arXiv:2302.01792v2 [quant-ph] 5 Oct 2023

# 研究含噪中等规模量子设备上用于最大割问题的量子近似优化算法中电路切割的影响

**Marvin Bechtold、Johanna Barzen、Frank Leymann、Alexander Mandl、Julian Obst、Felix Truger 和 Benjamin Weder**

应用系统架构研究所，斯图加特大学，Universit¨atsstraße 38，
70569 斯图加特，德国

电子邮件：firstname.lastname@iaas.uni-stuttga rt.de

2023年7月

**摘要**。 含噪中等规模量子设备受限于量子比特数量有限和退相干时间较短。量子电路切割是一种应对这些问题的方法。它将大型量子电路的执行分解为多个较小量子电路的执行，并辅以额外的经典后处理。由于这些较小的量子电路所需的量子比特和量子门较少，因此更适用于含噪中等规模量子设备。为了研究量子电路切割对面向含噪中等规模量子设备的量子算法的影响，我们针对最大割问题，设计了两个采用量子近似优化算法的实验，并在最先进的超导量子设备上开展实验。第一个实验研究电路切割对量子近似优化算法目标函数的影响，第二个实验评估采用电路切割的完整算法所得结果的质量。结果表明，电路切割能够减轻噪声对量子近似优化算法的影响，因此该算法在含噪中等规模量子设备上能得到更好的解。

关键词：电路切割、NISQ、量子近似优化算法、最大割、量子计算

提交至：《量子科学与技术》

## 1. 引言

量子计算有望解决经典高性能计算机难以处理的问题 [1, 2]。然而，当前的含噪中等规模量子（*NISQ*）设备拥有数量有限的量子比特，并且由于量子态退相干、所实施量子门的不精确以及错误的测量，在其上进行的计算存在缺陷 [3, 4]。这些错误会在计算过程中累积，因此，NISQ 设备的错误率限制了可执行电路的宽度和深度 [4, 5]。由于存在这些不足，NISQ 设备需要结合浅层量子电路与经典计算的混合算法，以发挥二者各自的优势 [5]。这包括变分量子算法（*VQAs*）这一类算法：在量子设备上反复运行参数化量子电路，即所谓的拟设，并利用经典优化器进行参数优化 [6]。这些算法能够在计算过程中容忍一定程度的噪声，因此被认为是在 NISQ 设备上实现量子优势的一种有前景的方法。用于解决组合优化问题的一种典型变分量子算法是量子近似优化算法（*QAOA*） [7]。即使对于深度较小的电路，QAOA 通常也无法在任何经典设备上实现高效模拟 [8]。

然而，当前可用的量子比特数量太少 [9], ，而当前含噪中等规模量子设备的噪声太大 [10–12] ，因此无法充分发挥量子近似优化算法的潜力以实现量子优势。因此，缩小量子电路规模（即降低其宽度和深度）的策略或许有助于克服这些挑战。解决这一问题的一种方法是量子电路切割 [13–15]。其主要思路是将需要大量量子比特的大型量子电路切分成所需量子比特较少的较小子电路。在后处理中，经典计算机通过组合运行这些子电路所得的结果，生成原始量子电路的结果。这样便可利用小型量子计算机和额外的经典后处理来评估大型量子电路。此外，将电路切分为子电路也可以降低其深度 [14]。由于较浅的电路较不易受噪声影响，因此更适用于含噪中等规模量子设备 [5]。然而，电路切割在量子近似优化算法中的潜力仍是一个尚待解答的问题。

因此，我们通过研究在存在噪声的情况下，电路切割在多大程度上能够改善量子近似优化算法的结果，来探讨这一问题。为此，我们设计了两项实验，将电路切割应用于最大割 (MaxCut) 问题的量子近似优化算法，并在最先进的含噪中尺度量子设备上执行。第一项实验评估在量子近似优化算法中应用电路切割后，含噪中等规模量子设备上计算得到的目标函数如何变化。第二项实验研究目标函数的这些变化如何影响量子近似优化算法的近似解。因此，我们分别对应用和未应用电路切割的 QAOA 电路参数进行经典优化，并比较在含噪中等规模量子设备上取得的结果。

本文其余部分安排如下。接下来，第2节介绍相关背景，第3节讨论相关工作。在此基础上，第4节阐述问题的动机并完善研究问题。随后，第5节

介绍研究设计，第6节呈现结果。之后，第7节讨论研究发现，第8节总结全文。

## 2. 背景

本节简要介绍量子近似优化算法（QAOA）的基础知识及其在最大割问题中的应用。随后，我们将介绍量子电路切割，并给出后文所使用的技术。

### *2.1. QAOA*与最大割问题

QAOA能够求解最大割 [7]和最大独立集问题 [16]等组合优化问题。目标是找到一个比特串$\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_n) \in \{0,1\}^n$，使目标函数 $\mathcal{C}(\boldsymbol{z})$最大化；该目标函数被编码在代价哈密顿量 $H_C$ 的对角线上，使得 $H_C |\boldsymbol{z}\rangle = \mathcal{C}(\boldsymbol{z}) |\boldsymbol{z}\rangle$。因此，可以通过寻找 $H_C$ 的特征向量 $|\boldsymbol{z}\rangle$ 来求解该优化问题，其中该特征向量对应最大的特征值

$$\max_{|\boldsymbol{z}\rangle} \langle \boldsymbol{z}| H_C |\boldsymbol{z}\rangle = \mathcal{C}_{\max}. \tag{1}$$

为此，QAOA使用一个拟设，将成本算符 $U(H_C, \gamma_l) = \exp(-i\gamma_l H_C)$和混合算符 $U(H_B, \beta_l) = \exp(-i\beta_l H_B)$交替应用 $p$ 次于初始态 $|+\rangle^{\otimes n}$ [7]。其中，$H_B = \sum_i X_i$，这里的 $X_i$ 是施加于第 $i$个量子比特上的泡利X矩阵。因此，QAOA拟设的结果态为：

$$|\psi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\rangle = \left( \prod_{l=1}^{p} U(H_B, \beta_l) U(H_C, \gamma_l) \right) |+\rangle^{\otimes n} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_p)$ 和 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_p)$ 是变分参数。经典优化器会更新参数 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$，以最大化拟设 $|\psi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\rangle$ 上可观测量 $H_C$ 的期望值：

$$\langle H_C \rangle_{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}} = \langle \psi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})| H_C |\psi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})\rangle . \tag{3}$$

一般来说，$p$ 的值越高，得到的近似解就可能越好，但代价是需要进行更多计算 [7]。为简化起见，我们将 $\langle H_C \rangle_{\beta_1, \gamma_1} = \langle H_C \rangle_{(\beta_1), (\gamma_1)}$记作 $p = 1$。

量子近似优化算法中一个常被研究的问题是最大割问题 [7, 11, 12, 17–19]。它出现在许多应用领域，例如固体物理和集成电路设计 [20] 以及数据聚类 [21]。因此，高效求解最大割问题有助于加快这些问题的解的计算。图 $G = (V, E)$ 的割会将其顶点集合 $V$ 分成两个划分，并可表示为一个比特串$\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^{|V|}$，其中每一位都将一个顶点分配到两个划分之一。割的大小是跨越这两个划分的边的数量。一个最大割是

至少与该图的任何其他割一样大。对于给定图，寻找这样的割称为最大割问题，这是一种众所周知的 NP难问题 [22]。

使用量子近似优化算法求解最大割问题时，图 G 的代价哈密顿量定义为 [7], thecost

$$H_{C_{\mathrm{MaxCut}}} = \frac{1}{2} \sum_{(v,w)\in E} (I - Z_v Z_w) \tag{4}$$

其中， $Z_v$ 是作用于第 $v$ 个量子比特的泡利 Z 矩阵。因此， $H_{C_{\mathrm{MaxCut}}}$ 中的每个独立求和项 $I - Z_v Z_w$ 都会增大解 $z$ 的特征值，当且仅当 $z_v \neq z_w$，也就是说，当且仅当相应的边（$v$， $w$）跨越该割所形成的划分。相应的哈密顿量 $H_{C_{\mathrm{MaxCut}}}$ 的酉算子为

$$U(H_{C_{\mathrm{MaxCut}}}, \gamma_l) = \exp\left(-i\gamma_l |E|/2\right) \prod_{(v,w)\in E} \exp\left(i\gamma_l Z_v Z_w/2\right) \tag{5}$$

它可以实现为 $R_{ZZ}(-\gamma_l) = \exp\left(i\gamma_l Z_v Z_w/2\right)$ 量子门的乘积，差一个全局因子 $\exp(-i\gamma_l |E|/2)$。哈密顿量 $H_B$ 对应的酉算子为

$$U(H_B, \beta_l) = \prod_{v\in V} \exp\left(-i\beta_l X_v\right) \tag{6}$$

它由 $R_X(2\beta_l) = \exp\left(-i\beta_l X_v\right)$ 量子门相乘构成。 $R_{ZZ}(\gamma_l)$ 门实现绕 $Z \otimes Z$ 旋转、角度为 $\gamma_l$ 的双量子比特旋转，而 $R_X(2\beta_l)$ 门实现绕 X 轴旋转、角度为 $2\beta_l$ 的单量子比特旋转。因此，最大割问题的问题实例决定了拟设结构，因为图中的每条边都会对应拟设中的一个双量子比特 $R_{ZZ}$ 门。然而，具有实际意义的问题结构通常无法直接映射到当前含噪中等规模量子设备的平面架构上，因为这类设备的量子比特连接性受限 [11]。因此，必须通过插入额外的 SWAP 操作来置换量子比特并使电路适配量子设备的连接性，从而调整其量子电路 [23]。

### *2.2.* 采用门切割的量子电路切割

量子电路切割是一组技术，能够将量子电路拆分为多个量子比特和量子门数量更少的小型电路，并通过后续的经典后处理 [14, 15]，使执行这些小型电路所得的结果与执行原始电路所得的结果相同。量子电路切割的主要目标是减少所需量子比特的数量，但子电路所含的量子门也更少，因此切割也可能降低执行电路的电路深度。电路切割过程包含三个步骤：(i) 将电路切割为一组较小的子电路；(ii) 执行这些子电路；(iii) 对子电路结果进行经典重组。切割电路有两种不同方法：(i) 门切割 用一组局部操作替换双量子比特门 [15, 24]；(ii) 线路切割 将承载量子信息的电路线路（以

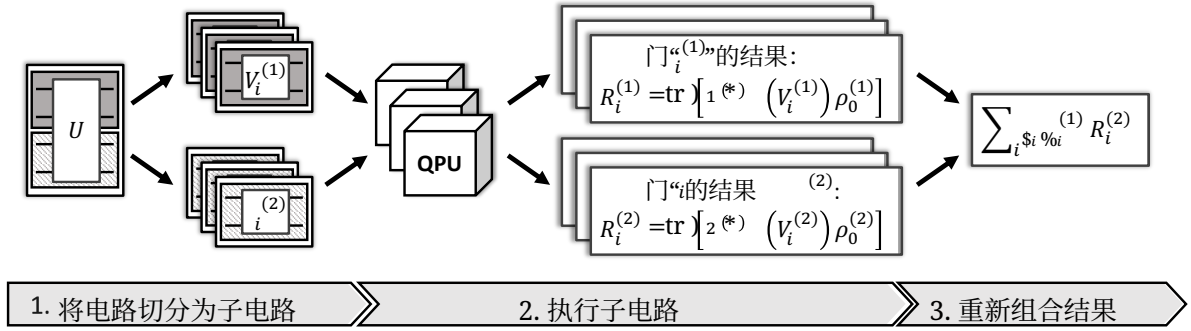



图 1：电路切割过程：通过将非局部操作替换为局部操作，将大型量子电路拆分为较小的子电路。这些较小的子电路在一个或多个量子设备上执行，并生成子电路结果；随后将这些结果重新组合，以生成初始电路的结果。

量子比特的形式）拆分为一组测量和态制备操作 [14]。在本研究中，我们采用门切割，其方法见图 1，详细说明如下。

令 $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ 表示一个由希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{(1)}$ 和 $\mathcal{H}^{(2)}$组成的二分 $n$量子比特量子系统。该系统的量子态可由密度算符 $\rho$描述，它是一个大小为 $2^n \times 2^n$ 、迹等于一的正厄米矩阵。此外，考虑一个由酉算符 $U$表示的 $n$量子比特门。在门 $U$ 的作用下，量子态的演化可由超算符$\mathcal{S}(U)$描述；它是一个作用于密度算符空间的线性算子。将 $U$ 应用于由 $\rho$ 描述的量子态后得到的新状态为 $\mathcal{S}(U)\rho = U\rho U^{\dagger}$。

