0, && \{u_2,u_4,u_7\}=-24u_4^2u_5, && \{u_2,u_5,u_6\}=96u_4^3u_5,\\
&\{u_2,u_5,u_7\}=48u_4u_2u_3, && \{u_2,u_6,u_7\}=-96u_4^3u_7, && \{u_3,u_4,u_5\}=24u_3u_5,\\
&\{u_3,u_4,u_6\}=-48u_3u_6, && \{u_3,u_4,u_7\}=-24u_7u_3, && \{u_3,u_5,u_6\}=-96u_4u_7u_3,\\
&\{u_3,u_5,u_7\}=-48u_4u_3^2, && \{u_3,u_6,u_7\}=0, && \{u_4,u_5,u_6\}=24u_5u_6,\\
&\{u_4,u_5,u_7\}=24u_7u_5, && \{u_4,u_6,u_7\}=-24u_1u_3, && \{u_5,u_6,u_7\}=-48u_4u_7^2.
\end{aligned}
$$

非零 $Z^{\nu}_{i_1\cdots i_{m-1}\mu}\in S$ 的列表太长，无法在此列出（它们将收录于 AM 即将出版的博士论文中。）

例 2.12. 设 ζ为三次本原单位根，且 $\kappa:=(\frac{-2}{3}\zeta-\frac{1}{3})\zeta$。SL(3, $\mathbb{C}$) 的有限子群 E 的阶为 108（参见例如 [4, 33]），由以下矩阵生成

$$
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\zeta&0\\0&0&\zeta^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\kappa\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\zeta&\zeta^2\\1&\zeta^2&\zeta\end{pmatrix}
$$

为计算 E 的基本不变量，我们使用了 Magma [5]:

$$
\begin{aligned}
u_1=&\,x_1^6-\frac{15}{4}x_1^4x_2x_3-\frac{5}{2}x_1^3x_2^3-\frac{5}{2}x_1^3x_3^3-\frac{45}{4}x_1^2x_2^2x_3^2-\frac{15}{4}x_1x_2^4x_3-\frac{15}{4}x_1x_2x_3^4+x_2^6-\frac{5}{2}x_2^3x_3^3+x_3^6,\\
u_2=&\,x_1^4x_2x_3-2x_1^3x_2^3-2x_1^3x_3^3+3x_1^2x_2^2x_3^2+x_1x_2^4x_3+x_1x_2x_3^4-2x_2^3x_3^3,\\
u_3=&\,x_1^{12}+\frac{33}{61}x_1^{10}x_2x_3+\frac{55}{61}x_1^9x_2^3+\frac{55}{61}x_1^9x_3^3+\frac{1485}{122}x_1^8x_2^2x_3^2+\frac{990}{61}x_1^7x_2^4x_3+\frac{990}{61}x_1^7x_2x_3^4\\
&+\frac{231}{61}x_1^6x_2^6+\frac{4620}{61}x_1^6x_2^3x_3^3+\frac{231}{61}x_1^6x_3^6+\frac{4158}{61}x_1^5x_2^5x_3^2+\frac{4158}{61}x_1^5x_2^2x_3^5+\frac{990}{61}x_1^4x_2^7x_3\\
&+\frac{17325}{122}x_1^4x_2^4x_3^4+\frac{990}{61}x_1^4x_2x_3^7+\frac{55}{61}x_1^3x_2^9+\frac{4620}{61}x_1^3x_2^6x_3^3+\frac{4620}{61}x_1^3x_2^3x_3^6+\frac{55}{61}x_1^3x_3^9\\
&+\frac{1485}{122}x_1^2x_2^8x_3^2+\frac{4158}{61}x_1^2x_2^5x_3^5+\frac{1485}{122}x_1^2x_2^2x_3^8+\frac{33}{61}x_1x_2^{10}x_3\\
&+\frac{990}{61}x_1x_2^7x_3^4+\frac{990}{61}x_1x_2^4x_3^7+\frac{33}{61}x_1x_2x_3^{10}+x_2^{12}+\frac{55}{61}x_2^9x_3^3+\frac{231}{61}x_2^6x_3^6+\frac{55}{61}x_2^3x_3^9+x_3^{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_4 &= x_1^6x_2^3 - x_1^6x_3^3 - x_1^3x_2^6 + x_1^3x_3^6 + x_2^6x_3^3 - x_2^3x_3^6,\\
u_5 &= x_1^{12} + 15x_1^{10}x_2x_3 - \frac{19}{2}x_1^9x_2^3 - \frac{19}{2}x_1^9x_3^3 - 27x_1^8x_2^2x_3^2 + 126x_1^7x_2^4x_3 + 126x_1^7x_2x_3^4 - 21x_1^6x_2^6\\
&\quad - 42x_1^6x_2^3x_3^3 - 21x_1^6x_3^6 + 189x_1^5x_2^5x_3^2 + 189x_1^5x_2^2x_3^5 + 126x_1^4x_2^7x_3 - 315x_1^4x_2^4x_3^4 + 126x_1^4x_2x_3^7 - \frac{19}{2}x_1^3x_2^9\\
&\quad - 42x_1^3x_2^6x_3^3 - 42x_1^3x_2^3x_3^6 - \frac{19}{2}x_1^3x_3^9 - 27x_1^2x_2^8x_3^2 + 189x_1^2x_2^5x_3^5 - 27x_1^2x_2^2x_3^8 + 15x_1x_2^{10}x_3 + 126x_1x_2^7x_3^4\\
&\quad + 126x_1x_2^4x_3^7 + 15x_1x_2x_3^{10} + x_2^{12} - \frac{19}{2}x_2^9x_3^3 - 21x_2^6x_3^6 - \frac{19}{2}x_2^3x_3^9 + x_3^{12}
\end{aligned}
$$

u_1、 u_2、 u_3 是主不变量， u_4、 u_5 是次不变量。我们特别指出，使用著名著作 [33] 中的公式时，我们发现 Nambu-Poisson 括号存在不一致之处。结果发现，所建议的多项式并非 E-不变量。Magma 计算出的不变量看起来不如 [33] 中的结果合理，因此我们提议尝试找出并纠正 [33] 中的错误。

u_1、 u_2、 u_3、 u_4、 u_5之间有 2 个关系。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{251}{42795}u_1^3 + \frac{1813}{19020}u_1^2u_2 + \frac{233}{5072}u_1u_2^2 - \frac{215}{20288}u_2^3 + \frac{61}{4755}u_1u_3 - \frac{427}{11412}u_2u_3 - u_4^2\\
&\quad - \frac{298}{42795}u_1u_5 - \frac{25}{5706}u_2u_5 = 0,\\
&\frac{624939}{38884}u_1^4 - \frac{4063797}{19442}u_1^3u_2 + \frac{173361303}{311072}u_1^2u_2^2 - \frac{24352245}{155536}u_1u_2^3 - \frac{3859344225}{9954304}u_2^4 - \frac{3652497}{38884}u_1^2u_3\\
&\quad + \frac{39974337}{77768}u_1u_2u_3 - \frac{564089265}{622144}u_2^2u_3 + \frac{1101416}{9721}u_3^2 + \frac{604557}{19442}u_1^2u_5 - \frac{968247}{38884}u_1u_2u_5\\
&\quad - \frac{11237535}{311072}u_2^2u_5 - \frac{637084}{9721}u_3u_5 - u_5^2 = 0.
\end{aligned}
$$

$\mathbb{C}[\mathbb{C}^3]^E$ 的希尔伯特级数

$$
\begin{aligned}
&\frac{-t^{18} + t^{15} - t^{12} - t^6 + t^3 - 1}{t^{21} - t^{18} - t^{15} + t^{12} - t^9 + t^6 + t^3 - 1}\\
&\qquad = \frac{1}{108}(1-t)^{-3} + \frac{77}{432}(1-t)^{-1} + \frac{77}{432} + \frac{3305}{5184}(1-t) + \frac{2843}{2592}(t-1)^2 + O((1-t)^3).
\end{aligned}
$$

不变量之间的 Nambu-Poisson 括号由下式给出

$$
\begin{aligned}
\{u_1,u_2,u_3\} &= \frac{32646078}{96685}u_1^2u_4 - \frac{60682689}{154696}u_2^2u_4 - \frac{26142669}{96685}u_1u_2u_4 - \frac{1127952}{1585}u_4u_3 + -\frac{2099736}{96685}u_4u_5,\\
\{u_1,u_2,u_4\} &= -\frac{5318784}{397835}u_2^3 - \frac{5318784}{397835}u_1^2u_2 - \frac{12078558}{397835}u_2^2u_1 + \frac{244}{251}u_1u_3 + \frac{10957491}{397835}u_3u_2 + \frac{59292}{251}u_4^2 - \frac{244}{251}u_5u_1\\
&\quad - \frac{46827}{397835}u_5u_2,\\
\{u_1,u_2,u_5\} &= \frac{1616679}{1585}u_1^2u_4 + \frac{49935771}{5072}u_2^2u_4 - \frac{17693559}{3170}u_1u_2u_4 - \frac{3900096}{1585}u_4u_3 + \frac{1127952}{1585}u_4u_5,\\
\{u_1,u_3,u_4\} &= \frac{5704653954544839}{34647166589696}u_2^4 + \frac{583393415540661}{222009643960}u_4^2u_1 + \frac{3370844600762229}{888038575840}u_4^2u_2 - \frac{46313098056846}{721076405075}u_3^2\\
&\quad + \frac{35345775859857}{87971321419150}u_5^2 - \frac{38462950550026107}{175942642838300}u_1^3u_2 + \frac{40098727953459423}{112603291416512}u_2^3u_1 + \frac{996228877085973}{54136197796400}u_1^2u_2^2\\
&\quad + \frac{42254978197383}{1442152810150}u_1^2u_3 + \frac{309721889613717}{43985660709575}u_1^2u_5 + \frac{1337803306752501}{4614888992480}u_2^2u_3 + \frac{16407160638831}{140754114270640}u_2^2u_5\\
&\quad + \frac{19818481457439}{721076405075}u_3u_5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{u_1,u_3,u_5\} =& \frac{4168091763}{2623}u_4^3 - \frac{231764431599}{1662982}u_4u_1^2u_2 + \frac{5862335877}{831491}u_1^3u_4 - \frac{1039020476247}{13303856}u_1u_2^2u_4\\
&- \frac{403580961}{27262}u_1u_4u_3 + \frac{8975849679}{831491}u_1u_5u_4 + \frac{13679685}{344}u_2u_4u_3 + \frac{64816119}{10492}u_2u_5u_4,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\{u_1,u_4,u_5\} =& -\frac{78709258596411}{283993168768}u_2^4-\frac{33344932297473}{3639502360}u_4^2u_1+\frac{53709428414097}{14558009440}u_4^2u_2+\frac{133245637761888}{721076405075}u_3^2\\ &-\frac{2007185541093}{721076405075}u_5^2+\frac{778650978726243}{1442152810150}u_1^3u_2+\frac{64698475070529}{922977798496}u_2^3u_1+\frac{305810277167223}{443739326200}u_1^2u_2^2\\ &-\frac{70703199320337}{721076405075}u_1^2u_3+\frac{3049960785084}{721076405075}u_1^2u_5-\frac{1728268774206939}{2307444496240}u_2^2u_3-\frac{26696092221207}{576861124060}u_2^2u_4\\ &-\frac{63585213685542}{721076405075}u_3u_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{u_2,u_3,u_4\} =& -\frac{538417725748893}{8661791647424}u_2^4-\frac{17693030982951}{55502410990}u_4^2u_1+\frac{182398791605319}{222009643960}u_4^2u_2+\frac{8958486260744}{721076405075}u_3^2\\ &-\frac{3269241260774}{43985660709575}u_5^2-\frac{714805005662937}{43985660709575}u_1^3u_2-\frac{2466119654894565}{28150822854128}u_2^3u_1+\frac{440504461460457}{13534049449100}u_1^2u_2^2\\ &-\frac{6252201734106}{721076405075}u_1^2u_3+\frac{167553754203012}{43985660709575}u_1^2u_5-\frac{129033380340711}{1153722248120}u_2^2u_3-\frac{54271892078541}{35188528567660}u_2^2u_5\\ &-\frac{5399473263396}{721076405075}u_3u_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{u_2,u_3,u_5\} =& -\frac{2104033968}{13115}u_4^3+\frac{459426514842}{20787275}u_4u_1^2u_2-\frac{34070806764}{20787275}u_1^3u_4-\frac{78712494147}{16629820}u_1u_2^2u_4\\ &+\frac{1396516626}{340775}u_1u_4u_3-\frac{37260114372}{20787275}u_1u_5u_4-\frac{4981257}{430}u_2u_4u_3-\frac{5672349}{13115}u_2u_5u_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{u_2,u_4,u_5\} =& -\frac{8209314781929}{70998292192}u_2^4-\frac{499929903477}{909875590}u_4^2u_1+\frac{38328621975333}{3639502360}u_4^2u_2+\frac{4908094733888}{721076405075}u_3^2\\ &+\frac{1843763564532}{721076405075}u_5^2+\frac{29640453273234}{721076405075}u_1^3u_2-\frac{1211568848961921}{1153722248120}u_2^3u_1-\frac{70172225519283}{110934831550}u_1^2u_2^2\\ &-\frac{443352666012}{721076405075}u_1^2u_3-\frac{583426926816}{721076405075}u_1^2u_5+\frac{65031807400263}{115372224812}u_2^2u_3+\frac{8923712085594}{144215281015}u_2^2u_5\\ &-\frac{5725078705592}{721076405075}u_3u_5\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\{u_3,u_4,u_5\} =& \frac{485779978321461}{2027634505120}u_1^4u_2\frac{22900926901007187}{4446255106048}u_2^4u_1-\frac{309958591431435057}{348753134880640}u_1^3u_2^2\\ &-\frac{121278451779}{4154988740}u_1^3u_3+\frac{441349590708}{63363578285}u_1^3u_5\frac{10414025397434504997}{1395012539522560}u_2^3u_1^2\\ &-\frac{13268693985093}{9111178496}u_2^3u_3-\frac{23455143533331}{69472736032}u_2^3u_5-\frac{256921386165}{91376048}u_1^2u_4^2\\ &-\frac{137654404947315}{1753255168}u_2^2u_4^2-\frac{12800990749149}{33239909920}u_1^2u_2u_3+\frac{43859242350099}{1013817252560}u_1^2u_2u_5\\ &+\frac{9642883594977}{4555589248}u_2^2u_1u_3-\frac{50959799895969}{99246765760}u_2^2u_1u_5+\frac{102809034}{4138435}u_3^2u_1\\ &-\frac{830488221}{8276870}u_3^2u_2-\frac{2644817859}{1009778140}u_5^2u_1-\frac{4283553213}{4039112560}u_5^2u_2.\end{aligned}$$

