arXiv:2302.01783v1 [math.NT] 3 Feb 2023

移位欧拉函数的迭代

PAOLO LEONETTI 和 FLORIAN LUCA

摘要。设 φ 为欧拉函数，并固定一个整数 $k \geq 0$。我们证明，对每个初始值 $x_1 \geq 1$，由 $x_{n+1} = \varphi(x_n) + k$ 对所有 $n \geq 1$ 定义的正整数序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 都是最终周期的。类似地，对每个初始值 $x_1, x_2 \geq 1$，由 $x_{n+2} = \varphi(x_{n+1}) + \varphi(x_n) + k$ 对所有 $n \geq 1$ 定义的正整数序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 都是最终周期的，前提是 k 为偶数。

1. 引言与主要结果

设 $\mathbb{N}$ 为正整数集合，并固定一个算术函数 $f\colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$，其中某个$d \in \mathbb{N}$。设 $(x_n)_{n\geq 1}$ 为满足以下递推关系的正整数序列

$$x_{n+d} = f(x_n, \dots, x_{n+d-2}, x_{n+d-1}) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

初始值为 $x_1, ..., x_d \in \mathbb{N}$。当 $d = 1$ 时，序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 就是 x_1 关于 f 的轨道。本文旨在研究某些形如（1）的递推序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 是否不依赖于其初始值而最终周期，即对于所有 $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{N}$，存在 $T \in \mathbb{N}$，使得 $x_n = x_{n+T}$ 对所有充分大的 n。

在下文中，我们将默认使用以下基本观察：递推序列 $(x_n)_{n\geq 1}$如（1）所示，当且仅当其有界时才是最终周期的，参见 [5, 第 45]页。

我们从一个关于函数 f （其值不会太大）的简单结果开始：

命题1。设 $f\colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$ 为一个算术函数，满足 $d \in \mathbb{N}$，并假设存在 $C \in \mathbb{N}$ 使得

$$f(n_1, \dots, n_d) < \max\{n_1, \dots, n_d\} \tag{2}$$

对所有 n_1，.....，$n_d \in \mathbb{N}$ 满足 $n_i \geq C$ 对某个 $i \in \{1, \dots, d\}$成立。设 $(x_n)_{n\geq 1}$ 是如 (1)所示的递推序列，其初始值为 x_1，.....，$x_d \in \mathbb{N}$。则

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \max\{f(n_1, \dots, n_d) : n_1, \dots, n_d \leq C - 1\}. \tag{3}$$

特别地，$(x_n)_{n\geq 1}$ 有上界；因此是最终周期的。

命题 1 在一维情形下的特殊实例 $d = 1$ 此前已在文献中得到研究。例如，Porges [15] 考察了 $f(n)$ 是 n的数字平方和的情形，另见 [7, 11, 19]。注意，条件（2）在 $f(n_1$，.....，$n_d) = o(N)$ 满足 $N = \max\{n_1, \dots, n_d\} \to \infty$时成立。

2020 数学主题分类。主要分类 11A25、11B37。次要分类 97I30。关键词和短语。非线性递推序列；周期数列；欧拉函数；迭代。

当然，也存在其他函数 f 不满足条件（2），但使得所有形如（1）的数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 最终周期：一个简单的例子是考虑 $f(n_1,\dots,n_d):=\max\{n_1,\dots,n_d\}$ 对所有 $(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^d$ 成立的情形。与此相反，若 f 稍大一些（例如，$f(n_1,\dots,n_d):=\max\{n_1,\dots,n_d\}+1$），那么就不存在形如（1）的最终周期数列 $(x_n)_{n\geq 1}$。这正是本文工作的出发点，并引出了以下启发式论证：如果函数 f “平均而言”满足（2），那么形如（1）的每个数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 都应最终周期，且与其初始值无关。

我们将通过两种涉及欧拉函数 φ 的情形（即欧拉函数的平移迭代）来验证上述启发式论证（回想一下，$\varphi(n)$ 是 $\{1,\dots,n\}$ 中与 n 互素的整数个数）。下面给出我们的第一个主要结果。

