arXiv:2302.01814v1 [math.DS] 3 Feb 2023

含有种群损失的扩散矩阵的时滞种群斑块模型动力学

黄丹 [1] 和陈珊珊 [2]

[1] *School of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang, 150001, P.R.China*
[2] *Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Weihai, Shandong, 264209, P.R.Chinaemail:* chenss@hit.edu.cn

(*Received 18 August 2021*)

本文研究一种具有时滞和斑块结构的一般单种群模型，该模型可描述扩散过程中的种群损失。研究表明，当扩散率小于某个临界值时，该模型存在唯一正平衡点。本文考察了扩散率较小或接近临界值时正平衡点的稳定性及相关的Hopf分岔。此外，我们还展示了网络拓扑对时滞逻辑斯蒂种群模型Hopf分岔值的影响。

关键词： Hopf分岔；斑块结构；时滞；种群损失。

2010年数学学科分类： 92D25, 34K18, 34K13, 37N25

1 引言

可以通过反应扩散系统或离散斑块模型来研究种群动力学 [1, 3]。对于某些生物物种，成熟时间和捕猎时间等时滞可能对种群动力学产生重要影响，因此建模时应将其纳入考虑。因此，人们提出了各种含时滞的反应扩散模型和时滞斑块模型，以了解生物物种之间的相互作用 [30, 40]。

对于具有时滞的反应扩散模型，时滞诱导的霍普夫分岔和双Hopf分岔已得到广泛研究。例如，关于齐次Neumann边界条件下带时滞的反应-扩散模型的Hopf分岔结果，可参见[16, 18, 20, 31, 33, 43] 及其中的参考文献；关于双Hopf分岔的结果，可参见 [13, 14] 。对于齐次Dirichlet边界条件的情形， [2, 10,11, 12, 19, 21, 37, 38, 42] 及其中的参考文献研究了时滞诱导的Hopf分岔，而通过Hopf分岔产生的分岔稳定周期解通常具有空间异质性。此外，最近研究者开始将空间异质性纳入具有时滞的反应扩散模型，并在 [6, 9, 22, 24, 26, 34]中研究了相关的Hopf分岔。

关于时滞斑块模型的分岔，也已有大量研究成果。对于空间均匀环境，关于扩散诱导的图灵分岔，可参见 [4, 15, 17]及其中的参考文献；时滞诱导的霍普夫分岔也已得到广泛研究，例如参见 [5, 29, 32, 36, 39]。考虑空间异质性，Liao和Lou [27] 研究了以下双斑块模型，该模型描述了单一物种的生长：

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = d\left(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2\right) + \mu u_1\left[m_1 - u_1(t-r)\right], & t > 0, \\ \dfrac{du_2}{dt} = d\left(\alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2\right) + \mu u_2\left[m_2 - u_2(t-r)\right], & t > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， u_j 表示斑块 j 在时间 t的种群密度， d 为扩散率， μ为标量因子， r 表示成熟时间， m_j 表示斑块 j中的内禀增长率，该增长率取决于斑块 j ，并反映空间异质性。扩散矩阵 $A:=(\alpha_{jk})_{2\times 2}$ 在 [27] 中取为

$$(a)\ \alpha_{11}=\alpha_{22}=-1, \alpha_{12}=\alpha_{21}=1, \quad \text{or} \quad (b)\ \alpha_{11}=\alpha_{22}=-2, \alpha_{12}=\alpha_{21}=1,$$

其中， $\alpha_{jk}(j\neq k)\geqslant 0$ 表示种群从斑块 k 迁移到斑块 j的速率， $\alpha_{jj}<0$ 表示种群离开斑块 j的速率。具有扩散矩阵（a）（分别为（b））的模型（1.1）可视为齐次 Neumann（分别为 Dirichlet）边界条件下 Hutchinson模型的离散形式。对于情形（a），扩散矩阵满足$-\alpha_{jj}=\sum_{k\neq j}\alpha_{kj}$，其中 $j=1,2$，这意味着由两个斑块组成的栖息地是封闭的，扩散过程中不会发生种群损失。对于情形（b），扩散矩阵满足 $-\alpha_{jj}>\sum_{k\neq j}\alpha_{kj}$，物种在边界处会发生种群损失，见图 1。

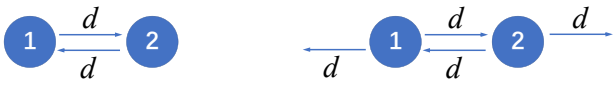

图 1. 两个斑块之间的连接。（左）扩散矩阵（a）；（右）扩散矩阵（b）。

一个自然的问题是：当斑块数量有限但任意时，模型 (1.1) 是否会发生 Hopf 分岔？在这种情况下，斑块之间的连接也可能很复杂。关于斑块间的复杂连接的详细讨论，另请参阅 [41, 45] 。本文旨在回答这一问题，并考虑以下斑块模型：

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = d\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}u_k + u_j f_j\left(u_j, u_j(t-\tau)\right), & t>0, \quad j=1,\cdots,n, \\ \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \geqslant \mathbf{0}, & t\in[-\tau,0]. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)^T$，其中 u_j表示斑块 j中的个体数量， $n\geqslant 2$是斑块数量； $f_j(\cdot,\cdot)$ 是人均增长率； $d>0$ 是种群的扩散率；时滞 $\tau\geqslant 0$ 表示种群的成熟时间。此外， $A:=(\alpha_{jk})_{n\times n}$ 是扩散矩阵，其中 $\alpha_{jk}(j\neq k)\geqslant 0$ 表示

种群从斑块 k 迁移到斑块 j的速率，而 $\alpha_{jj} \leqslant 0$ 表示离开斑块 j的种群迁移速率。

我们指出，如果扩散过程中没有种群损失（$-\alpha_{jj} = \sum_{k\neq j} \alpha_{kj}$for $j = 1, \ldots, n$），那么当扩散率较小、较大或接近某个临界值时，都可能发生Hopf分岔，见 [7, 23]。因此，本文考虑物种在扩散过程中存在种群损失时的模型（1.2）。也就是说，以下假设成立：

(H0) $A := (\alpha_{jk})_{n\times n}$ 不可约且为本质非负矩阵；并且对于所有 $j = 1, \cdots, n$，$-\alpha_{jj} \geqslant \sum_{k\neq j} \alpha_{kj}$成立，且对于某个 j，$-\alpha_{jj} > \sum_{k\neq j} \alpha_{kj}$成立。

这里指出，具有非负非对角元素的实矩阵称为本质非负矩阵。在全文中，我们还提出以下假设：

(**H1**) For $j = 1, 2, \cdots, n$, $f_j(x, y) \in C^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_j(0, 0) = m_j > 0$ and $g_j'(x) < 0$ for $x > 0$ with $g_j(x) = f_j(x, x)$.

这里，m_j 表示斑块 j中的内禀增长率。条件$f_j(x, y) \in C^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$的光滑性用于确定Hopf分岔的方向以及分岔周期解的稳定性。为简洁起见，本文不讨论这一部分。我们指出，对于存在种群损失的情形，需要修改 [7, 23] 中的论证，以推导特征值问题的先验估计。此外，我们还展示了扩散率 d 和网络拓扑对逻辑斯蒂种群模型的Hopf 分岔值的影响。

为简洁起见，我们在此给出一些记号。对于矩阵 D，我们将 D 的谱界记为

$$s(D) := \max\{\mathcal{R}e\mu : \mu \text{ is an eigenvalue of } D\}.$$

对于 $\mu \in \mathbb{C}$，我们分别用 $\mathcal{R}e\mu$ 和 $\mathcal{I}m\mu$表示实部和虚部。对于空间 Z，我们将 Z 的复化记为 $Z_{\mathbb{C}} := Z \oplus \mathrm{i}Z = \{x_1 + \mathrm{i}x_2 | x_1, x_2 \in Z\}$。对于线性算子 T，我们将 T的定义域和核分别记为 $\mathscr{D}(T)$和 $\mathscr{N}(T)$。对于 $\mathbb{C}^n$，我们在 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$上选取内积 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$，并定义范数

$$\|\boldsymbol{u}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |u_j|^2\right)^{1/2}.$$

对于 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$，若对所有 $j = 1, \cdots, n$，都有 $u_j > 0$，则记作 $\boldsymbol{u} \gg \boldsymbol{0}$。