2.4. 外张量积。这里给出一种简单的构造方法，说明如何由较小的部分组装出一个 Nambu-Poisson 代数。原则上，这种外张量积并不比构成它的各个部分复杂。然而，它提供了大量由卡西米尔元生成的例子，这在寻找非平凡的 Nambu-Poisson 代数例子时颇有帮助。

定理2.13. 设 $(A,\{\ ,\dots,\ \}_k)$ 和 $(B,\{\ ,\dots,\ \}_l)$ 分别是阶数为 k 和 l 的 Nambu-Poisson 代数。则 $\{a_1\otimes 1,\dots,a_k\otimes 1,1\otimes b_1,\dots,1\otimes b_l\}_{k+l}:=\{a_1,\dots,a_k\}_k\otimes\{b_1,\dots,b_l\}_l$ 唯一确定 $A\otimes B$ 上的 Nambu-Poisson 括号。这里约定，若 $i\neq k$ 和 $j\neq l$，则 $\{a_1\otimes 1,\dots,a_i\otimes 1,1\otimes b_1,\dots,1\otimes b_j\}_{k+l}=0$。

证明. 假设 a_1、……、 $a_k \in A$ 和 b_1、……、 $b_l \in B$， $n := k+l$。记 $a_i \otimes b_i = (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i)$，并反复应用莱布尼茨法则，我们得到

$$\begin{aligned}&\{a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n\}_n \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k,l}^{-1}} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(k+l)} \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)}\}_k \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k)} \{b_{\sigma(k+1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}\}_l.\end{aligned}$$

注意到 $\{a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n\}_n$ 是全反对称的。现在假设 $a_n = a'a''$ 和 $b_n = b'b''$，使得 $a_n \otimes b_n = a'a'' \otimes b'b'' = (a' \otimes b')(a'' \otimes b'')$。为验证一般的莱布尼茨法则，我们计算

$$\begin{aligned}&\{a_1 \otimes b_1, \ldots, a_{n-1} \otimes b_{n-1}, a'a'' \otimes b'b''\}_n \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k,l}^{-1}, \sigma(k)=n} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(k+l)} \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)}, a'a''\}_k \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k-1)} b'b'' \{b_{\sigma(k+1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}\}_l \\ &+ \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k,l}^{-1}, \sigma(n)=n} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(n-1)} a'a'' \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)}\}_k \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k)} \{b_{\sigma(k+1)}, \ldots, b_{\sigma(n-1)} b'b''\}_l \\ &= a' \otimes b' \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k,l}^{-1}, \sigma(k)=n} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(k+l)} \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)}, a''\}_k \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k-1)} b'' \{b_{\sigma(k+1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}\}_l \\ &+ a'' \otimes b'' \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k,l}^{-1}, \sigma(k)=n} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(k+l)} \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)}, a'\}_k \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k-1)} b' \{b_{\sigma(k+1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}\}_l \\ &+ a'' \otimes b'' \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k,l}^{-1}, \sigma(n)=n} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(n-1)} a' \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)}\}_k \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k)} \{b_{\sigma(k+1)}, \ldots, b_{\sigma(n-1)} b'\}_l \\ &+ a' \otimes b' \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k,l}^{-1}, \sigma(n)=n} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(n-1)} a'' \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)}\}_k \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(k)} \{b_{\sigma(k+1)}, \ldots, b_{\sigma(n-1)} b''\}_l \\ &= (a' \otimes b') \{a_1 \otimes b_1, \ldots, a_{n-1} \otimes b_{n-1}, a'' \otimes b''\}_n + (a'' \otimes b'') \{a_1 \otimes b_1, \ldots, a_{n-1} \otimes b_{n-1}, a' \otimes b'\}_n.\end{aligned}$$

还需证明 $A \otimes B$ 的生成元满足基本恒等式。我们考虑形如 $a_i \otimes 1$、 $1 \otimes b_j$、 $\tilde{a}_i \otimes 1$、 $1 \otimes b_m \in A \otimes B$ 的元素，其中 $i \in \{1, \ldots, k\}$、 $j \in \{1, \ldots, l\}$ 和 $m \in \{1, \ldots, l-1\}$。

$$\begin{aligned}&\{a_1 \otimes 1, \ldots, a_k \otimes 1, 1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_{l-1}, \{\tilde{a}_1 \otimes 1, \ldots, \tilde{a}_k \otimes 1, 1 \otimes \tilde{b}_1, \ldots, 1 \otimes \tilde{b}_l\}_n\}_n \\ &\quad = \{a_1 \otimes 1, \ldots, a_k \otimes 1, 1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_{l-1}, \{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k\}_k \otimes \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_l\}_l\}_n \\ &\quad = \{a_1 \otimes 1, \ldots, a_k \otimes 1, 1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_{l-1}, \{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k\}_k \otimes 1\}_n \left(1 \otimes \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_l\}_l\right) \\ &\qquad + (\{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k\}_k \otimes 1) \{a_1 \otimes 1, \ldots, a_k \otimes 1, 1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_{l-1}, 1 \otimes \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_l\}_l\}_n \\ &\quad = \{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k\}_k \{a_1, \ldots, a_k\}_k \otimes \{b_1, \ldots, b_{l-1}, \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_l\}_l\}_l,\end{aligned}$$

其中第二个等式的第一项因元数不正确而为零。现在，利用 $\{\,,\ldots,\,\}_l$ 的基本恒等式，可得

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{l}\{\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_k\}_k\{a_1,\ldots,a_k\}_k\otimes\{\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_{i-1},\{b_1,\ldots,b_{l-1},\tilde{b}_i\}_l,\tilde{b}_{i+1},...,\tilde{b}_l\}_l\\
&=(\{a_1,\ldots,a_k\}_k\otimes 1)\sum_{i=1}^{l}\{\tilde{a}_1\otimes 1,\ldots,\tilde{a}_k\otimes 1,1\otimes\tilde{b}_1,\ldots,1\otimes\tilde{b}_{i-1},1\otimes\{b_1,\ldots,b_{l-1},\tilde{b}_i\}_l,1\otimes\tilde{b}_{i+1},...,1\otimes\tilde{b}_l\}_n\\
&=\sum_{i=1}^{l}\{\tilde{a}_1\otimes 1,\ldots,\tilde{a}_k\otimes 1,1\otimes\tilde{b}_1,\ldots,1\otimes\tilde{b}_{i-1},\{a_1,\ldots,a_k\}_k\otimes\{b_1,\ldots,b_{l-1},\tilde{b}_i\}_l,1\otimes\tilde{b}_{i+1},...,1\otimes\tilde{b}_l\}_n\\
&=\sum_{i=1}^{l}\{\tilde{a}_1\otimes 1,\ldots,\tilde{a}_k\otimes 1,1\otimes\tilde{b}_1,\ldots,1\otimes\tilde{b}_{i-1},\{a_1\otimes 1,\ldots,a_k\otimes 1,1\otimes b_1,\ldots,1\otimes b_{l-1},1\otimes\tilde{b}_i\}_n,\\
&\qquad\qquad 1\otimes\tilde{b}_{i+1},...,1\otimes\tilde{b}_l\}_n\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}\{\tilde{a}_1\otimes 1,\ldots,\tilde{a}_{i-1}\otimes 1,\{a_1\otimes 1,\ldots,a_k\otimes 1,1\otimes b_1,\ldots,1\otimes b_{l-1},1\otimes\tilde{b}_i\}_n,a_{i+1}\otimes 1,\ldots,\tilde{a}_k\otimes 1,\\
&\qquad\qquad 1\otimes\tilde{b}_1,\ldots,1\otimes\tilde{b}_l\}_n,
\end{aligned}
$$

˜其中，第四个等号和最后一个等号成立，是因为对于所有 i，$\{\tilde{a}_1\otimes 1,\ldots,\tilde{a}_k\otimes 1,1\otimes b_1,\ldots,1\otimes b_{i-1},\{a_1,\ldots,a_k\}\otimes 1$、$1\otimes b_{i+1}$、...、$1\otimes b_l\}1\otimes\{b_1,\ldots,b_{l-1},b_i\}$ 和 $\{\tilde{a}_1\otimes 1,\ldots,\tilde{a}_{i-1}\otimes 1,\{a_1\otimes 1,\ldots,a_k\otimes$˜ ˜ ˜ ˜ ˜ ˜1、$1\otimes b_1$、...、$1\otimes b_{l-1}$、$1\otimes b_i\}$、$a_{i+1}\otimes 1$、...、$\tilde{a}_k\otimes 1$、$1\otimes b_1$、...、$1\otimes b_l\}$ 的元数都是错误的。

同样，我们可以证明关于 $\{a_1\otimes 1,\ldots,a_k\otimes 1,\tilde{a}_j\otimes 1,k\}$ 和 $\{\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_{i-1},\{b_1\otimes 1,\ldots,b_{l-1}\otimes 1,\tilde{b}_i\}_l,\tilde{b}_{i+1},\ldots,\tilde{b}_l\}$ 的恒等式。□˜

我们将 $(A\otimes B,\{\,,\ldots,\,\}_{k+l})$ 称为 $(A,\{\,,\ldots,\,\}_k)$ 和 $(B,\{\,,\ldots,\,\}_l)$ 的外张量积。

推论 2.14. 若仿射 Nambu-Poisson 代数 $(A,\{\,,\ldots,\,\}_k)$ 和 $(B,\{\,,\ldots,\,\}_l)$ 由卡西米尔元生成，则它们的外张量积 $(A\otimes B,\{\,,\ldots,\,\}_{k+l})$ 也具有同样的性质。

由此可知，对于任意有限子群 $G\subseteq\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\ldots\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\subseteq\mathrm{SL}(2l,\mathbb{C})$ 的不变环，Z's 都为零，其中我们取了 l 个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的副本。对于这些不变环与推论 2.6 中的 Nambu-Poisson 代数作外张量积，结论同样成立。

3. Maurer-Cartan equation

本节中，m 是一个偶正整数，$S=\boldsymbol{k}[x_1,x_2,...,x_n]$ 是多项式代数，而 $\{\,,...,\,\}$ 是 S 上元数为 m 的 Nambu-Poisson 括号。

S-模 K¨ahler 微分 $\Omega^{S|\boldsymbol{k}}$ 是一个自由 S-模，与 S-模的 $\boldsymbol{k}$-线性导子模 $\mathrm{Der}(S):=\{X\colon S\to S|X(fg)=fX(g)+gX(f)\}$ 对偶。此结论可推广为同构 $\bigwedge^j\mathrm{Der}(S)\cong\mathrm{Alt}_S^j(\Omega^{S|\boldsymbol{k}},S)$，将 $\mathrm{Der}(S)$ 的 j 次 S- 线性外幂与从 $\Omega^{S|\boldsymbol{k}}$ 到 S 的交替 j-多重线性映射对应起来。

回顾一下，$\bigwedge\mathrm{Der}(S)$ 关于所谓的 Schouten 括号 $[\![\,,\,]\!]$（例如参见 [32]）构成一个 Gerstenhaber 代数。这意味着

(1) $XY=(-1)^{|X||Y|}YX$, (2) $[\![X,Y]\!]=-(-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)}[\![Y,X]\!]$, (3) $[\![X,YZ]\!]=[\![X,Y]\!]Z+(-1)^{|Y|(|X|-1)}Y[\![X,Z]\!]$, (4) $[\![X,[\![Y,Z]\!]]\!]=[\![[\![X,Y]\!],Z]\!]+(-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)}[\![Y,[\![X,Z]\!]]\!]$,

其中 $X\in\bigwedge^{|X|}\mathrm{Der}(S)$、$Y\in\bigwedge^{|Y|}\mathrm{Der}(S)$ 和 $Z\in\bigwedge^{|Z|}\mathrm{Der}(S)$。事实上，$[\![\,,\,]\!]$ 是满足这些公理且其在 $\mathrm{Der}(S)=\bigwedge^1\mathrm{Der}(S)$ 上的限制为交换子的唯一括号。Schouten 括号有一个坐标公式（见 [7, p.541]），我们发现它便于处理当前问题。这里令 $\xi^i:=\partial/\partial x_i[-1]$，并将 $\bigwedge^n\mathrm{Der}(S)=S[\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^n]$ 视为.....（后者是在 $\mathbb{Z}$-分次张量范畴中解释的

向量空间）　并注意到这是一个代数同构，因为 Der(S) 集中在 0 度。

$$[\![X,Y]\!]=\sum_{l=1}^{m}\left(X\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi^l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_l}Y-X\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi^l}Y\right),$$