酉算子 $U$ 的门切割，是将其准概率分解 *(QPD)*为一组算子 $V_i = (V_i^{(1)} \otimes V_i^{(2)})$，并为其配以复数系数 $c_i$，具体形式为$\{(V_i, c_i)\}$，使得

$$\mathcal{S}(U) = \sum_i c_i \mathcal{S}(V_i) = \sum_i c_i \mathcal{S}\left(V_i^{(1)}\right) \otimes \mathcal{S}\left(V_i^{(2)}\right) \tag{7}$$

其中 $V_{(1)\,i}$ 和 $V_i^{(2)}$ 分别是作用于子系统 $\mathcal{H}^{(1)}$ 和 $\mathcal{H}^{(2)}$ 的算子 [15]。每个算子 $V_i^{(j)}$ 都必须可物理实现，也就是说，其超算符 $\mathcal{S}(V_i^{(j)})$ 是一个完全正线性映射，且迹非增，即对任意密度算符 $\rho$ [25]，均有 $0 \leq \mathrm{tr}[\mathcal{S}(V_i^{(j)})\rho] \leq 1$。因此，这包括投影等非酉变换。门 $U$ 的分解示于图 1 的第一步中。

对于量子系统的划分 $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$，考虑一个作用于各个子系统且彼此独立的可观测量$O = O^{(1)} \otimes O^{(2)}$，以及一个可分初态$\rho_0 = \rho_0^{(1)} \otimes \rho_0^{(2)}$。因此，在初始化和测量方面，各子系统彼此独立。随后，按照酉算符 $U$ 演化密度算符 $\rho_0$，并使用可观测量 $O$ 进行测量，这一过程现在可以通过以下方式重现

通过应用 操作 $V_i$，并根据 $c$使用 $O$ 对测量结果加权 $_i$:

$$\operatorname{tr}\left[O\mathcal{S}(U)\rho_0\right] = \sum_i c_i \operatorname{tr}\left[O\mathcal{S}(V_i)\rho_0\right] \tag{8}$$

$$= \sum_i c_i \underbrace{\operatorname{tr}\left[O^{(1)}\mathcal{S}\left(V_i^{(1)}\right)\rho_0^{(1)}\right]}_{:=R_i^{(1)}} \underbrace{\operatorname{tr}\left[O^{(2)}\mathcal{S}\left(V_i^{(2)}\right)\rho_0^{(2)}\right]}_{:=R_i^{(2)}} \tag{9}$$

这样，我们便可以分别计算每个期望值 $R_i^{(1)}$ 和 $R_i^{(2)}$，然后将它们重组，以得到原始电路的期望值，如图 1 的步骤二和三所示。衡量这一过程计算开销的方法，是计算近似原始电路期望值所需的额外测量次数 [26]。根据子电路结果计算出的原始电路期望值保持不变，但由于对子电路进行采样导致方差增大，因此需要额外的测量次数。方差的增幅由因子 $\kappa$ 表征：$= \sum_i |c_i|$ 其中 $\kappa \geq 1$。先前研究表明，为达到固定的统计精度，在误差为 $\epsilon$ [27]的情况下估计原始期望值，需要额外增加 $\mathcal{O}(\kappa^2/\epsilon^2)$ 次测量。值得注意的是，经典重组步骤的计算成本受子电路测量次数的限制，因为只需通过乘法重组采样结果。

~ ~已知量子门 $U$和 $U$的量子概率分解 $\{(V_i,\ c_i)\}$ 和 $\{(V_i,\ \tilde{c}_i)\}$，则它们乘积 $UU$ 的~切割可按如下方式构造

$$\mathcal{S}(U)\mathcal{S}(\tilde{U}) = \sum_i c_i \mathcal{S}(V_i) \sum_j \tilde{c}_j \mathcal{S}(\tilde{V}_j) \tag{10}$$

$$= \sum_{i,j} c_i \tilde{c}_j \mathcal{S}(V_i)\mathcal{S}(\tilde{V}_j). \tag{11}$$

因此，由多个连续量子门构成的量子电路可以通过分别切割其中的各个量子门来切割。然而，以额外测量次数衡量的开销最坏情况下会呈指数级增长，因为每次切割都会引入一个乘法因子 $\kappa$ [26]。

### *2.3.* 量子近似优化算法的最大割拟设的门切割

QAOA 的最大割拟设中唯一的多量子比特门是 $R_{ZZ}$ 门。因此，对于给定的图，可以将其拟设中的量子比特划分为不同部分，再切割这些量子比特分区之间的所有 $R_{ZZ}$ 门，从而切割该拟设。要切割单个 $R_{ZZ}$ 门，我们采用 Mitarai 和 Fujii 提出的任意双量子比特门切割量子概率分解（QPD） [15, 24]:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(R_{ZZ}(\gamma)) = &\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(I\otimes I) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(Z\otimes Z)\\ &+ \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)(A\otimes B + B\otimes A)\end{aligned} \tag{12}$$

with

$$A := \mathcal{S}\Big(R_Z\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) - \mathcal{S}\Big(R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big) \tag{13}$$

and

$$B := \mathcal{S}\left(\frac{I-Z}{2}\right) - \mathcal{S}\left(\frac{I+Z}{2}\right). \tag{14}$$

构成 $B$ 的两个操作分别是投影到状态 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$，即 $(I-Z)/2 = |1\rangle\langle 1|$ 和 $(I+Z)/2 = |0\rangle\langle 0|$。尽管这些操作不是酉算符，因而无法直接作为量子电路中的量子门实现，但可以通过后选择测量来实现 [15]。应用此量子概率分解后，含有 $R_{ZZ}$ 门的电路可替换为以下电路：在先前相连的两个量子比特上，分别执行以下五种操作之一：一个 $I$、 $Z$、 $R_Z\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 或 $R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 门，或者进行用于投影的测量。由于这两个量子比特现在彼此分离，因此必须执行十种不同的子电路，即上方量子比特的五种操作和下方量子比特的五种操作。附录 A 给出了方程 (12) 中切割公式的证明。

## 3. 相关工作

一种统称，涵盖了将大型量子电路的计算作为多个较小子电路来执行的技术，即量子电路编织 [28]。其中包括电路切割和纠缠锻造 [29,30], ，后者是一种密切相关的技术。

在电路切割实验中，多项研究通过实践证明，电路切割可用于扩展可执行电路的规模，使其超出含噪中等规模量子设备的物理能力，例如，应用于一组基准电路，包括 [31], GHZ电路 [32],以及线性簇态电路 [33]。此外，实验表明，在含噪模拟中以及在含噪中等规模量子设备上，电路切割能够带来更好的（即噪声更少的）执行结果 [31–34]。电路切割有助于应对门错误和较短的退相干时间，因为较小的电路较不易受到这些噪声源的影响；相反，读出错误可能会对电路切割过程产生不利影响，因为该过程需要额外的测量 [34]。此外，研究还探讨了不同子电路中发生的错误如何影响最终重组结果，并由此发现，不同子电路具有不同的错误传播特性和敏感性 [35]。

电路切割的开销在最坏情况下会随切割次数呈指数增长 [36]。自首种门切割技术问世以来， [13], 人们开发了各种能够降低开销的方法及其改进方案 [14,15,24,26,36]。Peng 等人 [14]提出了首种线路切割方法，Lowe 等人 [36] 通过随机测量降低了其开销。Mitarai和Fujii [15,24] 降低了门切割的开销。此外，基于门隐形传态， [37], Piveteau和Sutter [26] 表明，在门切割中加入子电路之间的经典通信可以进一步降低开销，尽管开销仍呈指数增长。

此外，人们还进一步改进了切割方法本身，并开发了相关工具。研究者提出了一种切割框架，可自动确定最佳切割位置，并快速找到大型量子电路的解态 [31, 38]。该框架是 Qiskit 电路编织工具箱的一部分；该工具箱是一系列用于分解量子电路的工具 [39]。此外，将最大似然层析应用于线路切割，通过确保计算所得结果分布的非负性和归一化，可获得更好的结果 [40]。即使在无噪声实验中，与执行完整电路相比，该方法也能以更高的保真度估算电路结果。此外，为了减少子电路的数量，将机器学习方法应用于门切割，可以用显著减少的子电路集合近似原始电路的结果 [41]。

此外，也有研究探讨了变分量子算法电路的划分。Saleem 等人 [42] 将电路切割应用于变分量子算法，以求解最大独立集问题。然而，他们仅在模拟器上执行其方法，因为所使用的复杂多重控制量子门会导致电路对噪声过于敏感，不适用于当前的 NISQ 设备。此外，Lowe 等人 [36] 在量子近似优化算法中应用线路切割，并在模拟器上进行数值实验，以展示该方法的加速效果。这两项研究均未探讨在易出错的 NISQ 设备上运行的变分量子算法中，电路切割所产生的影响。此外，研究已在一项分类任务中证明，由多个局部电路分区组成的受限拟设可用于改进变分量子算法的训练及其抗噪鲁棒性 [43]。然而，该方法不允许这些分区之间发生任何交互，因此通常无法实现由特定问题实例的量子近似优化算法代价哈密顿量定义的精确拟设。

除了电路层级的方法外，算法层级也存在分解方法 [18,44–49]。例如，针对量子近似优化算法的分而治之方法 [18,44]，以及通过迭代优化问题中的局部子问题来进行求解的量子局部搜索方法 [45–48]。此外，Ayanzadeh 等人 [49]针对最大割问题表明，从图中移除连接性较高的节点，并在目标函数中考虑这些节点可能的赋值，可以缩小电路规模，并提高量子近似优化算法在含噪中等规模量子设备上的保真度。

## 4. 研究动机与研究问题

鉴于前文讨论的含噪中等规模量子设备所面临的问题，针对这类设备应用的算法已成为一个活跃的研究领域。一条有前景的途径是持续发展变分量子算法 [6], ，例如广受关注的量子近似优化算法。自量子近似优化算法问世以来 [7]„ 人们已开展大量工作，进一步改进该算法，以期在 NISQ 硬件上实现量子优势。例如，人们提出了新的目标函数 [50, 51], ，开展了关于 QAOA 热启动的研究 [17, 52], ，并提出了量子近似优化算法的各种改进 [53–55]。

然而，噪声仍然是量子近似优化算法面临的一个开放问题。在含噪中等规模量子设备上的实际实验中，它限制了通过增加 $p$ 来改进量子近似优化算法解的优势 [12]。

对于连接性与硬件不匹配的问题实例，这一问题尤为突出，因为 SWAP 操作带来的额外噪声会使结果质量随着问题规模增大而迅速下降 [11]。一般而言，变分量子算法计算中的噪声会导致训练景观中的梯度呈指数级消失 [19,56]。这一效应被称为噪声诱导贫瘠高原（*NIBPs*）[10]。尽管 NIBPs 和无噪声贫瘠高原 [57,58] 都会导致梯度消失，但它们影响训练景观的方式不同。无噪声贫瘠高原允许全局最小值位于一个深而窄的谷底中，而 NIBPs 会使整个景观呈指数级变平 [10,56]。尽管噪声不会改变 QAOA参数空间中的优化方向，且最优参数几乎保持不变 [19], ，但要以固定精度解析呈指数集中分布的训练景观，需要指数数量的测量次数 [10, 59]。此外，尽管无梯度优化方法不使用梯度信息，但对于具有指数级小梯度的 ans¨atze，它们所需的测量次数也会随之呈指数级增长 [60]。

由于解决无噪声贫瘠高原的常见策略对噪声诱导 barren plateau 并不奏效，因此预防噪声诱导 barren plateau 的两种基本策略仍然是 [10]：**(i)** 降低硬件噪声水平；**(ii)** 降低电路复杂度，主要关注电路深度，同时也关注电路宽度。虽然误差缓解可以减轻硬件噪声对变分量子算法的影响 [61, 62], ，但这类技术中的大多数无法消除与之相关的指数级资源扩展 [59]。