本文其余部分安排如下。第 2 节给出一些预备知识，并证明模型（1.2）在 $\boldsymbol{u}_d$ 下、$d \in (0, d_*)$时存在唯一正平衡点。在第 3 节中，我们分别证明当 $0 < d \ll 1$ 和 $0 < d_* - d \ll 1$时 Hopf分岔的存在性。在第 4 节中，我们将所得理论结果应用于逻辑斯蒂种群模型，讨论网络拓扑对 Hopf 分岔值的影响，并给出一些数值模拟。

2 一些预备知识

本节引用关于谱界 $s(dA+\mathrm{diag}(m_j))$ 的性质，以及模型（1.2）在 $\tau=0$时全局动力学的一些结果。第一个结果引自 [8]。

引理 *2.1* 假设 *(H0)* 成立，并记 $s(d):=s(dA+diag(m_j))$。则 $s(d)$ 在 $d\in(0,\infty)$ 上严格递减，$\lim_{d\to 0}s(d)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{m_j\}$，且 $\lim_{d\to\infty}s(d)=-\infty$。此外，存在 $d_*>0$，使得对于 $d\in(0,d_*)$，$s(d_*)=0$，$s(d)>0$，且当 $d>d_*$ 时，$s(d)<0$。

结合 [8, 25, 28, 44]，可得：

引理 2.2 假设 (**H0**)-(**H1**) 成立，且 $\tau=0$。则$(0,\cdots,0)^T$平凡平衡态是(1.2) 的全局渐近稳定解（当 $d\geqslant d_*$ 时）；当 $d<d_*$ 时，系统(1.2) 存在唯一正平衡点 $\boldsymbol{u}^d=(u_1^d,\cdots,u_n^d)^T\gg\mathbf{0}$，且该平衡点全局渐近稳定。

由 Perron-Frobenius 定理可直接得出，$s(d_*A+\mathrm{diag}(m_j))\,(=0)$ 是 $d_*A+\mathrm{diag}(m_j)$ 的单特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}\gg\mathbf{0}$（或者分别地，是 $d_*A^T+\mathrm{diag}(m_j)$ 的单特征值，其对应的特征向量为$\boldsymbol{\varsigma}\gg\mathbf{0}$），其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T\ \text{ where }\ \eta_j>0\ \text{ for all }\ j=1,2,\cdots,n,\ \text{ and }\ \sum_{j=1}^n\eta_j=1,\\&\boldsymbol{\varsigma}=(\varsigma_1,\cdots,\varsigma_n)^T,\ \text{ where }\ \varsigma_j>0\ \text{ for all }\ j=1,2,\cdots,n,\ \text{ and }\ \sum_{j=1}^n\varsigma_j=1.\end{aligned}\tag{2.1}$$

于是我们得到如下分解：

$$\mathbb{R}^n=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\eta}\}\oplus X_1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\varsigma}\}\oplus\widetilde{X}_1,\tag{2.2}$$

其中

$$\begin{aligned}X_1&:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\langle\boldsymbol{\varsigma},\boldsymbol{x}\rangle=0\}=\{[d_*A+\mathrm{diag}(m_j)]\,\boldsymbol{y}:\ \ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\},\\\widetilde{X}_1&:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\langle\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{x}\rangle=0\}=\left\{\left[d_*A^T+\mathrm{diag}(m_j)\right]\boldsymbol{y}:\ \ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\right\}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

为证明 Hopf分岔 的存在性，我们将唯一正平衡点 $\boldsymbol{u}^d$的轮廓描述为 $d\to 0$或 $d\to d_*$。显然，$\boldsymbol{u}^d=(u_1^d,\cdots,u_n^d)^T$满足

$$d\sum_{k=1}^n\alpha_{jk}u_k+u_jf_j\,(u_j,u_j)=0,\ \ j=1,\cdots,n.\tag{2.4}$$

引理 2.3 假设(**H0**)-(**H1**) 成立。令 $\boldsymbol{u}^d$ 为(1.2) 在引理 *2.2* 中针对 $d\in(0,d_*)$得到的唯一正平衡点，并记

$$\tilde{a}:=\sum_{j=1}^n a_j\eta_j^2\varsigma_j,\ \ \tilde{b}:=\sum_{j=1}^n b_j\eta_j^2\varsigma_j,\tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\varsigma}=(\varsigma_1,\cdots,\varsigma_n)^T$ 由(2.1)定义，并且

$$a_j := \frac{\partial f_j(0,0)}{\partial x},\ \ b_j := \frac{\partial f_j(0,0)}{\partial y}\ \ for\ \ j=1,2,\cdots,n. \tag{2.6}$$

于是，下列结论成立。

(i) 设 $\boldsymbol{u}^d=(u_1^0,\cdots,u_n^0)^T$，其中 u_j^0 是方程 $f_j(x,x)=0$（$j=1,\cdots,n$）的唯一正解。则 $\boldsymbol{u}^d$ 关于 $d\in[0,d_*)$ 连续可微。(ii) 存在一个连续可微映射 $d\mapsto\left(\beta^d,\boldsymbol{\xi}^d\right)$，其定义域为 $(0,d_*]$，值域为 $\mathbb{R}^+\times X_1$，使得对于任意 $d\in(0,d_*)$，(1.2)的唯一正平衡点可表示为如下形式

$$\boldsymbol{u}^d=\beta^d\left(d_*-d\right)\left[\boldsymbol{\eta}+\left(d_*-d\right)\boldsymbol{\xi}^d\right]. \tag{2.7}$$

此外，

$$\beta^{d_*}=\frac{\sum_{j=1}^n m_j\eta_j\varsigma_j}{-d_*(\tilde{a}+\tilde{b})}>0, \tag{2.8}$$

且 $\boldsymbol{\xi}^{d_*}=\left(\xi_1^{d_*},\cdots,\xi_n^{d_*}\right)^T\in X_1$ 是下列方程的唯一解

$$d_*\left(d_*\sum_{k=1}^n\alpha_{jk}\xi_k+m_j\xi_j\right)+\eta_j\left[m_j+d_*\beta^{d_*}(a_j+b_j)\eta_j\right]=0,\ \ j=1,\cdots,n. \tag{2.9}$$

证明 我们先证明（i）。由假设（**H1**）可知，$f_j(x,x)=0$ 存在唯一正解，记为 u_j^0。定义

$$\boldsymbol{G}(d,\boldsymbol{u})=\begin{pmatrix} d\sum_{k=1}^n\alpha_{1k}u_k+u_1f_1(u_1,u_1)\\ d\sum_{k=1}^n\alpha_{2k}u_k+u_2f_2(u_2,u_2)\\ \vdots\\ d\sum_{k=1}^n\alpha_{nk}u_k+u_nf_n(u_n,u_n)\end{pmatrix}.$$

显然，$\boldsymbol{G}(0,\boldsymbol{u}^0)=\boldsymbol{0}$ 且 $D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{G}(0,\boldsymbol{u}^0)=\mathrm{diag}\left(u_j^0(a_j^0+b_j^0)\right)$，其中 $D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{G}(0,\boldsymbol{u}^0)$ 是 $\boldsymbol{G}(d,\boldsymbol{u})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 在 $(0,\boldsymbol{u}^0)$ 处的 Fr´echet 导数，并且

$$a_j^0=\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{\left(u_j^0,u_j^0\right)},\ \ b_j^0=\left.\frac{\partial f_j}{\partial y}\right|_{\left(u_j^0,u_j^0\right)},\ \ j=1,\cdots,n. \tag{2.10}$$

根据假设（**H1**），我们可知

$$a_j^0+b_j^0<0\ \text{ for all }\ j=1,\cdots,n, \tag{2.11}$$

这意味着 $D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{G}(0,\boldsymbol{u}^0)$ 可逆。由隐函数定理可知，存在 $d_1>0$ 以及一个连续可微映射

$$d\in[0,d_1]\mapsto\boldsymbol{u}(d)=(u_1(d),\cdots,u_n(d))^T\gg\boldsymbol{0}$$

使得 $\boldsymbol{G}(d,\boldsymbol{u}(d))=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}^0$。因此，$\boldsymbol{u}^d=\boldsymbol{u}(d)$，并且 $\boldsymbol{u}^d$ 在 $d\in[0,d_1]$ 上连续可微。注意，对于 $d\in(0,d_*)$，$G(d,\boldsymbol{u}^d)=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{u}^d$ 是稳定的。然后，根据隐函数定理，我们得到 $\boldsymbol{u}^d$ 在 $d\in(0,d_*)$ 上连续可微。为简洁起见，此处省略证明。