定理 2. 固定一个整数 $k\geq 0$，并令 $(x_n)_{n\geq 1}$ 为由下式定义的递推序列

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)+k \quad \textit{for all } n\in\mathbb{N},$$

其初始值为 $x_1\in\mathbb{N}$。那么

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq \max\{x_1,k^4\}+(k+1)^2. \tag{4}$$

特别地，$(x_n)_{n\geq 1}$ 是最终周期的。

请注意，上界 (4) 对 x_1 的依赖无法消除：事实上，若 $k:=x_1-\varphi(x_1)$ 对某个 $x_1\in\mathbb{N}$ 成立，则序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 恒等于 x_1。

此外，定理 $k=0$ 中的平凡情形 2 也已从不同角度在文献中得到研究（当然，由于 1，它可由命题 $\varphi(n)\leq n-1$ 对所有 $n\geq 2$ 均成立而推出）。事实上，给定初始值 $x_1\in\mathbb{N}$，则 $x_{n+1}=\varphi^{(n)}(x_1)$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立，其中 $\varphi^{(m)}$ 是 m-重迭代 φ。例如，Pillai [12] 证明了

$$\left\lfloor \frac{\log x_1-\log 2}{\log 3}\right\rfloor +1\leq N(x_1)\leq \left\lfloor \frac{\log x_1}{\log 2}\right\rfloor +1 \quad \text{for all } x_1\in\mathbb{N},$$

其中，$N(x_1)$ 是满足 $x_n=1$ 的最小整数 n（另见 [17]），Erdős 等人猜想 [4] $N(x_1)\sim \alpha \log x_1$ as $x_1\to\infty$，其中某个 $\alpha\in\mathbb{R}$。已知，理解 φ 的乘法结构及其迭代，在某种意义上等价于研究形如 $p-1$ 的整数的行为，其中 p 为素数。相关工作另见[8, 10, 14, 18]。

另一方面，若 $k\geq 1$，则函数 $f(n):=\varphi(n)+k$ 不满足条件（2）：事实上，$\varphi(p)=p-1$ 对所有素数 p 均成立，因此 $f(p)\geq p$。然而，众所周知，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)=\frac{3}{\pi^2}n+O(\log n) \quad \text{as } n\to\infty \tag{5}$$

（例如参见 [2, 定理 8。6]）因此，粗略地将 $f(n)$ 近似为 $cn+k$，其中 $c=3/\pi^2\in(0,1)$，我们预期（2）“平均而言”成立，这正是定理 2 背后的启发式论证。

我们的第二个主要结果如下。

定理3. 取一个偶整数 $k \geq 0$，并设 $(x_n)_{n\geq 1}$ 为由下式定义的递推序列

$$x_{n+2} = \varphi(x_{n+1}) + \varphi(x_n) + k \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N},$$

初始值为 x_1，$x_2 \in \mathbb{N}$。那么

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq 4^{X^{3^{k+1}}}, \quad \textit{where } X := \frac{3x_1 + 5x_2 + 7k}{2}. \tag{6}$$

特别地，$(x_n)_{n\geq 1}$ 是最终周期的。

支持定理 3 的启发式论证类似：由（5），数值 $f(n,m) := \varphi(n) + \varphi(m) + k$ 可粗略地以上界 $2c\max\{n,m\}+k$估计；由于 $\max\{n,m\}$，它显然更小。$2c = 6/\pi^2 < 1$。

最后，我们提出一个开放问题：检验当 d 足够大时，是否存在初始值 $x_1, .., x_d \in \mathbb{N}$，使得序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 按（1）定义，且

$$f(n_1, \ldots, n_d) = \varphi(n_1) + \cdots + \varphi(n_d)$$

不是最终周期的。从某种意义上说，这与一个名为 Lehmer 欧拉函数问题的开放问题有关 [9], ，该问题询问是否存在合数 $q \geq 2$ 满足$\varphi(q)$ 整除 $q-1$：事实上，若 $r := (q-1)/\varphi(q)$，$d = r$，且 $x_1 = \cdots = x_d = q$，那么序列$(x_n)_{n\geq 1}$ 将为常数。

