# 纳米光子三聚体中的非厄米零模激光器

Kaiwen Ji、Bruno Garbin、Melissa Hedir、Juan A. Levenson 和 Alejandro Yacomotti*（日期：2023年6月28日）

耦合光学元件阵列中的对称性保护零模备受关注，因为人们预期它们能够抵御耦合无序。在厄米极限下，零模是暗态，即一个子晶格中的强度为零；然而，在非厄米对应系统中，零模可以是明亮的，并且子晶格之间具有 $\pi/2$ 相位差。在这项工作中，我们报告了在非厄米三耦合纳米腔阵列中直接观测到激射零模。我们展示了在两端腔中以近乎相等的泵浦功率进行泵浦时，可以实现高效激发。此外，通过泵浦中心腔，可以动态控制其效率。在大型耦合纳米激光器阵列中实现零模激射具有激光模式工程方面的潜在应用，并为光学计算开辟了充满希望的新途径。

arXiv:2302.01809v1 [physics.optics] 3 Feb 2023

马约拉纳零模是钉扎在带隙能带结构中间的集体激发。它们的拓扑和非阿贝尔性质使其不受某些类型无序的影响，因此适用于拓扑量子计算，且具有良好的鲁棒性 [1]。在光学领域，研究人员已在若干不同平台上通过实验对其进行了验证，例如光波导阵列中的平带结构 [2, 3]，以及一维 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）链中的拓扑保护带隙模 [4–6]。在这些实验中，零模源于手征对称性（或称子晶格对称性）$\{H, C\} = 0$，其中 $H$ 是哈密顿量，$C$ 是酉算符。另一方面，凝聚态物理和拓扑超导体中也观察到了零模 [7–9]；它们源于粒子-空穴对称性（PH，也称为电荷共轭对称性），在这种对称性下，哈密顿量与一个反酉算符反对易 $CT$（$\{H, CT\} = 0$，其中 $T$ 是时间反演算符）。

在厄米极限下，手征对称性和粒子-空穴对称性都会确保本征值始终成对出现，$\epsilon_i = -\epsilon_j$ [10]。这种对称能带会产生一个零模，且 $\epsilon = 0$ 适用于 $i = j$。然而，在非厄米领域，本征值通常为复数，其虚部对应损耗/增益率。因此，手征对称性和粒子-空穴对称性通常会产生不同的本征值谱：对于手征对称性情形，$\epsilon_i = -\epsilon_j$ 仍然成立 [11]，而在具有非厄米粒子-空穴（NHPH）对称性的系统中则会出现 $\epsilon_i = -\epsilon_j^*$ [12]，，其中 $^*$ 为复共轭。因此，对于 NHPH 对称性，零模具有 $\Re[\epsilon] = 0$，这意味着非厄米零模比其厄米对应物更稳健，因为其虚部不受任何限制。近期，研究人员已在光子系统中展示了受 NHPH 对称性保护的零模，例如带有缺陷和拓扑片段的 PT 对称波导阵列 [13, 14]。然而，在这些方法中，在给定空间位置上只能实现一个零模，例如缺陷处或拓扑边界处。另一方面，近期有研究报道了由三耦合光子晶体腔阵列中的 NHPH 对称性保障的零模，但单点泵浦条件阻碍了对其的有效激发，因此尚未观测到激射零模 [15]。

在本研究中，我们首次直接观测到由非厄米粒子-空穴对称性保证的激射零模，该零模存在于嵌入量子阱（QW）的三耦合纳米腔阵列中。通过空间光调制器（SLM）对泵浦光斑进行空间图案化，实现了激射条件。这种原型系统可轻松扩展为二维网络，并支持任意数量、具有不同强度分布的零模 [10]。对于我们的三腔系统，由于腔的数量为奇数 [10]，预计至少存在一个频率与单腔相同的零模；对两个两端腔施加相近的光功率进行泵浦，即可在超过激光阈值后高效激发该零模。此外，我们还通过改变中心腔的泵浦功率，动态控制发射强度。