现在，我们证明 (ii)。由 (2.2) 可知，$\boldsymbol{u}^d$ 可表示为 (2.7)。由于 $\boldsymbol{u}^d$ 在 $d \in (0, d_*)$上连续可微，因此我们看到，β^d 和 $\boldsymbol{\xi}^d$ 在 $d \in (0, d_*)$上也连续可微。接下来，我们将证明 β^d 和 $\boldsymbol{\xi}^d$ 在 $d = d_*$上连续可微。

由 (2.11) 可得

$$\tilde{a} + \tilde{b} < 0, \tag{2.12}$$

这意味着 β^{d_*} 为正。由于

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \eta_j \varsigma_j + d_* \beta^{d_*} (\tilde{a} + \tilde{b}) = 0,$$

我们可知

$$\left(\eta_1 \left[m_1 + d_* \beta^{d_*} (a_1 + b_1)\eta_1\right], \cdots, \eta_n \left[m_n + d_* \beta^{d_*} (a_n + b_n)\eta_n\right]\right)^T \in X_1,$$

因此，$\boldsymbol{\xi}^{d_*} \in X_1$ 有唯一确定的定义。

将 (2.4) 乘以 d_*，得

$$d\left[d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} u_k + m_j u_j\right] + (d_* - d) u_j m_j + d_* u_j \left[f_j\left(u_j, u_j\right) - m_j\right] = 0, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{2.13}$$

代入

$$\boldsymbol{u} = \beta(d_* - d)\left[\boldsymbol{\eta} + (d_* - d)\boldsymbol{\xi}\right]$$

到 (2.13) 中，其中 $\boldsymbol{\eta}$ 在 (2.1) 中定义，且 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T \in X_1$，可知它对 $(\beta, \boldsymbol{\xi})$ 所有 $j = 1, \cdots, n$均满足

$$p_j(d, \beta, \boldsymbol{\xi}) := d\left(d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k + m_j \xi_j\right) + \left[\eta_j + (d_* - d)\xi_j\right]\left(m_j + d_* q_j(d, \beta, \boldsymbol{\xi})\right) = 0,$$

其中

$$q_j(d, \beta, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \dfrac{f_j\left(u_j, u_j\right) - m_j}{d_* - d}, & d \neq d_* \\ \beta(a_j + b_j)\eta_j, & d = d_* \end{cases} \tag{2.14}$$

其中 $u_j = \beta(d_* - d)\left[\eta_j + (d_* - d)\xi_j\right]$。定义 $\boldsymbol{p}(d, \beta, \boldsymbol{\xi}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X_1 \mapsto \mathbb{R}^n$ 为

$$\boldsymbol{p}(d, \beta, \boldsymbol{\xi}) = \left(p_1(d, \beta, \boldsymbol{\xi}), \cdots, p_n(d, \beta, \boldsymbol{\xi})\right)^T.$$

那么 $(d, \boldsymbol{u})$ 是 (2.4) 的解，当且仅当 $\boldsymbol{p}(d, \beta, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{0}$ 对 $(\beta, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R} \times X_1$成立。显然，$\boldsymbol{p}(d_*, \beta^{d_*}, \boldsymbol{\xi}^{d_*}) = \boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{p}$ 关于 $(\beta, \boldsymbol{\xi})$ 在 $(d_*, \beta^{d_*}, \boldsymbol{\xi}^{d_*})$ 处的 Fr´echet 导数为

$$D_{(\beta, \boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{p}(d_*, \beta^{d_*}, \boldsymbol{\xi}^{d_*})[\epsilon, \boldsymbol{v}] = d_* \begin{pmatrix} d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} v_k + m_1 v_1 + (a_1 + b_1)\eta_1^2 \epsilon \\ d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} v_k + m_2 v_2 + (a_2 + b_2)\eta_2^2 \epsilon \\ \vdots \\ d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} v_k + m_n v_n + (a_n + b_n)\eta_n^2 \epsilon \end{pmatrix},$$

其中 $\epsilon \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)^T \in X_1$。由于根据 (2.12) 有 $\tilde{a} + \tilde{b} < 0$，我们可知，$D_{(\beta, \boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{p}(d_*, \beta^{d_*}, \boldsymbol{\xi}^{d_*})$ 是从 $\mathbb{R} \times X_1$ 到 $\mathbb{R}^n$的双射。由隐函数

定理可知，存在 $d_1 < d_*$ 和一个连续可微映射 $d \in [d_1, d_*] \mapsto (\tilde{\beta}^d, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^d) \in \mathbb{R} \times X_1$，使得 $\boldsymbol{p}(d, \tilde{\beta}^d, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^d) = \boldsymbol{0}$，且当 $d = d_*$时，$\tilde{\beta}^d = \beta^{d_*}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^d = \boldsymbol{\xi}^{d_*}$。方程 (1.2) 正平衡点的唯一性意味着 $\beta^d = \tilde{\beta}^d$ 和 $\boldsymbol{\xi}^d = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^d$ 对$d \in [d_1, d_*)$成立。因此，对于 $d \in (0, d_*]$，β^d和 $\boldsymbol{\xi}^d$均连续可微。

□

3 稳定性与Hopf分岔

本节中，我们考察唯一正平衡点 $\boldsymbol{u}^d$ 的稳定性，并证明模型(1.2)中Hopf分岔的存在性或不存在性。在 $\boldsymbol{u}^d$ 处对(1.2)进行线性化，得到

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = dA\boldsymbol{v} + \operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d, u_j^d)\right)\boldsymbol{v} + \operatorname{diag}\left(u_j^d a_j^d\right)\boldsymbol{v} + \operatorname{diag}(u_j^d b_j^d)\boldsymbol{v}(t-\tau), \tag{3.1}$$

其中

$$a_j^d = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{(u_j^d, u_j^d)}, \quad b_j^d = \left.\frac{\partial f_j}{\partial y}\right|_{(u_j^d, u_j^d)}. \tag{3.2}$$

由 [40] 可知，(3.1)的解半群具有无穷小生成元$A_\tau(d)$，满足

$$A_\tau(d)\boldsymbol{\Psi} = \dot{\boldsymbol{\Psi}},$$

$A_\tau(d)$的定义域为

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\left(A_\tau(d)\right) = \big\{\boldsymbol{\Psi} \in C_{\mathbb{C}} \cap C_{\mathbb{C}}^1 : \boldsymbol{\Psi}(0) \in \mathbb{C}^n, \dot{\boldsymbol{\Psi}}(0) = dA\boldsymbol{\Psi}(0) + \operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d, u_j^d)\right)\boldsymbol{\Psi}(0) \\ + \operatorname{diag}\left(u_j^d a_j^d\right)\boldsymbol{\Psi}(0) + \operatorname{diag}\left(u_j^d b_j^d\right)\boldsymbol{\Psi}(-\tau)\big\},\end{aligned}$$

其中 $C_{\mathbb{C}} = C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$ 和 $C_{\mathbb{C}}^1 = C^1([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$。那么，我们看到，当且仅当存在满足条件的 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)^T (\neq \boldsymbol{0}) \in \mathbb{C}^n$ 时，$\mu \in \mathbb{C}$ 是 $A_\tau(d)$ 的一个特征值：

$$\begin{aligned}\Delta(d, \mu, \tau)\boldsymbol{\varphi} := & dA\boldsymbol{\varphi} + \operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d, u_j^d)\right)\boldsymbol{\varphi} + \operatorname{diag}\left(u_j^d a_j^d\right)\boldsymbol{\varphi} \\ & + e^{-\mu\tau}\operatorname{diag}\left(u_j^d b_j^d\right)\boldsymbol{\varphi} - \mu\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

这里的扩散矩阵 A 可能是不对称的，环境也可能具有空间异质性。因此，无法得到 $\boldsymbol{u}^d$ 的显式表达式。由引理 2.3 可得，当 $d \to 0$ 或 $d \to d_*$时，$\boldsymbol{u}^d$ 的渐近剖面。接下来的讨论分为两种情况：(I) $0 < d_* - d \ll 1$，以及 (II) $0 < d \ll 1$。