其中，$\overleftarrow{\partial_{x_l}}:=\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_l}$, $\overleftarrow{\partial_{\xi^l}}:=\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi^l}$是左导数，而 $\overrightarrow{\partial_{x_l}}:=\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_l}$, $\overrightarrow{\partial_{\xi^l}}:=\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi^l}$是关于坐标 x_l 和 ξ^l的右导数。

根据 [29]，Nambu-Poisson 张量 $\Pi\in\bigwedge^m\mathrm{Der}(S)$，即满足 $\Pi(\mathrm{d}f_1,\dots,\mathrm{d}f_m)=\{f_1,\dots,f_m\}$ 的唯一张量，其中 $f_1,\dots,f_m\in S$满足 $[\![\Pi,\Pi]\!]=0$。通常，当 m 为奇数时，这一结论不成立。Nambu-Poisson 上同调的微分 $\delta_{\mathrm{Nambu}}\colon\ \bigwedge^\bullet\mathrm{Der}(S)\ \to\ \bigwedge^{\bullet+m-1}\mathrm{Der}(S)$由公式$\delta_{\mathrm{Nambu}}:=[\![\Pi,\ ]\!]$定义。

命题 3.1。对于 $Y\in\bigwedge^{|Y|}\mathrm{Der}(S)$，我们有

$$\begin{aligned}(3.1)\quad&(\delta_{\mathrm{Nambu}}Y)(\mathrm{d}f_1,\dots,\mathrm{d}f_{m+|Y|-1})\\&=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}^{-1}_{m-1,|Y|}}(-1)^{|\sigma|}X_{f_{\sigma(1)},\dots,f_{\sigma(m-1)}}\left(Y\left(\mathrm{d}f_{\sigma(m)},\dots,\mathrm{d}f_{\sigma(m+|Y|-1)}\right)\right)\\&\qquad-\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}^{-1}_{m,|Y|-1}}(-1)^{|\sigma|}Y\left(\mathrm{d}\{f_{\sigma(1)},\dots,f_{\sigma(m)}\},\mathrm{d}f_{\sigma(m+1)},\dots,\mathrm{d}f_{\sigma(m+|Y|-1)}\right)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}f_1,\dots,\ \mathrm{d}f_{m+|Y|-1}\in\Omega^{S|\boldsymbol{k}}$。该公式可通过 A-线性性推广到 $\Omega^{S|\boldsymbol{k}}$ 中的任意元素。

证明。我们采用爱因斯坦求和约定以及以下简写记号。在 $(i_1,\dots,i_m)$ 的 Σ_m-轨道$\Sigma_m(i_1,\dots,i_m)$ 中，$\in\{1,\dots,n\}^m$ 存在一个由两两不同的 $i_1,\dots,i_m$ 构成的唯一全序 $(i'_1,\dots,i'_m)$。记作 $I=\{i'_1,\dots,i'_m\}$。换言之，I是 $\{1,\dots,n\}$ 的一个基数为 m 的全序子集。由此，例如可写为

$$\frac{\Pi_{i_1\dots i_m}}{m!}\xi^{i_1}\cdots\xi^{i_m}=\Pi_I\xi^I,$$

其中，右端也按求和约定理解，即对重复指标求和 I。

只需证明 $f_s=x_{j_s}$的单位元，其中 $s=1$、.....、$m+|Y|-1$ 和 $J=\{j_1,\dots,j_{m+|Y|-1}\}$ 构成一个有序集合。

$$\begin{aligned}&\frac{\Pi_{i_1\dots i_m}}{m!}\xi^{i_1}\cdots\xi^{i_m}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi^j}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_j}Y_L\xi^L(\mathrm{d}x_{j_1},\dots,\mathrm{d}x_{j_{m+|X|-1}})\\&=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{m-r}\frac{\Pi_{i_1\dots i_m}}{m!}\xi^{i_1}\cdots\widehat{\xi^{i_r}}\cdots\xi^{i_m}\frac{\partial Y_L}{\partial x_{i_r}}\xi^L(\mathrm{d}x_{j_1},\dots,\mathrm{d}x_{j_{m+|X|-1}})=\sum_{\substack{I\sqcup L=J,\\|I|=m-1}}(-1)^{|\{i\in I,l\in L|i>l\}|}X_I(Y_L),\end{aligned}$$

这对应于方程（3.1）中的第一项。另一方面，

$$\begin{aligned}&\frac{\Pi_{i_1\dots i_m}}{m!}\xi^{i_1}\cdots\xi^{i_m}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_j}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi^j}Y_L\xi^L(\mathrm{d}x_{j_1},\dots,\mathrm{d}x_{j_{m+|X|-1}})\\&=\sum_{r=1}^{|Y|}(-1)^{r-1}\frac{\partial\Pi_I}{\partial x_{l_r}}\frac{Y_{l_1\dots l_{|Y|}}}{|Y|!}\xi^I\xi^{l_1}\cdots\widehat{\xi^{l_r}}\cdots\xi^{l_{|Y|}}(\mathrm{d}x_{j_1},\dots,\mathrm{d}x_{j_{m+|X|-1}})\\&=\sum_{\substack{I\sqcup K=J,\ L=\{l\}\sqcup K,\\|I|=m}}(-1)^{|\{i\in I,l\in L|i>l\}|}(-1)^{|\{k\in K|k<l\}|}\ \frac{\partial\Pi_I}{\partial x_l}Y_L,\end{aligned}$$

这与方程（3.1）中的第二项相对应。 □

本节旨在将张量 $Z^\nu_{i_1\cdots i_{m-1}\mu}\in S$ （见 (1.5)）解释为适当的 Maurer-Cartan 方程的解。所需微分分次李代数的底层空间定义为$\mathfrak{N}:=\bigoplus_{i\geq0}\bigwedge^{i(m-1)}\mathrm{Der}(S)\otimes_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{gl}_k$其中我们令 $\mathfrak{N}^i:=\bigwedge^{i(m-1)}\mathrm{Der}(S)\otimes_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{gl}_k$。注意，$\bigoplus_{i\geq0}\mathfrak{N}^i$ 关于超交换乘积构成 $\bigwedge$Der(S)的一个子代数。我们可以将这个超交换

代数 $\bigoplus_{i\geq 0}\bigwedge^{i(m-1)}\mathrm{Der}(S)$ 与李代数 $\mathfrak{gl}_k$ 张量化，从而在 $\mathfrak{N}$上得到一个超李括号。此外，我们定义 $\delta_{\mathrm{Nambu}}:=[\![\Pi,]\!]\otimes\mathrm{id}:\ \mathfrak{N}^\bullet\to\mathfrak{N}^{\bullet+1}$，其中 Π是偶纳姆布–Poisson 张量，而 $[\![,]\!]$是 Schouten 括号。由此得到微分分次李代数 $\left(\mathfrak{N}=\oplus_{i\geq 0}\mathfrak{N}^i,\delta_{\mathrm{Nambu}},[\ ,\ ]\right)$。为了指代 Z张量（见 (1.5)），我们还采用以下记号

$$
\begin{aligned}
Z_{j_1\cdots j_{m-1}} &= \left(Z^{\nu}_{j_1\cdots j_{m-1}\mu}\right)_{\mu,\nu=1,\ldots k}\in\mathfrak{gl}_k(S)=S\otimes_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{gl}_k,\\
Z &= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}}\frac{Z^{\nu}_{j_1\cdots j_{m-1}\mu}}{(m-1)!}\xi^{j_1}\cdots\xi^{j_{m-1}}\right)_{\mu,\nu=1,\ldots k}\in\mathfrak{N}^1,\\
Z^{\nu}_{\mu} &= \sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}}\frac{Z^{\nu}_{j_1\cdots j_{m-1}\mu}}{(m-1)!}\xi^{j_1}\cdots\xi^{j_{m-1}}\in\bigwedge^{m-1}\mathrm{Der}(S).
\end{aligned}
$$

哈密顿导子 $\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)$ 的 A-模是 Nambu 导子 A-模的一个 A-子模

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Der}^{\mathrm{Nambu}}:=\{X\in\mathrm{Der}(A)\ \mid\ X(\{a_1,a_2,\ldots,a_m\})&=\{X(a_1),a_2,\ldots,a_m\}+\{a_1,X(a_2),\ldots,a_m\}+\\
&\cdots+\{a_1,a_2,\ldots,X(a_m)\}\ \forall a_1,a_2,\ldots,a_m\in A\}.
\end{aligned}
$$

显然，$(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)\ A)$ 构成 $(\mathrm{Der}^{\mathrm{Nambu}}(A)\ A)$ 的一个子 Lie-Rinehart 代数。显然，与 Poisson 情形 $m=2$ 相比，对于 $m>2$，A-模 $\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)$ 和 $\mathrm{Der}^{\mathrm{Nambu}}(A)$ 并不属于 $\bigoplus_{i\geq 0}\bigwedge^{i(m-1)}\mathrm{Der}(A)$，也无法与 Nambu 上同调直接关联。

定理 3.2. 设 m 为偶数。将生成元写成列向量 $\vec{f}=(f_1,\ldots,f_k)^T$，则有 $(\delta_{\mathrm{Nambu}}Z-[Z,Z])\vec{f}\in I^2\mathfrak{N}$。

证明。该证明是下一节定理 4.2 和 4.3 的推论。 □

4. The flat Nambu connection on the conormal module

设 $(A,\{\ ,\ldots,\ \})$ 是一个 Nambu-Poisson 代数，V 是一个 A-模。设 $B:=\mathsf{S}_A(V)/\ker(\epsilon)^2,$，其中 $\epsilon:\mathsf{S}_A(V)\to A$ 是增广。V 上的 Nambu 模结构是指 B 上一种扩展 $A\subseteq B$ 的 Nambu-Poisson 代数结构，使得对于 $V\subseteq B$，有 $\{B,\ldots,B,V,V\}=0$。这归结为一个运算 $\{\ ,\ldots,\ \}:A\times\cdots\times A\times V\to V$，满足显然的公理。

定义 4.1. 设 $(A=S/I,\{\ ,\ldots,\ \})$ 是一个元数为 m 的仿射 Nambu-Poisson 代数。我们将 A-模 V 上的 Nambu 连接定义为一个映射

$$
\nabla:V\to\mathrm{Hom}_A\left(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A),A\right)\otimes_A V,\qquad v\mapsto(X\mapsto\nabla_X v)
$$

满足

(1) $\nabla_X(av)=a\nabla_X(v)+X(a)v$,

(2) $[\nabla_{X_{i_1\cdots i_{m-1}}},\nabla_{X_{j_1\cdots j_{m-1}}}]v=\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{\partial\Pi_{i_1\ldots i_{m-1}j_l}}{\partial x_r}\nabla_{X_{j_1\ldots r\ldots j_{m-1}}}v$

对于所有 $a\in A$、$v\in V$ 以及 $X\in\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)$。其曲率是指映射

$$
(X,Y)\mapsto\mathcal{R}_{X,Y}:=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]},
$$

其中 $X,Y\in\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)$。经过标准计算可知，该映射实际上是一个元素 $\mathcal{R}$ in $\mathrm{Alt}^2_A\left(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)\ A\right)\otimes_A\mathrm{End}_A(V)$。若 $\mathcal{R}=0$，则称连接 ∇ 为平坦的。

定理 4.2. 设 $(A=S/I,\{\ ,\ldots,\ \})$ 是一个仿射 Nambu-Poisson 代数。V 上关于 $(A,\{\ ,\ldots,\ \})$ 的 Nambu 模结构，无非就是 A-模 V 上的一个平坦 Nambu 连接。

证明。设 V是 $(A,\{\ ,\ldots,\ \})$ 上的一个 Nambu 模。我们定义 $\nabla_{X_{i_1\cdots i_{m-1}}}v:=\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{m-1}},v\}$。Nambu-Poisson 代数 $B=\mathsf{S}_A(V)/\ker(\epsilon)^2$ 的定义 1.1(1) 中的莱布尼茨法则表明恒等式 (1) 成立。由 $B=\mathsf{S}_A(V)/\ker(\epsilon)^2$ 的基本恒等式可得

$$
\nabla_{X_{i_1\ldots i_{m-1}}}\{x_{j_1},\ldots,x_{j_{m-1}},v\}=\{x_{j_1},\ldots,x_{j_{m-1}},\nabla_{X_{i_1\ldots i_{m-1}}}v\}+\sum_l\{x_{j_1},\ldots,X_{i_1\ldots i_{m-1}}(x_{j_l}),\ldots x_{j_{m-1}},v\},
$$

这证明了 (2)。根据以下计算

$$[\nabla_{X_{i_1\dots i_{m-1}}},\nabla_{X_{j_1\dots j_{m-1}}}]v=\{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}},\{x_{j_1},\dots,x_{j_{m-1}},v\}\}-\{x_{j_1},\dots,x_{j_{m-1}},\{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}},v\}\}$$
$$=[X_{i_1\dots i_{m-1}},X_{j_1\dots j_{m-1}}](v)=\nabla_{[X_{i_1\dots i_{m-1}},X_{j_1\dots j_{m-1}}]}v$$

我们得出结论：∇ 是平坦的。

反过来，假设 ∇是一个平坦 Nambu 连接，并令 $\{x_{i_1},\dots,x_{i_{m-1}},v\}:=\nabla_{X_{i_1\dots i_{m-1}}}v$。由平坦性可知，$B$ 上的括号扩展了 $A\subseteq B$上的括号。定义 4.1 中的恒等式 (1) 表明括号 $\{\ ,\dots,\ \}$满足莱布尼茨法则，而 (2) 则表明其满足基本恒等式。□