在这项工作中，我们应用量子电路切割来降低所执行电路的复杂度。量子电路切割可归类为量子电路层级上的一种分解技术，因为它独立于生成电路的算法 [14, 15]。与其他分解方法一样，它可以减少所需量子比特的数量，并利用现有量子设备扩大可求解问题实例的规模 [31, 33]。然而，我们的工作重点并非扩大问题规模，而是降低电路复杂度。因此，我们旨在通过电路切割降低计算过程中对噪声的敏感性，从而提高结果质量。在变分量子算法（例如量子近似优化算法）的背景下，尚缺乏对含噪中等规模量子设备上电路切割的此类研究。尤其是，关于在量子近似优化算法中应用电路切割能在多大程度上减轻噪声影响，以及这种应用能否带来更好的结果，仍缺乏研究。因此，为了探讨这一问题，我们提出本工作的主要研究问题（*RQ*）：

**主要研究问题：**在含噪中等规模量子设备上执行量子近似优化算法时，电路切割在多大程度上能够改善结果？

为回答我们的主要研究问题，我们将其细化为两个子研究问题（*SRQ*）。首先，我们着重探讨切割量子近似优化算法拟设会对目标函数产生何种影响。我们尤其关注缩小子电路的规模能否减轻噪声诱导 barren plateau 的影响。第一个子研究问题如下：

**子研究问题1：** 在含噪中等规模量子设备上，切割量子近似优化算法拟设会如何影响其对应的目标函数？

第二部分包括对切割拟设的参数进行经典优化。我们研究切割如何影响量子近似优化算法中的经典优化过程。具体而言，我们关注切割是否有助于在含噪中等规模量子设备上获得更好的解。这构成了我们的第二个次级研究问题（SRQ）：

**SRQ2:** 在执行包括参数优化在内的完整算法时，采用电路切割的量子近似优化算法能否在含噪中等规模量子设备上获得更好的解？

## 5. 研究设计

为解决这些研究问题，我们设计并开展了两项针对无权图最大割问题的实验。接下来，我们将介绍对第2.3节所述门切割的调整，然后概述所有实验共有的实验设置。随后，我们将详细介绍每项实验的设计。最后，我们将介绍用于评估所得结果的指标。

### *5.1.* 对 $R_{ZZ}$ 门切割的调整

我们调整第2.3节所述的方法，以减少子电路的数量。对公式 (13) 的调整如下：

$$A = \mathcal{S}(I) + \mathcal{S}(Z) - 2\mathcal{S}\left(R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{15}$$

数学细节见附录 B。利用这一等式， $R_{ZZ}$ 量子门对应的不同子电路数量从十个减少到八个，因为两个局部 $R_Z\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 量子门消失了，而且 $A$ 可以表示为 $I$、$Z$和 $R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 量子门的加权和。由于 $I$和 $Z$操作的结果已存储在经典存储器中，因此可以重复使用。虽然这种替换减少了子电路的数量，但会在量子概率分解中引入较大的因子 $c_i$。这不会改变等式，但会导致方差增大，因此需要更多测量次数才能收敛 [63]。不过，对于少量切割而言，这种权衡可能是值得的，因为对应因子仍然相对较小。我们在所有实验中都采用了这一技术。

### *5.2.* 实验设置概述

本节介绍所有实验共有的步骤。概括而言，如图 2 所示，每项实验由三个部分组成：(i) 生成问题实例、相应的电路和子电路；(ii) 在量子设备上执行这些电路；(iii) 进行后处理，包括重组子电路的结果并评估目标函数。实验可以重复

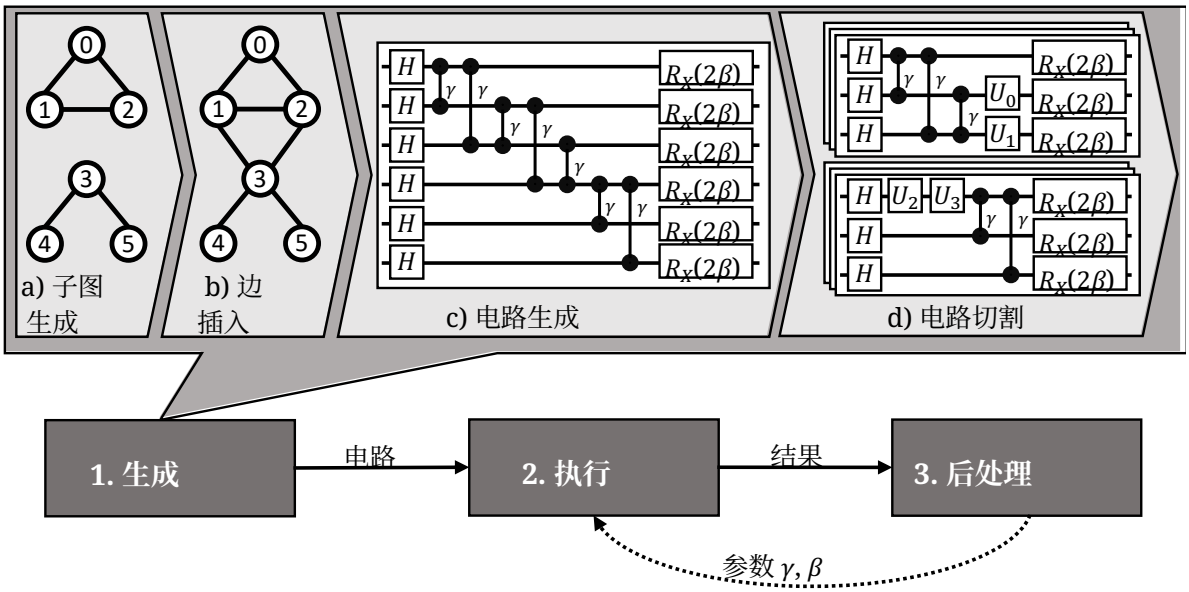



图 2：实验评估流程概览，采用经过完善的预处理示例，包括问题生成、电路生成和电路切割。

步骤 (ii) 和 (iii)，并在变分优化循环中使用经典优化器来优化电路参数，直至满足终止条件。下文将使用电路切割的 QAOA 拟设称为$cut\text{-}QAOA$。执行所用的量子设备是 IBM 的超导硬件。实验使用 $Qiskit$ [64] 实现。凡是需要经典优化器的地方，均采用 Qiskit 默认配置的 COBYLA。由于该优化器仅支持最小化，我们在实现中通过翻转经典计算所得目标函数的符号，将 QAOA 期望值的最大化转化为最小化问题。因此，最优值对应于最小目标值。下文将更详细地介绍各个步骤。

*5.2.1.* 问题实例生成、电路生成与切割。首先，必须创建一个问题实例。这是关键步骤，因为图的边映射到 QAOA 拟设中的 $R_{ZZ}$ 量子门，因此图结构决定了之后分离该拟设所需的切割数量。为了使最终得到的拟设能够通过特定数量的切割实现分离，我们首先使用$Erd\tilde{o}s–R\acute{e}nyi\ \ G(n,p)$ 模型 [65], 生成两个大小相等且彼此独立的连通随机子图；也就是说，在一个包含 $n$ 个顶点的图中，每条可能的边均以 $p$的概率被选中。这里，我们通过重复生成流程，直到得到两个连通子图，确保每个子图都是连通的。这在图 2 的生成步骤$a$ 中有所展示。之后，我们在两个子图之间随机添加两条边，将它们连接起来，从而确定两个预定切割的位置（见步骤$b$）。

接下来，我们根据生成的图构造一个拟设，并在其中

随后插入参数（见步骤 $c$）。在我们的实验中，只考虑深度为 $p = 1$ 的 QAOA 拟设¨，这意味着代价哈密顿量和混合哈密顿量仅执行一次。尽管实验中使用的 IBM 量子设备原生不支持 $R_{ZZ}$ 门，但我们在电路生成阶段使用这些门来执行电路切割步骤，并将剩余的 $R_{ZZ}$ 门交由转译器替换为原生门，即两个 CNOT 门和一个 $R_Z$ 旋转。

对于每个问题实例，都存在多种等价的量子近似优化算法拟¨设，因为成本酉算符 $U(H_C、\ \gamma_l)$ 中的$R_{ZZ}$量子门彼此对易，因此可以按任意顺序排列。 $R_{ZZ}$ 量子门的不同排列不会影响无噪声设备上的结果，因此会得到等价的结果。然而，对于含噪中等规模量子设备，情况则有所不同。根据操作的排列方式，电路深度可能不同。此外，特定的操作排列方式可以用更少的额外 SWAP 操作映射到量子设备的受限连接性上，因而得到深度更低的转译后电路。再者，不同量子比特上的独立并行操作可能会意外地相互影响，因此也是噪声的另一个来源 [66]。在优化电路转译时，必须考虑所有这些问题。然而，最优电路转译是 NP 完全问题，而转译器主要依赖启发式方法 [67]。此外，所使用的 Qiskit 转译器若不提供自定义转译器遍次 [68]，就不会执行所有这些优化。因此，为了在实验中纳入不同操作排列方式的影响，并将其与电路切割的影响进行比较，我们在实验中手动考虑这一因素，并为每个问题实例生成两个等价的量子近似优化算法拟¨设。一个拟设通过依次执行两个图分区中的量子门来优化电路中并行量子门的数量；另一个拟设则通过并行执行两个图分区中的量子门来优化电路深度。它们的示意图见图 3。拟设的顺序版本首先执行第一个划分中的所有$R_{ZZ}$ 操作。然后，我们应用被切割的操作。最后，加入第二个划分中的 $R_{ZZ}$ 操作。拟设的并行版本先并行执行两个图分区中的所有 $R_{ZZ}$ 操作，然后在最后一步执行被切割的量子门。在两个版本以及切割拟设的子电路中，我们均采用划分内相同的 $R_{ZZ}$ 操作排列方式。顺序版本得到的电路更深，但并行操作更少。相比之下，并行拟设的电路较浅，但并行操作更多。

接下来，对生成的电路进行切割。为了生成图 2 的第$d$ 步中所示的子电路，我们采用以下流程:

(i) 移除对应于两个子图的不同量子比特分区之间的所有多量子比特操作，使电路分解为可分离的电路片段。(ii) 对于每个电路片段，在已移除量子门的位置插入 $I$、$Z$、 $R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 的所有可能组合以及测量，从而生成各自的子电路。

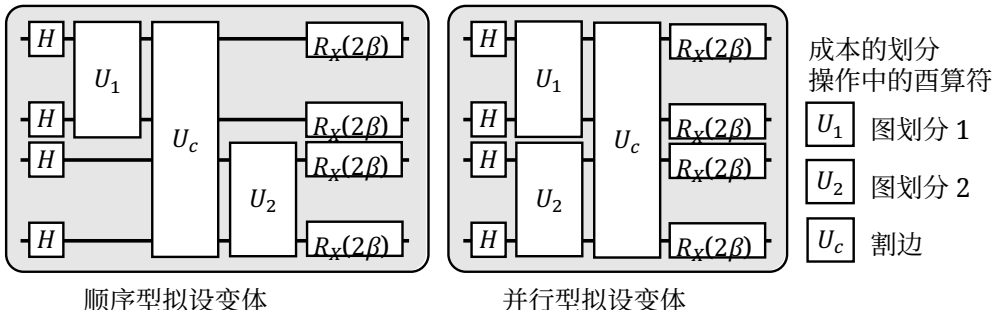



图 3：两种 QAOA 拟设变体的示意图。

*5.2.2.* 执行。执行不仅包括运行 cut-QAOA 的子电路，也包括原始 QAOA 电路，后者将在后续评估中用于对比。不过，在执行某项实验生成的电路和子电路之前，必须先确定其参数。这些参数要么定义为实验的超参数，要么由经典优化器在变分循环中选定。随后，我们使用 Qiskit 的内部转译器，以默认配置 [64] 为所选量子设备转译所有电路。所有转译后的电路会被批量打包成作业，并一并提交给量子设备执行。在我们的实验中，原始 QAOA 拟设的测量次数与 cut-QAOA 所有子电路的测量次数总和相同。因此，在我们的实验中，无论是否进行切割，所使用的测量次数都相同。对于 cut-QAOA 拟设的不同子电路，我们将测量次数平均分配给它们。另一种做法是按各子电路在量子概率分解中的因子 $c_i$ 成比例地分配测量次数。不过，我们没有采用这种做法，因为 Qiskit 不允许为每个电路单独指定测量次数，只能为一个作业中的所有电路统一指定。