3.1 The case of $0 < d_* - d \ll 1$

本节将考虑当 $0 < d_* - d \ll 1$时，(1.2) 中 Hopf分岔的存在性。首先，我们对 (3.3) 的解得到先验估计。

引理 3.1 假设 $\mu_d, \tau_d, \boldsymbol{\psi}_d$ 是 $d \in (0, d_*)$ 上的 (3.3) 的解，其中 $\mathcal{R}e\mu_d$、$\tau_d \geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{\psi}_d = (\psi_{d,1}, \cdots, \psi_{d,n})^T (\neq \boldsymbol{0}) \in \mathbb{C}^n$。那么存在 $d_1 \in (0, d_*)$，使得 $\left|\dfrac{\mu_d}{d_* - d}\right|$有界。进一步，忽略一个标量因子后，$\boldsymbol{\psi}_d$ 可表示如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\psi}_d = r_d\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{w}_d, \ \boldsymbol{w}_d \in (X_1)_{\mathbb{C}}, \ r_d \geqslant 0, \\ \|\boldsymbol{\psi}_d\|_2^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2,\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 定义于 (2.1)，且 r_d、 $\boldsymbol{w}_d$ 和 $\boldsymbol{\psi}_d$ 满足

$$\lim_{d\to d_*} r_d = 1, \quad \lim_{d\to d_*} \boldsymbol{w}_d = \mathbf{0}, \quad \lim_{d\to d_*} \boldsymbol{\psi}_d = \boldsymbol{\eta}.$$

证明 我们首先证明，对于 $d \in (0, d_*)$， $|\mu_d|$ 有界。将 $(\mu_d, \tau_d, \boldsymbol{\psi}_d)$ 代入 (3.3)，可得

$$d\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\psi_{d,k} + f_j(u_j^d, u_j^d)\psi_{d,j} + u_j^d a_j^d \psi_{d,j} + u_j^d b_j^d \psi_{d,j} e^{-\mu_d \tau_d} - \mu_d \psi_{d,j} = 0, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{3.5}$$

将 (3.5) 乘以 $\psi_{d,j}$ ，并对所有 j 求和，得到

$$\begin{aligned} &d\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\psi}_{d,j}\psi_{d,k} + \sum_{j=1}^{n} f_j(u_j^d, u_j^d)|\psi_{d,j}|^2 + \sum_{j=1}^{n} u_j^d a_j^d |\psi_{d,j}|^2 \\ &+ e^{-\mu_d \tau_d}\sum_{j=1}^{n} u_j^d b_j^d |\psi_{d,j}|^2 - \mu_d \sum_{j=1}^{n} |\psi_{d,j}|^2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\|\boldsymbol{\psi}_d\|_2^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2$，我们可知，对于 $d \in (0, d_*)$，

$$\begin{aligned} |\mu_d| \leqslant &\max_{d\in[0,d_*],1\leqslant j\leqslant n} |f_j(u_j^d, u_j^d)| + \max_{d\in[0,d_*],1\leqslant j\leqslant n} |u_j^d a_j^d| \\ &+ \max_{d\in[0,d_*],1\leqslant j\leqslant n} |u_j^d b_j^d| + n d_* \max_{1\leqslant j,k\leqslant n} |\alpha_{jk}|, \end{aligned}$$

这意味着，对于 $d \in (0, d_*)$， $|\mu_d|$ 有界。

显然，忽略一个标量因子， $\boldsymbol{\psi}_d$ 可表示为 (3.4)。由 (3.4) 可知$\|\boldsymbol{\psi}_d\|_2^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2$。于是，取一个子列后，我们可以假设

$$\lim_{d\to d_*} \mu_d = \gamma, \quad \lim_{d\to d_*} \boldsymbol{\psi}_d = \lim_{d\to d_*} (r_d \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{w}_d) = \boldsymbol{\psi}^* \tag{3.6}$$

其中 $\mathcal{R}e\gamma \geqslant 0$ 和 $\|\boldsymbol{\psi}^*\|_2^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2$。结合 (3.3)，可得

$$(d_* A + \mathrm{diag}(m_j))\boldsymbol{\psi}^* - \gamma \boldsymbol{\psi}^* = \mathbf{0},$$

因此， γ 是 $d_* A + \mathrm{diag}(m_j)$ 的特征值。根据 [35, 推论 4.3， 2],我们有 $\gamma = s(d_* A + \mathrm{diag}(m_j)) = 0$。结合 (3.4) 和 (3.6)，可得$\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{\eta}$，因此，

$$\lim_{d\to d_*} r_d = 1, \quad \lim_{d\to d_*} \boldsymbol{w}_d = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

然后将 (3.5) 乘以 d_*，得到

$$\begin{aligned} 0 = &d\left[d_*\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\psi_{d,k} + m_j\psi_{d,j}\right] + (d_* - d)m_j\psi_{d,j} + d_*\left[f_j(u_j^d, u_j^d) - m_j\right]\psi_{d,j} \\ &+ d_* u_j^d a_j^d \psi_{d,j} + d_* u_j^d b_j^d \psi_{d,j} e^{-\mu_d \tau_d} - d_* \mu_d \psi_{d,j}, \qquad j = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

将 (2.7) 和 (3.4) 代入 (3.8)，对于 $j=1,\ \cdots,\ n$，有

$$0 = d\left(d_*\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}w_{d,k}+m_jw_{d,j}\right)+(d_*-d)\left[m_j+d_*q_j(d,\beta^d,\boldsymbol{\xi}^d)\right](r_d\eta_j+w_{d,j})$$
$$-d_*\mu_d(r_d\eta_j+w_{d,j})+d_*(d_*-d)\beta^d(a_j^d+b_j^de^{-\mu_d\tau_d})\left[\eta_j+(d_*-d)\xi_j^d\right](r_d\eta_j+w_{d,j}), \tag{3.9}$$

其中 $q_j(d,\ \beta,\ \boldsymbol{\xi})$ 在 (2.14) 中定义。注意，ς 是 $d_*A^T+\mathrm{diag}(m_j)$ 对应于特征值 0 的特征向量。结合 (2.3)，可得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(d_*\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}w_{d,k}+m_jw_{d,j}\right)\varsigma_j=0,\ \ \sum_{j=1}^{n}w_{d,j}\varsigma_j=0.$$

然后，将 (3.9) 乘以 ς_j，并对所有 j 求和，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mu_d}{d_*-d}=&\frac{\beta^d\sum_{j=1}^{n}\varsigma_j(a_j^d+b_j^de^{-\mu_d\tau_d})(r_d\eta_j+w_{d,j})[\eta_j+(d_*-d)\xi_j^d]}{r_d\sum_{j=1}^{n}\eta_j\varsigma_j}\\&+\frac{\sum_{j=1}^{n}\varsigma_j\left[m_j+d_*q_j(d,\beta^d,\boldsymbol{\xi}^d)\right](r_d\eta_j+w_{d,j})}{d_*r_d\sum_{j=1}^{n}\eta_j\varsigma_j}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

结合 (3.7)，可知存在 $d_1\in(0,\ d_*)$，使得 $\left|\dfrac{\mu_d}{d_*-d}\right|$ 对 $d\in[d_1,d_*)$ 有界。 ——— □

根据引理 3.1，可得以下结果。

定理 3.2 假设(**H0**)-(**H1**) 成立，且 $\tilde{a}-b<0$，其中 $\tilde{a}$ 和 b 在(2.5)中定义。则存在 $d_2\in[d_1,d_*)$，使得

$$\sigma\left(A_\tau(d)\right)\subset\{x+\mathrm{i}y:x,y\in\mathbb{R},x<0\}\ \ for\ \ d\in[d_2,d_*)\ \ and\ \ \tau\geqslant 0.$$

证明 若结论不成立，则存在一个正数列 $\{d_l\}_{l=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{l\to\infty}d_l=d_*$，并且对于 $l\geqslant 1$，$\Delta(d_l,\ \mu,\ \tau)\ \boldsymbol{\psi}=0$ 在某个 $(\mu_{d_l},\ \tau_{d_l},\ \boldsymbol{\psi}_{d_l})$ 的取值下有解，其中 $\mathcal{R}e\mu_{d_l},\ \mathcal{I}m\mu_{d_l}\geqslant 0$，$\tau_{d_l}\geqslant 0$ 且 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\psi}_{d_l}\in\mathbb{C}^n$。由引理 3.1 的证明可知，$\left\{\left|\frac{\mu_{d_l}}{d_*-d_l}\right|\right\}_{l=1}^{\infty}$ 和 $\{|\mu_{d_l}|\}_{l=1}^{\infty}$ 有界。因此，我们可知存在一个子列 $\{d_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$（为方便起见，仍记为 $\{d_l\}_{l=1}^{\infty}$），使得

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\mu_{d_l}}{d_*-d}=\mu^*,\ \ \lim_{l\to\infty}(e^{-\tau_{d_l}(\mathcal{R}e\mu_{d_l})},e^{-\mathrm{i}\tau_{d_l}(\mathcal{I}m\mu_{d_l})})=(\sigma^*,e^{-\mathrm{i}\theta^*}), \tag{3.11}$$

