arXiv:2302.01808v3 [math.CO] 7 Jan 2025

抽象分离系统中缠结树的细化：非本质部分

SANDRA ALBRECHTSEN

ABSTRACT. Robertson 和 Seymour 证明了关于图中缠结的两个基本定理： *tree-of-tangles theorem*，该定理指出，每个图都有一个树分解，使得能够区分的缠结位于树的不同节点；以及 *tangle-tree duality theorem*，该定理指出，不含 k 缠结的图具有一个树分解，可以证明此类缠结不存在：因为 k 缠结必须位于某个节点中，但没有任何节点足够大，能够容纳这样的缠结。

Erde 将这两个基本定理合并为一个，构造了一个树分解，使得每个节点要么容纳一个单独的 k缠结，要么小到无法容纳任何缠结。因此，这样的树分解一目了然地展示了一个图有多少个 k缠结，以及它们位于何处。

此后，这两条基本定理已被推广到抽象分离系统，使得我们能够在更一般的离散结构中讨论缠结。本文将 Erde 的统一定理推广到这类一般系统。

1. INTRODUCTION

缠结 由 Robertson 和 Seymour 提出，用来间接刻画图中高度凝聚但边界模糊的结构 [14]。形式上，图 G 的一个缠结，是对其所有阶数不超过某个值的分离所作的一种定向。其思想是：中的每个高度凝聚子结构都会主要位于任意此类低阶分离的一侧，从而将该分离“定向”到那一侧。非常概括地说，缠结就是以这种方式产生的、对所有低阶分离的定向。

自首次提出以来，缠结这一概念及其图分离框架已被推广到所谓的抽象分离系统。尽管这类系统比图的分离系统一般得多，关于图缠结的两条基本定理——缠结树定理和 Robertson 和 Seymour 的缠结-树对偶定理 [14] ——在这种情形下依然成立。

接下来我们假定读者熟悉 [4, 第 12 章5]中介绍的图缠结。 .

对于给定的图 G 和一个整数 $k > 0$，缠结树定理断言，存在一个关于 G 的树分解（T， $\mathcal{V}$），能够区分其所有 k-缠结，因为它们分别位于不同的部分中。若某个部分 $V_t \in \mathcal{V}$ 中存在缠结，则称该部分为本质的；否则称为非本质的。选择分解中的树 T，使其在仍能区分所有缠结的前提下尽可能小，可确保其所有部分都是本质的。

然而，在某些应用中，规范树分解很重要；它可以完全根据底层图的不变量来定义。例如，构造

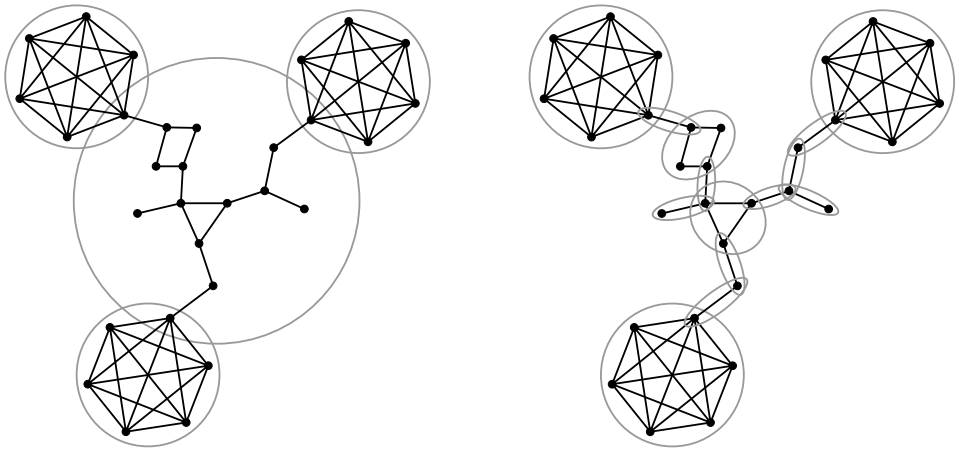
2020 *Mathematics Subject Classification.* 05C83, 05C40, 06A07。
Key words and phrases. 缠结树、缠结-树对偶、抽象分离系统、次模性、典范 .

规范树分解的算法，对于给定的输入图和缠结集合，无论将它们以何种方式输入算法，始终都会产生相同的输出。

用于区分图中 k-缠结的规范树分解可能必须包含一些非本质部分，因为规范性要求不允许我们将非本质部分与本质部分合并，以使所有部分都成为本质部分。这些非本质部分可能包含图的很大一部分，而这样一来，树分解就无法告诉我们该部分的结构。尤其是，它无法说明为什么这些部分中不存在缠结。

然而，如果 G 中根本不存在缠结（其阶为某个给定值），那么缠结-树对偶定理确实会告诉我们一些关于其结构的信息：它保证存在一种树分解，其中每个部分都“小”到不足以容纳缠结。由于每个缠结都必须位于某个部分中，这种树分解便证明了 G 中根本不存在缠结。

由于区分缠结的树分解中的非本质部分并不容纳任何缠结，自然会让人想知道，是否可以局部地为这些非本质部分找到树分解，使其细化原有的规范树分解，并证明这些部分确为非本质部分；这与缠结-树对偶定理给出的树分解证明根本不存在缠结的方式相同。



(a) (b)

FIGURE 1. 一棵能够区分其所有 k-缠结的 G 树分解，以及对非本质部分的细化。

例如，设想一张树状图，在其一个顶点处粘合了三个大型互不相交的团。如果 k 足够大，那么所得图中恰好有三个 k-缠结 G，它们分别由这些团诱导。用于区分这些 k-缠结的规范树分解可以呈现为一颗有三片叶子的星：每片叶子包含三个团中的一个，而星的中心则包含 G(图1a)。

然而，在这个例子中很容易看出，中间部分可以拆分成更小的部分，而每个部分都小到无法容纳一个 k-缠结。这就得到了 G 的一个整体树分解，其中三个大的部分各自都能容纳一个 k-缠结，而其他所有部分都太小，无法容纳缠结（图1b）。

Erde [13] 证明，对于每个图 G，都存在 G 的一个规范树分解，它能高效地区分 k中给定的 G -缠结集合，并且可以扩展为一个树分解，使其所有非本质部分都小到无法容纳缠结：

Erde 精化定理。[13, 推论 3。2] 设 G 是一个图，且 $k \geqslant 3$ 并设 $\mathcal{F} \subseteq 2^{S_k(G)}$ 是一个友好的典范星集。那么存在嵌套集 $N \subseteq N \subseteq S_k(G)$，使得：

- N 在 G 的所有自同构下保持不变，并高效地区分 $S_k(G)$ 的所有 $\mathcal{F}$-缠结；
- N 的每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一颗星，要么是某个缠结的归属节点。

参见 第 2 节 中的定义。

事实上，Erde [13] 证明了更强的结论：只要 每个 这样的树集 N 都可以通过某些 N 如上文所述的方法进行细化，前提是 N 其中的每个分离都能高效地区分某一对 $\mathcal{F}$-缠结。他还给出了一个例子 [13]，表明即使 N 仅由那些排除后即可定义 $\mathcal{F}$ -缠结本身的星组成，要得到更强的结论，这一关于 k的附加假设仍是必要的。

还请注意， 我们无法加强该定理，使得 N 也成为典范（例子见 [13] ）.

自 Robertson 和 Seymour 为图引入缠结以来，人们一直致力于推广缠结和分离的概念，使其适用于尽可能多的情形。缠结的原始定义本身就设计得很容易推广到集合分离[5]。由此产生了“连通性系统”中的缠结这一概念，例如拟阵所对应的连通性系统。

后来，Diestel [5] 引入了抽象分离系统，它们以公理化方式定义“分离”，而不依赖任何底层的图或集合。相反，抽象分离系统被定义为带有反序对合的偏序集。若一个分离系统 S 中的任意两个元素（例如 r 和 s）在某个固定的、更大的分离“全集” $U \supseteq S$中都有下确界 $r \wedge s$和上确界 $r \vee s$，且 $r \wedge s$和 $r \vee s$ 中至少有一个总是属于 S，则称该分离系统为次模的。对于图 G的形式为 $S_k(G) := \{s : |s| < k\}$ 的分离系统，这一性质成立；其中， $r \wedge s$和 $\bar{r} \vee \bar{s}$是分离 r 和 $\bar{s}$ [4]的相对角分离。

次模性使得图的缠结理论中的基本定理，例如缠结树定理和缠结-树对偶定理，能够推广到抽象分离系统[8, 定理 6 和 4]。在这一更一般的框架下，缠结由一棵缠结树加以区分，它推广了树分解的概念。

本文还证明，Erde 定理也可以推广：我们仍然能够找到一棵典范缠结树，用以区分给定的一组缠结；并且还能对其进行细化，使得细化后的缠结树的每个节点要么容纳一个缠结，要么过小而无法容纳缠结：

定理 1. 设 S 是一个次模分离系统，且 $\mathcal{F}$ 是 S 中一个友好的典范星集。那么，存在嵌套集 $N \subseteq N \subseteq S$，使得：

- N 在 S 的所有自同构下保持不变，并且区分 S 的所有 $\mathcal{F}$-缠结；
- N 的每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么容纳一个缠结。

定理 1 是 Erde 精化定理在抽象分离系统中的直接推广。与 Erde 的结果一样，定理 1 断言存在一棵典范缠结树，可以对其进行细化，使所有非本质节点都成为 $\mathcal{F}$中的星。

正如在 Erde 定理的陈述之后所指出的，对于形如 S_k 的分离系统，实际上可以细化每一棵缠结树，其中每个分离都高效地区分一对 $\mathcal{F}$-缠结。因此，自然会问，我们是否也能为抽象分离系统得到某种类似的结果。

但这里我们遇到了一个微妙的困难：如前所述，如果不对 N 内的分离施加进一步条件，我们就不能指望细化每个树 N。然而，在 Erde 定理的情形下，这个条件所指的效率概念一般并未定义，因为它诉诸分离的“阶”。因此，我们将要求这些分离是“优良”的：这一性质将高效地区分一对缠结这一概念结构性地推广到了抽象分离系统。

As 只要我们着眼于优良分离，就能证明以下变体：定理 1:

定理 2。设 S 是一个次模分离系统，并设 $\mathcal{F}$ 是 S中的一个友好星集。此外，设 $N \subseteq S$ 是一个由优良分离组成的嵌套集，它区分 $\mathcal{F}$ 的所有缠结，且这些缠结属于 S。那么存在一个嵌套集 $N \subseteq S$，满足 $N \subseteq N$，使得 N 的每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么是某个 $\mathcal{F}$-缠结的家园。

我们注意到，在分离系统来自图 G的情况下，G 中任何能够高效地区分一对缠结的分离都是优良分离。我们将在第 5 节 证明，总是存在区分缠结的树集 N，其中只包含优良分离。

2. Abstract separation systems and tangles

本节将简要概述我们稍后将使用的重要对象、定义和定理。关于抽象分离系统及其缠结的更详细介绍，请参阅[8] 和 [5]。定义取自 [5,6,8,9,11]。我们采用 [4]中的基本图论概念。

2.1. 分离系统。分离系统 $S = (S, 6, ^*)$ 是一个偏序集 $(S, 6)$，带有一个反序对合 *；也就是说，如果 $s \leqslant r \in S$，那么 $(s)^* \geqslant (r)^*$。我们将 $(s)^*$ 记作 s，并将 $(s)^*$ 记作 s。元素 $s, s \in S$ 称为定向分离。无向分离是集合 $s := \{s, s\}$，其中 $s \in S$ 和 s是 s 的定向。请注意，这里没有默认的定向：一旦我们将一个定向记作 s，另一个定向就是 s，反之亦然。所有集合 $\{s, s\} \subseteq S$ 的集合记作 S。对于无向分离定义的术语，只要不会引起歧义，我们也将其用于定向分离，反之亦然。此外，如果上下文清楚，我们将定向分离和无向分离统称为“分离”。

如果两个无向分离 $r, s \in S$ 有可比较的定向，则它们是嵌套的；否则它们交叉。若 $r, s \in S$ 嵌套，则 r 和 r 都分别与 s, s嵌套。类似地，若 $r, s \in S$交叉，则 r, r 都分别与 s, s交叉。若一个分离集中的所有元素两两嵌套，则该分离集是嵌套的。若两个分离集 R, R' 中的每个元素都与 R'中的每个元素嵌套，则称这两个分离集嵌套。

如果一个分离 $s \in S$ 满足 $s = s$，我们称 s 为退化分离。如果存在一个分离 $r \in S$，使得 $s < r$ 和 $s < r$，则称分离 $s \in S$ 在 S 中是平凡的。若子集 S 的集合 $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ 对于每个平凡分离 $r \in S$都满足 $\{r\} \in \mathcal{F}$，则称其（相对于 S）是标准的。如果 $s \leqslant s$，则分离 $s \in S$ 是小的，且 s 是余小的。一个集合 $\sigma \subseteq S$ 个非退化分离称为星，如果对于任意 r、$s \in \sigma$，都有 $r \leqslant s$.