*5.2.3.* 后处理。 最后，执行后处理。所有子电路的结果会根据公式（9）进行处理并重新组合，以复现原始电路的结果。随后，针对所有结果计算最大割目标值，即原始电路的执行结果以及子电路重新组合后的结果。

### *5.3.* 实验描述

下面将详细介绍用于评估的两种实验设置。

*5.3.1.* 实验*1*：目标函数。为研究研究问题1，我们进行了一项实验，在均匀分布的参数配置上评估该函数。具体而言，实验包括以下步骤：

(i) **生成问题实例及对应的电路：**在本实验中，我们采用上述方法随机生成问题实例，这些实例会产生含有两处切割的可分离电路。我们使用介绍过的两种拟设变体。(ii) **将电路切割为子电路：**虽然我们生成并执行顺序拟设和并行拟设以供后续比较，但为了减少待执行电路的数量，从而能够使用不同的图执行更多轮实验，我们只切割两种拟设中的一种。与原始电路不同，两种拟设的子电路深度相同，并且并行操作的数量也相同，因为按照设计，它们的双量子比特门排列相同，仅切割位置不同。因此，我们选择只将顺序变体拟设切割为预先定义的划分，然后生成其参数化子电路。(iii) **创建带参数的电路：**由于参数定义了绕角度 $2\beta$ 和 $\gamma$的旋转，目标函数具有周期性，因此我们可以将参数限制在 $(\beta,\ \gamma) \in D = ([0,\pi],\ [0,2\pi])$。因此，我们在参数空间 $D$ 中使用包含 $20 \times 40$ 个点的等距网格进行采样，共进行800次函数评估。对于网格中的每个参数配置，都会创建原始电路的两种拟设变体，以及参数固定的子电路。(iv) **执行电路：**所有电路和子电路都经过转译，以便在选定的量子设备上执行。我们不仅提取所有测量次数的汇总结果，还提取每次单独测量的结果。这样，我们便可以通过仅考察部分测量次数，分析结果随测量次数变化的情况，例如，从执行的10000次测量中只取前1000次。(v) **重新组合子电路：**在经典后处理中，我们按照上述流程重新组合子电路。(vi) **评估目标函数：**针对原始电路和切割后电路的结果，计算不同测量次数下的目标值。

*5.3.2.* 实验 *2*：量子近似优化算法的执行。 为探究研究问题 2，我们在同一个问题实例上完整运行变分量子算法十次，其中包括量子近似优化算法和 cut-QAOA 的参数优化。每次执行时，我们都会使用新随机选取的初始参数，以降低初始参数的影响，并在后续分析中对其进行推理。为了便于之后对两个实验进行比较评估，本实验使用了与上述实验相同的问题实例。此外，为尽量减少量子设备不同校准的影响，对于每个问题实例，本实验始终紧接着前一个实验进行。具体而言，本实验包含以下步骤：

(i) **生成问题实例：**我们使用上述实验中随机生成的问题实例。(ii) **重复：**我们将以下步骤重复十次。

**(a) 选择初始参数：**我们随机选择初始参数 $\beta \in [0,\pi]$ 和 $\gamma \in [0,2\pi]$。**(b) 执行量子近似优化算法：**针对生成的问题实例，分别使用本文展示的两种拟设变体运行量子近似优化算法。每次运行均以选定的初始参数启动。**(c) 执行 cut-QAOA：**随后，使用相同的初始参数执行 cut-QAOA。

### *5.4.* 目标函数评估指标

本节介绍用于评估和量化我们首次实验中在量子设备上计算得到的目标函数的指标，涉及量子近似优化算法和 cut-QAOA 两种 QAOA变体。因此，我们分别考虑针对目标函数本身及其梯度的指标。首先，我们评估量子设备上某个 QAOA变体与模拟器上未进行切割的量子近似优化算法之间的目标值平均绝对差。差值越小，含噪中等规模量子设备计算得到的目标值就越接近模拟器的无噪声目标值。对于有限参数集 $P_\beta \subset [0,\pi]$ 和$P_\gamma \subset [0,2\pi]$，模拟目标函数$\langle H_C\rangle^{\mathrm{SIM}}_{\beta\,\gamma}$ 的平均绝对差（*MAD*）与含噪中等规模量子设备上的计算结果$\langle H_C\rangle^{\mathrm{QPU}}_{\beta\,\gamma}$,为

$$\mathrm{MAD}_{\mathrm{SIM}} = \frac{1}{|P_\beta||P_\gamma|}\sum_{\beta\in P_\beta,\gamma\in P_\gamma}\left|\langle H_C\rangle^{\mathrm{QPU}}_{\beta,\gamma} - \langle H_C\rangle^{\mathrm{SIM}}_{\beta,\gamma}\right|. \tag{16}$$

其次，我们考察了 NISQ 设备上的一种量子近似优化算法变体与最大混合态（*MMS*）之间的目标值平均绝对差，即密度算符为 $I/2$ 的状态。它衡量目标函数的集中程度，是噪声诱导 barren plateau [10] 的一个指标。其与 MMS 目标值之间的距离越大，量子近似优化算法变体计算出的目标值就越偏离以相等概率随机选取状态所得到的目标值。$n$ 个量子比特的 MMS 目标值平均绝对差为

$$\mathrm{MAD}_{\mathrm{MMS}} = \frac{1}{|P_\beta||P_\gamma|}\sum_{\beta\in P_\beta,\gamma\in P_\gamma}\left|\langle H_C\rangle_{\beta,\gamma} - \frac{1}{2^n}\,\mathrm{tr}\left[H_C\right]\right|. \tag{17}$$

该度量指标既可针对 NISQ 设备计算，也可针对模拟器计算。我们通过从解空间中均匀随机采样，并计算该样本的期望目标值，以经典方式计算 MMS 的目标值。

此外，我们评估了目标函数计算所得参数景观的梯度，因为噪声诱导 barren plateau 会导致梯度消失。目标函数的梯度为

$$\nabla\langle H_C\rangle_{\beta,\gamma} = \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\langle H_C\rangle_{\beta,\gamma}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\langle H_C\rangle_{\beta,\gamma}\right)^T. \tag{18}$$

我们使用二阶精度的中心差分数值计算了偏导数 [69]。为了评估计算所得参数景观的梯度，我们考察其大小 [10] 以及其方向与模拟结果之间的偏差。对于梯度大小，我们考虑了其平均大小和大小的方差。平均梯度大小定义为

$$M = \frac{1}{|P_\beta||P_\gamma|} \sum_{\beta \in P_\beta, \gamma \in P_\gamma} \left\| \nabla \langle H_C \rangle_{\beta,\gamma} \right\|_1 \tag{19}$$

其中，$\|\cdot\|_1$ 为 1-范数。梯度大小的方差为

$$\frac{1}{|P_\beta||P_\gamma|} \sum_{\beta \in P_\beta, \gamma \in P_\gamma} \left( \left\| \nabla \langle H_C \rangle_{\beta,\gamma} \right\|_1 - M \right)^2. \tag{20}$$

方差减小意味着梯度的变化越来越小，这使得经典优化器越来越难以找到最优点。除了梯度的绝对大小之外，梯度还必须能够引导经典优化器找到最优点。为此，我们分析梯度的方向，并将含噪中等规模量子设备上的梯度方向与模拟得到的梯度进行比较。为此，我们采用这些梯度之间的平均成对余弦相似度 [70, 71]。其定义如下：

$$\frac{1}{|P_\beta||P_\gamma|} \sum_{\beta \in P_\beta, \gamma \in P_\gamma} \frac{\nabla \langle H_C \rangle^{\mathrm{QPU}}_{\beta,\gamma} \cdot \nabla \langle H_C \rangle^{\mathrm{SIM}}_{\beta,\gamma}}{\left\| \nabla \langle H_C \rangle^{\mathrm{QPU}}_{\beta,\gamma} \right\|_2 \left\| \nabla \langle H_C \rangle^{\mathrm{SIM}}_{\beta,\gamma} \right\|_2}. \tag{21}$$

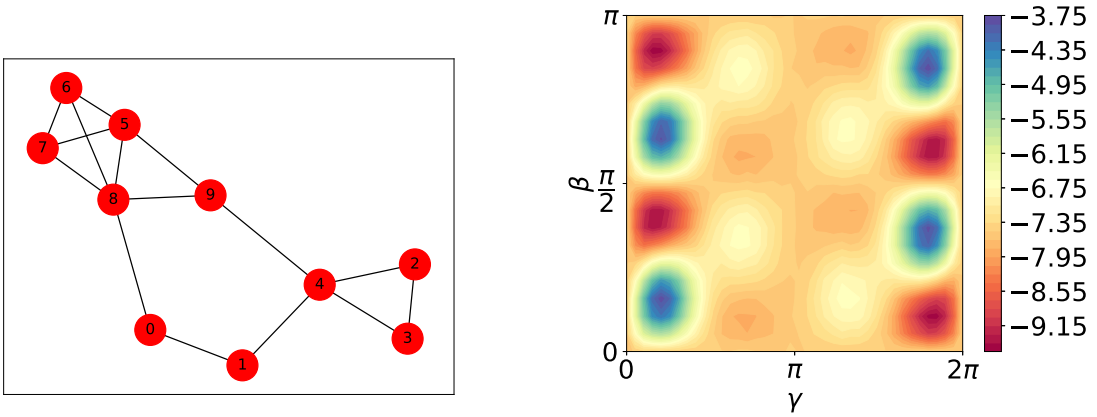
## 6. 结果

本节介绍前文所述两项实验的结果，以回答我们的研究问题。由于量子近似优化算法的顺序拟设与并行拟设之间的结果差异，相较于它们与 cut-QAOA 结果之间的差异要小，而且直接比较时，并行拟设的平均表现略好，因此为清晰起见，本节仅展示并行拟设的结果。不过，实验期间生成的代码和所有数据均已公开，见 [72]。

### *6.1.* 实验*1*的结果：目标函数

按照我们的实验设计，首先要考虑的问题是：在含噪中等规模量子设备上，切割 QAOA 拟设会如何影响相应的目标函数。下文将先以一个示例图为例详细讨论这一问题，然后展示整个数据集的结果。

*6.1.1.* 示例图 本节将使用所介绍的度量指标，对示例图计算得到的目标函数进行可视化和评估。




（a）应用最大割的示例图（b）示例图在$p = 1$QAOA层下模拟得到的参数景观中的目标值。

图 4: （a）数据集中的示例图，以及（b）其在无噪声模拟中针对最大割问题的量子近似优化算法目标函数。

图4展示了十节点示例图（图4a）及其对应的无噪声目标函数（图4b）。边割（0, 8）和（4, 9）将图分成两个大小相等的子图。目标函数在模拟器上针对$p = 1$ QAOA层进行评估。目标最小值在彩色参数图中以红色色调显示。目标值越高，颜色越趋向蓝色。

图5分别以1000次和10000次测量次数，将在含噪中等规模量子设备$ibmq\ ehningen$上执行的 QAOA 和 cut-QAOA 的目标函数可视化为参数景观。该设备是IBM采用 Falcon 芯片架构制造的27量子比特超导量子设备。所有参数景观均采用与图4b模拟结果相同的色标进行着色。显然，在 ibmq ehningen 上计算得到的 QAOA 和 cut-QAOA 的目标值范围小于模拟目标函数的范围（见图4b和图5）。然而，QAOA拟设实现的目标值范围明显小于 cut-QAOA。由图5可见，与 QAOA 相比，cut-QAOA 的最大值和最小值更加清晰地从平面中显现出来。对于 QAOA，在1000次和10000次测量次数之间看不到目标函数的明显变化；而对于 cut-QAOA，目标函数则变得明显更加平滑。

图6展示了上述目标函数的各项指标随测量次数变化的情况。可以看出，cut-QAOA 的目标函数更接近模拟得到的目标函数。ibmq ehningen 上 cut-QAOA 与模拟结果之间的平均绝对偏差显著低于 QAOA（图6a）。此外，cut-QAOA 与 MMS 目标值之间的偏差，远大于 QAOA拟设的偏差（图6b）。此外，