在 $A=S/I$ 上的一个 Nambu 模的例子是余法模 I/I^2，其中 I 是一个 Nambu-Poisson 理想。若 $I=(f_1,\dots,f_k)\subseteq S=\boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_n]$ 是一个 Nambu-Poisson 理想，则 I 和 I^2 在 $\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)$ 的作用下保持不变。与该 Nambu 模相对应的平坦 Nambu 连接为

$$\nabla_{X_{i_1\dots i_{m-1}}}(f_\mu+I^2)=X_{i_1\dots i_{m-1}}(f_\mu)+I^2=\sum_\nu Z^\nu_{i_1\dots i_{m-1}\mu}f_\nu+I^2.$$

我们将 ∇ 称为由 $Z^\nu_{i_1\dots i_{m-1}\mu}$ 定义的平坦 Nambu 连接。专家也将 $Z^\nu_{i_1\dots i_{m-1}\mu}$ 称为该连接的 Nambuffel 符号。连接 ∇ 也可以理解为 Bott 连接 $\nabla^B\colon I/I^2\to\Omega_{A|\boldsymbol{k}}\otimes_A I/I^2$ 在 $\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)$ 上的限制（见 [12]）。

定理 4.3. 设 Nambu-Poisson 括号 $\{\ ,\dots,\ \}$在 $A=S/I$上的元数 m为偶数，且令∇ 为由 $Z^\nu_{i_1\dots i_{m-1}\mu}$ 定义的平坦 Nambu 连接。对于 ∇ 的曲率 $\mathcal{R}$，有 $\mathcal{R}v=(\delta_{\mathrm{Nambu}}Z-[Z,Z])v$，其中 $v=\sum_\mu v^\mu f_\mu+I^2\in I/I^2$。

证明. 我们计算

$$\nabla_{X_{i_1\dots i_{m-1}}}\nabla_{X_{j_1\dots j_{m-1}}}(f_\mu+I^2)=X_{i_1\dots i_{m-1}}\left(Z^\nu_{j_1\dots j_{m-1}\mu}f_\nu\right)+I^2$$
$$=X_{i_1\dots i_{m-1}}\left(Z^\nu_{j_1\dots j_{m-1}\mu}\right)f_\nu+Z^\nu_{j_1\dots j_{m-1}\mu}Z^\lambda_{i_1\dots i_{m-1}\nu}f_\lambda+I^2$$

并利用定义 4.1 的性质 (2) 计算 $\nabla_{[X_{i_1\dots i_{m-1}},X_{j_1\dots j_{m-1}}]}(f_\mu+I^2)=\sum_{r=1}^n\sum_{l=1}^{m-1}\frac{\partial\Pi_{i_1\dots i_{m-1}j_l}}{\partial x_r}Z^\nu_{j_1\dots r\dots j_{m-1}\mu}f_\nu+I^2$。合并这些项后，我们得到

$$([\nabla_{X_{i_1\dots i_{m-1}}},\nabla_{X_{j_1\dots j_{m-1}}}]-\nabla_{[X_{i_1\dots i_{m-1}},X_{j_1\dots j_{m-1}}]})(f_\mu+I^2)$$
$$=\Bigg(X_{i_1\dots i_{m-1}}\left(Z^\nu_{j_1\dots j_{m-1}\mu}\right)-X_{j_1\dots j_{m-1}}\left(Z^\nu_{i_1\dots i_{m-1}\mu}\right)-\sum_{r=1}^n\sum_{l=1}^{m-1}\frac{\partial\Pi_{i_1\dots i_{m-1}j_l}}{\partial x_r}Z^\nu_{j_1\dots r\dots j_{m-1}\mu}$$
$$-[Z_{i_1\dots i_{m-1}},Z_{j_1\dots j_{m-1}}]^\nu_\mu\Bigg)f_\nu+I^2.$$

根据命题 3.1，这不过就是 $(\delta_{\mathrm{Nambu}}Z-[Z,Z])v$。□

更一般地，Nambu 连接在加上一个 $\omega\in\mathrm{Hom}_A\left(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)\ A\right)$ 后唯一。也就是说，任何其他 Nambu 连接都具有如下形式

$$\nabla^\omega_Y=\nabla_Y+\omega(Y)\text{ for }Y\in\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A).$$

例如，这可以只是形式 $\Omega\in\Omega^{A|\boldsymbol{k}}$ 的限制。曲率

$$\mathcal{R}^\omega\in\mathrm{Alt}^2_A\left(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A),A\right)\otimes_A I/I^2$$

∇^ω 的形式由公式给出

$$(Y,Y')\mapsto\mathcal{R}^\omega_{YY'}=[\nabla_Y+\omega(Y),\nabla_{Y'}+\omega(Y')]-\nabla_{[Y,Y']}+\omega([Y,Y'])=(d_{LR}\omega)(Y,Y').\tag{4.1}$$

其中 $d_{LR}\colon\mathrm{Alt}^\bullet\left(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)\ A\right)\to\mathrm{Alt}^{\bullet+1}\left(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)\ A\right)$是李-林哈特代数 $\left(\mathrm{Der}^{\mathrm{Hambu}}(A)\ A\right)$ 的德拉姆微分（参见 [25]）。

若 ω 是 $\Omega\in\Omega^{A|\boldsymbol{k}}$ 的限制，则

$$(d_{LR}\omega)(Y,Y')=\mathrm{d}\tilde{\Omega}\left(\tilde{Y},\widetilde{Y'}\right)+I,\tag{4.2}$$

˜ ˜ ˜

d´ecalage 同构在我们稍作推广的设定中同样成立。在 ΠL 上，次数为 μ 的 Γ 分次 ΠL_∞ 代数结构，等价于在 L 上次数为 $\mu+\delta$ 的 Γ 分次 L_∞ 代数结构，只需令

$$[x_1,\dots,x_n]_n=(-1)^{\sum_{i=1}^n(n-i)|x_i|}\Pi^{-1}(l_n(\Pi x_1,\dots,\Pi x_n)) \tag{5.3}$$

对于齐次的 $x_1,\dots,x_n\in L$。原因在于，相关的代数恒等式仅取决于 $\mathbb{Z}_2$ 分次，而 Γ 次数则已得到处理。

定理 5.3（ [30] 的高阶导出括号）。设 $\mathfrak{G}$ 是 $\boldsymbol{k}$ 上带有阿贝尔子代数 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{G}$ 的 Γ 分次李代数，并设 $\varepsilon\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{G})$，$\varepsilon^2=\varepsilon$ 和 $\varepsilon(\mathfrak{G})\subseteq\mathfrak{A}$ 满足对所有 $X,Y\in\mathfrak{G}$ 均有 $\varepsilon[X,Y]=\varepsilon[\varepsilon X,Y]+\varepsilon[X,\varepsilon Y]$。此外，设 $\Delta\in\mathfrak{G}$ 的次数为 μ，且满足 $|\mu|=\overline{1}$ 和 $[\Delta,\Delta]=0$。那么

$$l_n(X_1,\dots,X_n):=\varepsilon[\dots[[\Delta,X_1],X_2],\dots,X_n] \tag{5.4}$$

对于 $X_1,\dots,X_n\in\mathfrak{G}$，定义了 $\mathfrak{A}$ 上次数为 μ 的 Γ 分次 ΠL_∞ 代数结构。

证明。 [30] 中的相关计算仅取决于 $\mathbb{Z}_2$-分次。显然， Δ的次数 μ 与 l_n的次数相同。□

定义 5.4. 对于次数为 ν、带有括号$[\,,\dots,\,]_n$：$\bigwedge^n L\to L$, $n\geq 1$的 Γ-分次 L_∞-代数 L，我们称一个对象 $M=\oplus_{\gamma\in\Gamma}M_\gamma$属于 $\mathbf{Mod}^\Gamma_{\boldsymbol{k}}$，且配有一列次数为 $|\rho_n|=\nu-n\delta$ 的运算ρ_n：$\bigwedge^{n-1}L\otimes M\to M$, $n\geq 2$，若对每个 $n\geq 1$

$$\sum_{p+q=n+1}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}^{-1}_{q,p-1}}(-1)^\sigma\varepsilon(\sigma,\boldsymbol{x})(-1)^{q(p-1)}k_p(k_q(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(q)}),x_{\sigma(q+1)},\dots,x_{\sigma(n)})=0 \tag{5.5}$$

对于 $x_1,\dots,x_{n-1}\in L$ 和 $x_n\in M$，其中 k_n：$\bigwedge^n(L\oplus M)\to M$, $n\geq 1$是运算 $[\,,\dots,\,]_n$ 和 ρ_n 的唯一扩张，并且当两个或更多个自变量来自 M 时， k_n为零。

注意，带有次数为 1 的 $\delta=1$ 的 Γ-分次左 L_∞-模 $\mathbb{Z}$-分次 ΠL_∞-代数 L，不过就是一个 over L 的 L_∞-模。

定义 5.5. 所谓 Spec(A) 上的 Γ-分次 L_∞-代数丛，是指一个带有括号 $([\,,\dots,\,]_n)_{n\geq 1}$ 的 Γ-分次 L_∞-代数 $L=\oplus_{\gamma\in\Gamma}L_\gamma$，其中每个 L_γ 都是投射 A-模，并配备运算 $\rho_n\in\bigwedge^{n-1}_A L\otimes_{\boldsymbol{k}}A\to A$, $n\geq 2$，使得 A 成为 L 上的左 L_∞-模，并满足以下性质

(1) $\partial:=[\,]_1$ 是 A-线性的；(2) 对所有 $n\geq 2$ 和齐次的 x_1，.....，$x_s\in L$ 以及 $a,b\in A$，我们有

$$\begin{aligned}
&[x_1,\dots,x_{n-1},ax_n]_n=\rho_n(x_1,\dots,x_{n-1},a)x_n+a[x_1,\dots,x_{n-1},x_n]_n,\\
&\rho_n(x_1,\dots,x_{n-1},ab)=\rho_n(x_1,\dots,x_{n-1},a)b+a\rho_n(x_1,\cdots,x_{n-1},b),\\
&\rho_n(ax_1,\dots,x_{n-1},b)=a\rho_n(x_1,\dots,x_{n-1},b).
\end{aligned}$$

我们将运算族 $(\rho_n)_{n\geq 2}$ 称为高阶锚。

在特殊情形下，当对所有 $n\neq m$ 都有 $\rho_n=0$ 时，我们称 L 为 Spec(A) 上带有 m 元锚的 Γ 分次 L_∞ 代数胚。

与 [13] 不同，我们不假设 L_γ 是有限生成的。这是因为当 $\Gamma=\mathbb{Z}_2$ 时，我们的主要例子不具有这一性质。

注 5.6. 若 $\Gamma=\mathbb{Z}$，且 L 上的分次非正，则 Spec(A) 上带有次数为 2 的 $\delta=1$ 的 Γ 分次 L_∞ 代数胚自动具有二元锚。这一观察在 [13] 中被遗漏了。该文构造的余切复形上的 L_∞ 代数胚没有高阶锚。原因是，$\rho_n(x_1,\dots,x_{n-1},a)$ 的次数等于 $2-n+\sum_i|x_i|$，当 $n>2$ 时不可能为零。

定义 5.7. 次数为 ν 的 Γ 分次 P_∞ 代数，是幺半范畴 $\mathbf{Mod}^\Gamma_A$ 中的一个交换代数 $R=\oplus_{\gamma\in\Gamma}R_\gamma$，满足每个 R_γ 都是一个射影 A 模，同时也是一个次数为ν、带有括号 $\{\,,\dots,\,\}_n$：$\bigwedge^n R\to R$ 的 Γ 分次 L_∞ 代数，并满足莱布尼茨法则

$$\{ab,a_2,\dots,a_n\}_n=a\{b,a_2,\dots,a_n\}_n+(-1)^{|a||b|}b\{a,a_2,\dots,a_n\}_n \tag{5.6}$$

对齐次的 a,b， $a,b,a_2,\dots,a_n\in R$成立。

定义 5.8. 设 $m \geq 2$ 为一个整数。Lie-Rinehart m-代数是一个 A-模 V，带有一个 $\boldsymbol{k}$-线性运算 $[\,,\ldots,\,]\colon \bigwedge^m V \to V$ 以及一个锚映射 $\rho\colon \bigwedge_A^{m-1} V \otimes_{\boldsymbol{k}} A$，它们满足

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-1}^{-1}} (-1)^\sigma [[v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(m)}], v_{\sigma(m+1)},\ldots,v_{\sigma(2m-1)}] = 0, \tag{5.7}$$

$$[v_1,\ldots,v_{m-1},av_m] = a[v_1,\ldots,v_m] + \rho(v_1,\ldots,v_{m-1},a)v_m, \tag{5.8}$$

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma \Big(\rho([v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(m)}], v_{\sigma(m+1)},\ldots,v_{\sigma(2m-2)},a) + \rho(v_{\sigma(m)},\ldots,v_{\sigma(2m-2)},\rho(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(m-1)},a))\Big) = 0, \tag{5.9}$$

$$\rho(v_1,\ldots,v_{m-1},ab) = a\rho(v_1,\ldots,v_{m-1},b) + b\rho(v_1,\ldots,v_{m-1},a) \tag{5.10}$$

对所有 v_1、…、$v_{2m-1} \in V$、a、$b \in A$。

命题 5.9. 设 $(L, ([\,,\ldots,\,]_n)_{n\geq 1}, \rho_m)$ 是 Spec(A) 上一个具有 m 元锚映射的 Γ-分次 L_∞-代数胚，满足对所有 $j \in \{2,\ldots,m-1\}$ 都有 $[\,,\ldots,\,]_j = 0$；并设 $W \subseteq L_0$ 是一个在 $[\,,\ldots,\,]_m$ 作用下保持不变的 A-子模，且满足