如果一个分离系统 $(U, 6, ^*)$ 是一个格，也就是说，任意两个分离 $r, s \in U$在 U 中都有上确界 $r \vee s$ 和下确界 $r \wedge s$，我们就称它为分离宇宙，并记作 $U = (U, 6, ^*, \wedge, \vee)$。

给定两个分离 $r, s \in U$，我们称这四个分离 $\{(r \vee s), (r \vee s)^*\}$, $\{(r \wedge s), (r \wedge s)^*\}$,$\{(r \vee \neg s), (\neg r \vee s)^*\}$ 和 $\{(\neg r \wedge s),(r \wedge \neg s)^*\}$ 为它们的角分离。关于角分离，一个简单但相当有用的观察如下：

引理 2.1。 [5, 引理 3。2] 设 r， $s \in U$ 是两个交叉分离。每个 $t \in U$ 同时与 r 和 s 嵌套的分离，也与 r 和 s的全部四个角分离嵌套。

函数 $|\cdot| : U \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 称为 U 的序函数，如果对所有 $s \in U$都有 $|s| = |\neg s|$。如果 U 带有一个次模的序函数，即

$$|r \vee s| + |r \wedge s| \leqslant |r| + |s| \text{ for all } r, s \in U,$$

那么我们称 U 为次模宇宙。此时， $|s|$ 是 s 和 $\neg s$的阶。对于一个整数 $k > 0$，由此诱导的集合 $S_k := \{s \in U : |s| < k\}$ 本身都是分离系统。尽管它们未必是全集，因为一般而言，对于两个分离 r、 $s \in S_k$， $r \vee s$和 $r \wedge s$未必都属于 S_k。注意，此处的下确界和上确界是相对于 U而言的。然而，根据 $|\cdot|$的次模性， $r \vee s$和 $r \wedge s$中至少有一个必须包含于 S_k中。

这一性质促使我们采用以下关于次模性的结构性表述，它可应用于全集，而无需借助序函数这一外部概念：

若分离系统 S 包含于全集 U 中，且 $S \subseteq U$，并且 S 上的偏序和对合均由 U诱导，则称该分离系统包含于该全集中。于是，若某个全集 U 中的分离系统 S 满足

$$\text{for all } r, s \in S : r \vee s \in S \text{ or } r \wedge s \in S.$$

2.2. 抽象分离系统中的剖面与缠结。无向分离集合 S 的一个定向，是指满足以下条件的集合 $O \subseteq S$：它包含 S 中的每个退化分离，并且对于 S中的每个非退化分离，恰好包含其两个定向 s或 $\neg s$ 中的一个。若子集 $O \subseteq S$ 在满足 $r < s$ 时，对于互异的 r、 $s \in S$，不同时包含 r和 $\neg s$，则称其为相容的。若 $\mathcal{O}$ 是 S的相容定向集合，则当某个 $O \in \mathcal{O}$满足 $\sigma \subseteq O$ 时，称星 $\sigma \subseteq S$ 为本质的（相对于 $\mathcal{O}$）。否则，称 σ 为非本质的（相对于 $\mathcal{O}$）。

非退化分离 $s \in S$ 在 O_1 和 O_2 以不同方式定向 s时，区分两个定向 O_1 和 O_2。如果分离集 $N \subseteq S$ 中的任意两个不同定向都能被 N中的某个分离区分，则称分离集 $N \subseteq S$ 区分定向集合 $\mathcal{O}$。在次模宇宙 U中，如果某个分离 $s \in U$能够区分一对定向 O_1 和 O_2，且不存在任何阶数更低的分离能够区分 O_1 和 O_2，则称该分离高效地区分它们。

设 $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ 是 S的子集所组成的集合。若 P 是 S 的一个 $\mathcal{F}$-Tangle（ S），则称其为 P，如果它是一致的，并且不包含 $\mathcal{F}$ 中的任何元素作为子集。

如果 S 是某个全集 U中的分离系统，我们称 S 的一个一致定向 P为 S的剖面，如果它满足

$$\text{对于所有} r、 s \in P，\text{分离 } (r \vee s)^* \text{ 不属于 } P。$$

不包含任何余小分离的 S 剖面是正则的。

我们可以如下描述 S的 $\mathcal{F}$-缠结的剖面。令 $\mathcal{P}_S := \{\{r, s, (r \vee s)^*\} : \neg r, \neg s \in S\} \cap 2^S$，那么所有 $\mathcal{P}_S$-缠结的集合恰好就是 S的所有剖面的集合。我们称 $\mathcal{F}$ 是 （关于 S）剖面相容的，如果 $\mathcal{F}$的每个 S-缠结都是 S的一个剖面。

本文中，我们所考虑的剖面通常是针对标准且剖面相容的星集的 $\mathcal{F}$-缠结；该星集对每个小 $r \in S$ 都包含 $\{r\}$，因此这些剖面都是正则的。

2.3. 树集与 S-树。 树集 N 是一个不含退化分离或平凡分离的嵌套无向分离集合。若存在一致定向 $\sigma \subseteq N$，使得 是 N 中极大元的集合 O，则称星 N 为 σ 的一个节点 O （注意，在 [6] 中， N 的节点称为“分裂星”）。

再设 S 为一个分离系统。一个 S-树是由一棵（图论意义上的）树 T 和一个映射 $\alpha\colon E(T) \to S$ from the oriented edges $E(T) := \{\vec{e}, \overleftarrow{e} \colon e \in E(T)\}$ of T to S 组成的有序对 (T, α)，满足 $\alpha(e) = s$ if $\alpha(\overleftarrow{e}) = s$。若 $x \in V(T)$ 是 T 的叶，且 $t \in V(T)$ 是它的唯一邻点，则称 $\alpha(x, t) \in S$ 为（ T 的）叶分离。

若对于每个节点 $t \in V(T)$，都有 $\{\alpha(t', t) : (t', t) \in E(T)\} \in \mathcal{F}$，则称 S-树 (T, α) 是基于集合 $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ 的。若 $\mathcal{F}$ 是 $\vec{S}$ 中的星集，则称对于节点 $t \in V(T)$， $\vec{\sigma}_t := \{\alpha(\overrightarrow{t', t}) : (t', t) \in E(T)\} \subseteq \vec{S}$ 为与 t （在 T 中）关联的星。

若一个 S-树 (T, α) 中不存在这样的节点 $t \in V(T)$: 它有两个邻点 $t', t'' \in V(T)$，且 $\alpha(t, t') = \alpha(t, t'')$，则称该树为不可约。若 (T, α) 是一个以星集为基础的不可约 S-树，则 α 保留了 $E(T)$ 上的自然序，即 $\vec{e} \leqslant f$ 当且仅当 $\vec{\alpha}(e) \leqslant \alpha(f)$，其中 $e = (v_1, v_2) \leqslant f = (w_1, w_2)$ 当且仅当 T 中从 $\{\vec{v_1}, v_2\}$ 到 $\{w_1, w_2\}$ 的唯一道路始于 v_2 并终于 w_1 [11, 引理 2.1]。

本文只考虑 S-树，其定义在 S中的星集上。此外，我们始终默认（虽不明确说明）所考虑的 S-树都是不可约的。这并不构成限制：对于每个S-树 (T, α)，若其定义在星集 $\mathcal{F}$上，则存在 T'的一个子树 T，使得 $(T', \alpha\restriction_{\vec{E}(T')}$是一个不可约的 S-树，其定义在 $\mathcal{F}$ [11, 引理 2。3]。

每个以星集为基础的 S-树都会通过 α 诱导出一个树集 $N := \mathrm{im}(\alpha)$，前提是对于某条边 $\vec{e} \in E(T)$，没有 $\alpha(e)$ 是平凡或退化的。此时我们称 N 对应于该 S-树。另一方面，若 N 是 S中的正则树集，即 N 不含任何小分离，则可按以下方式从 N得到一个 S-树 (T, α)。我们取 N 的所有分裂星作为 T 的顶点集，并取 N 作为 T 的边；其中，一个分离 $s \in N$ 关联于 N 中分别包含 s 和 s的两个唯一分裂星：

定理 2.2。 [6, 定理 6。9] 设 S 是一个分离系统，而 $N \subseteq S$ 是一个正则树集。那么存在一个 S-树 (T, α) 满足 $\mathrm{im}(\vec{\alpha}) = N$，使得与 T 的节点相关联的星恰好是 N 的节点。

这启发我们将 N的分裂星称为“节点”。[6] 证明了， S树定理 2.2 中的树在同构意义下唯一。因此，我们称 T 为与 S对应的 N树。

如果一致定向 O of S 位于树集 $N \subseteq S$ 的节点 σ 处（或者等价地说， σ 以 O为家），我们就称之为如此。类似地，如果 O位于一个 S-树 (T, α) 的节点 $t \in V(T)$ 处，即 $\sigma_t \subseteq O$，我们就称之为如此。容易看出， S 的每个一致定向都位于任意正则树集 N的一个（唯一）节点处。

给定 S 的一组一致定向 $\mathcal{O}$ 以及一个区分 $\mathcal{O}$的树集 N，如果有一个 $\mathcal{O}$ 中的定向位于 N的某个节点处，我们就称该节点对于 $\mathcal{O}$是本质的；否则称其对于 $\mathcal{O}$是非本质的。

两个分离系统 S 和 S' 之间的同构是一个双射 $\varphi\colon \vec{S} \to \vec{S'}$，它保持序关系并与它们的对合相容。我们称一个嵌套集 $N := N(S, \mathcal{P}) \subseteq S$——它区分了 S 的某个剖面集合 $\mathcal{P}$——是典范的，如果它在分离系统的同构下保持不变；也就是说，映射 $(S, \mathcal{P}) \mapsto N$与所有同构 $\varphi\colon S \to S'$ 相容，使得 $\varphi(N(S, \mathcal{P})) = N(S', \varphi(\mathcal{P}))$，其中$\varphi(\mathcal{P}) := \{\varphi(P) : P \in \mathcal{P}\}$。注意，若集合 $\mathcal{P}$ 在 S的自同构下保持不变，即对于 S的所有自同构 φ，都有 $\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$，且 N 是典范的，那么这意味着对于 S的所有自同构 φ，都有 $\varphi(N) = N$。

我们将需要以下典范形式的缠结树定理：

定理 2.3。 [12, 定理 2] 设 S 是一个次模分离系统，且 $\mathcal{P}$ 是 S的一个剖面集合。那么存在一个嵌套集 $N = N(S, \mathcal{P}) \subseteq S$区分 $\mathcal{P}$。

这个 $N(S,\mathcal{P})$ 可以典范地选取：若 $\varphi\colon S \to S'$ 是分离系统同构，且$\mathcal{P}' := \{\varphi(P) : P \in \mathcal{P}\}$，则 $\varphi(N(S,\mathcal{P})) = N(S',\mathcal{P}')$。

2.4. 缠结-树对偶。 设 S 是某个全集中的一个分离系统，并设 r 是 S 中的一个分离，既非退化也非平凡，并令 $S_{\geqslant r} := \{x \in S : x \geqslant r$ 或 $x \geqslant r\}$。我们称 s在 r 中模拟 S，若 $s \geqslant r$并且对每个 $x \in S_{\geqslant r} \smallsetminus \{r\}$满足 $r \leqslant x$的情形，都有 $s \vee x \in S$。于是我们可以定义一个函数 $f{\downarrow}^{r}_{s}$: $S_{\geqslant r} \smallsetminus \{r\} \to S_{\geqslant r} \smallsetminus \{r\}$如下：

$$f{\downarrow}^{r}_{s}(x) := x \vee s \text{ and } f{\downarrow}^{r}_{s}(\bar{x}) := (x \vee s)^{*} \text{ for } x \geqslant r.$$

若 (T,α) 是一个 S-树，且 s 模拟 r，我们可以定义 $\alpha' := f{\downarrow}^{r}_{s} \circ \alpha$。不难看出，$(T,\alpha')$ 仍然是一个 S-树，我们称 (T,α') 为 将 (T,α) 移位到 s。

给定一个由星组成的$\mathcal{F} \subseteq 2^{S}$ 集合，我们称 s 在 r 中为 S 关于 $\mathcal{F}$ 模拟 s，如果 r在 S 中模拟 $\sigma \in \mathcal{F}$，并且对于每个满足 $\sigma \subseteq S_{\geqslant r} \smallsetminus \{r\}$ 且包含一个元素 $t \geqslant r$ 的星 $f{\downarrow}^{r}_{s}$，都有 $(\sigma) \in \mathcal{F}$。

这一性质对于下面的引理至关重要。该引理是证明缠结—树对偶定理的关键工具，也将在定理 1 和 2 的证明中发挥重要作用。

引理 2.4. [11, 引理 4.2] 设 S 是一个分离系统，$\mathcal{F} \subseteq 2^{S}$ 是一个星集，并且 (T,α) 是一个关于 $\mathcal{F}$ 的紧且不可约的 S-树。此外，设 r 是 (T,α) 的一个叶分离，既非平凡也非退化；设 $s \in S$ 在 S 中为关于 $\mathcal{F}$ 模拟 r，并考虑 $\alpha' := f{\downarrow}^{r}_{s} \circ \alpha$。那么，$(T,\alpha')$ 是一个关于 $\mathcal{F} \cup \{\{s\}\}$的 S-树，其中 $\{s\}$ 是与唯一叶子相关联的星。