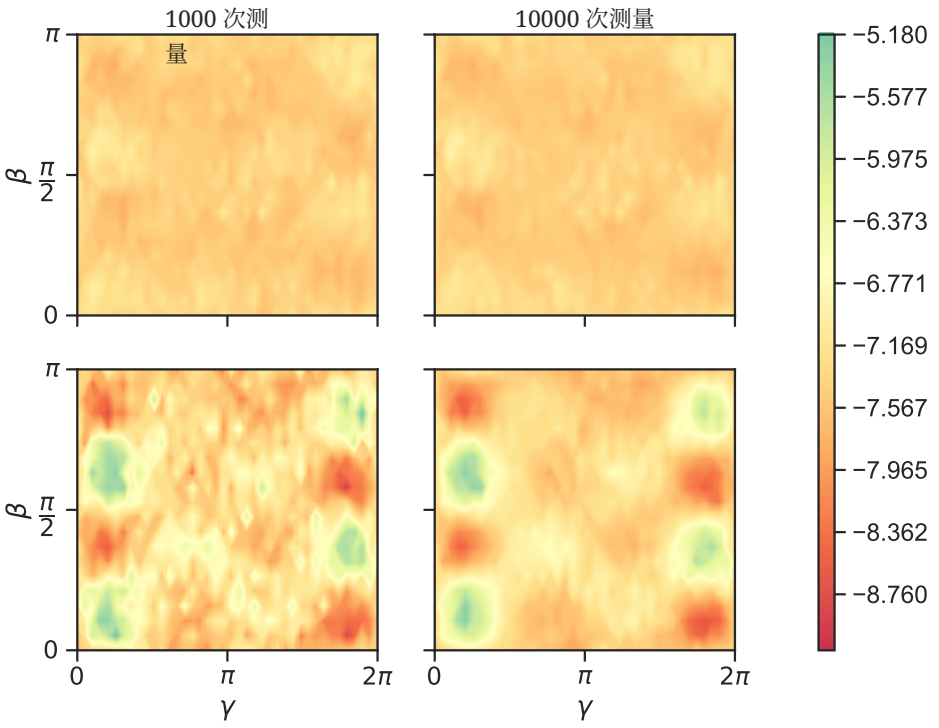
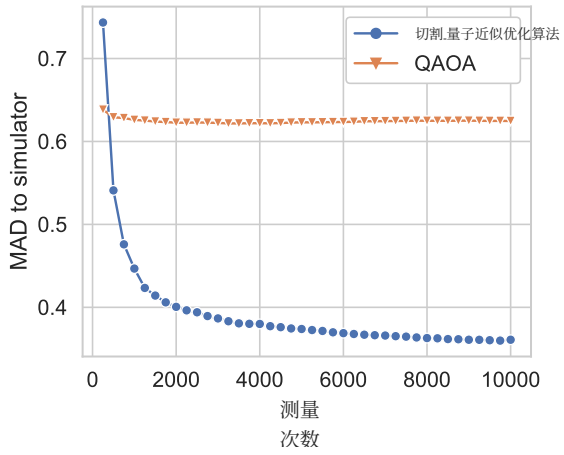


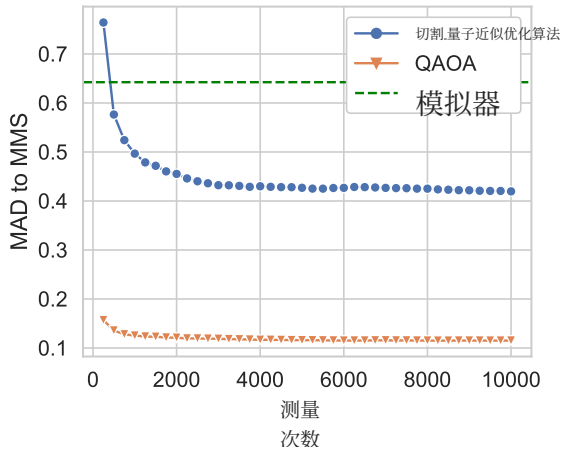

图5：在 ibmq ehningen 上计算得到的目标函数参数景观，其色标与图4b中模拟目标函数所用的色标相同。

cut-QAOA 目标函数中更显著的极小值和极大值，使梯度更大且方差更高（图6c和图6d）。QAOA拟设的平均梯度大小显著低于采用切割时的值，且梯度大小的方差接近于零，说明各梯度的大小大致相同。相比之下，cut-QAOA 的目标函数梯度明显增大，且方差更高。这意味着计算得到的目标函数具有更显著的结构。不过，cut-QAOA 的梯度大小和方差仍未达到模拟器的水平。除了梯度大小之外，量子设备上 cut-QAOA拟设的梯度余弦相似度也显著高于 QAOA拟设（图6e）。因此，梯度方向的偏差更小，最优点以及通往最优点的优化路径也就较少偏离无噪声目标函数。

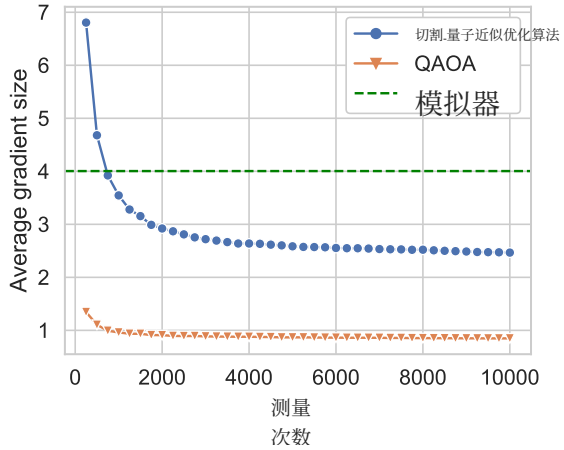
所有指标随测量次数变化的趋势在图6中呈现出相同的模式：它们都逐渐趋于平台。对此现象的一种合理解释是测量噪声，即使用有限的测量次数估计量子电路的结果分布时产生的统计抽样误差 [73]。随着测量次数增加，量子电路的采样结果分布会收敛于其期望分布。这一行为表现为，除梯度相似度外，所有指标的数值都随着测量次数增加而下降；梯度相似度则随着数值上升而逐渐趋于平台。曲线越接近平台，测量噪声就越少



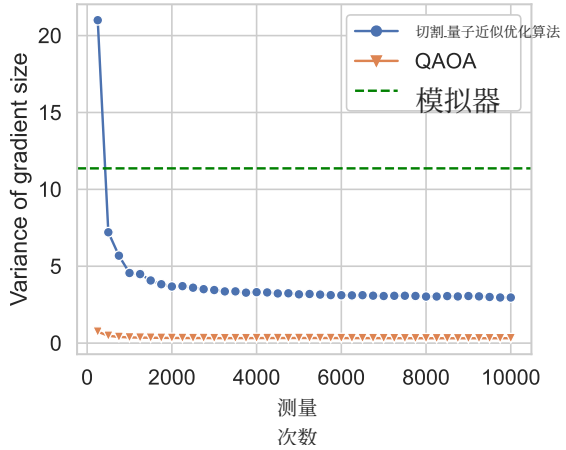

（a）模拟器与最大混合态之间的平均绝对距离



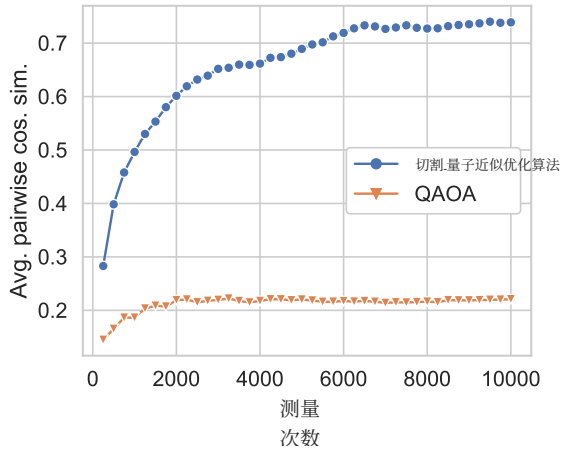

（b）量子设备与最大混合态之间的平均绝对距离




（c）平均梯度大小




（d）梯度大小的方差




(e) 梯度两两余弦相似度的平均值

图6：示例图的指标随测量次数的变化

| | 实验 1 | | | 实验 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 节点 | 数量 | 最少边数 | 最多边数 | 数量 | 最少边数 | 最多边数 |
| 8 | 18 | 8 | 14 | 16 | 8 | 14 |
| 10 | 25 | 10 | 16 | 15 | 11 | 16 |
| 12 | 18 | 13 | 21 | 16 | 16 | 21 |

(a) 数据集中各图的统计信息。

| 量子设备 | 实验 1 | 实验 2 |
|---|---|---|
| ibmq_ehningen | 39 | 31 |
| ibmq 孟买 | 10 | 6 |
| ibmq_加尔各答 | 6 | 5 |
| ibmq 瓜达卢佩 | 5 | 5 |
| ibmq_蒙特利尔 | 1 | 0 |

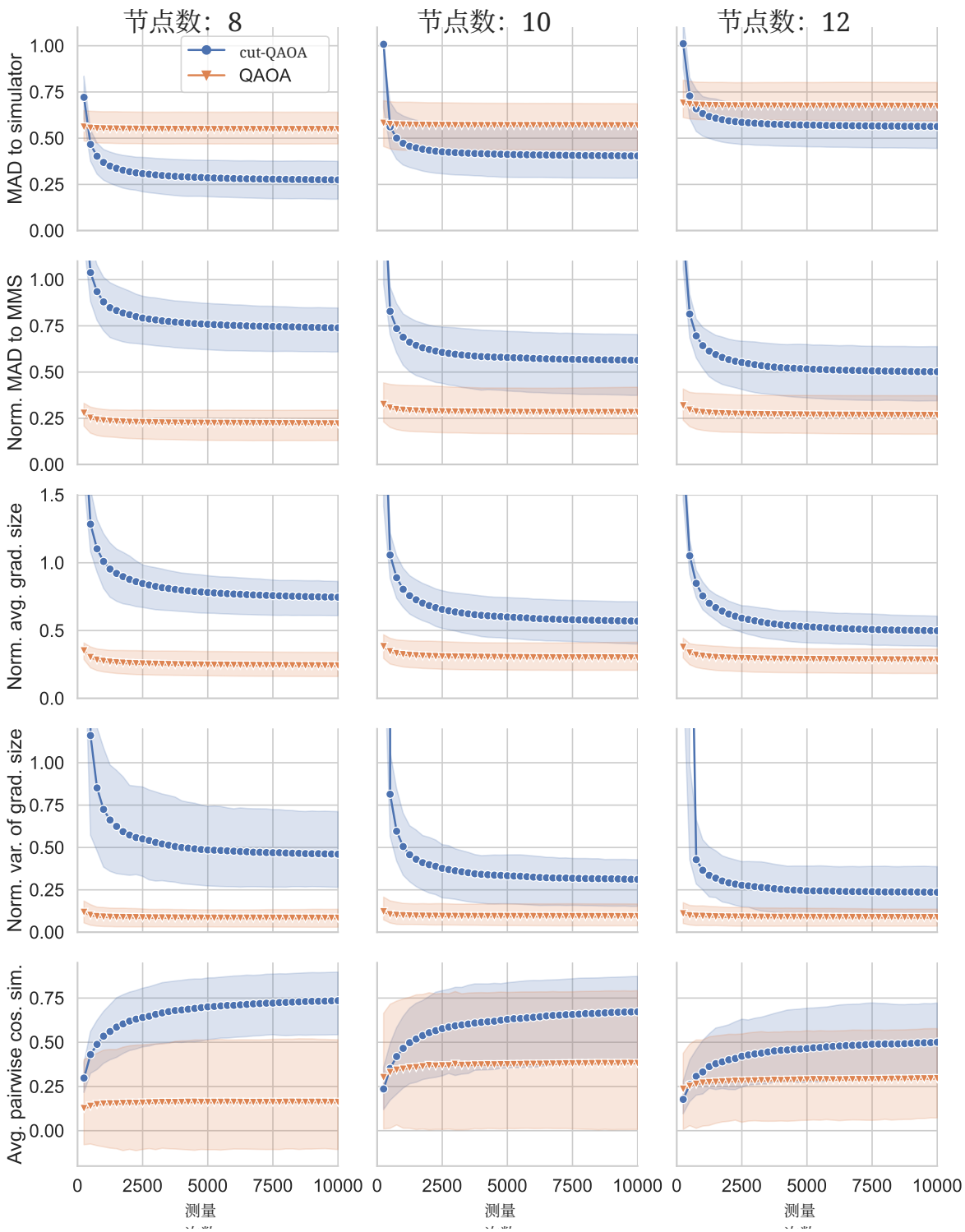
（b）实验中使用的量子设备。

表1：数据集的统计信息：（a）图和（b）量子设备。

噪声很重要，但 NISQ 误差仍然存在。虽然使用相对较少的测量次数即可通过量子近似优化算法达到这一状态，但 cut-QAOA 需要显著更多的测量次数，因此受到测量噪声的影响也大得多。这一影响也与以下事实相符：cut-QAOA 必须在所有子电路之间分配测量次数，因此每个单独的子电路所获得的测量次数显著减少。

*6.1.2.* 使用一组随机图进行评估 我们的数据集包括61个随机生成的图，如表1所列。各个图可在已发布的数据集中查看 [72]。图7展示了数据集中随机图的每个指标随测量次数变化的情况。对于每个指标和量子近似优化算法变体，平均值以曲线表示。平均值周围的阴影区域表示覆盖80%数据的百分位区间。因此，数值最高和最低的10%未予可视化。为确保不同问题实例之间指标具有更好的可比性，MAD 到 MMS、平均梯度大小和梯度大小的方差均通过除以模拟器的指标值进行了归一化。其他两个指标未进一步归一化，因为它们已经纳入了模拟器因素。数据集的平均值呈现出与示例图中观察到的相同模式。首先，随着测量次数增加，所有指标都趋近于一个平台值。与上述示例一样，对于所有指标，cut-QAOA 平均收敛得显著更慢，并且其初始值比量子近似优化算法更远离平台值。这两点都表明，cut-QAOA 更容易受到测量噪声的影响。

此外，计算得到的 cut-QAOA 拟设目标函数更接近模拟得到的目标函数，与最大混合态的目标值偏差更大。此外，其梯度的大小也更大，并且具有更高的




Fig图 7：带有 80% 百分位区间的度量指标平均值 .