2. 证明

我们先证明命题1。

命题1的证明。令 $\mathcal{Q}$ 为由满足 $n_i \leq C-1$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, d\}$ 的 $(n_1, \ldots, n_d)$ 组成的 d-元组集合。假设 $(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{Q}$。因此，我们可以选取最大的指标$i \in \{1, \ldots, d\}$，使得 $n_i = \max\{n_1, \ldots, n_d\}$。特别地，$n_i \geq C$。我们声称存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $(n_{m+1}, \ldots, n_{m+d}) \in \mathcal{Q}$。此外，若 m 是满足条件的最小整数，则对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$，$\max\{n_j, \ldots, n_{j+d-1}\}$ 递减。为此，反设该断言不成立。根据既定假设 (2)，我们得到 $n_{d+1} = f(n_1, \ldots, n_d) < n_i$。重复这一推理，我们得到对所有 $j \in \{1, \ldots, i\}$，$n_{d+j} < \max\{n_j, \ldots, n_{d+j-1}\} = n_i$。因此，$\max\{n_{i+1}, \ldots, n_{i+d}\} \leq n_i - 1$。类似地进行推理可得

$$\max\{n_{i+(k-1)d+1}, \ldots, n_{i+kd}\} \leq n_i - k \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}.$$

然而，如果 $k = n_i + 1 - C$，那么 $(n_{i+(k-1)d+1}, \ldots, n_{i+kd}) \in \mathcal{Q}$，这就证明了该断言。

为了完成证明，固定初始值 $x_1, .., x_d \in \mathbb{N}$。根据上述断言以及 $\mathcal{Q}$ 的有限性可知，序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 有上界，该上界为常数

$$\max\left(\{x_1, \ldots, x_d\} \cup \{f(n_1, \ldots, n_d) : (n_1, \ldots, n_d) \in \mathcal{Q}\}\right)$$

并且式（3）中的上限成立。 ■

定理 2 的证明。 首先，假设 $k \le 1$ 并取一个初始值 $x_1 \in \mathbb{N}$。于是

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) + k \le \max\{1, x_n - 1\} + 1 = \max\{2, x_n\}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$，从而对所有 $n \in \mathbb{N}$，有 $x_n \le \max\{x_1, 2\}$。

以下假设 $k \ge 2$。注意，对所有 $n, m \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} x_{n+m} &\le \max\{x_{n+m-1} - 1, 1\} + k \\ &= \max\{x_{n+m-1} + k - 1, k + 1\} \le \max\{x_n + m(k-1), k+1\}. \end{aligned} \tag{7}$$

为导出矛盾，假设 $(x_n)_{n\ge 1}$ 没有上界。因此，存在最小的 $r_1 \in \mathbb{N}$，使得 $x_{r_1} \ge k^4$（特别地，$x_{r_1} > 4$）。

断言 1。 存在 $i \in \{1, \dots, k\}$，使得 $x_{r_1+i} < x_{r_1}$。

证明。 由于每当 n 为合数时，$\varphi(n) \le n - \sqrt{n}$（这是因为存在 n 的一个至多为 $\sqrt{n}$ 的因子），可知，若对某个 $i \in \{1, \dots, k\}$，x_{r_1+i-1} 为合数，则

$$x_{r_1+i} = \varphi(x_{r_1+i-1}) + k \le x_{r_1+i-1} - \sqrt{x_{r_1+i-1}} + k.$$

考虑到映射 $x \mapsto x - \sqrt{x}$ 在 $(4, \infty)$ 上递增，并利用（7），我们得到

$$\begin{aligned} x_{r_1+i} &\le x_{r_1} + (i-1)(k-1) - \sqrt{x_{r_1} + (i-1)(k-1)} + k \\ &\le x_{r_1} + (k-1)^2 - \sqrt{k^4} + k < x_{r_1}. \end{aligned}$$