这里的紧意味着，对于每个节点 $t \in V(T)$，与 t 相关联的星不包含其任何非退化元素的逆。

在 [11, 引理 24] 中证明了，若存在一个关于 S 的树，且其叶分离中有一些 $\mathcal{F}$既非平凡也非退化，r_i 那么还存在一个关于 S 的树，它是紧的且不可约，并且每个 $\mathcal{F}$ 都是叶分离，且不是任何其他边的像。r_i

如果每当 $s \in S$ 模拟某个 $r \in S$ 时，它也会在 S 中针对 $\mathcal{F}$模拟 r，那么星的集合 $\mathcal{F}$ 在 S 中对移位封闭。根据这个定义，我们现在可以陈述稍后所需版本的缠结-树对偶定理：

定理 2.5。 [8, 定理 4] 设 U 是一个分离全集，且 $S \subseteq U$ 是一个次模分离系统。设 $\mathcal{F} \subseteq 2^{S}$ 是一个关于 S 标准且对移位封闭的星集。那么以下情况恰有一种成立：

(i) 存在一个 $\mathcal{F}$-tangle of S。
(ii) 存在一棵关于 $\mathcal{F}$ 的 S-树。

定理 2.5 的条件乍看起来可能相当强，但实际上通常都能满足。Diestel、Eberenz 和 Erde [7] 证明，任意集合 $\mathcal{F} \subseteq 2^{S}$ 都可以转换为一个在移位下封闭的标准˙˙星集合 $\mathcal{F}$，使得 S 的一个定向是正则 $\mathcal{F}$-tangle，当且仅当它是一个正则 $\mathcal{F}$-tangle：

引理 2.6。 [7, 引理 11 与 14] 设 S 是某个全集中的次模分离系统，并设 $\mathcal{F} \subseteq 2^{S}$ 是一个标准集合。那么存在一个标准集合 $\hat{\mathcal{F}} \subseteq 2^{S}$，由在移位下封闭的星构成，使得 S 的一个定向是正则 $\mathcal{F}$-Tangle，当且仅当它是正则 $\mathcal{F}$-Tangle。

特别是，引理 2.6 意味着集合 $\mathcal{P}_S$ 可以转化为集合 $\mathcal{P}_S$，由在移位下封闭的星构成，使得 $\mathcal{P}_S$-Tangle of S 的全体恰好是 S的所有剖面。

3. Refining inessential stars

本节中我们证明定理 2，这是对 Erde 的工作的推广，适用于 [13] 抽象分离系统。设S 是一个次模分离系统，且 $\mathcal{F}$是 S中的某个合适星集。那么定理 2断言，每个由“良好”分离区分缠结的树集都可以细化，使得其每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么对应于 $\mathcal{F}$的一个缠结 S。

证明Erde 精化定理 [13] 的主要工具是所谓的细化引理 [13,引理 3。1]该引理断言，给定一个分离的次模全集 U、一个整数 $k > 0$以及一个合适的集合 $\mathcal{F}$（其中的星属于 S_k），对于每个非本质星 $\sigma \subseteq S_k$，都存在一个 S_k-树，其构建于 $\mathcal{F} \cup \{\{s\} \text{之上：} \ s \in \sigma\}$——只要 σ 中的每个分离都能高效地区分 $\mathcal{F}$的两个缠结 S_k 。

这样的 S_k-树对应于一个嵌套分离集，其性质是每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么是一个 $\mathcal{F}$-缠结的归属节点；后一种情况只会出现在带有$\{s\}$ 的单元素星中 $s \in \sigma$。将此应用于任意一个能够 N 高效地区分 $\mathcal{F}$-缠结集的典范树集中的非本质节点，并将这些集合与树集 N合并，便得到Erde 精化定理。

本节中，我们将首先把 Erde 的细化引理推广到任意次模分离系统，由此便可直接推出定理 2。

本节所考虑的缠结始终是针对星集 $\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{F}$-缠结，其中 $\mathcal{F}$ 是 S 中的标准集，对移位封闭，并且对于每个小分离 $r \in S$ 都包含 $\{r\}$ 。若 $\mathcal{F}$ 还剖面相容，则称 $\mathcal{F}$ 友好。注意，要求 $\mathcal{F}$ 是友好星集并不构成真正的限制。事实上，若 $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ 只是任意的集合族，不一定由星组成，那么根据引理 2.6，我们可以将 $\mathcal{F}$ 转化为一个对移位封闭的标准星集 $\mathcal{F}$，使得所有 $\mathcal{F}$-缠结组成的集合恰好就是所有 $\mathcal{F}$-缠结组成的集合。若每个 $\mathcal{F}$-缠结尚未必然是 S 的剖面，那么我们可以将 $\mathcal{P}_S$ 添加到 $\mathcal{F}$，得到友好星集 $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \mathcal{P}_S$，使得 S 的一个定向是 $\mathcal{F}$-缠结，当且仅当它是 S 的一个剖面且是 $\mathcal{F}$-缠结。

最后请注意，若 G 是一个图，而 $\mathcal{T}_k$ 是定义 k-缠结的排除条件所涉及的集合族（参见[4, 第 12 章。5]，其中详细介绍了图中的缠结），那么很容易看出，集合 $\mathcal{T}_k^* \subseteq \mathcal{T}_k$由 $\mathcal{T}_k$ 中的所有星组成，是一个友好星集。此外，Diestel 和 Oum 已证明，若 $\mathcal{T}_k^*$中的 G阶 k 缠结，恰好就是 k中的 G 缠结，只要 $|G| \geqslant k$ [10, 引理 4。2]。

我们先回顾 Erde 的细化引理的准确表述：

引理 3.1。[13, 引理 3。1] 设 U 是一个分离的次模全集，设 $k \in \mathbb{N}$，并设 $\mathcal{F}$ 是 S_k中的一个友好星集。此外，设 $\sigma = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq S_k$是一个非空的分离星，对于 $\mathcal{F}$中所有 S_k缠结的集合而言是非本质的，并且假设每个 s_i 都能高效地区分 $\mathcal{F}$中的某一对 S_k 缠结。那么存在一个 S_k关于 $\mathcal{F}'$ 的树分解：$= \mathcal{F} \cup \{\{s_1\}, \dots, \{s_n\}\}$ 其中每个 s_i 都作为叶分离出现。

除了这里的分离系统具有 S_k这种形式之外，引理 3.1的证明还依赖于这样一个关键事实：我们想要细化的非本质星 σ 中的每个分离都能高效地区分一对$\mathcal{F}$-缠结。事实上，Erde [13] 给出了一个图 G、一个整数 $k > 0$和一个星 σ，该星对于 k中所有 G-缠结的集合而言是非本质的，并且其中每个分离都能区分某个

对 k-缠结，且位于 G 中——但无法高效地区分——因此不可能按照 σ 引理 3.1的含义来细化 σ 。此外，这个例子中的星 G在的所有自同构下保持不变。

因此，将 引理 3.1 推广到任意次模分离系统时 S，我们不能指望在不对该星内部的分离施加额外条件的情况下细化每个非本质星。但由于效率这一概念依赖于序函数的存在，我们必须为 σ 中的分离找到一个不同的条件，使其即使对于没有序函数的抽象分离系统也有定义。

仔细考察 引理 3.1 [13], 的证明可以发现，分离 σ 上的效率条件仅用于证明：对于每个分离 $s_i \in \sigma$，都存在一个 $\mathcal{F}$-纠缠 P_i，它属于 S_k，且 s_i 模拟每个满足 $x \leqslant s_i$ 且 $x \in P_i$的分离。这等价于对于每个小于某个 $s_i \wedge r \in S$ 的分离 $r \in S$，都有 $x \in P_i$，这引出了下面的定义。

设 S 是某个全集中的分离系统，O 是 S 的一致定向。若 $s \in O$ 且

$$\text{for every separation } r \in P, \text{ it holds that } s \wedge r \in S.$$

我们指出，每个与 O 紧密相关的分离 $s \in O$ 的逆 s，确实模拟每个满足 $s \leqslant x \in O$ 的分离 x。

若分离 $r \in O$ 是 O 中关于由 S 在 O 上诱导的偏序的极大元，则称它在 O 中是极大的。与剖面 P 紧密相关的分离，例如在 P 中极大的分离，正如下述命题所示：

命题 3.2. 设 S 是一个次模分离系统，P 是 S 的一个剖面。那么，每个极大分离 $s \in P$ 都与 P 紧密相关。

证明. 假设存在一个满足 $s \wedge r \notin S$ 的分离 $r \in P$。由 S 的次模性可得 $s \vee r \in S$，因此 $s \vee r \in P$，因为 P 是一个剖面。但 $s \vee r$ 严格大于 s，矛盾。□

接下来的基本观察描述了何时一个分离 r 与某个剖面 P 紧密相关，前提是存在一个大于r 且与 P紧密相关的分离：

命题 3.3. 设S 是一个次模分离系统。若 $s \in S$ 与 S的一个剖面 P紧密相关，并且 S 中的分离$r \leqslant s$ 满足对每个$u \leqslant s$都有 $r \wedge u \in S$，那么 r 与 P紧密相关。

证明。设$t \in P$是任意一个分离。由于 s与 P紧密相关，我们有 $s \wedge t \in S$。由于 $r \wedge s = r$，可得 $r \wedge t = (r \wedge s) \wedge t = r \wedge (s \wedge t) \in S$，因为 $s \wedge t \leqslant s$。□

一般而言，与某个剖面紧密相关的分离不只有极大的那些。此外，与某个剖面紧密相关，确实只是高效地区分一对剖面的一种推广：如果 k 是一个正整数，且 U 是一个次模全集，那么 S_k 中每个能高效地区分一对剖面的分离 $S_k \subseteq U$ 的定向，都与该对剖面中的剖面紧密相关：

命题 3.4. 设 U 是一个分离的次模全集，$k \in \mathbb{N}$，并设 P 和 P' 是 S_k 的两个剖面。若分离 $s \in P$ 高效地区分 P 和 P'，则 s 和 s 分别与 P 和 P' 紧密相关。

证明。设 $s \in P$ 是一个能高效区分 P 和 P' 的分离，并设 $r \in P$ 任意。我们需要证明 $r \wedge s \in S_k$。反设 $|r \wedge s| \geqslant k > |r|$成立。由次模性

可知，序函数满足 $|\mathring{r} \vee \mathring{s}| < |\mathring{s}| < k$，因此 $\mathring{r} \vee \mathring{s} \in S_k$。由于 P 是一个剖面，我们便有 $\mathring{r} \vee \mathring{s} \in P$。此外，由于 P' 的一致性，有 $(\mathring{r} \vee \mathring{s})^* = \mathring{r} \wedge \mathring{s} \leqslant \mathring{s} \in P'$，因此 $\mathring{r} \vee \mathring{s}$ 区分 P 和 P'。由于 $|\mathring{r} \vee \mathring{s}| < |s|$，这与 s 高效地区分 P 和 P' 相矛盾。类似地，可以证明 s 与 P' 紧密相关。□

现在我们可以陈述 Erde 的细化引理（引理 3.1）的推广版本：

引理 3.5。设 S 是一个次模分离系统，$\mathcal{F}$ 是 S 中的一个标准星集，该星集在移位下封闭，并且对每个小 $\mathring{r} \in S$ 都包含 $\{\mathring{r}\}$。此外，设 $\sigma = \{\mathring{s}_1, \dots, \mathring{s}_n\} \subseteq \mathring{S}$ 是一个非空的星，对于 S 的所有 $\mathcal{F}$-缠结而言，该星是非本质的；并假设每个 s_i 都与某个 S 的 $\mathcal{F}$-缠结紧密相关。则存在一棵 $\mathcal{F} \cup \{\{\mathring{s}_1\}, \dots, \{\mathring{s}_n\}\}$ 上的 S-树，其中每个 s_i 都作为叶分离出现。

这个引理的证明与 Erde 对引理 3。1 [13]的证明非常相似。实际上，我们只需稍作修改，使证明适用于略有不同的情形。为求完整起见，我们在此给出完整证明，而不只是解释其中的差异。感兴趣的读者也可以查阅 [13] 以了解原始证明。

引理 3.5 的证明。令 $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{\{\mathring{x}\} : \mathring{s}_i \leqslant \mathring{x}$ 其中 $i \in [n]\}$。我们先证明，$\mathcal{F}$ 在移位下封闭。为此，任取 $\{\mathring{x}\} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}$，那么，任何满足 $\{\mathring{x}\} \subseteq \mathring{S}_{\geqslant r'}$ 的映射 $f: \mathring{S}_{\geqslant r'} \to \mathring{S}_{\geqslant s}$ 都会将 x 映到某个 $\mathring{y} \geqslant \mathring{x}$，因此 $\{y\} \in \mathcal{F}$。所以，由于 $\mathcal{F}$ 在移位下封闭，$\mathcal{F}$ 也在移位下封闭。此外，由于 $\mathcal{F}$ 是标准的，$\mathcal{F}$ 也是标准的。因此，我们可以对 $\mathcal{F}$ 应用定理 2.5。由于 σ 是 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$ 的一个非本质星，因此不可能存在 S 的 $\mathcal{F}$-Tangle，故由定理 2.5 可知，存在一个关于 $\mathcal{F}$ 的 S-树。令 (T, α) 为这样一棵树，且其中包含的叶分离 s_i 尽可能多。注意，一般而言，关于 $\mathcal{F}$ 的一棵 S-树未必包含任何 s_i 作为叶分离。