(1) $\mathrm{im}[\,]_1$ 是一个理想，即 $[\mathrm{im}[\,]_1, W\ldots, W\,]_m \subseteq \mathrm{im}[\,]_1$；并

且 (2) $\rho_m(\mathrm{im}[\,]_1, W, \ldots, W, A) = 0$。

那么，$(\ker[\,]_1 \cap W)/(\mathrm{im}[\,]_1 \cap W)$ 是一个 Lie-Rinehart m-代数，其中括号 $[\,,\ldots,\,]$ 由 $[\,,\ldots,\,]_m$ 诱导，锚映射 ρ 由 ρ_m 诱导。

如果 $m = 2$，条件 (1) 和 (2) 就不起作用。对于那些熟悉更传统的同调代数的人来说，dg Nambu-Poisson 结构并不一定会在上同调中自动产生 Nambu–Poisson 结构，这一事实多少有些出人意料。

证明。将 $p + q = 2m - 1$ 代入式 (5.5)，并令 w_1、w_2、……、$w_{2m-1} \in W$，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-1}^{-1}} (-1)^\sigma [[w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(m)}]_m, w_{\sigma(m+1)},\ldots,w_{\sigma(2m-1)}]_m \\ &+ [[w_1,\ldots,w_{2m-1}]_{2m-1}]_1 + \sum_l (-1)^{l-1} [[w_l]_1, w_2,\ldots,w_l,\ldots,w_{2m-1}]_{2m-1}, \end{aligned}$$

这意味着我们在同调中得到了式 (5.7)。将 $p + q = 2m - 1$ for$w_1, w_2, \ldots, w_{2m-1} \in W$ 和最后一个参数 $a \in A$ 代入式 (5.5)，得到

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma \rho_m([x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}]_m, x_{\sigma(m+1)},\ldots,x_{\sigma(2m-2)},a) \\ &- \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma k_m(\rho_m(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m-1)},a)_m, x_{\sigma(m)},\ldots,x_{\sigma(2m-2)}) \\ = &\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma \rho_m([x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}]_m, x_{\sigma(m+1)},\ldots,x_{\sigma(2m-2)},a) \\ &+ \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma \rho_m(x_{\sigma(m)},\ldots,x_{\sigma(2m-2)},\rho_m(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m-1)},a)) \\ = &\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma \rho_m([x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}]_m, x_{\sigma(m+1)},\ldots,x_{\sigma(2m-2)},a) \\ &+ \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma \rho_m(x_{\sigma(m)},\ldots,x_{\sigma(2m-2)},\rho_m(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m-1)},a)) \\ = &\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{m,m-2}^{-1}} (-1)^\sigma (\rho_m([v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(m)}], v_{\sigma(m+1)},\ldots,v_{\sigma(2m-2)},a) \\ &+ \rho_m(v_{\sigma(m)},\ldots,v_{\sigma(2m-2)},\rho(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(m-1)},a))) = 0. \end{aligned}$$

这表明式 (5.9) 成立。莱布尼茨规则（式 (5.8) 和 (5.10)）继承自 ρ_m 的相应关系。□

6. Resolvent, cotangent complex and the complete Schouten algebra

本节回顾 [13] 中的基本定义和记号。关于分解和余切复形，我们参考 [2, 23]。

所谓分次集合，是指一个可数集合 $\mathcal{I}$，连同一个函数 $\phi\colon \mathcal{I}\to\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$，使得对每个 $l\in\mathbb{N}$，集合 $\mathcal{I}_l:=\phi^{-1}(l)$ 的基数有限。对每个 $i\in\mathcal{I}_l$，我们赋予一个变量 $x_i^{(l)}$，其奇偶性与 l 的奇偶性一致，并引入分次多项式代数 $S[\boldsymbol{x}]:=S[x_i^{(l)}\mid l\in\mathbb{N}, i\in\mathcal{I}_l]$，满足关系式$x_i^{(l)}x_j^{(n)}=(-1)^{ln}x_j^{(n)}x_i^{(l)}$。也就是说，变量 $x_i^{(l)}$ 在 l 为偶时是偶的，否则为奇的。我们为变量 $x_i^{(l)}$ 赋予上同调次数 $|x_i^{(l)}|:=-l$。只考虑层级不超过 $r\geq 1$ 的变量时，我们还得到有限多个变量构成的分次多项式环 $S[\boldsymbol{x}_{\leq r}]:=S[x_i^{(l)}\mid l\leq r, i\in\mathcal{I}_l]$。按照惯例$S[\boldsymbol{x}_{\leq 0}]:=S$。

若微分分次 S-代数 (R,∂) 满足以下条件，则称其为半自由的：

(1) 作为 S-代数，R是以分次集合 ϕ 为基的分次多项式代数 $S[\boldsymbol{x}]\colon\ \mathcal{I}\to\{1,2,\dots\}$。(2) 对每个 $l>0$ 和 $i\in\mathcal{I}_l$，都有 $\partial(x_i^{(l)})\in S[x_{\leq l-1}]$。

显然，对于每个 $r\geq 0$ $S[\boldsymbol{x}_{\leq r}]$，$(R_{\leq r},\partial_{\leq r})$ 都是 (R,∂) 的一个半自由微分分次子代数。存在典范代数映射 $\kappa\colon\ R\to S$，它将每个变量 $x_i^{(l)}$ 映为零。将 $x_i^{(l)}$ 在 ∂ 下的像记为 $F_i(\boldsymbol{x}_{\leq l-1})$，则采用以下记法会更方便：

$$\partial_{\leq r}=\sum_{l=1}^{r}\sum_{j\in\mathcal{I}_l}F_j(\boldsymbol{x}_{\leq l-1})\frac{\partial}{\partial x_j^{(l)}}\quad\text{and}\quad\partial=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j\in\mathcal{I}_l}F_j(\boldsymbol{x}_{\leq l-1})\frac{\partial}{\partial x_j^{(l)}}.$$

设 I 是 S中的一个理想。若代数态射 $\kappa\colon\ R\to S$ 与 $S\to A$ 的复合是拟同构，则称半自由 S-代数 (R,∂) 是 $A=S/I$ 的一个分解。众所周知，这样的分解总是存在的。注意，$R_{\leq 1}$ 无非是视为上链复形的 Koszul 复形。若 I 是完全交，则 $R_{\leq 1}$ 是一个分解。若 I 不是局部完全交，则该分解有无穷多个生成元[2]（见 [3]）。

在 $I=(f_1,\dots,f_k)$ 是 $S=\boldsymbol{k}[x_1,\dots,x_n]$ 中的齐次理想，且对于 $i=1,\dots,n$，有 $\deg(x_i)\geq 1$，满足 $I\subseteq\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_n)$ 的情形下，我们为变量 $x_j^{(l)}$ 指定内度，使得 $\deg(\partial)=0$。如此一来，S/I 的分解 (R,∂) 就成为双分次微分分次代数，并且可以假定它是一个极小模型。极小模型的前几项可以使用 Macaulay2 软件包 dgalgebras 计算。

设 (R,∂) 是 S-代数 $A=S/I$ 的一个分解。A 关于 $\boldsymbol{k}$ 的余切复形为 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}=A\otimes_R\Omega^{R|\boldsymbol{k}}$，其中 $\Omega^{R|\boldsymbol{k}}$ 是 R 的 Kähler 微分，而 $\otimes_R$ 是 R-模的复形范畴中的张量积。若理想 I 是齐次的，则余切复形 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}$ 按显然的方式成为双分次的。若 I 的生成元 $f_1,\dots,f_k$ 构成一个约化完全交，则 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}$ 构成 A-模 $\Omega^{R|\boldsymbol{k}}$ 的投射分解（例如参见 [20]）。

稍微复杂一些的是构造形式仿射超概形 Spec(R) 的完备 Schouten 代数 $\mathfrak{g}$。回想一下，对于 $l\in\mathbb{Z}$，我们有度移位的 $V[l]=\oplus_k V[l]^k$, $V[l]^k:=V^{l+k}$，它们属于 $\mathbb{Z}$-分次模 $V=\oplus_k V^k$。由单位元 $\downarrow$诱导的映射 $V\to V[1]$ 的次数为 -1。它的逆映射是 $\uparrow$，次数为 1。我们令 $\mathfrak{h}_{\leq r}:=\mathsf{S}^{R_{\leq r}}(\mathrm{Der}_{R_{\leq r}}[-1])$，这是一个由以下元素生成的代数

$$\xi^i_{(l)}:=\frac{\partial}{\partial x_i^{(l)}}[-1]\in\mathrm{Der}_{R_{\leq r}}[-1]\subset\mathfrak{h}_{\leq r},\quad r\geq m\geq 0, i\in\mathcal{I}_l,$$

其次数为 $|\xi^{i_1}_{(k_1)}\cdots\xi^{i_\ell}_{(k_\ell)}|=k_1+\ldots+k_\ell+\ell$。这里我们约定将原变量$x_i$ 写作 $x_i^{(0)}$。代数 $\mathfrak{h}_{\leq r}$ 也可以理解为分次多项式代数

$$\boldsymbol{k}\left[x_i^{(l)},\xi^i_{(l)}|r\geq l\geq 0, i\in\mathcal{I}_l\right].$$

[2]In 物理学家说：约束是 *infinitely redu* *cible*。

我们通过规定 $\partial_{\leq r}\xi^i_{(l)} = 0$，将微分 $\partial_{\leq r}$ 扩展到 $\mathfrak{h}_{\leq r}$。我们在代数 $\mathfrak{h}_{\leq r}$ 上引入滤过次数，具体规定各生成元的滤过次数

$$\mathrm{fd}(\xi^i_{(l)}) := |\xi^i_{(l)}| = l, \quad \mathrm{fd}(x^{(l)}_i) := 0.$$

令 $\mathcal{F}^p\mathfrak{h}_{\leq r}$ 为 $R_{\leq r}$-张成的 $\{X \in \mathfrak{h}_{\leq r} \mid \mathrm{fd}(X) \geq p\}$。集合 $(\mathcal{F}^p\mathfrak{h}_{\leq r})_{p\geq 0}$ 构成一个下降的豪斯多夫滤过，使得 $\partial_{\leq r}(\mathcal{F}^p\mathfrak{h}_{\leq r}) \subseteq \mathcal{F}^p\mathfrak{h}_{\leq r}$，即 $\mathfrak{h}_{\leq r}$ 是一个滤过复形。我们约定，若 $p < 0$，则 $\mathcal{F}^p\mathfrak{h}_{\leq r} = \mathcal{F}^0\mathfrak{h}_{\leq r}$。存在唯一的括号 $[\![\,,\,]\!]$，其上同调次数为 -1，且扩张超交换子，并使 $\mathfrak{h}_{\leq r}$ 成为一个 Gerstenhaber 代数。它称为 Schouten 括号。计算 Schouten 括号的一个便捷公式如下（见 [7]）

$$[\![X, Y]\!] = \sum_{l=0}^{r}\sum_{i\in\mathcal{I}_l} X\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi^i_{(l)}}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^{(l)}_i}Y - X\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{(l)}_i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi^i_{(l)}}Y.$$

令 $\mathfrak{h} := \cup_{r\geq 0}\mathfrak{h}_{\leq r}$，可见 $(\mathfrak{h}_{\leq r})_{r\geq 0}$ 构成一个 Gerstenhaber 代数的有向系统。直极限 $\mathfrak{h} := \cup_{r\geq 0}\mathfrak{h}_{\leq r}$ 上的 Schouten 括号定义为

$$[\![X, Y]\!] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i\in\mathcal{I}_m} X\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi^i_{(l)}}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^{(l)}_i}Y - X\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{(l)}_i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi^i_{(l)}}Y.$$

典范同构 $\big(\mathrm{Der}^{R_{\leq r}}(R_{\leq r})\big)[-1] \cong \mathrm{Hom}^{R_{\leq r}}(\Omega_{R_{\leq r}|\boldsymbol{k}}[1], R_{\leq r})$ 延伸为 R-模之间的单射 $\mathfrak{h} = \cup_{r\geq 0}\mathfrak{h}_{\leq r} \to \mathfrak{g} := \mathrm{Sym}_R(\Omega_{R|\boldsymbol{k}}[1], R)$。$\boldsymbol{k}$-向量空间 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathcal{F}$-进拓扑下的完备化。$\mathfrak{g}$ 上存在唯一的 Gerstenhaber 代数结构，使得 $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 是 Gerstenhaber 代数的态射（这是 [13, 命题 6.1]）。此外，$\mathfrak{h}_{\leq r}$ 的 $\mathcal{F}$-进完备化为 $\mathfrak{g}_{\leq r} := \mathrm{Sym}^{R_{\leq r}}(\Omega_{R_{\leq r}|\boldsymbol{k}}[1], R_{\leq r})$，且集合 $(\mathfrak{g}_{\leq r})_{r\geq 0}$ 构成一个由 $\mathcal{F}$-进完备 Gerstenhaber 代数组成的有向系统。

7. Proofs of the main results

现在的主要思路是为 $j \geq 0$ 元素构造 $\pi_j \in \mathcal{F}^{j+m-1}\mathfrak{h}_{\leq j-1} \subseteq \mathfrak{g}$。我们设

$$\pi_0 = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i\in\mathcal{I}_l} F_i(\boldsymbol{x}_{\leq l-1})\frac{\partial}{\partial x^{(l)}_i} \in \mathfrak{g} \quad \text{and} \quad \pi_1 = \Pi.$$

注意，上述级数是收敛的。为确定 π_ℓ，使用截断式就足够了

$$\pi_0^{\leq j-1} = \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{i\in\mathcal{I}_l} F_i(\boldsymbol{x}_{\leq l-1})\frac{\partial}{\partial x^{(l)}_i}.$$