我们首先考虑由三个耦合的光子晶体（PhC）纳米腔构成的系统，该系统支持非厄米零模 [见图1(a)]。两个两端腔（子晶格 A）通过倏逝场与中心腔（B子晶格）耦合。耦合 $K$ 可通过所谓的势垒工程技术进行调控 [15, 16]，即修改势垒孔的半径 [图1(a)中的黄色孔]，使其变为 $r_b = r_0(1 + h)$，其中 $r_0$ 是普通空气孔的半径。注意，这种势垒调制也会引入额外的频率失谐 $\Delta\omega_j$。鉴于中心腔被两个势垒包围，我们可以假设中心腔的失谐是两个两端腔失谐的两倍，$\Delta\omega_{1,\,3} = \Delta\omega$，$\Delta\omega_2 = 2\Delta\omega$，子晶格失谐为 $\Delta\omega_2 - \Delta\omega_{1,\,3} = \Delta\omega$。如图1(b)所示，我们进行了三维有限差分时域仿真，以揭示光学三聚体的模式结构随势垒尺寸的变化。为了进一步研究势垒扰动 $h$对耦合 $K$ 和子晶格失谐 $\Delta\omega$的影响，我们还使用两个耦合的光子晶体腔进行了另一项模拟，并用线性

*alejandro.gacomotti@c2n.upsaclay.fr; [1]法国国家科学研究中心纳米科学与纳米技术中心、巴黎南大学、巴黎萨克雷大学，托马斯·戈贝尔大道10号，帕莱索91120，法国

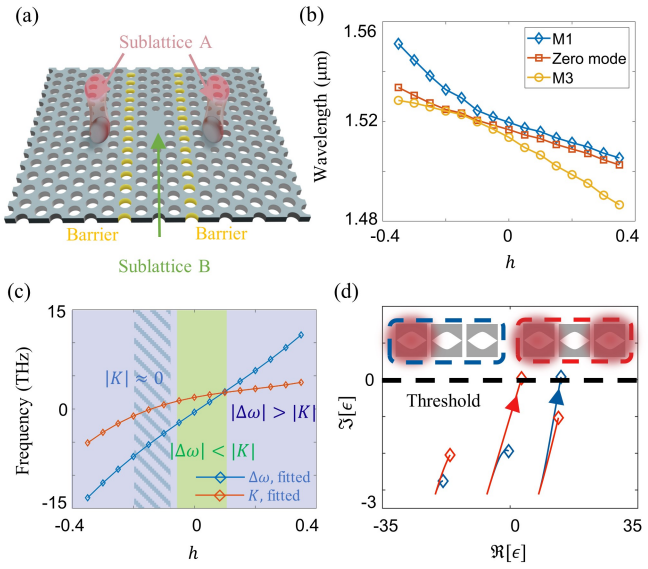


图1. (a) 三耦合腔系统示意图。黄色阵列表示势垒。(b) FDTD仿真显示了耦合和失谐随势垒尺寸 $h$ 的变化。(c) 从混合模频率分裂以及两个耦合光子晶体腔的三维FDTD数值仿真结果的平均值中提取的耦合和腔失谐。实线为三阶多项式拟合，随后用于正文中三耦合腔的CMT计算。(d) 本征值的演化，箭头表示轨迹方向，黑色虚线表示激光阈值 $\Im[\epsilon]=0$。此处，$P$ 从0分别增至 $P_0$ 和 $1.45P_0$（其中 $P_0$ 为单腔的阈值），对应泵浦两个两端腔（蓝色曲线）和泵浦单个腔（红色曲线）的情况。菱形表示终点。参数为：$\tau = 7.1\,\text{ps}$，$\beta = 0.017$，$\alpha = 3$，$\Gamma_{\parallel} = 2.2\,\text{GHz}$，$\Gamma_{tot} = 5\,\text{GHz}$，$K = 10/\tau$，$n_0 = 10^{18}\ \ ^{-3} \times V_a$　　$V_a = 0.016 \times 10^{-12}\ \ ^{3}$ cm，其中 cm 为有源材料的体积。

耦合模理论（CMT）对结果进行了拟合 [见图1(c)]。结果可分为两个不同区域：弱腔耦合区域，其中 $|\Delta\omega(h)| > |K(h)|$（紫色）；以及强腔耦合区域，其中 $|\Delta\omega(h)| < |K(h)|$（绿色背景）。一个特别有趣的区域（虚线背景）为 $-20\% \le h \le -10\%$，此处耦合趋近于零（$|K| \approx 0$）。在此区域中，中心腔实际上与另外两个腔解耦，零模成为由子晶格 A 构成的有效二聚体的一个本征模；稍后将利用这一参数区间，将零模频率与单腔频率联系起来。