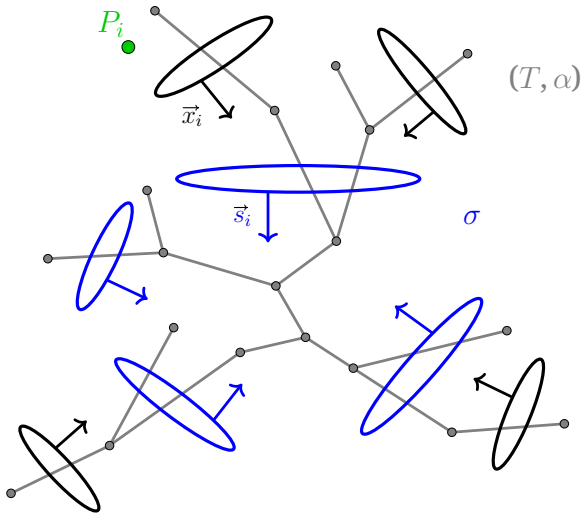


FIGURE 2. 由 $S_k(G)$-分离树：$\mathcal{F}$ 带标签的叶子对应于以下分离，由 $\mathcal{F}$ 强制，但不由 $\mathcal{F}$ 强制。

假设存在一个 $s_i \in \sigma$，它不是 (T,α) 的叶分离，并令 P_i 为某个与 s_i 紧密相关的 $\mathcal{F}$-Tangle S。由于 P_i 是 S 的一个一致定向，它必定位于某个节点 $t \in V(T)$ 处。但由于 P_i 是一个 $\mathcal{F}$-Tangle，与 t 对应的星只能属于 $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}$，因此 t 必定是叶。因此，存在 (T,α) 的某个叶分离 x_i，使得 $x_i \in P_i$。由于 $\{x_i\} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}$，可知对于某个 $j \in [n]$，有 $x_i \geqslant s_j$。

但是，由于对于每个小的 $r \in S$，$\mathcal{F}$ 包含 $\{r\}$，我们有 P_i 是正则的，因此 σ 中满足 $s_i \in P_i$ 的分离 s_i 是唯一的。事实上，若对某个 $j \in [n] \setminus \{i\}$ 有 $s_j \in P_i$，那么由于 P_i 是一致的，我们不可能有 $s_i \leqslant s_j$。因此，$s_i \leqslant s_j$、$s_j \leqslant s_i$ 或 $s_j \leqslant s_i$ 必有其一。由于 σ 是一颗星，前两种情况意味着 s_j 或 s_i 是小的，而这两种情况都与 P_i 是正则的相矛盾。此外，同样由于 σ 是一颗星，后一种情况意味着 $s_i = s_j$，这与 P_i 是 S 的一个定向相矛盾，因为此时 s_i、$s_i \in P_i$。因此，$j = i$ 且 $s_i \leqslant x_i$。

由于 s_i 与 P_i 紧密相关，因此 s_i 模拟 x_i。此外，由于 x_i 既非平凡也非退化，根据引理 2.4 后的说明，我们可以假设 T 是紧的且不可约，并且 x_i 不是 T 中任何其他边的像。因此，根据引理 2.4，将 (T,α) 移位到 s_i 上，会得到一个 S-树 (T,α')，其包含 s_i 作为叶分离，而非任何其他边的像。此外，由于对所有 $j \neq i$ 都有 $s_i < s_j$，移位 (T,α') 也包含所有 s_j 作为叶分离，这些叶分离原本都由 T 包含，因此它比 T 多包含一个，与 T 的选取相矛盾。因此，(T,α) 将所有 s_i 都作为叶分离包含在内。

我们只需证明 (T,α) 是 $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{\{s_1\}, \dots, \{s_n\}\}$ 上的一个 S-树。为此，回想一下，根据 的定义，(T,α) 已经是 $\mathcal{F}$ 上的一个 S-树。现在假设存在一个节点 $t \in V(T)$，其在 α' 下的关联星不属于 $\mathcal{F}'$。由于 (T,α) 位于 $\mathcal{F}$ 上，且 $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ 只包含单元素星，因此 t 是 T 的一个叶。令 r 为与唯一一条关联于 t 的边相对应的叶分离。由于 $\{r\} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$，存在某个 $i \in [n]$ 使得 $r > s_i$。但同样有 $s_i > r$（因为 s_i 和 r 都是叶分离）。因此，r 是平凡的，所以 $\{r\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$，证明完毕。□

尽管引理 3.1和引理 3.5本身就是有趣的结果，但引理 3.1的重要性在于，它可以应用于树集 N，在某些 S_k中高效地区分 $\mathcal{F}$的 -缠结集合 S_k，其中 $\mathcal{F}$ 是某个友好星集。它进而断言，存在一个嵌套集 $N \subseteq S_k$，满足 $N \subseteq N$，其中每个非本质节点都“小”得不足以容纳一个剖面；也就是说，每个非本质节点都是 $\mathcal{F}$中的一颗星。

对于形如 S_k 的分离系统，已知存在满足引理 3.1和引理 3.5条件的树集。例如，Carmesin、Diestel、Hamann 和 Hundertmark [3]为图构造了一个典范树集，能够高效地区分给定的 k-缠结集合。更一般地，Diestel、Hundertmark 和 Lemanczyk[9] 构造了一个典范树集，能够高效地区分所有“稳健”的 k-剖面，其中 $k \in \mathbb{N}$属于分离的次模全集。将引理 3.1应用于这些树集，便得到Erde 精化定理。

但如果我们想将引理 3.5 应用于任意次模分离系统中的某个典范树集，以得到类似于Erde 精化定理的结果，我们首先必须找到一个满足引理 3.5假设的树集。为此，我们将在第 4 节 中证明，Elbracht 和 Kneip [12] 构造的典范树集满足这些假设。这样，我们就能通过细化这个集合来证明定理 1。

然而，引理 3.1 实际上足够强，可以证明我们确实能够细化每一个位于某个 S_k内部的树集——无论其是否为典范，其中每个分离都能高效地区分某一对 $\mathcal{F}$-缠结。通过

引理 3.5 现在我们还可以细化每个区分缠结的树集 N，只要位于抽象次模分离系统中某个非本质节点内的每个分离的逆 N都与某个 $\mathcal{F}$-缠结紧密相关：

定理 3.6。设 S 是一个次模分离系统，并设 $\mathcal{F}$ 是 S 中的一个标准星集，且对移位封闭，并包含 $\{\grave{\imath}\}$对每个小 $\grave{\imath} \in S$。此外，设 N 是一个嵌套分离集，它区分 $\mathcal{F}$ 的所有 $\vec{S}$- 缠结。如果每个包含在 的非本质节点中的分离的逆，都与某个 $\mathcal{F}$-缠结 S紧密相关，那么存在一个嵌套集 $N \subseteq S$，满足 $N \subseteq N$，使得 N 的每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么与某个 $\mathcal{F}$-缠结 S同胚。

证明。令 Σ 为 N的所有非本质节点构成的集合，并任取 $\sigma \in \Sigma$。由于 σ 中的每个分离的逆都与某个 $\mathcal{F}$-缠结 S紧密相关，我们可以对 σ 应用引理 3.5，从而得到一个嵌套集 N_σ，它对应于一个以 $\mathcal{F} \cup \{\{\grave{s}\}$ 为底的 S-树：$\grave{s} \in \sigma\}$，其中 σ 中的所有分离都作为叶分离出现。显然，对于每个星 $\sigma' \in \Sigma$，N_σ 都与 $N_{\sigma'}$ 嵌套。由于 N_σ 也与 N嵌套，令$N := N \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma} N_\sigma$，即可得到所需的嵌套集。□

请注意，来自[12] 的嵌套集满足定理 3.6的假设，正如我们将在第 4 节中所示。

尽管定理 3.6 对集合 N 所作的假设，是我们通过应用引理 3.5证明抽象分离系统的这类细化定理所需的最弱假设，但下面我们将提出一个更强的假设，我们认为它更为自然。为此，回顾一下， Erde 精化定理对 N 提出的条件是，其中的每个分离都应当 N 高效地区分某一对 $\mathcal{F}$-缠结。这里，某个分离能否高效地区分一对 N -缠结，并不取决于集合 $\mathcal{F}$。特别是，在寻求构造一个满足Erde 精化定理假设的区分缠结的树集时，可以在构造之前，确定哪些分离可能会被纳入 N。

然而，定理 3.6 并不具备这一优点。由于其假设要求，包含在的某个非本质节点中的每个分离的逆，都必须与某个 N -缠结 $\mathcal{F}$紧密相关，因此必须了解整个集合 N 并先确定其中的非本质节点，才能检验定理 3.6的条件。为了获得一个更接近Erde 精化定理的结果，我们因此希望为 N 中的分离找到一个满足以下两个性质的条件。一方面，该条件应确保能够细化 N的非本质节点；另一方面，该条件应完全以 S 和 $\mathcal{F}$ 为依据表述，从而无需参考树集 N 及其非本质节点，也能检验这一性质。

设 $\vec{S}$ 是一个次模分离系统，且 $\mathcal{P}$ 是 S的一个剖面集合。若一个分离 $s \in S$ 是良好的（对于 $\mathcal{P}$），那么存在剖面 P、$P' \in \mathcal{P}$，使得 s和 s分别与 P和 P'紧密相关。注意，根据 命题 3.4，在一个 S_k 中，任何能够高效地区分某一对剖面的分离都是良好的。因此，对于那些缺少定义效率所需框架的抽象分离系统而言，良好这一性质是对效率的一种结构性推广。显然，要求每个分离都是良好的，比 定理 3.6中的假设更强，因此可直接推出下述定理：

定理 2. 设 S 是一个次模分离系统，$\mathcal{F}$ 是 S 中一个在移位下封闭的标准星集，并且对每个小 $\grave{\imath} \in S$都包含 $\{\grave{\imath}\}$。此外，设 N 是一个嵌套分离集，它区分 $\vec{S}$ 的所有 $\mathcal{F}$-缠结。如果 N 中的每个分离对于 S 的所有 $\mathcal{F}$-缠结的集合都是良好的，那么存在一个嵌套集 $N \subseteq S$，满足 $N \subseteq N$，使得 N 的每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么是某个 S的$\mathcal{F}$-缠结的所在节点。□

注意，该定理推广了 Erde 在 [13] 中的工作。事实上，Erde 的细化引理（引理 3.1）表明，可以细化某个形如 S_k 的分离系统中的每个树集，其中该系统只包含本质分离。由于根据 命题 3.4，任何能够高效地区分 $\mathcal{P}$ 中某对剖面的分离，对于 $\mathcal{P}$ 也是良好的，因此，定理 2 也表明这些树集可以被细化。不过，定理 2 也可应用于任意的次模分离系统，而不局限于形如 S_k 的系统。

在第 5 节中，我们将构造一个嵌套集，它能够区分给定的一组剖面，并且只包含对这些剖面良好的分离。此外，这个集合将是典范的，但其典范性比通常意义上的稍弱。

4. Refining a canonical tree of tangles

在本节中，我们证明，典范嵌套集 $N(S, \mathcal{P})$ 中的非本质节点满足定理 2.3的条件引理 3.5。这将使我们能够细化其中的非本质节点，进而推出定理 1。为此，在本节中，设 S 是一个次模分离系统，并设 $\mathcal{P}$ 是 S的一组剖面。我们先回顾 $N(S, \mathcal{P})$ 的构造，该构造来自 [12]:

构造 4.1. 如果一个分离 $s \in S$ 恰好包含于$\mathcal{P}$中的一个剖面，则称它对于 $\mathcal{P}$是排他的。如果 $P \in \mathcal{P}$ 是该剖面，我们就称 s 对于 $\mathcal{P}$是 P-排他的。此外，对于每个剖面$P \in \mathcal{P}$，我们用 S中所有关于 M_P的极大 P-排他分离组成的集合来表示。注意，一般来说，有些剖面的 M_P 会是空集。如果对于某个 $P \in \mathcal{P}$，M_P 非空，那么 M_P 的下确界存在，且根据引理 4.4]，它仍然对于 $\mathcal{P}$ [12,是 P-排他的。此外，对于每对剖面 P、$P' \in \mathcal{P}$，根据[12, 引理 4.3] 和引理 2.1，M_P 与 $M_{P'}$ 的下确界是嵌套的。

构造 $N := N(S, \mathcal{P})$的策略是：对于每个剖面 $P \in \mathcal{P}_1 := \{P \in \mathcal{P} \colon M_P \neq \emptyset\}$，取 M_P 的下确界，并将这些分离加入 N，从而得到一个嵌套集。由于所有非空 M_P 的下确界仍然对于 $\mathcal{P}$ 是排他的，因此能够将 $\mathcal{P}_1$ 中的每个剖面与 $\mathcal{P}$中的所有其他剖面区分开来，我们可以从 $\mathcal{P}$中剔除 $\mathcal{P}_1$ 中的剖面。随后，我们从 S 中移除所有与这些下确界不嵌套的分离。重复这一过程，即可得到所需的树集。