其中

$$\sigma^*\in[0,1],\ \ \theta^*\in[0,2\pi),\ \ \mu^*\in\mathbb{C}\left(\mathcal{R}e\mu^*,\mathcal{I}m\mu^*\geqslant 0\right).$$

由引理 3.1 可知，$\lim_{l\to\infty}r_{d_l}=1$、$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{w}_{d_l}=\mathbf{0}$。根据 (2.7) 和 (3.2)，当 $d=d_*$ 时，我们有 $a_j^d=a_j$ 和 $b_j^d=b_j$，其中 a_j 和 b_j 定义于 (2.6)。接着，将 $d=d_l$、$\mu_d=\mu_{d_l}$、$r_d=r_{d_l}$ 和 $\boldsymbol{w}_d=\boldsymbol{w}_{d_l}$ 代入 (3.10)，并取 $l\to\infty$，由 (2.14) 和 (3.11) 可得

$$\mu^*=\frac{\sum_{j=1}^{n}\eta_j\varsigma_j\left\{[m_j+d_*\beta^{d_*}\eta_j(a_j+b_j)]+d_*\beta^{d_*}\eta_j(a_j+b_j\sigma^*e^{-\mathrm{i}\theta^*})\right\}}{d_*\sum_{j=1}^{n}\eta_j\varsigma_j}. \tag{3.12}$$

由 (2.8) 可得

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j\varsigma_j\{[m_j+d_*\beta^{d_*}\eta_j(a_j+b_j)]=0.$$

结合 (2.5) 和 (3.12)，可得

$$\begin{cases}\beta^{d_*}(\tilde{a}+\sigma^*\tilde{b}\cos\theta^*)=\mathcal{R}e\mu^*\sum_{j=1}^{n}\eta_j\varsigma_j\geqslant 0,\\ \mathcal{I}m\mu^*\sum_{j=1}^{n}\eta_j\varsigma_j+\beta^{d_*}\sigma^*\tilde{b}\sin\theta^*=0.\end{cases}\tag{3.13}$$

~ ~由 **(H1)**（另见 (2.12)）可知 $\tilde{a}+b<0$。那么，如果 $\tilde{a}-b<0$，我们有

$$\tilde{a}<\min\left\{\tilde{b},-\tilde{b}\right\}\leqslant 0 \text{ and } -1<-\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}<1.$$

结合 (3.13) 的第一个方程，可得

$$-\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\sigma^*\cos\theta^*\geqslant 1,$$

这就产生了矛盾。证明完毕。 □

由定理 3.2 可知，若 $\tilde{a}-\tilde{b}<0$，则正平衡点 $\boldsymbol{u}^d$ 对 $0<d_*-d\ll 1$局部渐近稳定，且不会发生 Hopf 分岔。接下来，~我们证明 $\tilde{a}-b>0$存在 Hopf分岔。显然，对于某个 $\tau\geqslant 0$， $A_\tau(d)$ 存在纯虚特征值 $\mu=\mathrm{i}\nu(\nu>0)$，当且仅当

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(d,\nu,\theta,\boldsymbol{\varphi}):=&dA\boldsymbol{\varphi}+\mathrm{diag}\left(f_j(u_j^d,u_j^d)\right)\boldsymbol{\varphi}+\mathrm{diag}\left(u_j^da_j^d\right)\boldsymbol{\varphi}\\&+e^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{diag}(u_j^db_j^d)\boldsymbol{\varphi}-\mathrm{i}\nu\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{3.14}$$

对于某些值的 $\nu>0,\theta\in[0,2\pi)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(\neq\boldsymbol{0})\in\mathbb{C}^n$，该方程可解。忽略一个标量因子后，(3.14) 中的 $\boldsymbol{\psi}(\neq\boldsymbol{0})\in\mathbb{C}^n$ 可表示如下：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\psi}=r\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{w},\ \ \boldsymbol{w}\in(X_1)_{\mathbb{C}},\ \ r\geqslant 0,\\&\|\boldsymbol{\psi}\|_2^2=r^2\|\boldsymbol{\eta}\|_2^2+r\sum_{j=1}^{n}\eta_j(w_j+\overline{w}_j)+\|\boldsymbol{w}\|_2^2=\|\boldsymbol{\eta}\|_2^2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

于是，我们得到与 (3.14) 等价的问题如下。

引理 3.3 假设 $d\in(0,d_*)$。那么，$(\nu,\theta,\boldsymbol{\psi})$ 是(3.14)的一个解，其中 $\nu=(d_*-d)h>0$，$\theta\in[0,2\pi)$ 且 $\boldsymbol{\psi}$ 满足(3.15)，当且仅当$(\boldsymbol{w},r,h,\theta)$ 满足以下系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w},r,h,\theta,d)=(F_{1,1},\cdots,F_{1,n},F_2,F_3)^T=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{w}\in(X_1)_{\mathbb{C}},\ r\geqslant 0,\ h>0,\ \theta\in[0,2\pi).\end{cases}\tag{3.16}$$

这里， $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) : (X_1)_{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^4 \mapsto (X_1)_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 是连续可微的，并且

$$\begin{cases} F_{1,j}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) := d\left(d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} w_k + m_j w_j\right) - (d_* - d) F_2(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) \\ \qquad\qquad + (d_* - d)\left[m_j + d_* q_j(d, \beta^d, \boldsymbol{\xi}^d) - \mathrm{i} d_* h\right](r\eta_j + w_j) \\ \qquad\qquad + d_*(d_* - d)\beta^d\left[\eta_j + (d_* - d)\xi_j^d\right]\left(a_j^d + b_j^d e^{-\mathrm{i}\theta}\right)(r\eta_j + w_j), \\ F_2(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) := \sum_{j=1}^{n} \varsigma_j\left[m_j + d_* q_j(d, \beta^d, \boldsymbol{\xi}^d) - \mathrm{i} d_* h\right](r\eta_j + w_j) \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{n} \varsigma_j d_* \beta^d [\eta_j + (d_* - d)\xi_j^d]\left(a_j^d + b_j^d e^{-\mathrm{i}\theta}\right)(r\eta_j + w_j), \\ F_3(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) := (r^2 - 1)\|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 + r \sum_{j=1}^{n} \eta_j(w_j + \overline{w}_j) + \|\boldsymbol{w}\|_2^2, \end{cases} \tag{3.17}$$

其中， q_j（$d, \beta, \boldsymbol{\xi}$） 和 a_j^d, b_j^d分别定义于（2.14）和（3.2）中。

证明 将 (3.14) 乘以 d_*，得到

$$\begin{aligned} 0 = d\left[d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\varphi_k + m_j\varphi_j\right] + (d_* - d) m_j \varphi_j + d_*\left[f_j(u_j^d, u_j^d) - m_j\right]\varphi_j \\ + d_* u_j^d a_j^d \varphi_j + d_* u_j^d b_j^d \varphi_j e^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{i} d_* \nu \varphi_j, \qquad j = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{3.18}$$

然后将 (2.7)、(3.15) 的第一个方程和 $\nu = (d_* - d)h$ 代入 (3.18)，得到$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T = \boldsymbol{0}$，其中

$$\begin{aligned} y_j := d\left(d_* \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} w_k + m_j w_j\right) \\ + (d_* - d)\left[m_j + d_* q_j(d, \beta^d, \boldsymbol{\xi}^d) - \mathrm{i} d_* h\right](r\eta_j + w_j) \\ + d_*(d_* - d)\beta^d\left[\eta_j + (d_* - d)\xi_j^d\right](a_j^d + b_j^d e^{-\mathrm{i}\theta})(r\eta_j + w_j). \end{aligned} \tag{3.19}$$

由于

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\rho}\} \oplus (X_1)_{\mathbb{C}} \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\rho} = (1, \cdots, 1)^T,$$

我们看到

$$\boldsymbol{y} = (d_* - d) F_2(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d)\boldsymbol{\rho} + \left(F_{1,1}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d), \cdots, F_{1,n}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d)\right)^T.$$

因此，当且仅当对于所有$j = 1$、 $\cdots$、 n， $F_2(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) = 0$且$F_{1,j}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) = 0$。显然，(3.15)的第二个方程等价于 $F_3(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) = 0$。证明完毕。

□

我们首先证明，对于 $d = d_*$， $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) = \boldsymbol{0}$有唯一解。