构造的主要步骤将在引理 7.2 中完成。所采用的方法称为同调扰动理论，如今应用广泛（例如用于 Fedosov 变形量子化、计算 BFV 荷或 BV 作用量）。我们将 [13] 的过程调整到了 Nambu–Poisson 情形。

引理 7.1（[13]）。设 p、q、r、s 为整数 ≥ 0。则

(1) 对每个 $X \in \mathcal{F}^p\mathfrak{h}_{\leq r}$，都有 $[\![\pi_0^{\leq r}, X]\!] \in \partial_{\leq r}X + \mathcal{F}^{p+1}\mathfrak{h}_{\leq r}$；

(2) $[\![\mathcal{F}^p\mathfrak{h}_{\leq r}, \mathcal{F}^q\mathfrak{h}_{\leq s}]\!] \subseteq \mathcal{F}^{p+q-1-\min(r,s)}\mathfrak{h}_{\leq\max(r,s)}$。

引理 7.2. 对于 $\ell \geq 2$，我们可以递归地定义 $\pi_\ell \in \mathcal{F}^{\ell+m-1}\mathfrak{h}_{\leq\ell-1}$，使得

$$\left[\!\!\left[\pi_0^{\leq\ell-1} + \sum_{i=1}^{\ell-1}\pi_i, \pi_0^{\leq\ell-1} + \sum_{i=1}^{\ell-1}\pi_i\right]\!\!\right] + \mathcal{F}^{\ell+m-1}\mathfrak{h}_{\leq\ell-1} = -2\partial_{\leq\ell-1}\pi_\ell + \mathcal{F}^{\ell+m-1}\mathfrak{h}_{\leq\ell-1}. \tag{7.1}$$

证明. 我们通过对 $\ell \geq 2$ 进行归纳法来证明该结论。回顾一下（例如，参见 [28, 29]），$[\![\pi_1,\ \pi_1]\!] = 0$。如果 $\ell = 2$，则有

$$\begin{aligned}[\![\pi_0^{\leq 1} + \pi_1, \pi_0^{\leq 1} + \pi_1]\!] &= [\![\pi_0^{\leq 1}, \pi_0^{\leq 1}]\!] + 2[\![\pi_1, \pi_0^{\leq 1}]\!] + [\![\pi_1, \pi_1]\!] \\ &= \frac{2}{(m-1)!} \sum_{i_1 \ldots i_{m-1}, \mu, \nu} \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m-1}}, f_\mu\} \xi^{i_1} \xi^{i_2} \cdots \xi^{i_{m-1}} \xi^\mu_{(1)} + \mathcal{F}^{2m-1}\mathfrak{h}_{\leq 1} \\ &= \frac{2}{(m-1)!} \sum_{i_1 \ldots i_{m-1}, \mu, \nu} Z^\nu_{i_1 \ldots i_{m-1}\mu} f_\nu \xi^{i_1} \xi^{i_2} \cdots \xi^{i_{m-1}} \xi^\mu_{(1)} + \mathcal{F}^{2m-1}\mathfrak{h}_{\leq 1} \\ &= -2\partial_{\leq 1}\pi_2 + \mathcal{F}^{2m-1}\mathfrak{h}_{\leq 1}\end{aligned}$$

置 $\pi_2 := -\frac{1}{(m-1)!} \sum_{i_1 \ldots i_{m-1},\ \mu,\ \nu} Z^\nu_{i_1 \ldots i_{m-1}\mu} x^{(1)}_\nu \xi^{i_1} \xi^{i_2} \cdots \xi^{i_{m-1}} \xi^\mu_{(1)} \in \mathcal{F}^{m+1}\mathfrak{h}_{\leq 1}$。

假设该断言对 $\ell \geq 2$ 成立。我们需要找到 $\pi_{\ell+1}$，使得代入 $\ell \mapsto \ell + 1$ 后（7.1）成立。记 $X_\ell := \pi_0^{\leq \ell} - \pi_0^{\leq \ell-1}$，并分解

$$\begin{aligned}&\left[\!\!\left[\pi_0^{\leq \ell} + \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i, \pi_0^{\leq \ell} + \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[X_\ell + \pi_\ell + \pi_0^{\leq \ell-1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} \pi_i, X_\ell + \pi_\ell + \pi_0^{\leq \ell-1} + \sum_{j=1}^{\ell-1} \pi_j\right]\!\!\right] \\ &= \left[\!\!\left[\pi_0^{\leq \ell-1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} \pi_i, \pi_0^{\leq \ell-1} + \sum_{j=1}^{\ell-1} \pi_j\right]\!\!\right] + [\![X_\ell, X_\ell]\!] + [\![\pi_\ell, \pi_\ell]\!] \\ &+ 2\left[\!\!\left[X_\ell, \pi_0^{\leq \ell-1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} \pi_i\right]\!\!\right] + 2\left[\!\!\left[\pi_\ell, \pi_0^{\leq \ell} + \sum_{i=1}^{\ell-1} \pi_i\right]\!\!\right].\end{aligned}$$

我们需要验证这属于 $\mathcal{F}^{\ell+m}\mathfrak{h}_{\leq \ell}$。我们有 $[\![X_\ell,\ X_\ell]\!] = 0$，并利用引理 7.1 可知，对于 $\ell \geq j$，我们得到 $[\![\pi_\ell,\ \pi_j]\!] \in [\![\mathcal{F}^{\ell+m-1}\mathfrak{h}_{\leq \ell-1},\ \mathcal{F}^{j+m-1}\mathfrak{h}_{\leq j-1}]\!] \in \mathcal{F}^{\ell+j+2m-3-j+1}\mathfrak{h}_{\leq \ell-1} \subset \mathcal{F}^{\ell+m}\mathfrak{h}_{\leq \ell-1}$。此外，$[\![X_\ell,\ \pi_0^{\leq \ell-1}]\!] = 0$，因为

$$0 = 2(\partial_{\leq \ell})^2 = [\![\pi_0^{\leq \ell}, \pi_0^{\leq \ell}]\!] = [\![X_\ell, X_\ell]\!] + 2[\![X_\ell, \pi_0^{\leq \ell-1}]\!] + 2(\partial_{\leq \ell-1})^2.$$

此外，如果 $\ell > j$，则可得 $[\![X_\ell, \pi_j]\!] \in [\![\mathcal{F}^{\ell+1}\mathfrak{h}_{\leq \ell}, \mathcal{F}^{j+m-1}\mathfrak{h}_{\leq j-1}]\!] \subseteq \mathcal{F}^{\ell+m}\mathfrak{h}_{\leq \ell}$。最后，我们有 $[\![\pi_\ell, \pi_0^{\leq \ell}]\!] \in \partial_{\leq \ell-1}\pi_\ell + \mathcal{F}^{\ell+m}\mathfrak{h}_{\leq \ell}$，从而证明了所述结论。

现在令 $A_\ell \in \mathfrak{h}_{\leq \ell-1}$，且 $\mathrm{fd}(A_\ell) = \ell + m$，使得 $\left[\!\!\left[\pi_0^{\leq \ell} + \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i, \pi_0^{\leq \ell} + \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j\right]\!\!\right] \in A_\ell + \mathcal{F}^{\ell+m+1}\mathfrak{h}_{\leq \ell}$。根据 Schouten 括号的雅可比恒等式和引理 7.1，我们可以得出 $\partial_{\leq \ell} A_\ell = 0$。论证如下：

$$0 = \left[\!\!\left[\pi_0^{\leq \ell} + \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i, \left[\!\!\left[\pi_0^{\leq \ell} + \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i, \pi_0^{\leq \ell} + \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j\right]\!\!\right]\right]\!\!\right] \in \left[\!\!\left[\pi_0^{\leq \ell} + \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i, A_\ell + \mathcal{F}^{\ell+m+1}\mathfrak{h}_{\leq \ell}\right]\!\!\right].$$

但是，对于 $i \geq 1$，我们有 $[\![\pi_i, A_\ell]\!] \in [\![\mathcal{F}^{i+m-1}\mathfrak{h}_{\leq i-1}, \mathcal{F}^{\ell+m}\mathfrak{h}_{\leq \ell}]\!] \subseteq \mathcal{F}^{\ell+i+2m-2-(i-1)}\mathfrak{h}_{\leq \ell} = \mathcal{F}^{\ell+2m-1}\mathfrak{h}_{\leq \ell}$ 且 $[\![\pi_0^{\leq \ell}, A_\ell]\!] \in \partial_{\leq \ell}(A_\ell) + \mathcal{F}^{\ell+m+1}\mathfrak{h}_{\leq \ell}$。我们注意到，按构造可得 $\partial_{\leq \ell} A_\ell = \partial_{\leq \ell-1} A_\ell$。我们选择 $\pi_{\ell+1}$，使得 $\partial_{\leq \ell}\pi_{\ell+1} = -A_\ell/2$。□

第 3 节和第 4 节中的 Maurer-Cartan 元素进入引理 7.2 的递归。让我们嵌入 $\wedge\mathrm{Der}(S) \hookrightarrow \mathfrak{g}$，$\partial/\partial x_i \mapsto \xi^i = \xi^i_{(0)}$ 并且不在记号上区分 $\wedge\mathrm{Der}(S)$ 的元素与其在该嵌入下的像。相应的

$$\sum_{\mu,\nu} (\delta_{\mathrm{Nambu}} Z - [Z, Z])^\nu_\mu x^{(1)}_\nu \xi^\mu_{(1)} \in \mathcal{F}^{2m-1}\mathfrak{g} \tag{7.2}$$

根据定理 3.2，它是 ∂-闭的。相应的源项将成为 π_{m+1} 的一部分。

当$m = 2$时，我们采用 Theodore Voronov 的高阶导出括号（见定理 5.3；另见 [30, 17]）。更确切地说，我们令 $\Gamma := \mathbb{Z}$, $\mathfrak{G} := \Pi\mathfrak{g}$, $\mathfrak{A} := \Pi R$, $\varepsilon := \Pi\epsilon$ 其中 $\epsilon\colon \mathfrak{g} \to R$ 是增广

以及 $\Delta := \Pi\pi$，其中 $\pi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi_\ell$。这正是 [13] 中所做的，以便在 R上构造一个 P_∞-代数结构。现在，对于偶 $m > 2$，我们面临以下问题：

$$\begin{aligned} 1 \le \ell \le m:&\ \pi_\ell \in \mathfrak{g}^m \\ m+1 \le \ell \le 2m-1:&\ \pi_\ell \in \mathfrak{g}^m \oplus \mathfrak{g}^{2m-2} \\ 2m \le \ell \le 3m-2:&\ \pi_\ell \in \mathfrak{g}^m \oplus \mathfrak{g}^{2m-2} \oplus \mathfrak{g}^{3m-4} \\ 3m-1 \le \ell \le 4m-3:&\ \pi_\ell \in \mathfrak{g}^m \oplus \mathfrak{g}^{2m-2} \oplus \mathfrak{g}^{3m-4} \oplus \mathfrak{g}^{4m-6} \text{ etc.} \end{aligned}$$

这是因为每次在迭代中需要考虑 $[\![\pi_1, \pi_q]\!]$, $q = m+1, 2m, 3m-1, \ldots$ 时，都可能会出现一个新的上同调次数。我们可以将这些陈述更简洁地写成

$$\pi_\ell \in \bigoplus_{r=1}^{\lfloor (\ell-m-1)/(m-1) \rfloor + 2} \mathfrak{g}^{rm-2(r-1)} \tag{7.3}$$

对于 $\ell \ge 1$。特别地，一般而言 $\pi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi_\ell$ 不属于 $\mathfrak{g}$。

为解决这一问题，我们在 $m > 2$ 时令 $\Gamma = \mathbb{Z}_2$，并引入另一种滤过 n

$$F^l\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{g} \mid |X| \ge l\},\ l \in \mathbb{Z}.$$

由此，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$成为一个滤过的 $\mathbb{Z}_2$-分次 Gerstenhaber 代数，其意义在于 $[\![F^k\mathfrak{g}, F^l\mathfrak{g}]\!] \subseteq F^{k+l+1}\mathfrak{g}$, $F^k\mathfrak{g} \cdot F^l\mathfrak{g} \subseteq F^{k+l}\mathfrak{g}$ 以及通常的公理（见第 3 节的公理 (1)–(4)）均成立。F-进完备化 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 也是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 Gerstenhaber 代数，并且现在 $\pi = \sum_\ell \pi_\ell \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}$。注意，$R = \widehat{R} \subset \widehat{\mathfrak{g}}$，因为作为一个 $\mathbb{Z}$-分次代数，它集中在非正次数上。增广 $\epsilon : \mathfrak{g} \to R$ 是滤过的，并导出投影 $\widehat{\epsilon} : \widehat{\mathfrak{g}} \to \widehat{R} = R$。移位后的 $\mathfrak{G} := \Pi\mathfrak{g}$ 是一个滤过李超代数 $\big[\widehat{F^k\mathfrak{G}}, F^l\mathfrak{G}\big] \subseteq F^{k+l}\mathfrak{G}$，其括号为 $[\,,\,] = \Pi \circ [\![\,,\,]\!] \circ (\Pi^{-1} \otimes \Pi^{-1})$。它的完备化为 $\widehat{\mathfrak{G}} = \Pi\widehat{\mathfrak{g}}$.