我们使用载流子依赖耦合模理论（CD-CMT）[15, 17], 对半导体腔（$j = 1, 2, 3$）中耦合复场振幅的时间演化进行建模 $a_j$，其中存在载流子数 $n_j$,

$$\frac{da_j}{dt} = Ha_j + F_j(t)a_j, \tag{1}$$

$$H = \begin{pmatrix} \omega_0 + \alpha g_1 + \Delta\omega_1 & K & 0 \\ K & \omega_0 + \alpha g_2 + \Delta\omega_2 & K \\ 0 & K & \omega_0 + \alpha g_3 + \Delta\omega_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} g_1 - \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & g_2 - \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & g_3 - \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\frac{dn_j}{dt} = P_j - n_j\Gamma_{tot} - \beta\Gamma_{\parallel}(n_j - n_0)|a_j|^2, \tag{3}$$

其中，$\omega_0$ 和 $\tau$ 分别表示单个透明腔的共振频率和腔阻尼时间，$g_j = \beta\Gamma_{\parallel}(n_j - n_0)/2$ 为增益率，$\beta$ 为自发辐射因子，$\Gamma_{\parallel}$ 为双能级辐射复合率，$\alpha$ 为线宽增强因子（即亨利因子），$n_0$ 表示透明载流子数，$P_j$ 为泵浦率，$\Gamma_{tot}$ 为总载流子复合率。$F_j(t)$ 表示用于描述自发辐射的朗之万噪声项。

我们先考虑一个简单情形，其中 $\Delta\omega_j = 0$、$F_j(t) = 0$，并忽略载流子诱导的折射率变化效应（$\alpha = 0$）。当两端腔受到相同泵浦时，令 $g_1 = g_3 = g$ 和 $g_2 = 0$。低于激光阈值（$|a_1|^2 = |a_2|^2 = |a_3|^2 \to 0$）时，本征值为

$$\epsilon_0 = \omega_0 + i\left(g - \frac{1}{\tau}\right), \tag{4}$$

$$\epsilon_{\pm} = i\left(\frac{g}{2} - \frac{1}{\tau}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{8K^2 - g^2} + \omega_0, \tag{5}$$

其中 $\epsilon_0$ 是由 NHPH 对称性保护的零模，其本征向量为 $(1,\ 0,\ -1)^T$。因此，该零模是暗态，即只能通过探测子晶格 A 来激发；值得注意的是，两端腔之间存在 $\pi$ 相位差。在一般的非厄米情形下，这种 $\pi$ 相位差源于 NHPH 对称性导致的子晶格间两次 $\pi/2$ 相位跃变 [10], ，并且事实证明，它能够抵抗泵浦不平衡。零模所具有的这种 $\pi$ 相位差是用于在实验中识别零模的实用指纹特征 [15]。

图 1(d) 展示了式 (2) 中完整哈密顿量的本征值的实部和虚部，即包含由 $\alpha$ 引起的蓝移效应。当仅泵浦一个两端腔时（蓝色曲线），频率最高的模式受到的激发更强，并最先达到激光阈值 [$\Re(\epsilon) = 0$]。这是因为受激腔光子与混合模之间存在光谱重叠；具体而言，载流子引起的腔共振蓝移与蓝失谐混合模 [15] 的光谱重叠更佳。相比之下，只要两个两端腔受到的泵浦相同，零模便会先于

另外两个模式达到阈值，并成为激射模式（见红色曲线）。

为了在实验中观察零模激光器，我们在磷化铟（InP）悬空膜中制备了三个耦合的光子晶体腔，并嵌入了四个 $InGa_{0.17}As_{0.76}P$ 量子阱 [18]。我们进行了光致发光（PL）实验，以研究零模的发射特性。为减少热效应，我们选择脉冲泵浦激光器（脉冲持续时间为 100ps，重复频率为 10 MHz）作为泵浦光源。正如前文所述，仅用一个光斑无法有效激发零模，因此我们采用空间光调制器（SLM）来重塑泵浦配置。我们的液晶空间光调制器工作于振幅调制模式 [图2(a)]。这一配置需要两片半波片：第一片（靠近声光调制器）用于提高图案的整体强度；第二片（靠近空间光调制器）相对于水平面旋转至 $22.5°$，以最大限度提高泵浦图案与背景之间的对比度。这种调制使我们能够独立控制三个腔中的泵浦强度。图1(a)的插图展示了两种典型的泵浦图案。随后，改造后的泵浦激光经显微物镜（$100\times$ IR，数值孔径为 0.95）聚焦至样品上，辐射出的光致发光则由光谱仪进行光谱分辨。