引理 3.4 假设(**H0**)-(**H1**) 成立，且 $\tilde{a} - b > 0$，其中 $\tilde{a}$和 b定义于

(2.5)。则下列方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d_*) = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{w} \in (X_1)_{\mathbb{C}},\ r \geqslant 0,\ h \geqslant 0,\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \tag{3.20}$$

有唯一解 $(\boldsymbol{w}_{d_*}, r_{d_*}, h_{d_*}, \theta_{d_*})$，其中

$$\boldsymbol{w}_{d_*} = \boldsymbol{0},\ \ r_{d_*} = 1,\ \ h_{d_*} = \frac{\beta^{d_*}\sqrt{\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2}}{\sum_{j=1}^{n} \eta_j \varsigma_j},\ \ \theta_{d_*} = \arccos\left(-\tilde{a}/\tilde{b}\right), \tag{3.21}$$

且 β^{d_*} 定义于 (2.8)。

证明 令 $\boldsymbol{F}_1 = (F_{1,}\boldsymbol{1}, \cdots, F_{1,n})^T$，且当且仅当 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{d_*} = \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d_*) = \boldsymbol{0}$。结合 $F_3(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d_*) = 0$，可推出 $r = r_{d_*} = 1$。由 (2.7) 和 (3.2) 可知，对于 $d = d_*$，$a_j^d = a_j$ 且 $b_j^d = b_j$，其中 a_j 和 b_j 定义于 (2.6)。然后，将 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{d_*}$ 和 $r = r_{d_*}$ 代入 $F_2(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d_*) = 0$，由 (2.5) 和 (2.8) 可得

$$d_*\beta^{d_*}\left(\tilde{a} + \tilde{b}e^{-\mathrm{i}\theta}\right) - \mathrm{i}d_* h \sum_{j=1}^{n} \eta_j \varsigma_j = 0, \tag{3.22}$$

这意味着

$$\begin{cases} \tilde{a} + \tilde{b}\cos\theta = 0, \\ \beta^{d_*}\tilde{b}\sin\theta + h\sum_{j=1}^{n} \eta_j \varsigma_j = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

˜ ˜由（**H1**）（另见（2.12））可得 $\tilde{a} + b < 0$。因此，若 $\tilde{a} - b > 0$，则有

$$\tilde{b} < \min\{\tilde{a}, -\tilde{a}\} \leqslant 0 \text{ and } -1 < -\tilde{a}/\tilde{b} < 1. \tag{3.24}$$

结合（3.23），可得

$$\theta = \theta_{d_*} = \arccos\left(-\tilde{a}/\tilde{b}\right),\ \ h = h_{d_*} = \frac{\beta^{d_*}\sqrt{\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2}}{\sum_{j=1}^{n} \eta_j \varsigma_j}.$$

证明至此完成。 □

Then we solve $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) = \boldsymbol{0}$ for $0 < d_* - d \ll 1$.

˜ ˜**定理 3.5** 假设(**H0**)-(**H1**)成立，且 $\tilde{a} - b > 0$，其中 $\tilde{a}$和 b在 ˜ ˜(2.5)中定义。则存在 d_2 $(0 < d_* - d_2 \ll 1)$ 以及一个连续可微映射$d \mapsto (\boldsymbol{w}_d, r_d, h_d, \theta_d)$，其定义域为 $[\tilde{d}_2, d_*]$，值域为$(X_1)_{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^3$，使得$(\boldsymbol{w}_d, r_d, h_d, \theta_d)$是下列问题的唯一解

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d) = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{w} \in (X_1)_{\mathbb{C}},\ r \geqslant 0,\ h > 0,\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \tag{3.25}$$

˜当 $d \in [d_2, d_*)$时。

证明 令 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\chi}, \kappa, \epsilon, \vartheta) = (T_{1,}\boldsymbol{1}, \cdots, T_{1,n}, T_2, T_3)^T$: $(X_1)_{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^3 \mapsto (X_1)_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 为 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}, r, h, \theta, d)$ 关于 $(\boldsymbol{w}, r, h, \theta)$ 在 $(\boldsymbol{w}_{d_*}, r_{d_*}, h_{d_*}, \theta_{d_*}, d_*)$ 处的 Fr´echet 导数。

直接计算可得

$$
\begin{aligned}
T_{1j}(\boldsymbol{\chi},\kappa,\epsilon,\vartheta) =& d_*\left(d_*\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\chi_k + m_j\chi_j\right),\ \ j=1,\cdots,n,\\
T_2(\boldsymbol{\chi},\kappa,\epsilon,\vartheta) =& \sum_{j=1}^{n}\varsigma_j(\kappa\eta_j+\chi_j)\left\{m_j + d_*\beta^{d_*}(a_j+b_j)\eta_j + d_*\beta^{d_*}(a_j+b_je^{-\mathrm{i}\theta_{d_*}})\eta_j - \mathrm{i}d_*h_{d_*}\right\}\\
&-\mathrm{i}\epsilon d_*\sum_{j=1}^{n}\varsigma_j\eta_j - \mathrm{i}\vartheta d_*\beta^{d_*}\tilde{b}e^{-\mathrm{i}\theta_{d_*}},\\
T_3(\boldsymbol{\chi},\kappa,\epsilon,\vartheta) =& \sum_{j=1}^{n}\eta_j(\chi_j+\overline{\chi}_j) + 2\kappa\|\boldsymbol{\eta}\|_2^2,
\end{aligned}
$$

其中，我们使用 (2.5) 和 (2.14) 得到 T_2。

现在，我们证明 $\boldsymbol{T}$ 是双射，只需证明 $\boldsymbol{T}$ 是单射映射。由 (2.1)-(2.3) 可知，$d_*A+\mathrm{diag}(m_j)$ 是从 $(X_1)_{\mathbb{C}}$ 到 $(X_1)_{\mathbb{C}}$ 的双射。因此，若对所有 $j=1$、$\cdots$、n，都有 $T_{1j}(\boldsymbol{\chi},\kappa,\epsilon,\vartheta)=\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{\chi}=\mathbf{0}$。将 $\boldsymbol{\chi}=\mathbf{0}$ 代入$T_3(\boldsymbol{\chi},\kappa,\epsilon,\vartheta)=0$，可得 $\kappa=0$。再将 $\boldsymbol{\chi}=\mathbf{0}$ 和 $\kappa=0$ 代入 $\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{\chi},\kappa,\epsilon,\vartheta)=\mathbf{0}$，由 (3.21) 可知 $\epsilon=\vartheta=0$。因此，$\boldsymbol{T}$ 是单射。由隐函数定理可知，存在 $d_2\in[d_2,d_*)$ 以及一个连续可微映射 $d\mapsto(\boldsymbol{w}_d,r_d,h_d,\theta_d)$，它从 $[\tilde{d}_2,d_*]$ 映射到 $(X_1)_{\mathbb{C}}\times\mathbb{R}^3$，使得 $(\boldsymbol{w}_d,r_d,h_d,\theta_d)$ 满足 (3.25)。

接下来，我们证明方程 (3.25) 的解的唯一性。实际上，我们只需验证：若 $(\boldsymbol{w}^d,r^d,h^d,\theta^d)$ 满足 (3.25)，则当 $d\to d_*$. 时，$\left(\boldsymbol{w}^d,r^d,h^d,\theta^d\right)\to(\boldsymbol{w}_{d_*},r_{d_*},h_{d_*},\theta_{d_*})=(\mathbf{0},1,h_{d_*},\theta_{d_*})$。由引理 3.1 可知，$h^d$在 $d\in[\tilde{d}_2,d_*)$ 时有界。因此，经过选取子列，不妨设 $\lim_{d\to d_*}\theta^d=\theta^{d_*}$ 且 $\lim_{d\to d_*}h^d=h^{d_*}$。由引理 3.1 可知 $\lim_{d\to d_*}r^d=r_{d_*}=1$，$\lim_{d\to d_*}\boldsymbol{w}^d=\boldsymbol{w}_{d_*}=\mathbf{0}$. 。令 $d\to d_*$，对 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}^d,r^d,h^d,\theta^d,d)=\mathbf{0}$ 取极限，得到

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}_{d_*},r_{d_*},h^{d_*},\theta^{d_*},d_*)=\mathbf{0}.$$

结合引理 3.4 可得 $\theta^{d_*}=\theta_{d_*}$ 和 $h^{d_*}=h_{d_*}$，因此，$\left(\boldsymbol{w}^d,\ r^d,\ h^d,\ \theta^d\right)\to(\boldsymbol{w}_{d_*},\ r_{d_*},\ h_{d_*},\ \theta_{d_*})$ 当 $d\to d_*$。证明至此完成。 □