此外，$\Pi R = \Pi R$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个阿贝尔子代数，并且我们有满足$\varepsilon[X, Y] = \varepsilon[\varepsilon X, Y] + \varepsilon[X, \varepsilon Y]$的投影 $\varepsilon = \Pi\widehat{\epsilon} : \mathfrak{G} \to \Pi R$。显然，$[\Pi\pi, \Pi\pi] = 0$。

应用定理 5.3，我们得到对于 $x_1, \ldots, x_j \in \Pi R$，运算 $(l_j)_{j\ge1}$

$$l_j(x_1, x_2, \ldots, x_j) := -\varepsilon\left([\ldots[[\Pi\pi, x_1], x_2], \ldots, x_j]\right) \tag{7.4}$$

在 ΠR 上定义一个 Γ-分次的 ΠL_∞-代数。利用 d´ecalage(5.2)，这诱导出一个 Γ-分次的 P_∞-代数结构 $(\{\,,\ldots,\,\}_j)_{j\ge1}$,

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \ldots, \phi_j\}_j &:= (-1)^{\sum_{i=1}^{j}(j-i)|\phi_i|}\Pi^{-1}(l_j(\Pi\phi_1, \ldots, \Pi\phi_j)) \\ &= -(-1)^{\sum_{i=1}^{j}(j-i)|\phi_i|}\widehat{\epsilon}\left([\![\ldots[\![[\![\pi, \phi_1]\!], \phi_2]\!], \ldots, \phi_j]\!]\right), \end{aligned} \tag{7.5}$$

在 R 上，其中 $\widehat{\epsilon} : \widehat{\mathfrak{g}} \to R$ 是增广。如果 $m = 2$，则上面公式中的帽子可以省略。映射 $R \to A$ 实际上是一个 Γ-分次的 L_∞-拟同构。$\{\phi_1, \ldots, \phi_j\}_j$ 满足每个自变量上的莱布尼茨法则，这源于 Schouten 括号的相应性质。为完成定理 1.4 的证明，注意到若 $f_1, \ldots, f_k$ 是卡西米尔元，则我们有 $\pi = \pi_0 + \pi_1$。因此 R 成为一个微分分次 Nambu–Poisson 代数。

Γ分次 L_∞-代数丛的括号由公式 $[\mathrm{d}\phi_1, \ldots, \mathrm{d}\phi_l]_l = \mathrm{d}\{\phi_1, \ldots, \phi_l\}_l$ 给出。高阶锚 $\rho_l(\mathrm{d}\phi_1, \ldots, \mathrm{d}\phi_{l-1}, a)$ 是映射 $R \to A$ 下 $\{\phi_1, \ldots, \phi_{l-1}, g\}_l$, $a := g + I$ 的像。这里可以假设 ϕ_i 关于坐标 $x_i^{(l)}$ 是线性的。为证明推论 1.5，注意到 Γ分次 L_∞-代数丛所需的恒等式可由 Γ分次 P_∞-结构的雅可比恒等式推出。剩下要证明所有高阶锚

$$a \mapsto \rho_l(\mathrm{d}\phi_1, \ldots, \mathrm{d}\phi_{l-1}, a)$$

只要某个 ϕ_i（假设它们关于 $x_i^{(l)}$ 是线性的）属于 κ 的核，便会消失：$R \to S$。令 $\{\,,\ldots,\,\}_{j,\ l}$ 表示括号 $\{\,,\ldots,\,\}_l$ 中来自 π_j 的部分，并记作 $\rho_l(\mathrm{d}\phi_1, \ldots, \mathrm{d}\phi_{l-1}, a)_j = \{\phi_1, \ldots, \phi_{l-1}, g\}_{j,\ l} + I$, $a := g + I$，注意 ϕ_i 是线性坐标。根据引理 7.2 中的步骤，对于 $j \ge 2$，每个 π_j 都是 ∂ 的一个源项。这意味着 $\{\phi_1, \ldots, \phi_{l-1}, g\}_{j,\ l} \in \ker(\kappa)$

每当 $j \geq 2$。此 s 显然不能属于 A。因此，对锚映射有贡献的唯一项是 π_1:

$$\rho_l(\mathrm{d}\phi_1, \ldots, \mathrm{d}\phi_{l-1},) = \begin{cases} X_{\phi_1,\ldots,\phi_{l-1}} \text{ if } \phi_1, \ldots, \phi_{l-1} \in A \text{ and } m = l, \\ 0 \text{ otherwise,} \end{cases}$$

其为 m 元括号。

为证明推论1.6，我们令 W 为 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}$ 中上同调次数为 0 的元素构成的 A-子模。$[\,,\ldots,\,]_m$ 在 W 上的限制由 Nambu-Poisson 张量 π_1 诱导。此外，在上同调次数为零时，$\mathrm{im}[\,]_1$ 是一个理想。由于这是 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}$ 中 $I\mathrm{d}S + S\mathrm{d}I \in \Omega^{R|\boldsymbol{k}}$ 的像 $I\mathrm{d}S + S\mathrm{d}I$，我们验证

$$[\overline{I\mathrm{d}S + S\mathrm{d}I}, \overline{S\mathrm{d}S}, \ldots, \overline{S\mathrm{d}S}]_m \subseteq \overline{S\{I, S, \ldots, S\mathrm{d}S + S\mathrm{d}\{I, S, \ldots, S\}} \subseteq \overline{I\mathrm{d}S + S\mathrm{d}I}.$$

因此，映射 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}} \to \Omega^{A|\boldsymbol{k}}$ 将 $[\,,\ldots,\,]_m$ 映为 $\Omega^{A|\boldsymbol{k}}$ 上的形式括号。为了确认锚映射可下降到 $\Omega^{A|\boldsymbol{k}}$，我们验证

$$\rho_m(\mathrm{im}[\,]_1, \mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}, \ldots, \mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}, A) \subseteq I\{S, \ldots, S\} + S\{I, S, \ldots, S\} = 0 \in A = S/I.$$

现在应用命题 5.9。

8. Complete and locally complete intersections

如果 $f_1, \ldots, f_k$ 构成完全交，那么 R 就是 Koszul 复形，而 $R \to S$ 的核 $\mathfrak{m}$ 是一个满足性质 $\mathfrak{m}^{k+1} = 0$ 的理想。由此幂零性或许可以预期，我们能够先验地证明，在求和式 $\pi = \sum_\ell \pi_\ell$ 中只有有限项非零（关于 Poisson 情形，见 [13, 第 7.2] 小节）。如果 $m > 2$，情况似乎并非如此。与情形 $m = 2$不同，对于 $m > 2$ 我们只有 $\pi_\ell \in \bigoplus_{r=1}^{\lfloor(\ell-m-1)/(m-1)\rfloor+2} \mathfrak{g}^{rm-2(r-1)}$，而不是 $\pi_\ell \in \mathfrak{g}^2$。但是取 $\lambda \in \mathcal{F}^{\ell+m-1}\mathfrak{g}^{rm-2(r-1)}$ 时，我们无法先验地证明，当 ℓ 足够大时，λ 会消失。通过次数计数得到的估计为 $\ell \geq k + (r-1)m + 2 \Longrightarrow \lambda = 0$，它依赖于 r（Poisson 情形 $m = 2$ 对应于 $r = 1$）。对于 π_ℓ，这意味着 $\ell \geq k + (\lfloor(\ell - m - 1)/(m-1)\rfloor + 1)m + 2 \Longrightarrow \pi_\ell = 0$（见公式 (7.3)）。然而，这个不等式从不成立。即使 Nambu-Poisson 理想 $I = (f_1, \ldots, f_k)$ 的轨迹是光滑的，我们也看不出有什么理由能先验地断定该求和是有限的。由 Casimir元生成的完全交总是在 R 上赋予一个由 $\pi = \pi_0 + \pi_1$给出的微分分次 Nambu代数结构。此外，如果由于某种原因，(7.2) 中的表达式恰好为零，那么求和 $\sum_\ell \pi_\ell$ 有望是有限的。

在完全交的情形下，余切复形集中在上同调次数 0 和 -1，即 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_{-1}$。对于 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}$ 上的 Γ-分次 L_∞-代数胚结构，π 的某些部分会消失。具体而言，$\mathfrak{m}^2\mathfrak{g}$ 中的所有项都不会对括号 $[\,,\ldots,\,]_l$作出贡献。不过，似乎没有先验理由可以说明非零括号只有有限多个。在 Poisson 情形下，由于 $\mathbb{Z}$-分次所施加的限制，不会出现元数为三或更高的括号。

在局部完全交的情形下，分解由上同调次数为 0、-1、-2的变量生成。这意味着理想 $\mathfrak{m}$ 不是幂零的。因此，即使在 Poisson 情形 $m = 2$下，也无法仅通过计算次数来断言和 $\sum_\ell \pi_\ell$ 是有限的。不过，我们强调，A 存在一个投射分解，它由上同调次数为 0、-1的变量生成。换言之，通常可以将 I 的轨迹表示为某个向量丛的一个截面的零点集，并使该丛截面的 Koszul 复形成为 $A = S/I$的分解。此时，π_1 的自然选择不再是泊松张量，而是 Rothstein 泊松张量 [26, 11]。它与泊松张量的区别在于高滤过次数中出现了曲率项，而引理 7.2 的同调扰动理论只需作少许修改。由此可见，在 Poisson 局部完全交的情形下，可以实现一个实际上为微分分次李代数胚的余切复形，并且其 P_∞-结构可由有限和 $\pi = \sum_\ell \pi_\ell$表示。

9. Outlook

自然会产生这样一个问题：当基环是 $\mathbb{R}^n$上的光滑函数代数$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$时，能否做出与本文类似的工作？在温和的假设下（例如，f_1、.....、f_k 应当是相干的），答案是肯定的，但必须在 Fr´echet 代数 [11]的框架下进行。另一种可能的推广涉及 $\mathrm{char}(\boldsymbol{k}) = p$ 的情形。此时必须用无环闭包取代分解（见 [2]）。此外，也可以使用由投射模而非自由模生成的无环闭包。我们

还提到，人们认为分解上的 P_∞-结构在 P_∞-准同构意义下是唯一的，但这一说法仍有待确立。作者打算在不久的将来阐明相关细节。目前，纳姆布–Poisson 奇点的变形理论应当是什么样子，以及高阶括号是否发挥作用，这些问题大多尚不明朗。此外，还可以进一步研究将 $\boldsymbol{k}^n$ 替换为光滑概形，或将 $\mathbb{R}^n$ 替换为光滑流形的情形。

原则上，Andr´e-Quillen 同调上必定存在一种代数结构

$$\mathrm{D}_\cdot(A|\boldsymbol{k},A)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{D}_n(A|\boldsymbol{k},A),\qquad \mathrm{D}_n(A|\boldsymbol{k},A)=H_\partial^{-n}(\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}})$$

它由 $\mathbb{L}_{A|\boldsymbol{k}}$ 上的 Γ-分次 L_∞-代数胚诱导而来。然而，这里有一个问题。每个 L_∞-代数L 都非典范地分解为一个极小 L_∞-代数 L' 与一个可缩部分 L''的直和 $L=L'\oplus L''$；例如参见 [1]。[1] 的证明依赖于针对 L_∞-代数的余代数表述。即将发表的 [12] 将在A-模 L 每个次数上都是有限生成投射模的情形下，阐述针对 L_∞-代数胚的这种余代数表述。然而，对于余切复形这类 L_∞-代数胚，Andr´e-Quillen 同调通常是复杂的 A-模。据我们所知，即使A-模 L 每个次数上都是有限生成投射模，这种将´a [1] 分解为一个极小 L_∞-代数胚和一个互补的可缩 L_∞-代数 L'' 的分解也尚未得到研究。

10. Empirical Data

这里给出几个例子。它们是通过修改 [13] 的 Mathematica 代码得到的。在我们能够计算的深度范围内，这些例子中都没有出现元数为 $>m$ 的项。问题在于，在我们考察的所有例子中，Maurer-Cartan 元素恰好都为零。$SL_3(\mathbb{C})$ 的有限子群的不变量例子很可能全都具有为零的 Maurer-Cartan 元素，Kleinian 奇点的情况便是如此。对于例 2.11，验证 Maurer-Cartan 元素为零需要费些功夫；由于篇幅所限，这里无法提供细节。对于例 2.12，由于表达式十分庞大，我们无法进行类似的分析。对角括号的 Maurer-Cartan 元素似乎也为零，我们将尝试在以后证明这一点。我们希望，通过 Nambu-Poisson 李群构造的不变量理论例子，或许能得到具有非零 Maurer-Cartan 元素的奇异 Nambu-Poisson 代数，并计划在别处对此进行研究（这个想法来自与 Ulrich Kr¨ahmer 的一次讨论）。在 Poisson 情形下，有许多 Maurer-Cartan 元素非零的例子 [13]。

10.1. 4维中由两个单项式生成的完全交。考虑由两个二次单项式 $f_1=x_1x_2$ 和 $f_2=x_3x_4$ 生成的理想 $\boldsymbol{k}[x_1,x_2,x_3,x_4]$，其上配备对角纳姆布-泊松括号 $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=x_1x_2x_3x_4$。这里我们采用的是第 7.1 小节中 [13, 的 $\pi_0^{\leq 7}$。

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\\
\pi_2 &= -x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_2^{(1)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^2_{(1)}+x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(1)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^2_{(1)}-x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(1)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(1)}\\
&\quad +x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(1)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(1)},\\
\pi_3 &= -x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^1_{(1)}\xi^2_{(1)}+x_1^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(1)}\xi^2_{(1)}+x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^1_{(1)}\xi^2_{(1)}\\
&\quad -x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(1)}\xi^2_{(1)},\\
\pi_i &= 0 \text{ for all } i\geq 4.
\end{aligned}$$

10.2. 4维中由两个单项式生成的非完全交。我们考虑 $\boldsymbol{k}[x_1,x_2,x_3,x_4]$ 中由两个二次单项式 $f_1=x_1^2$ 和 $f_2=x_1x_2$ 生成的理想，其具有对角 Nambu–Poisson 括号 $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=x_1x_2x_3x_4$。这里我们讨论的是 [13, 小节中的 $\pi_0^{\leq 7}$