其幅值方差。此外，cut-QAOA 目标函数的梯度与模拟得到的梯度更加相似。虽然图7仅展示了平均指标，但实验的单独结果也呈现出这些模式，并且与上文示例图（图4a）的结果相似。此外，尽管 cut-QAOA 在各项指标上表现更好，但它在不同问题实例上的指标值分布往往略为分散；梯度相似度除外，因为 QAOA 的方差显著更大。

然而，这些模式的明显程度会因生成图中的节点数而异。随着节点数增加，量子电路也随之变大，cut-QAOA 在各项指标上的优势会减小，并逐渐接近 QAOA。对此，一个可能的原因是，随着图规模增大，QAOA ans¨atze 的深度和宽度都会增加，cut-QAOA 的子电路也同样如此。因此，每个子电路都更容易受到含噪中等规模量子设备中噪声的影响，进而使 cut-QAOA 的综合结果噪声更大。

**主要观察结果：**

- 与未进行切分的量子近似优化算法相比，在含噪中等规模量子设备上计算的 cut-QAOA 目标函数更接近模拟得到的目标函数。
- 它与最大混合态的目标值偏差更大。
- 它的梯度更大、方差更高，并且与模拟得到的梯度更相似。
- 然而，cut-QAOA 受测量噪声的影响更大。

### *6.2.* 实验 *2* 的结果：量子近似优化算法执行

接下来，我们评估计算得到的目标函数的这些改进是否能在量子近似优化算法中带来更好的结果，以阐明 SRQ 2，即更低的期望值和更好的最大割解。对于量子近似优化算法和 cut-QAOA 的每次运行，我们提取了拟设在优化参数 $\beta^*$、$\gamma^*$ 下的采样结果，并考察所得的期望值 $\langle H_C \rangle_{\beta^*、\gamma^*}$ 以及采样频率最高的状态 $z^*$。为了比较不同最大割问题实例的结果，我们用最优目标值 $\mathcal{C}_{\text{opt}}$对结果进行归一化。由此得到期望比率

$$r_{\text{exp}} = \frac{\langle H_C \rangle_{\beta^*,\gamma^*}}{\mathcal{C}_{\text{opt}}} \tag{22}$$

和近似比

$$r_{\text{appr}} = \frac{\mathcal{C}(z^*)}{\mathcal{C}_{\text{opt}}}. \tag{23}$$

虽然量子近似优化算法优化的是期望值，但通常将采样频率最高的状态作为问题的解。

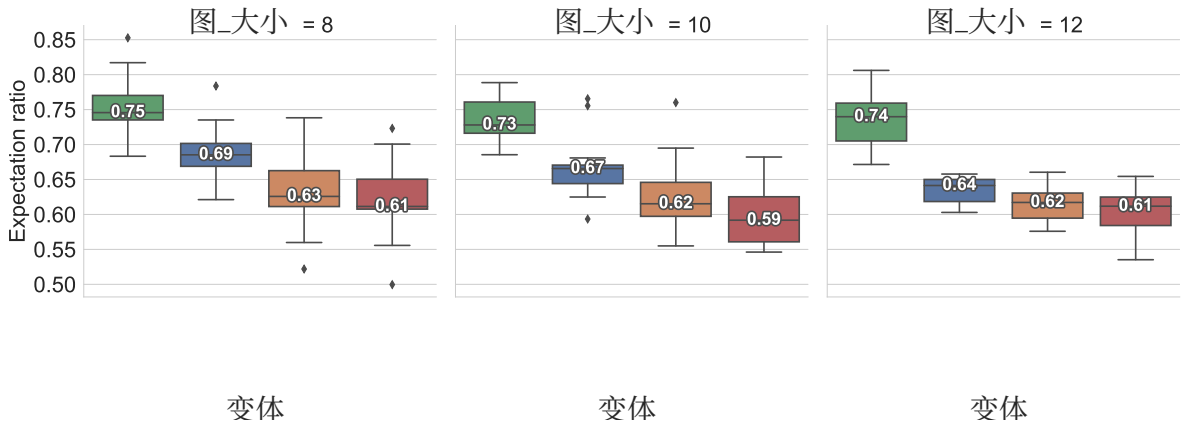



图8：各变体的期望比率箱线图及中位数值。须线从箱体延伸至四分位距的1.5倍处，超出此范围的点绘制为离群值 [74]。

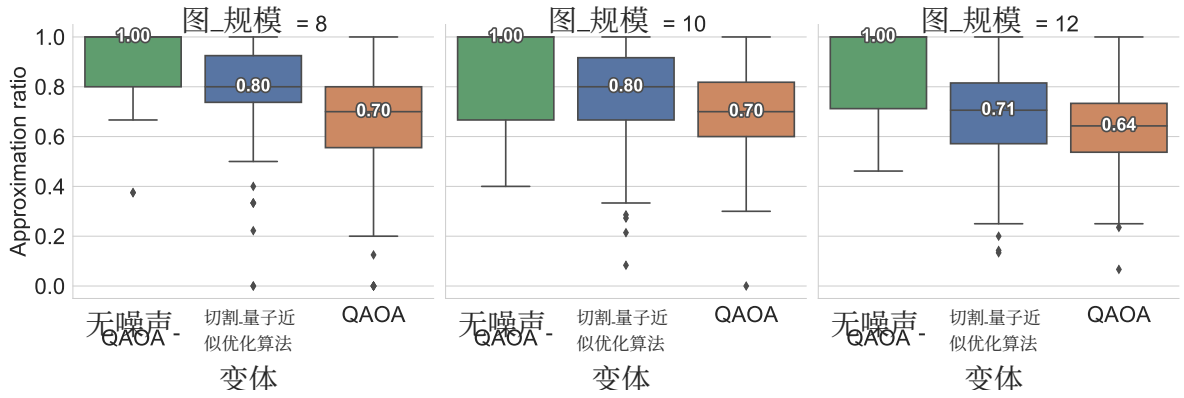



图9：各量子近似优化算法变体的近似比箱线图及中位数值。

除了使用量子设备上的 QAOA 变体计算解之外，我们还通过经典方法从解的均匀分布中随机抽取样本，也就是说，我们在经典计算机上模拟了对 MMS 的采样。该样本用作基准，以判断量子设备上的 QAOA 变体是否优于随机采样。此外，我们还在无噪声模拟器上执行了 QAOA，以获得理想无噪声场景下的期望比率和近似比。这些无噪声解为评估含噪中等规模量子设备上执行 QAOA 变体时噪声和不完美因素的影响提供了参考。

我们在实验1的部分图上进行了该实验。数据集包含表1所述的47个图。对于不同的量子近似优化算法变体和图规模，所得期望值如图8所示。cut-QAOA取得了最高的期望比率，而量子近似优化算法的表现几乎不比随机采样好。然而，随着图规模增大，cut-QAOA的优势逐渐减小，并且其期望比率也逐渐接近量子近似优化算法。结合实验1的结果来看，计算得到的目标函数噪声更大，因此准确性降低并趋于平坦。

因此，经典优化器更难找到最优参数，即使使用最优参数，采样得到的含噪解通常也会产生较低的期望值。不进行切割的量子近似优化算法与随机采样仅有边际差异，这一事实表明其计算中的噪声占据主导地位，使得结果不具备实际应用价值。cut-QAOA更高的期望值也转化为具有更高近似比的解，如图 9 所示。cut-QAOA遵循先前确立的模式，并且随着图规模增大，其近似比逐渐接近量子近似优化算法。

**主要观察结果：**

- 不进行切割的量子近似优化算法仅略优于随机采样。
- cut-QAOA 的期望值明显高于量子近似优化算法，但这种优势会随着图规模增大而减弱。
- cut-QAOA 的期望值较高，因此得到的解具有明显更高的近似比。

## 7. 讨论

在最大割问题的量子近似优化算法中应用量子电路切割，观察到其执行结果受噪声影响较小，这与对基准电路进行电路切割的评估结果一致 [31, 33, 34]。其原因在于，子电路的规模存在一个范围，在该范围内，子电路的执行所受噪声显著小于原电路。因此，经典无噪声重组过程可以根据噪声较小的子电路结果，估算出噪声较小的原电路结果。我们的工作仅关注将电路分解为两个片段，使子电路中的量子比特数量减半；另一项研究则表明，将电路分解为更多片段可以进一步增强这一效果 [34]。然而，每增加一次电路切割，最坏情况下子电路的数量以及对其进行采样所需的测量次数都会呈指数增长，因此，切割次数和片段数量的选择需要在缩小电路规模与增加成本之间权衡。我们的实验中也体现了这项额外成本：测量噪声更高，也就是说，需要更多测量次数才能收敛。这一观察结果与其他研究对电路切割的理论考量一致 [24, 26] ；总体而言，电路切割能否用于抑制误差和应对噪声诱导 barren plateau，取决于电路的结构性质，这些性质决定了切割次数，进而决定所需开销。这意味着，要在控制计算开销的同时有效地将 cut-QAOA 扩展到更大的问题实例，关键是确保划分电路所需的切割次数相对于问题规模增长缓慢。这样可以延缓开销的指数级增长，从而增加可在可接受时间内求解的问题实例数量。这些问题实例所对应的电路应具有特定的簇结构，其特征是同一簇内量子比特之间的双量子比特门连接性较高，而簇间连接性较低。

利用这种结构，可以通过少量切割高效地划分电路，且切割次数相对于问题规模较少。

### *7.1.* 局限性

尽管我们的研究结果提供了有价值的见解和进一步研究的潜在方向，但其普适性可能会受到多种因素的影响，例如问题的选择、问题实例以及实验设置。虽然我们的工作聚焦于使用量子近似优化算法求解最大割问题，但电路切割的应用与此无关，因为它作用于电路层级，且独立于底层问题和算法。此外，由于含噪中等规模量子设备数量有限，且这些设备的执行时间受限，实验仅在有限数量的图上进行。所有研究的图均包含八个、十个或十二个节点，因为对于节点更多的图，即使使用 cut-QAOA，噪声也会占据主导地位。为了控制实验中每个问题实例的切割数量，数据集中的每个图都具有特定结构：由两个大小相同的子图通过两条边连接而成。选择两条边有两个原因。一方面，通常无法通过组合两个子图的解来得到最大割问题的解。另一方面，所采用的电路切割方法在进行两次切割时只需执行 32 个子电路。其他研究则关注进行两次以上的切割 [33, 34] ，并大幅减少所需的子电路数量 [41]。在含噪中等规模量子设备的选择方面，实验是在多台采用 IBM Falcon 芯片架构的设备上进行的。此外，设备的校准会定期变化，且用户无法控制。这会损害实验的可复现性。为此，我们将量子设备的所有校准数据纳入数据集，以提高结果的可追溯性 [72]。尽管存在上述局限性，我们仍在不同的图、含噪中等规模量子设备及其校准条件下获得了可比的结果，这些结果在电路切割的应用方面呈现出相同的规律。