为使构造更加严谨，并确立我们之后所需的一些记号，对每个 $P \in \mathcal{P}_1$ 设 $M_{P,1} := M_P$，并注意到 $\mathcal{P}_1$ 非空[12, 引理 4.2]。对所有 $P \in \mathcal{P}_1$，设 $s_P := \inf(M_{P,1}) := \bigwedge_{r \in M_{P,1}} r$，设 $N_1 := \{s_P \colon P \in \mathcal{P}_1\}$，并令 S_2 为 S 中所有与 N_1 嵌套的分离所组成的集合。为保持一致性，再设 $S_1 := S$。则 S_2 仍是次模的，并区分 $\mathcal{P} \smallsetminus \mathcal{P}_1$ [12, 中所有剩余的剖面 5]引理 4.。因此，我们可以按如下方式继续进行。

在构造的第 i 步开始时，我们已经构造了一个集合 N_{i-1}，它将 $\mathcal{P}_{<i} := \bigcup_{j<i} \mathcal{P}_j$ 中的每个剖面与 $\mathcal{P}$ 中的所有其他剖面区分开来。然后我们考虑集合 $\mathcal{P}_{\geqslant i} := \mathcal{P} \smallsetminus \mathcal{P}_{<i}$ 以及分离系统 S_i，该系统由 S 中所有与 N_{i-1} 嵌套的分离组成。对于每个 $P \in \mathcal{P}_{\geqslant i}$，令 $M_{P,i}$ 为 S_i 中所有对 $\mathcal{P}_{\geqslant i}$ P-排他且在 $P \cap S_i$ 中极大的分离所组成的集合。然后设 $\mathcal{P}_i := \{P \in \mathcal{P}_{\geqslant i} \colon M_{P,i} \neq \emptyset\}$，并对每个 $P \in \mathcal{P}_i$ 设 $s_P := \inf(M_{P,i})$。为此再次注意，根据引理 4.4]，对每个 $P \in \mathcal{P}_i$ [12, 都有 $s_P \in S$。最后，我们设 $N_i := \{s_P \colon P \in \mathcal{P}_{\leqslant i}\}$，并令 S_{i+1} 为 S 中所有与 N_i 嵌套的分离所组成的集合。同样地，我们有 N_i 是嵌套的，并且由引理 2.1 可直接推出 S_i 是次模的。

于是，只需令 $N(S, \mathcal{P}) := N_K$ 其中，K 是使得 $\mathcal{P}_{>K}$ 至多包含一个剖面的最小数。根据构造，$N(S, \mathcal{P})$ 区分了 $\mathcal{P}$中的所有剖面，并且 [12] 证明了 $N(S, \mathcal{P})$ 确实是典范的。至此，构造完成。

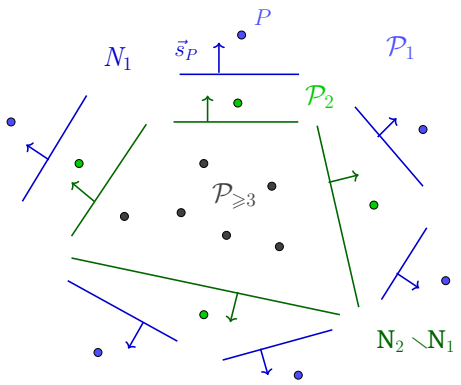


FIGURE 3. 构造 4.1的可视化。

在转向证明 $N(S,\ \mathcal{P})$ 中的每个非本质节点都满足引理 3.5的假设之前，我们先验证 $N(S,\ \mathcal{P})$ 的一个性质，图 3 已经展示了这一点。在图 3 中，所有分离s_P在 N中都“向外”指向。特别是，在图 3 中，不存在一对分离 s_P，$s_{P'}$使得 s_P和 $s_{P'}$ 彼此“指向”对方。接下来的引理声称，图 3 在这方面确实准确：

引理 4.2。不存在一对分离 $s_P, s_{P'} \in N(S, \mathcal{P})$ 满足 $\vec{s_P} < \vec{s_{P'}}$。

证明。反设存在分离 $s_P, s_{P'} \in N(S, \mathcal{P})$ 满足 $\vec{s_P} < \vec{s_{P'}}$。令 $i, j \in [K]$ 为满足 $P \in \mathcal{P}_i$ 和 $P' \in \mathcal{P}_j$ 的指标，并且不失一般性地假设 $j \leqslant i$。那么，由 $s_{P'}$ 对 $\mathcal{P}_{\geqslant j}$ 的 P'-互斥性可得 $\vec{s}_{P'} \in P$。此外，我们有 $\vec{s}_{P'} \in N_j$，这意味着 $\vec{s}_{P'} \in S_i$，尤其是 $\overleftarrow{s}_{P'} \in S_i$。由于 $\vec{M}_{P,i}$ 是 $P \cap S_i$ 和 $\vec{s}_{P'} \in P \cap S_i$ 中所有极大元构成的集合，因此，要么存在一个分离 $\vec{r} \in \vec{M}_{P,i}$ 与 $s_{P'}$ 交叉，要么对于所有 $\vec{r} \in M_{P,i}$，都有 $\vec{s}_{P'} \leqslant \vec{r}$。后一种情况意味着 $\vec{s}_{P'} \leqslant \vec{s}_P$，这与 $\vec{s}_P < \vec{s}_{P'}$ 矛盾，因此我们可以假设存在一个分离 $\vec{r} \in M_{P,i}$ 与 $s_{P'}$ 交叉。特别地，由此可得 $i \leqslant j$，进而 $i = j$，因为对于每个 $\ell < i$，$\overleftarrow{r} \in S_i$ 都与 N_ℓ 嵌套。

由于 r在 $P \cap S_i$中是极大的，我们有 $\vec{r} \vee \vec{s}_{P'} \notin P \cap \vec{S}_i$，这意味着 $\vec{r} \vee \vec{s}_{P'} \notin \vec{S}_i$，因为 $P \cap S_i$是 S_i的一个剖面。因此，根据 S_i的次模性，我们有 $\vec{r} \wedge \vec{s}_{P'} \in S_i$。由于 r对于 $\mathcal{P}_{\geqslant i}$和$P' \in \mathcal{P}_j \subseteq \mathcal{P}_{\geqslant i}$是 P-排他的，可知 $\vec{r} \in P'$，因此，由于 P'是一个剖面，$\vec{r} \vee \vec{s}_{P'} \in P'$。按照上述相同的论证，必定存在一个分离 $r' \in M_{P',\, i}$，它与 $\vec{r} \vee \vec{s}_{P'}$ 交叉；根据引理 2.1 ，这意味着 r'与 r交叉。但这与$r' \in M_{P,\, i}$ 或 $r' \in M_{P',\, i}$ 的极大性矛盾，因为根据S_i的次模性，$\vec{r} \vee \vec{r'}$或 $\vec{r} \vee \vec{r'}$至少有一个是 S_i的元素，因此分别包含于 $P \cap S_i$或 $P' \cap \vec{S}_i$中。□

现在我们证明，树集 $N := N(S, \mathcal{P})$（来自 构造 4.1 ）中的每个非本质节点都满足 引理 3.5 的条件。证明分为两步。首先，我们证明每个 $\vec{s}_P \in N$ 都与 P紧密相关。然后，我们证明每个分离 $\vec{r} \in N$，若它包含于 $\vec{N}$ 的某个非本质节点中，则必为 $r = s_P$ 的形式，其中 P 是 $\mathcal{P}$中的某个剖面。由此显然可得所述断言。

为了证明每个 s_P 都与 $P \in \mathcal{P}_i$紧密相关，我们首先证明：一组都与某个剖面紧密相关的分离的下确界仍与该剖面紧密相关。由此

可知， s_P 与 P 紧密相关，只要我们能够证明 $M_{P,\,i}$ 与其紧密相关。为此，我们证明一个更一般的命题；在后续章节中，我们将需要它更强的断言。

命题 4.3。设 $s \in S$，并设 $M \subseteq S$ 是一个分离集，使得每个 $m \in M$ 都与某个剖面 Q_m 紧密相关，该剖面属于 S 且满足 $s \in Q_m$。那么 $s \wedge \inf(M) := s \wedge \bigwedge_{m \in M} m$ 是 S 的一个元素。此外，如果 s 与某个剖面 P 紧密相关，该剖面属于 S，那么 $s \wedge \inf(M)$ 与 P 紧密相关。

证明。我们对 $|M|$ 使用归纳法。若 $|M| = 0$，则无事可证，因此可以假设 $|M| \geqslant 1$，并且断言对所有集合 $M' \subsetneq M$ 都成立。任取 $r \in M$。根据归纳假设，$t := s \wedge \inf(M \setminus \{r\})$ 是 S 的一个元素；如果 s 与 P 紧密相关，那么它也与 P 紧密相关。由此可知，$s \wedge \inf(M) = t \wedge r$ 也是 S 的一个元素，因为根据 Q_r 的一致性，r 与 Q_r 和 $t \leqslant s \in Q_r$ 紧密相关。

现在假设 s 与 P 紧密相关。回想一下，根据归纳法，t 也与 P 紧密相关。因此，要证明 $s \wedge \inf(M) = t \wedge r$ 与 P 紧密相关，根据命题 3.3，只需证明对于所有 $x \leqslant t$，$x \wedge (t \wedge r) \in S$。为此，任取一个 $x \leqslant t$。那么 $x \wedge (t \wedge r) = x \wedge r \in S$，这是因为根据 Q_r 的一致性，r 与 Q_r 和 $x \in Q_r$ 紧密相关。□

下一个引理表明，$M_{P\text{中的每个}i}$ 分离都与 $P \in \mathcal{P}_i$ 紧密相关，前提是对于每个剖面 $P' \in \mathcal{P}_{<i}$，分离 $s_{P'}$ 都与 P' 紧密相关。由此，根据归纳法和命题 4.3 可得，s_P 与 P 紧密相关。

引理 4.4。设 P 是 S 的一个剖面，$Y \subseteq P$ 是一个嵌套分离集，并且每个分离 $y \in Y$ 的逆 $\bar{y}$ 都与 S 的某个剖面 Q_y 紧密相关。此外，设 $P_Y \subseteq P$ 是 P 中所有与 Y 嵌套的分离所组成的集合。那么 P_Y 中的每个极大分离都与 P 紧密相关。

证明。设 $r \in P$ 是 P_Y 中任意一个极大分离，并给定某个 $x \in P$。我们需要证明 $r \wedge x \in S$。为此，令 $Y' := \{y \in Y : r < y\}$，并首先假设存在一个与 Y' 嵌套且满足 $r \wedge x' = r \wedge x$ 的分离 $x' \in P$。那么结论便成立。若 $r \wedge x' \notin S$，则由 S 的次模性可得 $r \vee x' \in S$。由于 P 是一个剖面，我们于是有 $r \vee x' \in P$，这与 r 在 P_Y 中的极大性矛盾，因为根据引理 2.1，$r \vee x'$ 与 Y 嵌套。

因此，要完成证明，只需找到一个分离 x' 如上所述。为此，我们选取一个分离 $x' \in P$，使其相对于 S 上的偏序是极小的，从而 $r \wedge x' = r \wedge x$。注意到 x 本身就是 x' 的一个候选（见图 4a）。

我们断言，x' 与 Y' 嵌套，因此它就是上述论证所需的分离。为此，反设 x' 与 Y' 不嵌套。令

$$\mathcal{Q} := \{Q_y : \vec{y} \in Y' \text{ and } x' \text{ crosses } y\},$$

并首先假设存在一个剖面 $Q_y \in \mathcal{Q}$ 满足 $x' \in Q_y$。由 $\vec{y}$ 与 Q_y 紧密相关，可得 $\vec{y} \wedge x' \in S$。但这与 x' 的选取矛盾：由于 y 与 x' 交叉，$\vec{y} \wedge x'$ 严格小于 x'。此外，由假设可知 $r < \vec{y}$，于是我们得到

$$\vec{r} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x'}) = (\vec{r} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{x'} = \vec{r} \wedge \vec{x'} = \vec{r} \wedge \vec{x}.$$

因此，我们可以假设对所有剖面 $\vec{Q}_y \in \mathcal{Q}$，都有 $\vec{x'} \in Q_y$。

如果 $\vec{r} \wedge \vec{x'} \in S$，那么我们就完成了，因此不妨设 $r \wedge \bar{x'} \notin S$。根据 S 的次模性，这意味着 $r \vee x' \in S$。于是，根据一致性，对于每个 $\vec{Q}_y \in \mathcal{Q}$，我们都有 $(r \vee x')^* = \vec{r} \wedge \vec{x'} \leqslant \vec{x'} \in Q_y$