由定理 3.5 可得以下结果。

定理 3.6 假设(**H0**)-(**H1**) 成立，且 $\tilde{a}-b>0$，其中 $\tilde{a}$ 和 b 定义于(2.5)中。那么对于每个 $d\in[d_2,d_*)$，其中 $0<d_*-d_2\ll1$，以下方程

$$\begin{cases}\Delta(d,\mathrm{i}\nu,\tau)\boldsymbol{\psi}=\mathbf{0}\\ \nu>0,\ \tau\geqslant0,\ \boldsymbol{\psi}(\neq\mathbf{0})\in\mathbb{C}^n\end{cases}$$

有一个解$(\nu,\tau,\boldsymbol{\psi})$，当且仅当

$$\nu=\nu_d=(d_*-d)h_d,\ \boldsymbol{\psi}=c\boldsymbol{\psi}_d,\ \tau=\tau_{d,l}=\frac{\theta_d+2l\pi}{\nu_d},\ \ l=0,1,2,\cdots, \tag{3.26}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}_d=r_d\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{w}_d$，$c$是一个非零常数，$\boldsymbol{w}_d,r_d,\theta_d,h_d$在定理 *3.5* 中定义。

为便于后续应用，我们考虑 (3.3) 的伴随特征值问题。对于 $\boldsymbol{\psi},\ \boldsymbol{\psi}\in\mathbb{C}^n$，我们有

$$\langle\widetilde{\boldsymbol{\psi}},\Delta(d,\mathrm{i}\nu_d,\tau_{d,l})\boldsymbol{\psi}\rangle=\langle\widetilde{\Delta}(d,\mathrm{i}\nu_d,\tau_{d,l})\widetilde{\boldsymbol{\psi}},\boldsymbol{\psi}\rangle,$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(d,\mathrm{i}\nu_d,\tau_{d,l})\widetilde{\boldsymbol{\psi}}=&dA^T\widetilde{\boldsymbol{\psi}}+\operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d,u_j^d)\right)\widetilde{\boldsymbol{\psi}}+\operatorname{diag}\left(u_j^da_j^d\right)\widetilde{\boldsymbol{\psi}}\\&+\operatorname{diag}\left(u_j^db_j^d\right)\widetilde{\boldsymbol{\psi}}e^{\mathrm{i}\nu_d\tau_{d,l}}+\mathrm{i}\nu_d\widetilde{\boldsymbol{\psi}}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

这里，$\Delta(d,\ \mathrm{i}\nu_d,\ \tau_{d,\ l})$ 是 $\Delta(d,\ \mathrm{i}\nu_d,\ \tau_{d,\ l})$ 的共轭转置矩阵。显然，0 也是 $\Delta(d,\ \mathrm{i}\nu_d,\ \tau_{d,\ l})$ 的特征值。

命题 3.7 设 $\boldsymbol{\psi}_d$ 是 $\Delta\left(d,\mathrm{i}\nu_d,\tau_{d,l}\right)$ 对应于特征值 0 的特征向量。则忽略一个标量因子后，$\boldsymbol{\psi}_d$ 可表示如下：

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d=\widetilde{r}_d\boldsymbol{\varsigma}+\widetilde{\boldsymbol{w}}_d,\ \widetilde{\boldsymbol{w}}_d\in\left(\widetilde{X}_1\right)_{\mathbb{C}},\ \widetilde{r}_d\geqslant 0,\\ \|\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d\|_2^2=\|\boldsymbol{\varsigma}\|_2^2,\end{cases}\tag{3.28}$$

并满足

$$\lim_{d\to d_*}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d=\boldsymbol{\varsigma},\tag{3.29}$$

其中 $\boldsymbol{\varsigma}$ 定义见(2.1)。

证明 由 (3.28) 可知 $\boldsymbol{\psi}_d$ 有界。因此，不妨取一个子列，使得 $\lim_{d\to d_*}\boldsymbol{\psi}_d=\boldsymbol{\psi}^*$。将 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}_d$ 代入 (3.27)，并令 $d\to d_*$，得到

$$\left(d_*A^T+\operatorname{diag}(m_j)\right)\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^*=\mathbf{0},\tag{3.30}$$

注意到 $(d_*A^T+\operatorname{diag}(m_j))\boldsymbol{\varsigma}=\mathbf{0}$，由 (3.28) 和 (3.30) 可知 $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^*=\boldsymbol{\varsigma}$。证明完毕。

□

为简单起见，在以下定理 3.8–3.10 中，我们始终假设 $d\in[d_2,d_*)$，其中 $0<d_*-d_2\ll 1$。实际上，由于还要使用进一步的扰动论证，d_2 可以选得比定理 3.5 中的值更大。接下来，我们证明 $\mathrm{i}\nu_d$（由定理 3.6 得到）是单根，且横截条件成立。

定理 3.8 假设$(\mathbf{H0})$-$(\mathbf{H1})$ 成立，$\tilde{a}-b>0$，且 $d\in[d_2,d_*)$，其中 $0<d_*-d_2\ll 1$。那么 $\mu=\mathrm{i}\nu_d$ 是 $A_{\tau_{d,l}}(d)$ 的单特征值，其中 $l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。

证明 由定理 3.6 可知，$\mathscr{N}\left[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d\right]=\operatorname{span}\left[e^{\mathrm{i}\nu_d\theta}\boldsymbol{\psi}_d\right]$，其中$\theta\in[-\tau_{d,l},0]$，且 $\boldsymbol{\psi}_d$ 在定理 3.6 中定义。接下来，我们证明

$$\mathscr{N}\left[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d\right]^2=\mathscr{N}\left[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d\right].$$

如果 $\boldsymbol{\phi}\in\mathscr{N}\left[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d\right]^2$，那么

$$\left[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d\right]\boldsymbol{\phi}\in\mathscr{N}\left[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d\right]=\operatorname{span}\left[e^{\mathrm{i}\nu_d\theta}\boldsymbol{\psi}_d\right],$$

因此，存在一个常数 γ，使得

$$\left[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d\right]\boldsymbol{\phi}=\gamma e^{\mathrm{i}\nu_d\theta}\boldsymbol{\psi}_d,$$

由此得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}}(\theta)=&\mathrm{i}\nu_d\boldsymbol{\phi}(\theta)+\gamma e^{\mathrm{i}\nu_d\theta}\boldsymbol{\psi}_d,\quad \theta\in[-\tau_{d,l},0],\\ \dot{\boldsymbol{\phi}}(0)=&dA\boldsymbol{\phi}(0)+\operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d,u_j^d)\right)\boldsymbol{\phi}(0)+\operatorname{diag}\left(u_j^da_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(0)\\ &+\operatorname{diag}\left(u_j^db_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(-\tau_{d,l}).\end{aligned}\tag{3.31}$$

由方程 (3.31) 的第一个方程可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(\theta)&=\boldsymbol{\phi}(0)e^{\mathrm{i}\nu_d\theta}+\gamma\theta e^{\mathrm{i}\nu_d\theta}\boldsymbol{\psi}_d,\\ \dot{\boldsymbol{\phi}}(0)&=\mathrm{i}\nu_d\boldsymbol{\phi}(0)+\gamma\boldsymbol{\psi}_d.\end{aligned}\tag{3.32}$$

结合方程 (3.31) 的第二个方程，可得

$$\begin{aligned}\Delta\left(d,\mathrm{i}\nu_d,\tau_{d,l}\right)\boldsymbol{\phi}(0)=&dA\boldsymbol{\phi}(0)+\operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d,u_j^d)\right)\boldsymbol{\phi}(0)+\operatorname{diag}\left(u_j^da_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(0)\\ &+e^{-\mathrm{i}\theta_d}\operatorname{diag}\left(u_j^db_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(0)-\mathrm{i}\nu_d\boldsymbol{\phi}(0)\\ =&\gamma\left(\boldsymbol{\psi}_d+\tau_{d,l}e^{-\mathrm{i}\theta_d}\operatorname{diag}(u_j^db_j^d)\boldsymbol{\psi}_d\right).\end{aligned}\tag{3.33}$$