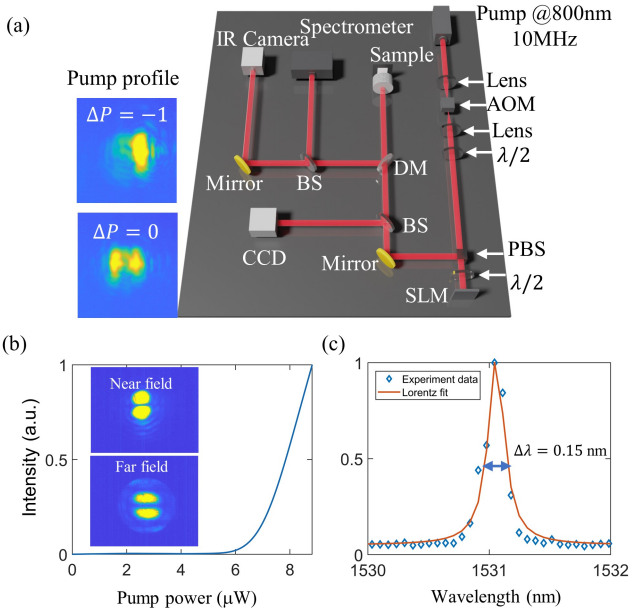


图 2. 零模激光器的实验表征。(a) 使用空间光调制器的实验装置；(b) 零模激光器的输入光—输出光曲线。插图为零模激光器的近场和远场；(c) 零模激光器的实验测量结果及洛伦兹拟合。

我们表征了在对两个两端腔进行近乎相等泵浦时的纳米激光器发射。光输入/光输出发射 [图 2(b)] 以及发射线宽 [图 2(c)] 是强有力的证据，表明在强腔间耦合区域（$h = 0\%$，其中 $|K| \gg |\Delta\omega|$）获得了零模激光器，波长为 $\lambda \approx 1531.11$nm。图 2(b) 中观察到清晰的激光阈值，平均泵浦功率约为 $6\,\mu$W。为验证该模式确实是零模，我们使用 InGaAs红外相机测量其近场和远场分布。在近场中，中心处未检测到能量；此外，远场图像中观察到一个节点，揭示出反对称场分布 [见图 2(b) 插图]。事实上，两端腔之间的 $\pi$ 相位差与非厄米零模中属于不同子晶格的相邻腔之间预测的$\pi/2$相位跃变相符 [10]。

为进一步检验零模激光器的稳健性，我们定义一个新的控制参数 $\Delta P = (P_3 - P_1)/(P_1 + P_3)$，该参数保持总泵浦功率不变（$P_1 + P_3 = const$）。图 3(a) 展示了光谱强度随波长和 $\Delta P$ 的变化。请注意，当$\Delta P = \pm 1$时，仅泵浦一个两端腔；当$\Delta P = 0$时，则对两个两端腔进行等强度泵浦。在 $|\Delta P| \leq 0.15$ 范围内，零模激光器可被高效激发。图 3(c) 展示了使用方程 (1)-(3) 得到的数值计算结果，与实验结果非常吻合。

有趣的是，我们可以通过向中心腔注入功率来控制零模激光器（$P_1 = P_3$, $P_2 = 0 \rightarrow 1.2P_1$）；实验结果见图 3(b)。图 3(d) 为相应的仿真结果，与实验结果吻合良好。我们观察到，只要中心腔具有吸收性，零模就会持续存在，即 $g_2 \leq 0$，这在 $P_2/P_1 < 0.5$ 时发生；然而，当中心腔开始出现净增益（$g_2 > 0$）时，零模便会关闭，能量则转移至边模。这一结果表明，可以通过改变中心腔中的泵浦功率，动态控制零模激光器的可见性。