最后，我们证明存在某个 $i \in \{1, \dots, k\}$，使得 x_{r_1+i-1} 是合数。事实上，反之，这些 x_{r_1+i-1} 都是素数（且大于 k），因此

$$x_{r_1+i-1} = x_{r_1} + (i-1)(k-1) \equiv x_{r_1} - (i-1) \bmod k$$

对所有 $i \in \{1, \dots, k\}$ 均成立。这是不可能的，因为存在 $i \in \{1, \dots, k\}$ 使得 k 整除 x_{r_1+i-1}。
■

此时，不等式（7）和断言 1 表明存在一个最小的 $i_1 \in \{1, \dots, k\}$使得 $x_{r_1+i_1} < x_{r_1}$；因此

$$\max\{x_1, \dots, x_{r_1+i_1-1}\} \le x_{r_1} + (i_1 - 1)(k-1) < x_{r_1} + k^2. \tag{8}$$

用同样的方法，我们可以递归地构造正整数序列（r_n）和（i_n），使得对所有 $n \in \mathbb{N}$:

(i) r_{n+1} 是满足 $r_{n+1} \ge r_n + i_n$ 和 $x_{r_{n+1}} \ge k^4$的最小整数;
(ii) i_{n+1}是 $\{1, \dots, k\}$中满足 $x_{r_{n+1}+i_{n+1}} < x_{r_n}$的最小整数；因此,

$$\max\{x_{r_n+i_n}, \dots, x_{r_{n+1}+i_{n+1}-1}\} \le x_{r_{n+1}} + (i_{n+1} - 1)(k-1) < x_{r_{n+1}} + k^2. \tag{9}$$

最后，注意到

$$x_{r_n} = \varphi(x_{r_n - 1}) + k \le x_{r_n - 1} + k \le k^4 + k \le x_{r_1} + k \tag{10}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。利用不等式（8）、（9）和（10），我们得出

$$x_n < x_{r_1} + k^2 + k \le \max\{x_1, k^4 + k\} + k^2 + k < \max\{x_1, k^4\} + (k+1)^2$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。这就证明了（4），从而完成证明。 ■

注4. 关于定理 2 中序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 最终周期性的较短证明思路如下：对所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $y_n := \varphi(x_n)$，并注意到 $y_n \leq Cn$，其中 $C := \max\{x_1, k\}$。因此，$\{y_1, \ldots, y_n\}$ 包含于 $V_n := \varphi(\mathbb{N}) \cap [1, Cn]$。根据 Pillai 的一个经典结果（[13]，；另见 [6] 及其中的参考文献），当 $n \to \infty$ 时，我们有 $|V_n| = o(n)$，因此存在互不相同的 i、$j \in \mathbb{N}$，使得 $y_i = y_j$。这意味着 $x_{i+1} = x_{j+1}$，故 $(x_n)_{n\geq 1}$ 最终周期。不过，这并不能像式 (4) 那样导出一个有效的上界。

在定理 3 的证明中，我们还需要 Rosser 和 Schoenfeld 在1962年给出的第三梅滕斯定理的有效版本 [16]（另见 [1, 3]）。与往常一样，下文中我们用字母 p 表示素数。

命题 5. 令 $\gamma := \lim_n \left(\sum_{i\leq n} 1/i - \log n\right) = 0.57721\ldots$ 为欧拉–马歇罗尼常数。则对所有 $x \geq 2$:，以下不等式成立。

$$\frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 - \frac{1}{\log^2 x}\right) < \prod_{p\leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2\log^2 x}\right).$$

证明。 参见 [16, 定理 7 及其推论]。 ■

推论 6. 若 $x \geq 6$ 则

$$\prod_{x<p\leq x^3}\left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{2}.$$

证明。 根据命题 5，对每个 $r \geq 2$ 存在 $c_r \in (-1, 1/2)$ 使得

$$\prod_{p\leq r}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 + \frac{c_r}{\log^2 x}\right).$$

此时，固定 $x \geq 6$。由此可得

$$\begin{aligned}\prod_{x<p\leq x^3}\left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \frac{\prod_{p\leq x^3}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p\leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \\ &= \frac{e^{-\gamma}/(\log x^3)}{e^{-\gamma}/\log x} \cdot \frac{(1 + c_{x^3}/(\log x^3)^2)}{1 + c_x/(\log x)^2} \\ &< \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + 0.5/(9\log^2 x)}{1 - 1/(\log^2 x)} < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