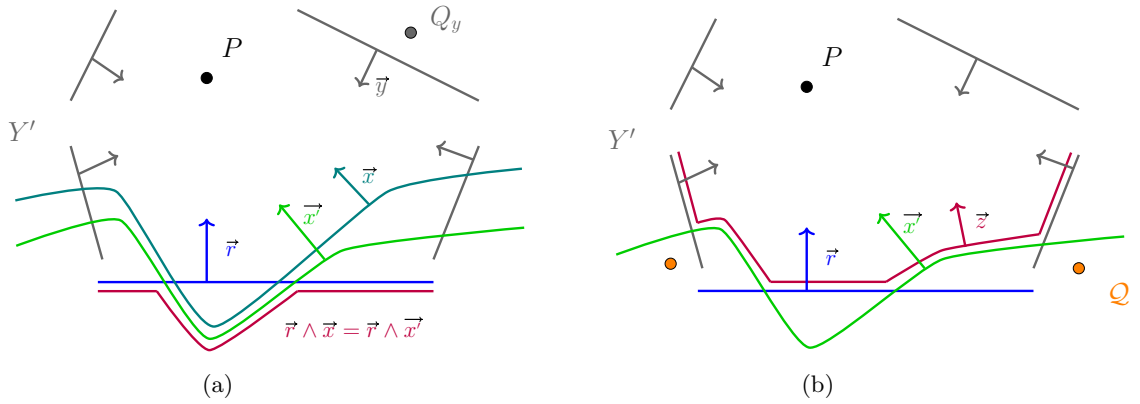


FIGURE 4. 引理 引理 4.4的证明概要。

的 Q_y。由于根据假设，每个 y 都与 Q_y 紧密相关，命题 4.3 意味着

$$\vec{z} := (\vec{r} \vee \vec{x'}) \vee \bigvee_{Q_y \in \mathcal{Q}} \vec{y} = \left((\vec{r} \vee \vec{x'})^* \wedge \bigwedge_{Q_y \in \mathcal{Q}} \vec{y}\right)^* \in \vec{S}$$

（见图 4b）。根据构造，z 与 Y' 嵌套，因此 z 与 Y 中所有具有大于 r的定向的分离都嵌套。但由于 $\vec{r} \leqslant \vec{z}$，我们知道 z 也与 Y 中所有具有小于r的定向的分离嵌套，因此 z 与 Y嵌套。此外，$\vec{z} \in P$。事实上，根据假设，每个 $\vec{y} \in Y$ 都包含于 P 中，这意味着 $\vec{z} \in P$，因为 P 是一个剖面。根据 z的定义，$\vec{r} \leqslant \vec{z}$，且 $\vec{x'} \leqslant \vec{z}$，但 $\vec{x'} \not\leqslant \vec{r}$，由此可得 $\vec{r} < \vec{z}$，这与r 在 P_Y中的极大性矛盾。□

现在我们可以证明每个 s_P 都与 P紧密相关。

引理 4.5。每个$\vec{s_P} \in \vec{N}(S, \vec{\mathcal{P}})$ 都与 P紧密相关。

证明。我们对 i 进行归纳，证明对于每个$P \in \mathcal{P}_i$，s_P 都与 P 紧密相关。由于对于每个 $P \in \mathcal{P}_1$ 都有 $s_P = \inf(M_P)$，基例可直接由命题 3.2 和命题 4.3 得出。现在令 $i > 1$，并假设每个 $\vec{s_{P'}} \in N_{i-1}$ 都与 P' 紧密相关。由于每个 $\vec{s_{P'}} \in N_{i-1}$ 对于 $\vec{\mathcal{P}}_{\geqslant i-1}$ 都是 P'-排他的，因此对于每个这样的 $s_{P'}$ 都有$\vec{s_{P'}} \in P$，我们可以将引理 4.4 应用于 P 和 N_{i-1}。这表明，M_P，i 与 P 紧密相关；根据命题 4.3，这也意味着 s_P 与 P 紧密相关。□

现在我们还需证明：对于 $N(S, \mathcal{P})$ 的每个非本质节点 σ，以及每个分离 $\vec{s} \in \sigma$，存在一个剖面 $P \in \mathcal{P}$，使得 $s = s_P$。注意，根据 $N(S, \mathcal{P})$ 的构造，显然对于某个剖面 $P \in \mathcal{P}$ 有 $\vec{s} \in \{\vec{s_P}, \vec{s_P}\}$。我们需要证明的是，该定向是正确的，即 $s = s_P$。为此，我们首先证明：如果 $s_P \in N$，则每个剖面 P 都位于包含 s_P 的唯一节点处：

引理 4.6. 给定一个剖面 P，若 s_P存在，则 P位于 $N(S, \mathcal{P})$ 中包含 s_P的唯一节点处。

证明。反设 P位于 $N := N(S, \mathcal{P})$ 的一个节点 σ' 上，而该节点不包含 $\vec{s_P}$。根据“节点”的定义，并且由于 P位于 σ'，这意味着 σ' 是 $P \cap N$中的极大元集合。由于 s_P 属于 $P \cap N$ 但不属于 σ'，因此存在一个分离 $\vec{r} \in \sigma'$，使得 $\vec{s_P} < \vec{r}$。

根据 N 的定义，分离 r 必须具有以下形式：$s_{P'}$ 或 $s_{P'}$，其中某个剖面为 $P' \in \mathcal{P}$；然而，根据引理 4.2 且由于 $s_P' < r'$，只有 $r = \bar{s}_{P'}$ 才有可能。因此，s_P，$s_{P'}' \in P$。此外，根据 $s_{P'}$ 的定义，我们有 $s_{P'}' \in P'$，这根据 P' 的一致性意味着 $s_P' \in P'$ 也成立。但这样一来，s_P，$s_{P'}' \in P \cap P'$，这与 s_P 或 $s_{P'}$ 的互斥性矛盾，具体取决于先将哪个分离加入 N。□

现在显然可以推出，N（S，$\mathcal{P}$）的非本质节点满足引理 3.5 的条件：

推论 4.7。对于 $N(S,\mathcal{P})$ 的每个非本质节点 σ 以及每个分离 $s' \in \sigma$，s 的逆 s^- 都与 $\mathcal{P}$ 中的某个剖面紧密相关。

证明。根据 N（S，$\mathcal{P}$）的构造，存在某个剖面 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $s' \in \{s_P', s_P\}$。由于 σ 是非本质的，引理 4.6 表明 $s = s_P$。由引理 4.5 可知，s 与 P 紧密相关。□

现在，我们可以通过应用 引理 3.5 来证明我们的第二个主要结果：$N(S,\mathcal{P})$:

定理 4.8. 设 S 是一个次模分离系统，且 $\mathcal{F}$ 是 S 中的一个友好星集。那么存在嵌套集 $N \subseteq N \subseteq S$，使得：

- $\tilde{N}$ 是典范的，并且区分 S 的所有 $\mathcal{F}$-缠结；
- N 的每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么包含一个 $\mathcal{F}$-缠结。

证明。设 $\mathcal{P}$ 为 S 的所有 $\mathcal{F}$-缠结构成的集合，并设 $N := N(S,\mathcal{P})$ 为构造 4.1 得到的嵌套集。此外，设 N 的一个非本质节点为 $\sigma =: \{s_1', ..., s_n'\}$。由推论 4.7 可知，每个分离 s_i 都与某个剖面 $P_i \in \mathcal{P}$ 密切相关。因此，我们可以对 σ 应用引理 3.5，从而得到一个嵌套集 $N_\sigma \subseteq S$，它对应于一个 $\mathcal{F} \cup \{\{s_1\}, ..., \{s_n\}\}$ 上的 S-树，其中每个 s_i 都作为叶分离出现。显然，N_σ 与 N 以及任何其他此类集合 $N_{\sigma'}$ 都嵌套，因此，令[1]

$N := N \cup \bigcup \{N_\sigma : \sigma \text{ 为 } N\}$ 的一个非本质节点，即可得到所需的嵌套集。
□

特别是，如果 $\mathcal{F}$ 星集在 S 的所有自同构下保持不变，那么定理 4.8 便可直接推出定理 1，我们在此重述如下：

定理 1。设 S 是一个次模分离系统，且 $\mathcal{F}$ 是 S 中的一个友好星集。若 $\mathcal{F}$ 在 $\vec{S}$ 的所有自同构下保持不变，则存在嵌套集 S，使得：$N \subseteq N \subseteq \vec{S}$

- $\tilde{N}$ 在 S 的所有自同构下保持不变，并区分 S 的所有 $\mathcal{F}$-缠结；
- N 的每个节点要么是 $\mathcal{F}$ 中的一个星，要么是某个 $\mathcal{F}$-缠结的归属节点。

证明。若 $\mathcal{F}$ 在 S 的所有自同构下保持不变，那么由 S 的所有 $\mathcal{F}$-缠结组成的集合 $\mathcal{P}$ 也具有这一性质；即对 S 的所有自同构 φ，均有 $\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$。将定理 4.8 应用于 S 和 $\mathcal{F}$，便得到嵌套集 $N := N(S,\mathcal{P}) \subseteq N$，其满足如下性质：对所有此类自同构 φ，均有 $\varphi(N(S,\mathcal{P})) = N(S,\varphi(\mathcal{P})) = N(S,\mathcal{P})$，因此 N 在这些自同构下保持不变。
□

我们在本节末尾指出，无法加强定理 4.8 和定理 1，使得细化 N 也成为典范的（示例见 [13]）。

[1]事实上，可以证明 $\tilde{N}$ 至多有一个非本质节点，因此 $N = \tilde{N} \cup N_\sigma$。

5. A tree of tangles with good separations

回顾一下，分离系统 S 中的分离 s 对剖面 S 的集合 $\mathcal{P}$ 而言是良好的，若存在 $\mathcal{P}$ 中的两个剖面 $P \neq P'$，使得 s 与 P 紧密相关，且 s 与 P' 紧密相关。此外，若 s 和 s 中的一个与 P 紧密相关，另一个与 P' 紧密相关，我们就称分离 $s \in S$ 良好地区分了 S 中的两个剖面 P 和 P'。注意，这意味着若 P、$P' \in \mathcal{P}$，则 s 对 $\mathcal{P}$ 而言是良好的。

若某个分离集中的每个分离都对 $\mathcal{P}$良好，则称该分离集对某个剖面集 $\mathcal{P}$ 良好。如果提及良好分离集时未指明任何剖面集，则可假定该分离集对 S的所有剖面构成的集合良好。

在第3节中，我们提出了将分离称为“良好”的性质，将其视为对没有序函数的分离系统中效率概念的结构性推广。我们在那里主要希望找到一种分离性质，使得能够按照引理 3.5的含义细化嵌套集，并且该性质能够完全用 S 和 $\mathcal{F}$来表述。根据命题 3.4，任何能够高效地区分某对剖面的分离显然也能良好地区分该剖面；但事实证明，反过来也成立，至少对于来自图的分离系统是如此。更确切地说，若 G 是一个图，且 S_k是 G 中所有阶为 $< k$的分离构成的系统，那么对于 P和 P' 中的每一对正则剖面 S_k，分离 S_k 区分 P 与 P' 的效果良好，当且仅当它能高效地区分二者。本文扩展版本中给出了证明[2]。

因此，分离具有优良性，并非只是将高效区分两个剖面的概念任意推广到没有序函数的分离系统；事实上，在图中，这一性质恰好与效率的概念一致。因此，这似乎是一种特别自然的推广。由于每个形如 S_k 的分离系统都包含一个能高效区分其所有剖面的嵌套集 [9,定理 3.6]，，因此很自然会问：抽象分离系统是否总包含一个能良好区分其所有剖面的嵌套集?

虽然一般来说这并不成立 [2], 我们将证明一个稍弱的结论：每个次模分离系统都包含一个由优良分离构成的嵌套集，能够区分其所有剖面。这个嵌套集具有典范性，但其意义比通常的略弱。我们将以下述方式表明，这已经是最好的结果：在 例5.9 中，我们给出一个次模分离系统及一组剖面的例子，它们不存在一个具有通常（更强）意义上的典范性的优良分离嵌套集。

在本节余下部分，设 S 是一个次模分离系统，且设 $\mathcal{P}$ 是 S的一个剖面集合。我们的策略是构造一个嵌套集，使其能够区分 $\mathcal{P}$，且只包含对 $\mathcal{P}$ 良好的分离，具体如下。首先，我们将证明，每一对剖面都能被 S中的某个分离良好区分。由此可知，良好分离的数量足够多，因此我们可以仿照构造 4.1，考虑 S 中的排他优良分离，并用它们构造一个嵌套集，从而区分 $\mathcal{P}$的一个子集；随后，我们可以将该子集从 $\mathcal{P}$中剔除。接下来，我们只考虑剩余的剖面，以及 S 中与迄今为止所选分离嵌套的那些分离。反复执行这一过程，便可得到所需的嵌套集。

这里与构造 4.1 的主要区别在于，我们只考虑那些对 $\mathcal{P}$良好的分离中具有极大性的排他分离。由于这些分离的表现与 S中所有分离里具有极大性的排他分离大不相同，因此定理 5.8 的证明需要采用不同且额外的论证，而不能沿用证明构造 4.1 有效的论证，尽管两种构造本身非常相似。

在构造过程中，我们需要确保所选取并纳入良好分离的嵌套集 N 中的每个分离，都与此前选取的所有分离嵌套。为此，在本节中，设 $M \subseteq S$ 为一个良好分离的嵌套集，使得 $P \cap M = P' \cap M$ 对所有 P，$P' \in \mathcal{P}$。我们令 $S_M := \{s \in S : \ s \text{ 与 } M \text{ 嵌套}\}$；对于 P 的每个剖面 S，令 $P_M := P \cap S_M$。