激射零模最重要的性质之一是，其频率应当对应于单腔的频率，在本例中，该频率会因势垒的存在而发生改变，$\omega_0 + \Delta\omega$。然而，由于单腔纳米激光器需要采用不同的光刻工艺来实现，因此很难在实验上直接将零模与单腔纳米激光器进行比较；相对于耦合腔中心频率，后者很可能存在失谐。为了解决这一问题，我们转向较弱的耦合区间，在该区间内，通过使光学泵浦失衡，可以有效地将系统解耦。

如图1(b)所示，在 $-20\% \leq h \leq -10\%$ 的范围内，耦合接近于零，中心腔（子晶格 B）与子晶格 A 解耦，因此系统可视为由两个耦合的两端腔构成的有效光学二聚体 [15]。为计算有效耦合参数，我们对式 (2) 中的哈密顿量应用 Schrieffer-Wolff 变换 [19, 20]（此处为简便起见，

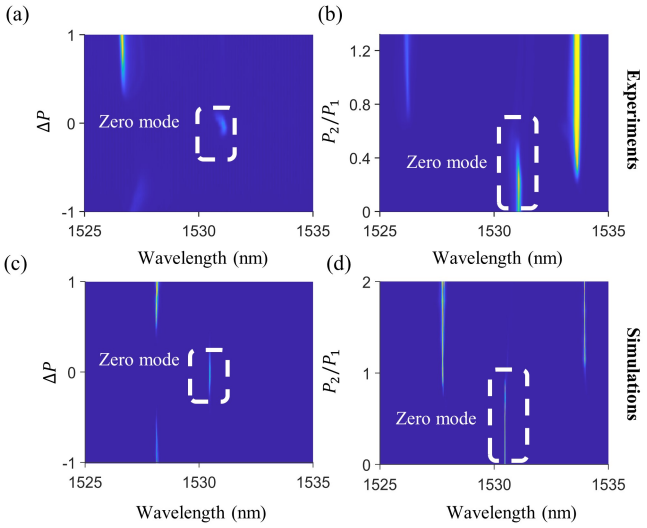


图3. 强耦合区内零模激光器的实验观测（$h = 0$%和晶格常数为 408 nm）。（a）两端腔中的泵浦不平衡时的光致发光图；（b）增大中心腔中的泵浦时的光致发光图。虚线框标示了零模激光器的位置。（c）和（d）分别为（a）和（b）的模拟。（e）零模激光器的实验测量结果及洛伦兹拟合；（f）零模激光器的输入光—输出光曲线；这里的模拟采用：$K = 12.5/\tau$, $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_3 = -3.38/\tau$, $\Delta\omega_2 = 2\Delta\omega_1$, $\omega_0 =$ 195.81 THz，$P_1 + P_2 = 3P_0$，$P_0$ 其中为单腔的阈值。其余参数与图1相同。

我们取 $\alpha = 0$，且只考虑厄米项），

$$H_e = \hat{U}^\dagger H \hat{U} = \begin{pmatrix} \omega_0 + \Delta\omega_e & K_e & 0 \\ K_e & \omega_0 + \Delta\omega_e & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 + \Delta\omega_e' \end{pmatrix}, \quad (6)$$

本征向量为 $[a_1, a_3, a_2]^T$。这里，$\hat{U}$ 是一种酉变换，用于将中心腔与系统其余部分解耦。有效耦合强度为 $K_e = K^2/\Delta\omega$，极端腔和中心腔的有效失谐分别为 $\Delta\omega_e = K^2/\Delta\omega + \Delta\omega$ 和 $\Delta\omega_e' = 2K^2/\Delta\omega + 2\Delta\omega$。式 (6) 的本征值为

$$\omega = \Delta\omega + \omega_0, \quad (7)$$

$$\omega = \Delta\omega + \frac{2K^2}{\Delta\omega} + \omega_0, \quad (8)$$

方程（7）和（8）给出了有效二聚体的混合频率。方程（7）表明，二聚体中的有效零模以未耦合的两端腔的频率 lasing。需要注意的是，与传统的两个耦合腔不同，传统情况下本征频率相对于未耦合腔的频率对称分裂；而在这里，有效二聚体的两个本征值与单腔频率的距离并不相等。

| $h$ | -20% | -15% | -10% | -5% |
|---|---|---|---|---|
| $K$（实际的两个腔） | -7.44 | -0.84 | 4.57 | 8.96 |
| $K_e$ | 1.08 | 0.018 | 0.80 | 5.51 |