事实上，最后一个不等式等价于

$$\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{18\log^2 x}\right) < 1 - \frac{1}{\log^2 x},$$

当且仅当

$$x > e^{\sqrt{3\left(1+\frac{1}{27}\right)}}.$$

结论成立，因为上述右侧的值小于 6。 ■

定理 3 的证明。若 最大值$\{x_1, x_2\} \le 2$ 且 $k = 0$ 则 $x_n = 2$ 对所有 $n \ge 3$，因此所声称的不等式（6）成立，因为 $4^{X^{3^{k+1}}} \ge 4 > x_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。

因此，以下不妨设 $\max\{x_1, x_2\} \ge 3$ 或 $k \ge 1$，并注意到 $X = \frac{1}{2}(3x_1 + 5x_2 + 7k) \ge 6$。我们得到 $\min\{x_3, x_4\} \ge 3$；因此，对于所有 $n \ge 5$， x_n 都是偶数。此外，由于 $\max\{x_1, \dots, x_6\} \le 2X$ 和

$$4^{X^{3^{k+1}}} \ge 4^X = 2^{2X} > 2X,$$

由此可知，所声称的不等式对所有 $n \le 6$均成立。

令 $(p_n)_{n\ge1}$ 表示大于 X的素数的递增枚举。鉴于$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于零，根据命题 5，可以找到整数 $1 =: r_0 < r_1 < \cdots < r_{k+1}$ 使得

$$\prod_{i=r_j}^{r_{j+1}-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) < \frac{1}{2} < \prod_{i=r_j}^{r_{j+1}-2}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \quad \text{for all } j \in \{0,1,\dots,k\}. \tag{11}$$

另外定义

$$q_j := \prod_{i=r_j}^{r_{j+1}-1} p_i \quad \text{for all } j \in \{0,1,\dots,k\}.$$

由于 $\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$ 两两互素，中国剩余定理保证存在某个 $y \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $j \in \{0,1,\dots,k\}$， $y \equiv j$ 模 q_j。特别地

$$y \ge q_0 \ge p_{r_0} > X. \tag{12}$$

为导出矛盾，假设$(x_n)_{n\ge1}$ 无界。因此，存在一个最小的 $v \in \mathbb{N}$ 使得 $x_v \ge 2y$。由于$\max\{x_1, \dots, x_6\} \le 2X$，由 (12) 可得 $v \ge 7$。特别地， x_{v-1} 和 x_{v-2} 都是偶数。

命题 2. $\max\{\varphi(x_{v-1})\ \varphi(x_{v-2})\} < y - k$。

证明。如果 $x_{v-1} < 2y - 2k$，那么根据 x_{v-1} 是偶数这一事实， $\varphi(x_{v-1}) \le \frac{1}{2}x_{v-1} < y - k$。否则，回想一下， v 是满足 $x_v \ge 2y$ 的最小整数，则 $2y - 2k \le x_{v-1} < 2y$。此外， x_{v-1} 是偶数，因此对于某个 $j \in \{1,\dots,k\}$，有 $x_{v-1} = 2y - 2j$。由此可得

$$\varphi(x_{v-1}) = x_{v-1}\prod_{p\,|\,x_{v-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right) = (y-j)\prod_{p\,|\,x_{v-1}}{}'\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

其中，最后一个乘积遍历 x_{v-1}的奇素数因子。由构造可知 $y \equiv j$ 模 q_j，因此根据（11）可得

$$\varphi(x_{v-1}) \le (y-j)\prod_{i=r_j}^{r_{j+1}-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) < \frac{y-j}{2} < y-k.$$