### *7.2.* 目标函数指标与量子近似优化算法结果之间的相关性

将两项已完成实验的数据结合起来，可以明显看出计算得到的目标函数质量与算法结果质量之间的联系。我们可以看到，所提出的目标函数指标与相应量子近似优化算法结果的期望值和近似比之间存在相关性。对于指标表现更好的目标函数，量子近似优化算法往往也会产生更好的结果。图 10 展示了三个指标与相较于 MMS 的期望比率提升之间的相关性，即$\left(\langle H_C\rangle_{\beta^*,\gamma^*} - \frac{1}{2^n}\mathrm{tr}\,[H_C]\right)\mathcal{C}_{\mathrm{opt}}^{-1}$。其他指标的相关性可在数据集 [72] 中找到。虽然总会出现未取得改进的运行，例如由于初始参数不佳和陷入局部最优，但随着指标改善，期望值方面的优势也会增加

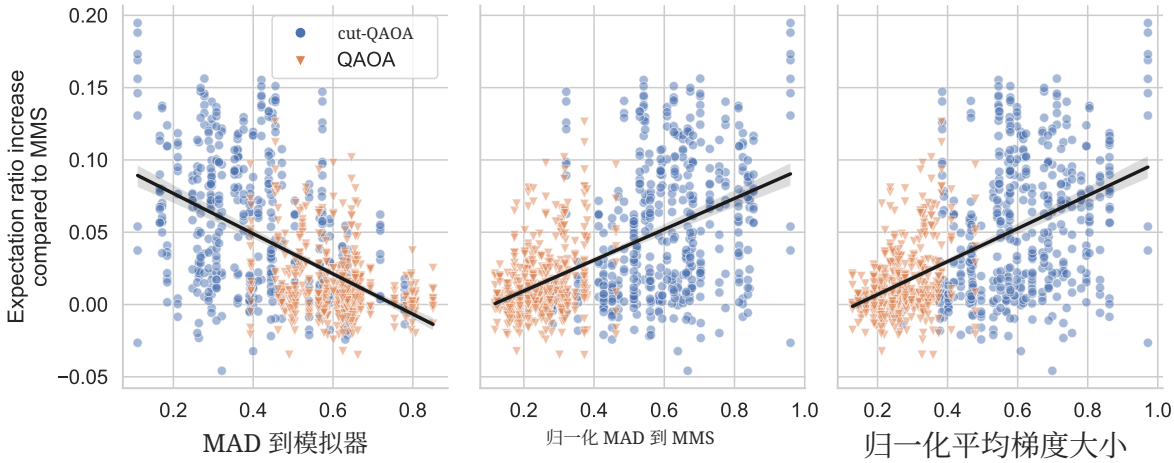



图 10：度量指标与相较于 MMS 的期望比率增幅之间的相关性。黑线表示回归线，其周围是回归估计的 0.95 置信区间。

。这种正相关性支持了所用指标的相关性；此外，也进一步印证了这样一种假设：改进目标函数有助于经典优化器找到更好的解。此外，尽管采用的是默认配置下的 COBYLA 优化器，也就是说，没有针对优化任务调整其超参数，仍然得到了这些结果。针对底层问题和噪声进一步调优优化器，可能会带来更好的结果 [75]。

## 8. 总结与未来工作

本文将电路切割应用于量子近似优化算法，以在当前的含噪中等规模量子设备上求解最大割问题。针对探讨电路切割对目标函数影响的 SRQ 1，我们的结果表明，电路切割能够抑制含噪中等规模量子设备上计算得到的目标函数所受噪声的影响。我们观察到，采用电路切割计算得到的目标函数受噪声诱导 barren plateau 的影响较小，更接近无噪声结果，不易集中在最大混合态的目标值附近，并且梯度更大、方差更高，也更接近预期梯度。相比之下，未采用电路切割计算得到的目标函数则不具备这些特点。不过，采用电路切割进行计算时测量噪声更大，也就是说，需要更多测量次数才能收敛。关于 SRQ 2，我们的实验表明，在含噪中等规模量子设备上，通过对切割拟设进行经典优化，采用电路切割的量子近似优化算法比不采用电路切割的算法能获得更好的解。它能得到更好的期望值，并以更高的近似比产生更好的解，即采样频率最高的状态。

我们未来工作的部分内容将是研究：在多大范围的问题实例中，可以通过在含噪中等规模量子设备上进行电路切割获得优势。对于范围较低端的小型问题实例，也可以在不进行切割的情况下以较低

噪声进行计算；而对于范围较高端的大型问题实例，子电路计算中已经会出现过多错误。

此外，由于电路切割作用于量子电路层面，因此其结果有望推广到其他问题和变分量子算法。变分量子算法中的其他分解方案 [18, 44–47] 若能缩小实际执行的量子电路规模，也可能产生类似效果。这两方面都将在未来的工作中进行评估。

## 附录 A。

$R_{ZZ}(\gamma)$ 的运算可表示如下：

$$R_{ZZ}(\gamma) = \exp\left(\frac{-i\gamma Z\otimes Z}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) I\otimes I - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) Z\otimes Z \tag{A.1}$$

应用 $R_Z$ 将 $_Z(\gamma)$ 作用于任意状态 $|\varphi_1\varphi_0\rangle$，其密度算符为 $\rho = |\varphi_1\varphi_0\rangle\langle\varphi_1\varphi_0|$ ：

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(\gamma)\rho R_{ZZ}(\gamma)^\dagger = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) I^{\otimes 2}\rho I^{\otimes 2} + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) Z^{\otimes 2}\rho Z^{\otimes 2} \\ + i\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(I^{\otimes 2}\rho Z^{\otimes 2} - Z^{\otimes 2}\rho I^{\otimes 2}\right). \end{aligned} \tag{A.2}$$

操作（$I^{\otimes 2}\rho Z^{\otimes 2} - Z^{\otimes 2}\rho I^{\otimes 2}$）可以在 NISQ 设备上按如下方式实现。令 $\rho_0 = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|$ 和 $\rho_1 = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$。因此，$\rho = \rho_1\otimes\rho_0$。令 $P_0 = {}^{I+Z}_{2}$ 和 $P_1 = {}^{I-Z}_{2}$ 分别为在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 上的投影。

$$A_i := R_Z\left(-\frac{\pi}{2}\right)\rho_i R_Z\left(-\frac{\pi}{2}\right)^\dagger - R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)\rho_i R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)^\dagger \tag{A.3}$$

$$B_i := P_1\rho_i P_1^\dagger - P_0\rho_i P_0^\dagger \tag{A.4}$$

合并起来：

$$A_0\otimes B_1 + B_0\otimes A_1 = i\left(I^{\otimes 2}\rho Z^{\otimes 2} - Z^{\otimes 2}\rho I^{\otimes 2}\right) \tag{A.5}$$

由此得到以下结果：

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(\gamma)\rho R_{ZZ}(\gamma)^\dagger = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) I^{\otimes 2}\rho I^{\otimes 2} + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) Z^{\otimes 2}\rho Z^{\otimes 2} \\ + \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(A_0\otimes B_1 + B_0\otimes A_1\right) \end{aligned} \tag{A.6}$$

## 附录 B。

$R_Z(\gamma)$的操作可表示如下：

$$R_Z(\gamma) = \exp\left(\frac{-i\gamma Z}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) Z. \tag{B.1}$$

因此，相应的超算符为

$$\mathcal{S}(R_Z(\gamma))\rho = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(I)\rho + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(Z)\rho + i\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(I\rho Z - Z\rho I\right). \tag{B.2}$$

对于角度 $-\gamma$，有

$$\mathcal{S}(R_Z(-\gamma))\rho = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(I)\rho + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(Z)\rho - i\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)(I\rho Z - Z\rho I)\,. \tag{B.3}$$

合并后:

$$\mathcal{S}(R_Z(-\gamma))\rho - \mathcal{S}(R_Z(\gamma))\rho = -2i\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)(I\rho Z - Z\rho I) \tag{B.4}$$

由此可得:

$$\mathcal{S}(R_Z(-\gamma)) - \mathcal{S}(R_Z(\gamma)) = 2\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(I) + 2\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathcal{S}(Z) - 2\mathcal{S}(R_Z(\gamma)) \tag{B.5}$$

**致谢**

本研究部分由 BMWK 项目 $PlanQK$ (01MK20005N)、$EniQmA$ (01MQ22007B) 和 $SeQuenC$ (01MQ22009B) 资助。

**数据可用性**

支持本研究结论的数据可通过以下网址公开获取:
`https://doi.org/10.18419/darus-3124`

**参考文献**

[1] Yudong Cao、Jhonathan Romero 和 Al´an Aspuru-Guzik。量子计算在药物发现中的潜力。*IBM*研究与开发期刊，62(6):6:1–6:20，2018年11月。[2] Yudong Cao 等。量子计算时代的量子化学。《化学评论》，119(19):10856–10915，2019年8月。[3] John Preskill。NISQ 时代及未来的量子计算。《*Quantum*》，2:79，2018年8月。[4]Marie Salm、Johanna Barzen、Frank Leymann 和 Benjamin Weder。关于 NISQ 时代成功执行电路的判据： $wd \ll 1/\epsilon_{eff}$ 究竟意味着什么。载于第 *1* 届 *ACM SIGSOFT*量子软件工程架构与范式国际研讨会论文集，第 10–13 页。ACM，2020年11月。[5] Frank Leymann 和 Johanna Barzen。NISQ 时代基于量子门的量子算法的残酷真相。《量子科学与技术》，5(4):044007，2020年9月。[6] Marco Cerezo 等。变分量子算法。《自然评论：物理》，3(9):625–644，2021年8月。[7] Edward Farhi、Jeffrey Goldstone 和 Sam Gutmann。一种量子近似优化算法。2014年11月。arXiv:1411.4028。[8] Edward Farhi 和 Aram W Harrow。通过量子近似优化算法实现量子霸权。2016年2月。arXiv:1602.07674。[9] Alexander M. Dalzell、Aram W. Harrow、Dax Enshan Koh 和 Rolando L. La Placa。实现量子计算霸权需要多少个量子比特? 《*Quantum*》，4:264，2020年5月。[10] Samson Wang、Enrico Fontana、Marco Cerezo、Kunal Sharma、Akira Sone、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。变分量子算法中的噪声诱导贫瘠高原。*NatureCommunications*，12(1)，2021年11月。[11] Matthew P. Harrigan 等。在平面超导处理器上对非平面图问题进行量子近似优化。*Nature Physics*，17(3):332–336，2021年2月。