我们首先证明，在 $\mathcal{P}$ 中的每一对剖面都可以由一个与 M 嵌套的分离良好区分。为此，我们需要以下关于次模分离系统的事实。若某个全集中的分离系统 S 满足：对于每一对分离 $s \leqslant r \in S$，都存在一个分离 $t \in S$，使得 $s \leqslant t \leqslant r$，并且 t 模拟 s，t 模拟 r，则称其为可分离的。

引理 5.1。 [8, 引理 13] 每个次模分离系统都是可分离的。

现在，我们可以利用这一事实，在两个嵌套的分离之间找到优良分离；这些分离能够区分某一对剖面，并且分别与该对中的一个剖面紧密相关。

命题 5.2。设给定两个剖面 $P \neq P' \in \mathcal{P}$，以及两个区分 P 和 P' 的分离 $s \leqslant s' \in S$。若 s 与 P 紧密相关，且 s' 与 P' 紧密相关，则存在一个分离 $r \in S$，满足 $s \leqslant r \leqslant s'$，并能良好地区分 P 和 P'。

此外，若 s、s' 与 M 嵌套，则可选择 r 与 M 嵌套。 *l.*

证明。根据引理 5.1，存在一个分离 $r \in S$，满足 $s \leqslant r \leqslant s'$，使得 r 模拟 s，且 r 模拟 s'。由于 r 模拟 s'，我们有 $r \vee t \in S$，因此对所有 $t \leqslant s'$，都有 $(r \vee t)^* = r' \wedge t \in S$。由命题 3.3 可知，$r$ 与 P' 紧密相关，因为 s' 与 P' 紧密相关。类似地，我们可得 r 与 P 紧密相关。

对于“此外”部分，令 $t \leqslant t' \in S_M$ 为使 $|\{x \in S \text{ 最小的两个分离：在 } S_M \text{ 中所有区分 } P \text{ 和 } P' \text{，且满足 } t \text{ 与 } P \text{ 紧密相关、} t' \text{ 与 } P' \text{ 紧密相关的分离之中，} t \leqslant x \leqslant t'\}|$。注意到 s、s' 是 t、t' 的候选项。

由第一部分可知，存在一个分离 $r \in S$，满足 $t \leqslant r \leqslant t'$，并能良好地区分 P 和 P'。若 $t = r$，则 r 正是所需的，因为 t 与 M 嵌套，所以我们可以假设 $t < r$。令 $r' \in S$ 为任意一个极大分离，其逆 r' 与 P 紧密相关，且满足 $t \leqslant r' \leqslant t'$。根据前面的论证，我们有 $t < r'$。那么 r' 不可能与 M 嵌套；否则，r'、t' 就会是 t、t' 更好的选择。此外，r' 能良好地区分 P 和 P'。事实上，由第一部分可知，存在一个分离 $r'' \in S$，满足 $r' \leqslant r'' \leqslant t'$，并能良好地区分 P 和 P'；由 r' 的极大选择可知，这意味着 $r' = r''$。

令 $M' \subseteq M$ 为 M 中所有与 r' 交叉的分离构成的集合，并将包含于 P 的每个 $m \in M'$ 的定向记为 m。由于 M 中的每个分离都能良好地区分 S 的两个剖面，因此对每个 $m \in M'$，都存在 S 的某个剖面 Q_m，使得 m 与 Q_m 紧密相关。现在先假设存在一个分离 $m \in M'$，使得 $r' \in Q_m$。那么，根据命题 4.3，$r' \wedge m$ 是 S 的一个元素，并且与 P 紧密相关。但 $r' < (r' \wedge m)^* \leqslant t'$，这与 r' 的选择矛盾。因此，对每个 $m \in M$，都有 $r' \in Q_m$。于是，根据命题 4.3，$r'' := r' \wedge \bigwedge_{m \in M} m$ 与 P' 紧密相关，因为 r' 与 P' 紧密相关。但由于 $r'' < r' \leqslant t'$，这与 t、t' 的选择矛盾，因为 t、r'' 本可以是更好的选择，由此证明得证。□

特别是，命题 5.2 意味着每一对不同的剖面都能被良好区分：

推论 5.3。对于 $\mathcal{P}$ 中任意一对不同的剖面，S_M 中都存在一个能很好地区分它们的分离。

证明。设 P、$P' \in \mathcal{P}$ 是两个不同的剖面。我们先证明 S_M 中存在一个能区分它们的分离（但不一定能很好地区分）。由于 P 和 P' 不同，因此存在一个能区分它们的分离 $s \in P$；我们选取一个与 M 中尽可能多的分离嵌套的分离。现在反设 s 与某个分离 $m \in M$ 交叉，并令 $m \in P$。根据关于 M 的假设，存在一个 S 的剖面 Q，它与 m 紧密相关；由对称性，不妨设 $s \in Q$。由于 m 与 Q 紧密相关，可知 $m \wedge s \in S$。但由于 $P \cap M = P' \cap M$，因此 $m \in P'$，由此可知 $m \wedge s = m \vee s \in P'$，因为 P' 是一个剖面。因此，$m \wedge s$ 也能区分 P 和 P'，这与 s 的选取矛盾，因为根据引理 2.1，$m \wedge s$ 比 s 多与 M 中的一个分离嵌套。

因此，设 $s \in P_M$ 是区分 P 和 P' 的一个极大分离，并设 $s' \geqslant s$ 在 P'_M 中是极大的。那么，s 和 s' 分别与 P 和 P' 紧密相关，这由引理 4.4 可知。因此，根据命题 5.2，存在一个分离 $r \in S_M$，满足 $s \leqslant r \leqslant s'$，且能良好地区分 P 和 P'。□

在开始构造我们所需的嵌套集之前，我们先证明下面这个技术引理；在本节接下来的论述中，我们将一直需要它来寻找良好分离：

引理 5.4. 设 P、Q、$Q' \in \mathcal{P}$ 是三个互不相同的剖面，r、$s \in P_M$ 是两个不同的分离，且 r、$s \in Q'$。如果 r 与 Q 紧密相关，且 s 与 Q' 紧密相关，那么存在一个分离 $u \in P_M$，满足 $r \vee s \leqslant u$，并能良好地区分 P 和 Q。

证明。由于 s 与 Q' 和 $r \in Q'$ 紧密相关，因此有 $r \wedge s \in S$。此外，根据引理 2.1，$r \wedge s \in S_M$。现在假设 $r \wedge s$ 与 Q 紧密相关。于是断言成立。由于 P 是一个剖面，$(r \wedge s)^* = r \vee s \in P$。现在令 $w \in P_M$ 在满足 $r \vee s \leqslant w$ 的条件下为极大的。根据引理 4.4，w 与 P 紧密相关。由命题 5.2 可知，存在一个分离 $u \in S_M$，满足 $r \vee s \leqslant u \leqslant w$，该分离能很好地区分 P 和 Q。

因此，只需证明 $r \wedge s$ 与 Q 紧密相关。为此，根据 命题 3.3，只需检查对于每个分离 $r \wedge s) \wedge t \in S$，$t \leqslant r \in Q$ 因为根据假设，r 与 Q 紧密相关。因此，令 $t \leqslant r$ 为给定的。由 $t \in Q'$ 与 Q' 的一致性可知，因 $r \in Q'$，有 $(r \wedge s) \wedge t = s \wedge (r \wedge t) = s \wedge t \in S$，因为 s 与 Q' 紧密相关。证明完毕。□

现在我们可以开始构造所需的嵌套集。为此，令 E_P 为 P_M 中所有对 $\mathcal{P}$ 排他、并能将 P 与 $\mathcal{P}$ 中某个其他剖面良好区分的分离所组成的集合。对于每个满足 E_P 非空的剖面 $P \in \mathcal{P}$，我们将从 E_P 中选取一个极大分离。所有这些分离组成的集合 N' 将具有两个性质：一方面，它是嵌套的；另一方面，所有与 N' 嵌套的那些分离所构成的系统，仍足以区分 $\mathcal{P}$ 中所有剩余的剖面。因此，我们便可以归纳地继续构造。

为此，我们先证明，对于 $\mathcal{P}$ 中的所有剖面，E_P 都非空。

Le引理 5.5. 若 S 和 $\mathcal{P}$ 均非空，则对于某个剖面 $P \in \mathcal{P}$，E_P 非空。

证明。令 $s \in S_M$ 为一个优良分离，使得满足 $s \in P$ 的剖面 $P \in \mathcal{P}$ 的数量尽可能少。我们断言，s 对某个剖面 $P \in \mathcal{P}$ 是排他的。由此可得 $s \in E_P$，因为 s 对 $\mathcal{P}$ 是优良的，因此 s 能将 P 与某个其他剖面良好区分。

为证明这一断言，反设存在不同的剖面 $P, Q \in \mathcal{P}$，且满足 $s \in P \cap Q$。由推论 5.3，存在一个能良好地区分 P 和 Q 的分离 $r \in P_M$。此外，由于 s 对 $\mathcal{P}$ 是良好的，因此存在一个剖面 $Q' \in \mathcal{P}$，使得 s 与 Q' 紧密相关；不失一般性，利用对称性可假设 $r \in Q'$。然后，将引理 5.4 应用于 P, Q, Q', r 和 s，可得一个满足 $s \vee r \leqslant u$ 的优良分离 $u \in P_M$。

由于 $\vec{s} \leqslant \vec{u}$，每个包含 u 的剖面也包含 $\vec{s}$，但 $\vec{s} \in Q$ 和 $\vec{u} \notin Q$ 是 $\vec{u} \leqslant \vec{r} \in Q$。因此 $\vec{u}$ 至少包含于一个小于 s 的剖面中，这与 s 的选择矛盾。□

接下来我们证明，每个非空的 E_P 都包含唯一的极大元。这将使我们之后能够证明，此处构造的嵌套集在某种意义上是典范的。

引理 5.6. 每个非空集合 E_P 都包含唯一的极大元。

证明。反设至少存在两个不同的极大元 $r, \vec{s} \in E_P$。设 Q 和 Q' 是与 P 良好区分的剖面，$\vec{}$ 分别由 r 和 s 区分。由于 r, s 对于 P 是排他的，我们有 $r, \vec{s} \in Q \cap Q'$。将引理 5.4 应用于 $P, Q, Q', \vec{r}, \vec{s}$，得到一个分离 $\vec{u} \in P_M$，$\vec{}$ 其中 $\vec{r} \vee \vec{s} \leqslant \vec{u}$ 良好地区分了 P 和 Q。由此可得 $\vec{u} \in E_P$。由于 $r, \bar{s}$ 都是 P_M 中的极大元，$\bar{}$ 它们彼此交叉，因此 $\vec{u} \geqslant \vec{r} \vee \vec{s} > r, s$，这与 $\bar{r}, s$ 是 E_P 中极大元的假设矛盾。□

若 E_P 非空，我们将 E_P 的唯一极大元记作 r_P。下一步将证明，对每个非空 E_P 选取极大分离，确实会得到一个嵌套分离集：

引理 5.7. 设 P 和 P' 是两个不同的剖面，且满足 $E_P \neq \emptyset \neq E_{P'}$。那么 r_P 和 $r_{P'}$ 是嵌套的。

证明。反设 r_P 和 $r_{P'}$ 交叉。由于 $r_{P'}$ 是 P'-排他的，且 r_P 是 P-排他的，我们有 $\vec{r}_{P'} \in P$ 和 $\vec{r}_P \in P'$。设 P'' 是一个剖面，$r_{P'}$ 能从中良好地区分 P'。那么 $r_{P'}$ 与 P'' 紧密相关。将引理 5.4 应用于 $P', \vec{}$ P、P''、r_P 和 $r_{P'}$，得到一个分离 $\vec{u} \in P'_M$，满足 $\vec{r}_P \vee \vec{r}_{P'} \leqslant \vec{u}$，并能良好地区分 P' 和 P''。但由于 $\bar{r}_P$ 和 $\bar{r}_{P'}$ 交叉，$\bar{}$ $\vec{r}_{P'} < \vec{r}_{P'} \vee \vec{r}_P \leqslant \vec{u}$，这与 $r_{P'}$ 在 $E_{P'}$ 中的极大性矛盾。□

现在，我们可以应用上述引理，构造一个能够区分 $\mathcal{P}$，且只使用对 $\mathcal{P}$ 来说优良的分离的嵌套集。

定理 5.8. 设 S 是一个次模分离系统，$\mathcal{P}$ 是 S 的一组剖面。那么存在一个嵌套集 $N := N(S, \mathcal{P})$，它能够区分 $\mathcal{P}$ 中的所有剖面，且只包含对 $\mathcal{P}$ 来说优良的分离。

此外，可以选择这个集合 N，使得如果 S' 是一个次模分离系统，且 $\varphi\colon S \to S'$ 是分离系统同构，并且对于所有 $r, \vec{s} \in S$，$\vec{r} \vee \vec{s} \in S$ 当且仅当 $\varphi(r) \vee \varphi(s) \in S'$，那么 $\varphi(N(S, \mathcal{P})) = N(S', \vec{\varphi}(\mathcal{P}))$.