注意，最后一个不等式成立是因为 $y > 2k$，这由（12）可知。

对于 x_{v-2}，可以重复同样的论证。 ■

根据2 中的断言，我们得出

$$2y \le x_v = \varphi(x_{v-1}) + \varphi(x_{v-2}) + k < 2(y-k) + k \le 2y,$$

这就产生了矛盾。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 2y$。

为了完成证明，只需证明 $2y \le 4^{X^{3^{k+1}}}$。为此，定义 $X_n := X^{3^n}$对所有 $n \ge 0$，并注意到，由推论 6，可得

$$\prod_{X_n < p \le X_n^3} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{2} \quad \text{for all } n \ge 0.$$

根据 r_j 的定义，可得

$$r_j \le X_j \quad \text{for all } j \in \{0, 1, \dots, k+1\}.$$

最后，由于 $\prod_{p \le x} p < 4^x$ 对所有 $x \ge 1$ （例如参见 [2, 引理 2。8]），我们得出

$$2y \le 2 \prod_{j=0}^{k} q_j \le \prod_{i=1}^{r_{k+1}} p_i \le \prod_{p \le X_{k+1}} p \le 4^{X_{k+1}}.$$

因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$, $x_n \le 4^{X_{k+1}}$。 ■

参考文献

[1] C. Axler，素数上定义的某些函数的新估计，Integers 18 (2018)，论文编号 A52，21页。[2] J.-M. De Koninck 和 F. Luca，《解析数论》，Graduate Studies in Mathematics，第134卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012年，《探索整数的结构》。[3] P. Dusart，关于大值 x 的 ψ、θ 估计（不假设黎曼猜想），Mathematics of Computation 85 (2016)，第298期，875–888页。[4] P. Erdős、A. Granville、C. Pomerance 和 C. Spiro，某些算术函数迭代的正态行为，载于《解析数论》（阿勒顿公园，伊利诺伊州，1989），Progress in Mathematics，第85卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年，第165–204页。[5] G. Everest、A. van der Poorten、I. Shparlinski 和 T. Ward，《递推数列》，Mathematical Surveys and Monographs，第104卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003年。[6] K. Ford，欧拉函数值的分布，第2卷，1998年，Paul Erdős（1913–1996），第67–151页。[7] R. Isaacs，《分数阶迭代》，《加拿大数学杂志》2 (1950)，409–416页。[8] Y. Lamzouri，欧拉 φ 函数迭代的光滑值，《加拿大数学杂志》59 (2007)，第1期，127–147页。[9] D. H. Lehmer，论欧拉函数，Bulletin of the American Mathematical Society 38 (1932)，第10期，745–751页。[10] P. Loomis 和 F. Luca，论欧拉函数丰数，Integers 8 (2008)，A6，7页。[11] D. Lorenzini、M. Melistas、A. Suresh、M. Suwama 和 H. Wang，《整数动力学》，International Journal of Number Theory 18 (2022)，第2期，397–415页。[12] S. S. Pillai，论与 $\phi(n)$ 有关的函数，Bulletin of the American Mathematical Society 35 (1929)，第6期，837–841页。[13] S. S. Pillai，论与 $\phi(n)$ 有关的某些函数，Bulletin of the American Mathematical Society 35 (1929)，第6期，832–836页。[14] P. Pollack，关于欧拉函数迭代的两点注记，Archiv der Mathematik (Basel) 97 (2011)，第5期，443–452页。[15] A. Porges，一组八个数，American Mathematical Monthly 52 (1945)，379–382页。[16] J. B. Rosser 和 L. Schoenfeld，若干素数函数的近似公式，Illinois Journal of Mathematics 6 (1962年)，64–94页。[17] H. Shapiro，一个由 ϕ 函数导出的算术函数，American Mathematical Monthly 50 (1943)，18–30页。

[18] I. E. Shparlinski，欧拉函数迭代和，《整数序列杂志》**9**(2006)，第1期，文章编号 06.1.6，5页。[19] B. M. Stewart，数字函数之和，《加拿大数学杂志》**12**(1960)，374–389页。

意大利瓦雷泽，蒙特杰内罗索街 71 号，邮编 21100，因苏布里亚大学经济学系电子邮箱：leonetti.paolo@gmail.com

南非金山威特沃特斯兰德大学数学学院，Wits 2050，私人邮袋 3电子邮箱：Florian.Luca@wits.ac.za