[12] Mahabubul Alam、Abdullah Ash-Saki 和 Swaroop Ghosh。在超导量子比特中对真实噪声条件下的量子近似优化算法进行分析。2019年7月。arXiv:1907.09631。[13]Sergey Bravyi、Graeme Smith 和 John A. Smolin。经典与量子计算资源之间的权衡。《物理评论X》，6(2):021043，2016年6月。[14] Tianyi Peng、Aram W. Harrow、Maris Ozols 和 Xiaodi Wu。在小型量子计算机上模拟大型量子电路。《物理评论快报》，125(15):150504，2020年10月。[15] Kosuke Mitarai 和 Keisuke Fujii。通过采样单量子比特操作构造虚拟双量子比特门。《新物理学杂志》，23(2):023021，2021年2月。[16] Edward Farhi、David Gamarnik 和 Sam Gutmann。量子近似优化算法需要看到整个图：一个典型案例。2020年4月。arXiv:2004.09002。[17] Felix Truger、Martin Beisel、Johanna Barzen、Frank Leymann 和 Vladimir Yussupov。最大割问题中热启动量子优化的超参数选择与优化。Electronics，11(7):1033，2022年3月。[18]Junde Li、Mahabubul Alam 和 Swaroop Ghosh。通过分治法实现大规模量子近似优化。《IEEE集成电路与系统计算机辅助设计汇刊》，42(6):1852–1860，2023年6月。[19] Cheng Xue、Zhao-Yun Chen、Yu-Chun Wu 和 Guo-Ping Guo。量子噪声对量子近似优化算法的影响。《中国物理快报》，38(3):030302，2021年3月。[20] Francisco Barahona、Martin Gr¨otschel、Michael J¨unger 和 Gerhard Reinelt。组合优化在统计物理和电路布局设计中的应用。《运筹学》，36(3):493–513，1988年6月。[21] Jan Poland 和 Thomas Zeugmann。利用缺失数据对成对距离进行聚类：最大割与归一化割。载于 Ljupˇco Todorovski、Nada Lavraˇc 和 Klaus P. Jantke 编，《发现科学》，《计算机科学讲义》，第 197–208 页。施普林格，2006年。[22] Richard M. Karp。组合问题之间的可归约性。载于《计算机计算的复杂性》，第 85–103 页。施普林格，1972年。[23]Seyon Sivarajah、Silas Dilkes、Alexander Cowtan、Will Simmons、Alec Edgington 和 Ross Duncan。t|ket⟩：一种面向含噪中等规模量子设备的可重定向编译器。《量子科学与技术》，6(1):014003，2020年11月。[24] Kosuke Mitarai 和 Keisuke Fujii。通过准概率采样，使用局域通道模拟非局域通道的开销。《Quantum》，5:388，2021年1月。[25] Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，2009年。[26] Christophe Piveteau 和 David Sutter。结合经典通信的量子电路编织。2022年4月。arXiv:2205.00016。[27] Kristan Temme、Sergey Bravyi 和 Jay M. Gambetta。浅层量子电路的误差缓解。《物理评论快报》，119(18):180509，2017年11月。[28] Sergey Bravyi、Oliver Dial、Jay M. Gambetta、Darío Gil 和 Zaira Nazario。超导量子比特量子计算的未来。《应用物理学杂志》，132(16):160902，2022年10月。[29] Andrew Eddins、Mario Motta、Tanvi P. Gujarati、Sergey Bravyi、Antonio Mezzacapo、Charles Hadfield 和 Sarah Sheldon。通过纠缠锻造将量子模拟器的规模扩大一倍。《PRX量子》，3(1):010309，2022年1月。[30]Patrick Huembeli、Giuseppe Carleo 和 Antonio Mezzacapo。利用生成式神经网络模型进行纠缠锻造。2022年5月。arXiv:2205.00933。[31] Wei Tang、Teague Tomesh、Martin Suchara、Jeffrey Larson 和 Margaret Martonosi。CutQC：利用小型量子计算机进行大型量子电路求值。载于第 26 届 ACM 编程语言与操作系统架构支持国际会议论文集（ASPLOS '21），第 473–486 页。ACM，2021年4月。

[32]Thomas Ayral、Francois-Marie Le Regent、Zain Saleem、Yuri Alexeev 和 Martin S uchara。《量子分而治之：硬件演示与含噪模拟》。载于*2020*年*IEEE*计算机学会超大规模集成电路年度研讨会（*ISVLSI*），第138–140页。IEEE，2020年7月。[33] Chong Ying、Bin Cheng、Youwei Zhao、He-Liang Huang、Yu-Ning Zhang、Ming Gong、Yulin Wu、Shiyu Wang、Futian Liang、Jin Lin、Yu Xu、Hui Deng、Hao Rong、Cheng-Zhi Peng、Man-Hong Yung、Xiaobo Zhu 和 Jian-Wei Pan。《使用更少超导量子比特对更大量子电路进行实验模拟》。《物理评论快报》，130(11):110601，2023年3月。[34]Thomas Ayral、Fran¸cois-Marie Le R´egent、Zain Saleem、Yuri Alexeev 和 Martin Suchara。《量子分而治之：探索不同噪声源的影响》。《*SN*计算机科学》，2(3):132，2021年3月。[35] Nadir Casciola、Edoardo Giusto、Emanuele Dri、Daniel Oliveira、Paolo Rech 和 Bartolomeo Montrucchio。《理解切割对量子电路抵御瞬态故障可靠性的影响》。载于*2022*年*IEEE*第*28*届在线测试与鲁棒系统设计国际研讨会（*IOLTS*），第1–7页。IEEE，2022年9月。[36]Angus Lowe、Matija Medvidovi´c、Anthony Hayes、Lee J. O'Riordan、Thomas R. Bromley、Juan Miguel Arrazola 和 Nathan Killoran。《通过随机测量快速切割量子电路》。《*Quantum*》，7:934，2023年3月。[37] Daniel Gottesman 和 Isaac L. Chuang。《量子隐形传态是一种通用计算原语》。《自然》*402，390-393*（*1999*），1999年8月。[38] Wei Tang 和 Margaret Martonosi。《ScaleQC：用于量子与经典处理器混合计算的可扩展框架》。2022年7月。arXiv:2207.00933。[39]量子电路编织工具箱。在线获取：https://qiskit-extensions.github.io/circuit-knitting-toolbox/index.html，2022年11月。[40] Michael A. Perlin、Zain H. Saleem、Martin Suchara 和 James C. Osborn。《使用最大似然层析进行量子电路切割》。*npj Quantum Information*，7(1)，2021年4月。[41] Simon C. Marshall、Casper Gyurik 和 Vedran Dunjko。《使用小型量子计算机进行高维量子机器学习》。2022年3月。arXiv:2203.13739。[42] Zain H. Saleem、Teague Tomesh、Michael A. Perlin、Pranav Gokhale 和 Martin Suchara。《组合优化与分布式量子计算的分而治之方法》。2021年7月。arXiv:2107.07532。[43]Cenk T¨uys¨uz、Giuseppe Clemente、Arianna Crippa、Tobias Hartung、Stefan K¨uhn 和 Karl Jansen。《参数化量子电路的经典拆分》。2022年6月。arXiv:2206.09641。[44] Zeqiao Zhou、Yuxuan Du、Xinmei Tian 和 Dacheng Tao。《QAOA-in-QAOA：在小型量子机器上求解大规模最大割问题》。2022年5月。arXiv:2205.11762。[45]Ruslan Shaydulin、Hayato Ushijima-Mwesigwa、Christian F. A. Negre、Ilya Safro、Susan M. Mniszewski 和 Yuri Alexeev。《一种在小型量子计算机上求解优化问题的混合方法》。《*Computer*》，52(6):18–26，2019年6月。[46]Ruslan Shaydulin、Hayato Ushijima-Mwesigwa、Ilya Safro、Susan Mniszewski 和 Yuri Alexeev。《在小型量子计算机上进行网络社区检测》。《先进量子技术》，2(9):1900029，2019年6月。[47] Teague Tomesh、Zain H. Saleem 和 Martin Suchara。《使用量子交替算子拟设进行量子局部搜索》。《*Quantum*》，6:781，2022年8月。[48] Hayato Ushijima-Mwesigwa、Ruslan Shaydulin、Christian F. A. Negre、Susan M. Mniszewski、Yuri Alexeev 和 Ilya Safro。《跨量子架构的多层次组合优化》。《*ACM*量子计算汇刊》，2(1):1–29，2021年4月。[49] Ramin Ayanzadeh、Narges Alavisamani、Poulami Das 和 Moinuddin Qureshi。《FrozenQubits：通过跳过热点节点提升量子近似优化算法的保真度》。2022年10月。arXiv:2210.17037。[50] Li Li、Minjie Fan、Marc Coram、Patrick Riley 和 Stefan Leichenauer。《采用新型吉布斯目标函数和拟设架构搜索的量子优化》。《物理评论研究》，2(2):023074，2020年4月。

[51]Panagiotis Kl. Barkoutsos、Giacomo Nannicini、Anton Robert、Ivano Tavernelli 和 Stefan Woerner。《使用条件风险价值改进变分量子优化》。《Quantum》，4:256，2020年4月。[52] Daniel J. Egger、Jakub Mare˘cek 和 Stefan Woerner。《量子优化的热启动》。《Quantum》，5:479，2021年6月。[53] Andreas B¨artschi 和 Stephan Eidenbenz。《用于量子近似优化算法的 Grover 混合器：将复杂性从混合器设计转移到量子态制备》。载于2020年IEEE量子计算与工程国际会议（QCE），第72–82页。IEEE，2020年10月。[54] Sergey Bravyi、Alexander Kliesch、Robert Koenig 和 Eugene Tang。《对称性保护对变分量子优化的阻碍》。《物理评论快报》，125(26):260505，2020年12月。[55] Rebekah Herrman、Phillip C. Lotshaw、James Ostrowski、Travis S. Humble 和 George Siopsis。《多角度量子近似优化算法》。《Scientific Reports》，12(1):6781，2022年4月。[56] Daniel Stilck Fran¸ca 和 Raul Garc´ıa-Patr´on。《含噪量子设备上优化算法的局限性》。《Nature Physics》，17(11):1221–1227，2021年10月。[57] Jarrod R. McClean、Sergio Boixo、Vadim N. Smelyanskiy、Ryan Babbush 和 Hartmut Neven。《量子神经网络训练景观中的贫瘠高原》。《Nature Communications》，9(1)，2018年11月。[58] Marco Cerezo、Akira Sone、Tyler Volkoff、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。《浅层参数化量子电路中依赖成本函数的贫瘠高原》。《Nature Communications》，12(1)，2021年3月。[59] Samson Wang、Piotr Czarnik、Andrew Arrasmith、Marco Cerezo、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。《误差缓解能否提高含噪变分量子算法的可训练性？》2021年9月。arXiv:2109.01051。[60] Andrew Arrasmith、Marco Cerezo、Piotr Czarnik、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。《贫瘠高原对无梯度优化的影响》。《Quantum》，5:558，2021年10月。[61] George S. Barron 和 Christopher J. Wood。《变分量子算法的测量误差缓解》。2020年10月。arXiv:2010.08520。[62] Martin Beisel、Johanna Barzen、Frank Leymann、Felix Truger、Benjamin Weder 和 Vladimir Yussupov。《量子工作流中可配置的读出误差缓解》。《Electronics》，11(19):2983，2022年9月。[63] Christophe Piveteau、David Sutter 和 Stefan Woerner。《降低采样开销的准概率分解》。《npj Quantum Information》，8(1):1–9，2022年2月。[64] Matthew Treinish 等。Qiskit 0.37.2，2022年8月。[65] Paul Erd˝os 和 Alfr´ed R´enyi。《随机图的演化》。匈牙利科学院数学研究所出版物，5(1):17–60，1960年。[66] Abdullah Ash-Saki、Mahabubul Alam 和 Swaroop Ghosh。《含噪中等规模量子设备中的串扰分析及其在多程序运行模式下的安全影响》。载于ACM/IEEE低功耗电子与设计国际研讨会论文集，ISLPED '20，第25–30页。计算机协会，2020年8月。[67] Alexandru Paler、Alwin Zulehner 和 Robert Wille。《NISQ电路编译是环面上的旅行商问题》。《量子科学与技术》，6(2):025016，2021年3月。[68]转译器遍次。在线获取：https://qiskit.org/documentation/stable/0.37/ apidoc/transpiler_passes.html?highlight=transpiler%20passes，2022年8月。[69] Alfio Quarteroni、Riccardo Sacco 和 Fausto Saleri。《数值数学》。应用数学丛书。Springer New York，2007年。[70] Andrew Ilyas、Logan Engstrom、Shibani Santurkar、Dimitris Tsipras、Firdaus Janoos、Larry Rudolph 和 Aleksander Madry。《深入探究深度策略梯度》。载于国际学习表征会议，2020年11月。[71] Hyungjun Kim

通过耦合二值激活来减少二值激活网络中的不匹配。在国际学习表征会议，2020年2月。[72] Marvin Bechtold、Johanna Barzen、Frank Leymann、Alexander Mandl、Julian Obst、Felix Truger 和 Benjamin Weder。《研究电路切割对含噪中等规模量子设备上最大割问题的量子近似优化算法的影响》的数据存储库，2023年。[73] Emanuel Knill、Gerardo Ortiz 和 Rolando D. Somma。可观测量期望值的最优量子测量。《物理评论*A*：原子、分子与光学物理》，75(1):012328，2007年1月。[74] Frederik Michel Dekking、Cornelis Kraaikamp、Hendrik Paul Lopuha¨a 和 Ludolf Erwin Meester。《概率与统计现代导论》。施普林格，2005年。[75] Wim Lavrijsen、Ana Tudor、Juliane Muller、CostinIancu 和 Wibe de Jong。面向含噪中等规模量子设备的经典优化器。载于*2020*年*IEEE*量子计算与工程国际会议（*QCE*），第267–277页。IEEE，2020年10月。

所有链接最后一次访问时间为2023年7月10日。