7.1]。我们能够确定 $i \le 5$ 的 π_i：

$$\pi_1 = x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)},$$
$$\pi_2 = -x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(1)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^2_{(1)} + 2x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(1)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(1)} + x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(1)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^2_{(1)},$$
$$\pi_3 = x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(2)} + 2x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(1)}\xi^2_{(1)} - 2x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(2)},$$
$$\pi_4 = -x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(3)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(3)} + 3x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(3)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(3)} + x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(3)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^2_{(1)}\xi^1_{(2)},$$
$$\pi_5 = 2x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(4)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(4)} - 3x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(4)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^2_{(1)}\xi^1_{(3)} + x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(4)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^2_{(4)},$$
$$+ 2x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(4)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(1)}\xi^1_{(3)} - 3x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(4)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^1_{(4)} - 4x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(4)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^2_{(4)}.$$

10.3. 7维中的角动量型方程。我们考虑由以下三个分量生成的理想 $\boldsymbol{k}[x_1, x_2, \dots, x_7]$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix},$$

即 $f_1 = x_2x_6 - x_3x_5$、 $f_2 = x_3x_4 - x_1x_6$、 $f_3 = x_1x_5 - x_2x_4$，其中 Nambu–Poisson 括号是如下给出的 4元行列式括号

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \begin{vmatrix} 0 & -x_6 & x_5 & \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_1} \\ x_6 & 0 & -x_4 & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} \\ -x_5 & x_4 & 0 & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} \\ 0 & x_3 & -x_2 & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} \\ -x_3 & 0 & x_1 & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} \\ x_2 & -x_1 & 0 & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a_1}{\partial x_7} & \frac{\partial a_2}{\partial x_7} & \frac{\partial a_3}{\partial x_7} & \frac{\partial a_4}{\partial x_7} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, a_1, a_2, a_3, a_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)}.$$

以下是关于 $\pi_0^{\le 1}$, ..., $\pi_0^{\le 4}$ 的公式：

$$\pi_0^{\le 1} = x_1^{(0)}x_5^{(0)}\xi^3_{(1)} - x_1^{(0)}x_6^{(0)}\xi^2_{(1)} - x_2^{(0)}x_4^{(0)}\xi^3_{(1)} + x_2^{(0)}x_6^{(0)}\xi^1_{(1)} + x_3^{(0)}x_4^{(0)}\xi^2_{(1)} - x_3^{(0)}x_5^{(0)}\xi^1_{(1)}$$
$$\pi_0^{\le 2} = x_1^{(0)}x_1^{(1)}\xi^2_{(2)} + x_2^{(0)}x_2^{(1)}\xi^2_{(2)} + x_3^{(0)}x_3^{(1)}\xi^2_{(2)} + x_4^{(0)}x_1^{(1)}\xi^1_{(2)} + x_5^{(0)}x_2^{(1)}\xi^1_{(2)} + x_6^{(0)}x_3^{(1)}\xi^1_{(2)}$$
$$\pi_0^{\le 3} = x_1^{(0)}x_1^{(2)}\xi^3_{(3)} + x_1^{(1)}x_2^{(1)}\xi^1_{(3)} - x_1^{(1)}x_3^{(1)}\xi^2_{(3)} + x_2^{(0)}x_1^{(2)}\xi^2_{(3)} + x_2^{(1)}x_3^{(1)}\xi^3_{(3)} + x_3^{(0)}x_1^{(2)}\xi^1_{(3)} - x_4^{(0)}x_2^{(2)}\xi^3_{(3)}$$
$$- x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(3)} - x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(3)}$$
$$\pi_0^{\le 4} = x_1^{(0)}x_1^{(3)}\xi^5_{(4)} + x_1^{(0)}x_2^{(3)}\xi^6_{(4)} + x_1^{(1)}x_1^{(2)}\xi^1_{(4)} + x_1^{(1)}x_2^{(2)}\xi^2_{(4)} + x_2^{(0)}x_1^{(3)}\xi^2_{(4)} - x_2^{(0)}x_3^{(3)}\xi^6_{(4)} - x_2^{(1)}x_1^{(2)}\xi^3_{(4)}$$
$$- x_2^{(1)}x_2^{(2)}\xi^5_{(4)} - x_3^{(0)}x_2^{(3)}\xi^2_{(4)} - x_3^{(0)}x_3^{(3)}\xi^5_{(4)} + x_3^{(1)}x_1^{(2)}\xi^4_{(4)} + x_3^{(1)}x_2^{(2)}\xi^6_{(4)} + x_4^{(0)}x_1^{(3)}\xi^3_{(4)} + x_4^{(0)}x_2^{(3)}\xi^4_{(4)}$$
$$+ x_5^{(0)}x_1^{(3)}\xi^1_{(4)} - x_5^{(0)}x_3^{(3)}\xi^4_{(4)} - x_6^{(0)}x_2^{(3)}\xi^1_{(4)} - x_6^{(0)}x_3^{(3)}\xi^3_{(4)}.$$

我们使用 Macaulay2 [9]的 dgalgebras 软件包确定了这些公式。我们发现

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= -x_1^{(0)}x_1^{(0)}x_5^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_1^{(0)}x_1^{(0)}x_6^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad - x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_5^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_6^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_6^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad + x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_5^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_5^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad - x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_6^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_1^{(0)}x_4^{(0)}x_5^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_1^{(0)}x_4^{(0)}x_6^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad + x_1^{(0)}x_5^{(0)}x_5^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_1^{(0)}x_5^{(0)}x_6^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_1^{(0)}x_5^{(0)}x_6^{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad + x_1^{(0)}x_6^{(0)}x_6^{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_2^{(0)}x_2^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_2^{(0)}x_2^{(0)}x_6^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad + x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_5^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad - x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_6^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_5^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad + x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_6^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_6^{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_2^{(0)}x_5^{(0)}x_6^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad + x_2^{(0)}x_6^{(0)}x_6^{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_3^{(0)}x_3^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} + x_3^{(0)}x_3^{(0)}x_5^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad - x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_4^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_5^{(0)}\xi^1_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_5^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\\
&\quad - x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_6^{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_3^{(0)}x_5^{(0)}x_5^{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)} - x_3^{(0)}x_5^{(0)}x_6^{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)},
\end{aligned}
$$

$$\pi_2 = 0, \qquad \pi_3 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\pi_4 &= -x_1^{(0)}x_1^{(0)}x_1^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_1^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_1^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)}\\
&\quad - x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_1^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^6_{(0)}xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_1^{(0)}x_3^{(0)}x_1^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_1^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad + x_1^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_1^{(0)}x_5^{(0)}x_1^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} - x_1^{(0)}x_5^{(0)}x_1^{(2)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)}\\
&\quad + x_1^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_1^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_1^{(0)}x_6^{(0)}x_1^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad - x_1^{(0)}x_6^{(0)}x_1^{(2)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} + x_1^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_1^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_2^{(0)}x_2^{(0)}x_1^{(2}\big)\\
&\quad \xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_2^{(0)}x_3^{(0)}x_1^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)}\\
&\quad - x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(2)}\xi^4_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^2_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad + x_2^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_2^{(0)}x_5^{(0)}x_1^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_2^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)}\\
&\quad - x_2^{(0)}x_6^{(0)}x_1^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} - x_2^{(0)}x_6^{(0)}x_1^{(2)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} + x_2^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad + x_2^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_3^{(0)}x_3^{(0)}x_1^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} + x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_1^{(2)}\xi^4_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)}\\
&\quad - x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_3^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_3^{(0)}x_5^{(0)}x_1^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad + x_3^{(0)}x_5^{(0)}x_1^{(2)}\xi^5_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} - x_3^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^3_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_3^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)}\\
&\quad - x_3^{(0)}x_6^{(0)}x_1^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_3^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^2_{(2)} + x_4^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}\xi^1_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad + x_4^{(0)}x_4^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_4^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^1_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_4^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad + x_4^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^4_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_5^{(0)}x_5^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_5^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^2_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}\\
&\quad + x_5^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^5_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)} + x_6^{(0)}x_6^{(0)}x_2^{(2)}\xi^3_{(0)}\xi^6_{(0)}\xi^7_{(0)}\xi^1_{(2)}.
\end{aligned}
$$

References

1. D. Arnal、D. Manchon 和 M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, 《Pacific J. Math.》 203（2002），第 1 期，23–66。2. Luchezar L. Avramov, *Infinite free resolutions*, 《交换代数六讲》（贝拉特拉，1996），数学进展丛书，第 166 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，1998，第 1–118 页。3. Luchezar L. Avramov 和 J¨urgen Herzog, *Jacobian criteria for complete intersections. The graded case*, 《数学发明》117（1994），第 1 期，75–88。

4. H.F. Blichfeldt, *Finite collineation groups: With an introduction to the theory of groups of operators and substitution groups* 1917 ,

康奈尔大学图书馆历史数学专著，芝加哥大学出版社，。5. Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, 《符号计算杂志》24（1997），第 3-4 期，235–265，计算代数与数论（伦敦，1993）。6. Paulo Brumatti 和 Aron Simis, *The module of derivations of a Stanley-Reisner ring*, 《美国数学会会议录》123（1995），第 5 期，1309–1318。7. Alberto S Cattaneo 和 Giovanni Felder, *Relative formality theorem and quantisation of coisotropic submanifolds*, 《数学进展》208（2007），第 2 期，521–548。8. Baohua Fu, *Symplectic resolutions for nilpotent orbits*, 《数学发明》151（2003），第 1 期，167–186。9. Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*, 可在 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/获取。10. Yohsuke Hagiwara, *Nambu-Dirac manifolds*, 《物理学杂志 A：数学与通论》35（2002），第 5 期，1263。11. Hans-Christian Herbig, *Variations on homological reduction*, https://arxiv.org/abs/0708.3598。12. Hans-Christian Herbig、Daniel Herden 和 Christopher Seaton, *Homological invariants of Poisson algebras*, 准备中。13. , *Higher Koszul Brackets on the Cotangent Complex*, 《国际数学研究通知》（2022），rnac170。14. Hans-Christian Herbig、Gerald W. Schwarz 和 Christopher Seaton, *Symplectic quotients have symplectic singularities*, 《组合数学》156（2020），第 3 期，613–646。15. Melvin Hochster 和 Joel L. Roberts, *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay*, 《数学进展》13（1974），115–175。16. Wolfram Research, Inc., *Mathematica, Version 13.1*, 伊利诺伊州尚佩恩，2022。17. H. M. Khudaverdian 和 Th. Th. Voronov, *Higher Poisson brackets and differential forms*, 《物理学中的几何方法》，《美国物理联合会会议论文集》，第 1079 卷，美国物理学会，纽约州梅尔维尔，2008，第 203–215 页。18. Felix Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Birkh¨auser Verlag，巴塞尔；B. G. Teubner，斯图加特，1993，1884 年原版重印，由 Peter Slodowy 编辑，并附导言和评注。19. Peter B. Kronheimer 和 Hiraku Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, 《数学年刊》288（1990），第 2 期，263–307。20. Ernst Kunz, *Kähler differentials*, 《数学高级讲座》，Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，1986。21. Camille Laurent-Gengoux、Anne Pichereau 和 Pol Vanhaecke, *Poisson structures*, 《数学科学基础丛书》 [《数学科学基本原理》], 第 347 卷，施普林格，海德堡，2013。22. G.W. Leibniz 和 R. Zimmermann, *Leibnitz' monadologie*, Braum¨uller und Seidel, 1847。23. Marco Manetti, *The cotangent complex in characteristic 0*, 讲义，2012。24. Yoichiro Nambu, *Generalized Hamiltonian dynamics*, 《物理评论 D》（第 3 版）7（1973），2405–2412。25. George S. Rinehart, *Differential forms on general commutative algebras*, 《美国数学会会刊》108（1963），195–222。26. Mitchell Rothstein, *The structure of supersymplectic supermanifolds*, 《理论物理中的微分几何方法》（柏林、海德堡）（C. Bartocci、U. Bruzzo 和 R. Cianci 编），施普林格柏林海德堡，1991，第 331–343 页。27. Bernd Sturmfels, *Algorithms in invariant theory*, 施普林格科学与商业媒体，2008。28. Leon Takhtajan, *On foundation of the generalized Nambu mechanics*, 《数学物理通讯》160（1994），第 2 期，295–315。29. I. Vaisman, *A survey on Nambu-Poisson brackets*, 《科门尼乌斯大学数学学报》（新系列）68（1999），第 2 期，213–241。30. Theodore Voronov, *Higher derived brackets and homotopy algebras*, 《纯粹与应用代数杂志》202（2005），第 1-3 期，133–153。31. Edward Witten, *Two dimensional gauge theories revisited*, 《几何与物理杂志》9（1992），第 4 期，303–368。32. Ping Xu, *Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry*, 《数学物理通讯》200（1999），第 3 期，545–560。33. Stephen Shing-Toung Yau 和 Yung Yu, *Gorenstein quotient singularities in dimension three*, 第 505 卷，美国数学会，1993。

Departamento de Matemática Aplicada Universidade Federal do Rio de Janeiro Av. Athos da Silveira Ramos149, Centro de Tecnologia - Bloco C, CEP: 21941-909 - Rio de Janeiro, Brazil*Email address*: herbighc@gmail.com

Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Federal Fluminense, Rua Alexandre Moura, 8 Coseac - Bloco C - térreo - São Domingos, CEP:24210-200, Niterói - RJ, Brazil*Email address*: amchaparroc@unal.edu.co