我们指出，在后续论文中也会用到这个嵌套集[1]。

在证明定理 5.8 之前，我们先对其典范性陈述再作几点说明。定理 5.8 中典范性的定义弱于通常的定义；通常的定义要求，对于分离系统 $\varphi : S \to S'$ 的所有同构，而不仅仅是像本文这样要求保持下确界和上确界的同构，都有 $\varphi(N(S, \mathcal{P})) = N(S', \varphi(\mathcal{P}))$。我们需要对同构作出这一更强的假设，以确保所有优良分离的集合在每一个这样的 φ 下都保持不变；也就是说，如果 $s \in S$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个优良分离，且 $\varphi\colon S \to S'$ 如上所述，那么 $\varphi(s)$ 是 $\varphi(\mathcal{P})$ 的一个优良分离，反之亦然。事实上，由于下确界和上确界的存在性在满足这一更强假设的每一个 φ 下都保持不变，这尤其意味着，分离 $\vec{s} \in P$ 与 P 紧密相关，当且仅当 $\varphi(s)$ 与 $\varphi(P)$ 紧密相关。

定理 5.8的证明。 我们对 $|\mathcal{P}|$ 作归纳法，证明对于每个满足 $P \cap \vec{M} = P' \cap \vec{M}$ 的优良分离嵌套集 M，对所有 P，$P' \in \mathcal{P}$ 都存在一个嵌套集 $N(S, \mathcal{P}) \subseteq S_M$，它区分 $\mathcal{P}$

并且对 $\mathcal{P}$ 是良好的。此外，如果 M 在上述意义下是典范的，那么这个集合在同一意义下也是典范的。结合 $M := \emptyset$，这显然推出了所要证明的断言。

那么，设给定这样一个集合 M。若 $|\mathcal{P}| \leqslant 1$，则 $N := \emptyset$ 是一个有效的选择。因此，我们可以假设 $|\mathcal{P}| > 1$，并且断言对所有满足 $|\mathcal{P}'| < |\mathcal{P}|$ 的集合 $\mathcal{P}'$ 均成立。

令 $N' := \{r_P \colon P \in \mathcal{P} \text{ 和 } E_P \neq \emptyset\}$。由引理 5.7，集合 N' 是嵌套的。此外，N' 仅由对 $\mathcal{P}$ 良好的分离组成，并且显然是在所有保持下确界和上确界的同构下，关于 $\vec{S}$、$\mathcal{P}$ 和 M 的不变量。令 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ 为所有空 E_P 的剖面 $P \in \mathcal{P}$ 构成的集合，并令 $M' := M \cup N'$。注意，根据构造，N' 区分了 $\mathcal{P} \smallsetminus \mathcal{P}'$ 中的所有剖面与 $\mathcal{P}$ 中的所有其他剖面。此外，对所有 $P \in \mathcal{P} \smallsetminus \mathcal{P}'$ 和 $P' \in \mathcal{P}'$，都有 $\overleftarrow{r_P} \in P'$，这意味着对所有 $P' \in \mathcal{P}'$，都有 $P \cap \overleftarrow{M} = P' \cap \overleftarrow{M}$。

由于 $|\mathcal{P}'| < |\mathcal{P}|$ 根据引理 5.5，我们可以对 $\mathcal{P}'$ 和 M' 应用归纳假设，从而得到一个嵌套集 N''，该集合能够良好地区分 $\mathcal{P}'$，并且是 S的一个不变量，$\mathcal{P}'$以及 M'上述意义下的不变量。由于 M'和 $\mathcal{P}'$本身分别是 M和 $\mathcal{P}$上述意义下的不变量，因此 $N' \cup N''$就是所需的集合。□

本节最后，我们将说明，就典范性而言，定理 5.8 无法进一步加强。更准确地说，下面的例子描述了一个次模分离系统和一组剖面，使得不存在一个嵌套集能够区分 $\mathcal{P}$、只包含优良分离，并且在通常（更强）的意义下是典范的。

例5.9。令 V 由图5中的20个灰点组成，并令 U 为 V的所有二分划构成的全集，即对于 V的每个二分划，U都包含 $(\vec{A}, B)$ 和 (B, A)（参见 [10]）。此外，令 S为由图5中勾勒出的 V的20个二分划、$\{V, \emptyset\}$ 以及它们所有不区分 P_1 和 P_2的角分离所构成的分离系统。这里，P_1 和 P_2 是通过将 S 中的每个分离分别定向到包含 v_1 或 v_2的一侧而得到的剖面。很容易验证，S 是次模的，并且 $\overleftarrow{s_1} \vee \overleftarrow{r_1}$ 和 $\overleftarrow{s_2} \wedge \overleftarrow{r_2}$ 不属于 S。

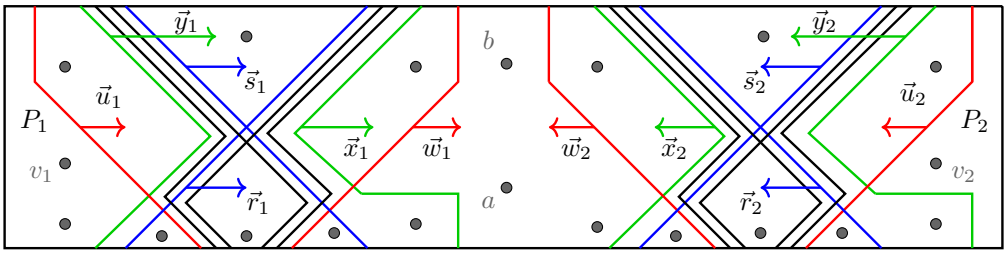


FIGURE 5. 一个分离系统和两个剖面，但不存在正则优良缠结树。

考虑映射 $\varphi \colon S \to \vec{S}$ 将 $\vec{x}_1$ 和 y_1 分别映射到 $\vec{x}_2$ 和 $\vec{y}_2$，并将其他每个分离映射到其关于穿过 a 和 b 的垂直轴镜像反射所得的反射。于是 φ 是分离系统的一个自同构，因为自同构只需保持 S上的偏序；此处 x_1 是 s_1 和 r_1 在 S 中的唯一上确界，尽管它并非它们在 $\overleftarrow{s_1} \vee \overleftarrow{r_1}$ 中的上确界（U，y_2的情形也类似）。

显然可以验证，S中对 $\mathcal{P} := \{P_1, P_2\}$良好的分离只有 $\overleftarrow{s_1} \barwedge \overleftarrow{w_1}$、$\overleftarrow{y_1} \vee \overleftarrow{u_1}$、$\overleftarrow{r_2} \vee \overleftarrow{u_2}$和 $\overleftarrow{x_2} \wedge \overleftarrow{w_2}$。但是，$\varphi$ 不会将这些分离中的任何一个映射到另一个良好分离。因此，

不存在一个嵌套集 N 能够区分 P_1 和 P_2、仅包含对 $\mathcal{P}$良好的分离，并且满足 $\varphi'(N) = N$ 对所有自同构 φ' 的 S。

6. Outlook

来自 定理 1 和 定理 2 的嵌套集具有这样的性质：非本质节点太“小”，无法容纳缠结，因为它们是 $\mathcal{F}$ 中的星。然而，我们并未要求本质节点在任何意义上都必须“小”。事实上，如果这里的分离系统来自某个图 G，那么不难看出，来自 N 的嵌套集 定理 1 和 2 直接对应于 G的一个树分解，而该分解的本质部分可能包含 G 中的很大一部分，其中有许多顶点实际上并不“属于”居于该部分的缠结。因此，如果能够进一步细化 N 中的本质节点，那就再好不过了。

一种自然的做法是，要求 N 的本质节点在其所容纳的缠结中是“极大的”，同时保留 N 的每个非本质节点都是 $\mathcal{F}$ 中的星这一性质。为此注意到，S 上的偏序会在所有“正规”星 [6] 的集合上诱导出一个偏序。若对任意不同的 s、$r \in \sigma$，关系 $s \leqslant r$ 是唯一成立的关系，即 $s \not\leqslant r$、$s \not\geqslant r$ 和 $s \not\geqslant r$，则星 $\sigma \subseteq S$ 是正规的。对于两个正规星 $\sigma, \tau \subseteq S$，当且仅当对每个 $s \in \sigma$，都存在某个 $r \in \tau$ 使得 $s \leqslant r$ 时，$\sigma \leqslant \tau$ 成立。若 S 中的一个正规星是 P 的 S 剖面中的极大元，即它是 $\mathcal{P}$ 中所有正规星集合里的极大元，则称其为极大星。

虽然并非总能以这种方式细化嵌套集 $N(S, \mathcal{P})$ 中的本质节点（该集合来自 构造 4.1），但我们将在 [2], 中证明 [1] 良好树集确实总是允许这样的细化。更确切地说，若 S 是某个分配格宇宙中的一个次模分离系统，那么就可以细化每个对所有 $\mathcal{F}$-缠结良好的区分缠结的树集，使其所有非本质节点都是 $\mathcal{F}$中的星，而其所有本质节点都是驻留于该节点的缠结中的极大元素 [1]。

此外，对于来自图的分离系统，我们将证明一个更强的结论，从而避开以下问题。设 G 是某个图，且 $k \in \mathbb{N}$，并设 σ 是树集 N中位于 S_k内的一个本质节点。那么总可以用一个相当简单的星来细化 σ：这个星包含所有形如 $(A, V(G))$ 的小分离，其中小侧 A 覆盖 $\bigcap_{(C,D)\in\sigma} D$。由此得到的星 σ' 将是驻留于该星的缠结中的极大元素，而所有新产生的非本质节点都将具有 $\{(V(G) \ A)\}$ 的形式，因此是余小。然而，这样做并未让我们获得关于图 G 的任何信息。事实上，若我们比较分别对应于 N 及其上述细化的两个树分解，那么对应于 σ 和 σ' 的本质部分将完全相同。不过，理想情况下，我们希望本质部分尽可能小，因此更关注内部 $\bigcap_{(A,B)\in\sigma'} B$ 尽可能小的本质星。在 [1] 中，我们将证明这种细化总是存在[2]：

定理 6.1. 设 G 是一个图，$k \in \mathbb{N}$，且令 $\mathcal{F}$ 为 $S_k(G)$ 中的一个友好星集。此外，令 $N \subseteq S_k(G)$ 为一个嵌套分离集，它区分 $S_k(G)$ 的所有 $\mathcal{F}$-缠结，使得 N 中的每个分离都能高效地区分 $S_k(G)$ 的一对 $\mathcal{F}$-缠结。那么存在一个嵌套集 $N \subseteq S_k(G)$，满足 $N \subseteq N$，使得

(i) N 的每个非本质节点都是 $\mathcal{F}$ 中的一个星；(ii) N 的每个本质节点的内部，在包含于位于该节点的 $\mathcal{F}$-Tangle 的所有排他星中大小最小。

[2]图中本质星的精炼问题 图中的本质星已由 Erde 研究 [13]。定理 6.1 强化了他的结果 .

请注意，应用 定理 6.1于 [3] 得到一个 典范 树集，它可以经过细化，使其本质节点和非本质节点都很小。

References

[1] S. Albrechtsen, *Optimal trees of tangles: refining the essential parts*, arXiv 预印本（2023），可见 arXiv:2304.12078。[2] *Refining trees of tangles in abstract separation systems: Inessential parts extended version* （2023），可见 arXiv:2302.01808v1。[3] J. Carmesin、R. Diestel、M. Hamann 和 F. Hundertmark, *Canonical tree-decompositions of finite graphs I. Existenceand algorithms*, 《组合理论杂志 B 辑》116（2016），1–24，可见 arXiv:1305.4668。[4] R. Diestel, *Graph Theory*, 第 5 版，Springer，2017。[5] *Abstract separation systems*, 《Order》35（2018），157–170，可见 arXiv:1406.3797。[6] *Tree sets*, 《Order》35（2018），171–192，可见 arXiv:1512.03781。[7] R. Diestel、Ph. Eberenz 和 J. Erde, *Duality theorems for blocks and tangles in graphs*, 《SIAM 离散数学杂志》31（2017），第 3 期，1514–1528，可见 arXiv:1605.09139。[8] R. Diestel、J. Erde 和 D. Weißauer, *Structural submodularity and tangles in abstract separation systems*, 《组合理论杂志 A 辑》167C（2019），155–180，可见 arXiv:1805.01439。[9] R. Diestel、F. Hundertmark 和 S. Lemanczyk, *Profiles of separations: in graphs matroids and beyond*, 《Combinatorica》39（2019），第 1 期，37–75，可见 arXiv:1110.6207。[10] R. Diestel 和 S. Oum, *Tangle-tree duality in graphs matroids and beyond*, 《Combinatorica》39（2019），879–910，可见 arXiv:1701.02651。[11] *Tangle-tree duality in abstract separation systems*, 《数学进展》377（2021），107470，可见 arXiv:1701.02509。[12] C. Elbracht 和 J. Kneip, *A canonical tree-of-tangles theorem for structurally submodular separation systems*, 《组合理论》1（2021），第 5 期，可见 arXiv:2009.02091。[13] J. Erde, *Refining a tree-decomposition which distinguishes tangles*, 《SIAM 离散数学杂志》31（2017），1529–1551，可见 arXiv:1512.02499。[14] N. Robertson 和 P.D.Seymour, *Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition*, 《组合理论杂志 B 辑》52（1991），153–190。

University of Hamburg, Department of Mathematics, Bundesstrasse 55 (Geomatikum), 20146 Hamburg, Germany*Email address*: sandra.albrechtsen@uni-hamburg.de