表 I. 实际腔（上）与有效双耦合腔（下）之间的耦合强度比较。参数以单腔损耗率 $1/\tau$ 归一化。

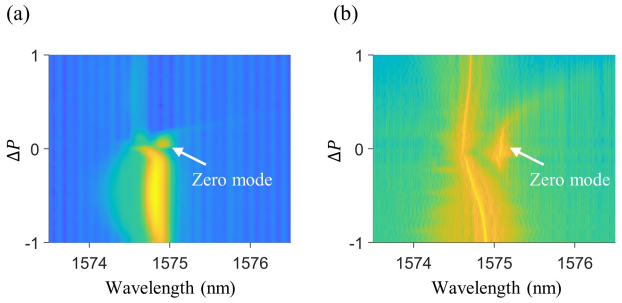


图 4. 弱耦合区中零模激光器的实验观测（$h = -20\%$ $a = 422$ nm）。（a）零模激光器与单腔的实验对比，光致发光图以对数刻度绘制；（b）使用有效双腔耦合系统模型的模拟结果。参数为：$K = 1.08/\tau, \Delta\omega_1 = 0, \Delta\omega_2 = 1.2g$ 和 $\omega_0 = 190.28$ THz。

表 I 列出了有效二聚体的参数，并与两个耦合腔情况下实际系统的参数进行了比较。显然，有效耦合小于实际系统中的耦合。因此，与图3(a)和(c)不同，不平衡泵浦可以有效地使两端腔解耦，因此可以将单腔频率与零模的频率直接比较。

接下来，我们测量近零耦合区域的光致发光图。需要指出的是，只有在耦合不为零时，零模才有保证，因此必须避免在 $h = -15\%$ 时出现的耦合消失情况（图 1）；本次实验中，我们选择 $h = -20\%$。结果如图 4(a)所示。当不平衡泵浦参数 $\Delta P$ 从 $\Delta P = 0$ 降至 $\Delta P = -1$时，最左侧模式发生红移，其波长逐渐接近零模的波长。这一观察结果表明，零模频率接近单个未耦合腔对应的频率，尽管会受到势垒（$\omega_0 + \Delta\omega$）的扰动。图4(b)展示了有效哑铃模型的仿真结果，与实验结果吻合良好。

总之，我们通过实验展示了由三耦合光子晶体纳米腔阵列的非厄米粒子-空穴（NHPH）对称性所保障的激射零模。通过以相同功率泵浦两端腔，可以高效激发这种受对称性保护的模式；即使泵浦功率不平衡达到15%，零模仍能维持。

此外，通过泵浦中心腔，可以动态控制零模的强度，最终将能量转移至边模。值得注意的是，当中央腔泵浦功率增加至两端腔泵浦水平的50%时，我们仍观察到零模保持稳健。我们还表明，当耦合相较于子晶格失谐较弱时，三耦合腔可简化为调光器系统；这种方法可用于主动解耦系统，并证实零模以单腔的频率振荡。我们的工作为通过SLM泵浦图案化激发和控制激射零模提供了一种灵活的方法，其操控和对称

对称性保护特性可能在光学计算[21] 和容错量子计算 [22, 23]等潜在应用中具有价值。

**致谢**

本研究部分得到了法国国家研究署（ANR）的资助，项目编号为 ANR UNIQ DS078 和 ANR-22-CE24-0012-01；还得到了欧盟玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动项目 MSCA-841351 以及 RENATECH网络的资助。K. J. 感谢中国国家留学基金管理委员会提供的资助（编号：202006970015）

[1] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma，《非阿贝尔任意子与拓扑量子计算》，《现代物理评论》**80**，1083（2008）。[2] R. A. Vicencio、C. Cantillano、L. Morales-Inostroza、B. Real、C. Mej´ıa-Cort´es、S. Weimann、A. Szameit 和 M. I. Molina，《Lieb光子晶格中局域态的观测》，物理评论快报**114**，245503（2015）。[3] S. Mukherjee 和 R. R. Thomson，《准一维光子菱形晶格中局域平带模式的观测》，《光学快报》**40**，5443（2015）。[4] P. St-Jean、V. Goblot、E. Galopin、A. Lemaˆıtre、T. Ozawa、L. Le Gratiet、I. Sagnes、J. Bloch 和 A. Amo，《一维晶格拓扑边缘态中的激射》，《自然·光子学》**11**，651（2017）。[5] M. Parto、S. Wittek、H. Hodaei、G. Harari、M. A. Bandres、J. Ren、M. C. Rechtsman、M. Segev、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan，《一维拓扑有源阵列中的边缘模激射》，物理评论快报**120**，113901（2018）。[6] C. Han、M. Lee、S. Callard、C. Seassal 和 H. Jeon，《L3纳米腔二聚体阵列光子晶体拓扑边缘态中的激射》，《光：科学与应用》**8**，1（2019）。[7] H.-H. Sun、K.-W. Zhang、L.-H. Hu、C. Li、G.-Y. Wang、H.-Y. Ma、Z.-A. Xu、C.-L. Gao、D.-D. Guan、Y.-Y. Li、*et al.*，《在拓扑超导体涡旋中通过自旋选择性安德烈夫反射探测马约拉纳零模》，物理评论快报**116**，257003（2016）。[8] R. M. Lutchyn、E. P. Bakkers、L. P. Kouwenhoven、P. Krogstrup、C. M. Marcus 和 Y. Oreg，《超导体–半导体异质结构中的马约拉纳零模》，《自然综述：材料》**3**，52（2018）。[9] B. J¨ack、Y. Xie、J. Li、S. Jeon、B. A. Bernevig 和 A. Yazdani，《拓扑保护边缘通道中马约拉纳零模的观测》，《科学》**364**，1255（2019）。[10] L. Ge，《空间分布可调的对称性保护零模激光器》，《物理评论A辑》**95**，023812（2017）。[11] J. D. Rivero 和 L. Ge，《非厄米系统中的手征对称性：乘积法则与克利福德代数》，《物理评论B辑》**103**，014111（2021）。[12] D. Pikulin 和 Y. V. Nazarov，《超导结的拓扑性质》，《JETP快报》**94**，693（2012）。[13] B. Qi、L. Zhang 和 L. Ge，从光子零模的非厄米平带中出现的缺陷态，《物理评论快报》**120**，093901（2018年）。[14] M. Pan、H. Zhao、P. Miao、S. Longhi 和 L. Feng，非厄米光子晶格中的光子零模，《自然通讯》**9**，1（2018年）。[15] F. Hentinger、M. Hedir、B. Garbin、M. Marconi、L. Ge、F. Raineri、J. A. Levenson 和 A. M. Yacomotti，非厄米光学纳腔阵列中零模的直接观测，《光子学研究》**10**，574（2022）。[16] S. Haddadi、P. Hamel、G. Beaudoin、I. Sagnes、C. Sauvan、P. Lalanne、J. A. Levenson 和 A. Yacomotti，光子分子：调控耦合强度及其符号，《光学快报》**22**，12359（2014）。[17] M. Marconi、F. Raineri、A. Levenson、A. M. Yacomotti、J. Javaloyes、S. H. Pan、A. El Amili 和 Y. Fainman，耦合纳米激光器中的介观极限环，《物理评论快报》**124**，213602（2020）。[18] P. Hamel、S. Haddadi、F. Raineri、P. Monnier、G. Beaudoin、I. Sagnes、A. Levenson 和 A. M. Yacomotti，耦合光子晶体纳米激光器中的自发镜像对称性破缺，《自然·光子学》**9**，311（2015年）。[19] J. R. Schrieffer 和 P. A. Wolff，安德森哈密顿量与近藤哈密顿量之间的关系，《物理评论》**149**，491，1966年。[20] Q. Zhong、A. Hashemi、S¸. ¨Ozdemir 和 R. El-Ganainy，利用手性例外面控制微腔中的自发辐射动力学，《物理评论研究》**3**，013220（2021年）。[21] G. Tirabassi、K. Ji、C. Masoller 和 A. M. Yacomotti，利用纳米激光器阵列的集体光学模式进行二值图像分类，APL光子学**7**，090801（2022）。[22] M. J. Levene、J. Korlach、S. W. Turner、M. Foquet、H. G. Craighead 和 W. W. Webb，高浓度下进行单分子分析的零模波导，《科学》**299**，682（2003年）。[23] L. Fu 和 C. L. Kane，拓扑绝缘体表面的超导近邻效应与马约拉纳费米子，《物理评论快报》**100**，096407（2008年）。