~ ~将 (3.33) 两边左乘 ($\overline{\psi_{d,\ 1}}$，$\cdots$，$\overline{\ \psi_{d,\ n}}$)，得到

$$\begin{aligned}0&=\left\langle\widetilde{\Delta}\left(d,\mathrm{i}\nu_d,\tau_{d,l}\right)\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d,\boldsymbol{\phi}(0)\right\rangle=\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d,\Delta\left(d,\mathrm{i}\nu_d,\tau_{d,l}\right)\boldsymbol{\phi}(0)\right\rangle\\ &=\gamma\left(\sum_{j=1}^n\overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}+\tau_{d,l}e^{-\mathrm{i}\theta_d}\sum_{j=1}^n u_j^db_j^d\overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}\right).\end{aligned}$$

定义

$$S_l(d):=\sum_{j=1}^n\overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}+\tau_{d,l}e^{-\mathrm{i}\theta_d}\sum_{j=1}^n u_j^db_j^d\overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}.\tag{3.34}$$

~根据定理 3 5, 3 6 3 29 $\boldsymbol{\psi}_d\to\boldsymbol{\eta}$ $\boldsymbol{\psi}_d\to\boldsymbol{\varsigma}$ $\theta_d\to\theta_{d_*}$ d_*-d $\tau_{d\,l}\to$ . .和 $\theta_{d_*}+2l\pi$ h_{d_*} $b_j^d\to b_j$ $j=1\cdots n$ $d\to d_*$ θ_{d_*} h_{d_*} 3 21 (.)，我们有，，，（）. 并且对于,,当时，其中和在（.）中定义。由此可从（2.7）和（3.21）得出

$$\lim_{d\to d_*}S_l(d)=\sum_{j=1}^n\varsigma_j\eta_j\left[1+(\theta_{d_*}+2l\pi)\left(\frac{-\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{b}^2-\tilde{a}^2}}+\mathrm{i}\right)\right]\neq 0,$$

~ ~这意味着，对于 $d\in[d_2,d_*)$，其中 $0<d_*-d_2\ll 1$。

因此，对于任意$l=0,1,2,\cdots$,

$$\mathscr{N}[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d]^j=\mathscr{N}[A_{\tau_{d,l}}(d)-\mathrm{i}\nu_d],\ \ j=2,3,\cdots,$$

因此，$\mathrm{i}\nu_d$是$A_{\tau_{d,\ l}}(d)$ 的单特征值，其中 $l=0,1,2,\cdots$。 □

根据定理 3.8，我们得知 $\mu=\mathrm{i}\nu_d$ 是$A_{\tau_{d,l}}(d)$的一个单特征值。由此，根据隐函数定理，对于每个 $l=0,1,\cdots$，存在一个邻域$O_l\times D_l\times H_l$，其包含点$(\tau_{d,l},\mathrm{i}\nu_d,\boldsymbol{\psi}_d)$，以及一个连续可微函数$(\mu(\tau)\ \ \boldsymbol{\psi}(\tau))$:

$O_{q,l} \to D_{q,l} \times H_{q,l}$，使得 $\mu(\tau_{d,l}) = \mathrm{i}\nu_d$，$\boldsymbol{\psi}(\tau_{d,l}) = \boldsymbol{\psi}_d$，且对于每个 $\tau \in O_l$，$A_\tau(d)$在 D_l中的唯一特征值为 $\mu(\tau)$,并且

$$\begin{aligned}\Delta(d,\mu(\tau),\tau)\boldsymbol{\psi}(\tau) =& dA\boldsymbol{\psi}(\tau) + \operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d,u_j^d)\right)\boldsymbol{\psi}(\tau) + \operatorname{diag}\left(u_j^d a_j^d\right)\boldsymbol{\psi}(\tau)\\ &+ e^{-\mu(\tau)\tau}\operatorname{diag}\left(u_j^d b_j^d\right)\boldsymbol{\psi}(\tau) - \mu(\tau)\boldsymbol{\psi}(\tau) = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

接下来，我们证明以下横截条件成立。

定理 3.9 假设(**H0**)-(**H1**) 成立，$\tilde{a} - b > 0$，并且 $d \in [d_2, d_*)$，其中 $0 < d_* - d_2 \ll 1$。那么

$$\frac{d\mathcal{R}e\left[\mu\left(\tau_{d,l}\right)\right]}{d\tau} > 0, \quad l = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明 将式 (3.35) 对 τ 在 $\tau = \tau_{d,l}$ 处求导，得到

$$\begin{aligned}-\frac{d\mu\left(\tau_{d,l}\right)}{d\tau}\left(\tau_{d,l}\operatorname{diag}(u_j^d b_j^d)\boldsymbol{\psi}_d e^{-\mathrm{i}\theta_d} + \boldsymbol{\psi}_d\right) + \Delta\left(d, \mathrm{i}\nu_d, \tau_{d,l}\right)\frac{\boldsymbol{\psi}\left(\tau_{d,l}\right)}{d\tau}\\ - \mathrm{i}\nu_d \operatorname{diag}(u_j^d b_j^d)\boldsymbol{\psi}_d e^{-\mathrm{i}\theta_d} = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

显然,

$$\left\langle \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d, \Delta\left(d, \mathrm{i}\nu_d, \tau_{d,l}\right)\frac{d\boldsymbol{\psi}\left(\tau_{d,l}\right)}{d\tau}\right\rangle = \left\langle \widetilde{\Delta}\left(d, \mathrm{i}\nu_d, \tau_{d,l}\right)\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d, \frac{d\boldsymbol{\psi}\left(\tau_{d,l}\right)}{d\tau}\right\rangle = 0.$$

接下来，将式 (3.36) 两边左乘 $(\overline{\psi}_{d,1}, \cdots, \overline{\psi}_{d,n})$，得到

$$\begin{aligned}\frac{d\mu\left(\tau_{d,l}\right)}{d\tau} =& \frac{-\mathrm{i}\nu_d \sum_{j=1}^n u_j^d b_j^d \overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}e^{-\mathrm{i}\theta_d}}{\sum_{j=1}^n \overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j} + \tau_{d,l}\sum_{j=1}^n u_j^d b_j^d \overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}e^{-\mathrm{i}\theta_d}}\\ =& \frac{1}{|S_l(d)|^2}\left[-\mathrm{i}\nu_d e^{-\mathrm{i}\theta_d}\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{\psi}_{d,j}\overline{\psi}_{d,j}\right)\sum_{j=1}^n u_j^d b_j^d \overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}\right.\\ &\left. -\mathrm{i}\nu_d\tau_{d,l}\left(\sum_{j=1}^n u_j^d b_j^d \overline{\widetilde{\psi}}_{d,j}\psi_{d,j}\right)\left(\sum_{j=1}^n u_j^d b_j^d \widetilde{\psi}_{d,j}\overline{\psi}_{d,j}\right)\right].\end{aligned}$$

由定理 3.5、3.6 和 (3.29) 可知，对于 $j = 1, \cdots, n$，当 $d \to d_*$ 时，$\boldsymbol{\psi}_d \to \boldsymbol{\eta}$、$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_d \to \boldsymbol{\varsigma}$、$\theta_d \to \theta_{d_*}$、$\dfrac{\nu_d}{d_* - d} = h_d \to h_{d_*}$ 和 $b_j^d \to b_j$，其中 θ_{d_*} 和 h_{d_*} 由 (3.21) 定义。于是我们得到

$$\lim_{d\to d_*}\frac{1}{(d_* - d)^2}\frac{d\mathcal{R}e\left[\mu\left(\tau_{d,l}\right)\right]}{d\tau} = \frac{\left(\beta^{d_*}\right)^2\left(\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2\right)}{\lim_{d\to d_*}|S_l(d)|^2} > 0,$$

最后一步用到了 (3.24)。至此，证明完成。 □

由定理 3.6、3.8 和 3.9，我们得到本小节的主要结果。

定理 3.10 假设(**H0**)-(**H1**) 成立，且 $d \in [d_2, d_*)$，其中 $0 < d_* - d_2 \ll$

1. 设 $\boldsymbol{u}^d$ 为引理 *2.2* 中得到的模型(1.2) 的正平衡点。则以下陈述成立。

(i) 若 $\tilde{a}-\tilde{b}<0$，其中 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 在(2.5)中定义，则当 $\tau\in[0,\infty)$时， $\boldsymbol{u}^d$ 局部渐近稳定。(ii) 若 $\tilde{a}-\tilde{b}>0$，则存在 $\tau_{d,0}>0$，使得当 $\tau\in[0,\tau_{d,0})$时，(1.2) 的 $\boldsymbol{u}^d$ 局部渐近稳定；而当 $\tau\in(\tau_{d,0},\infty)$ 时则不稳定。此外，当 $\tau=\tau_{d,0}$时，系统 (1.2) 在 $\boldsymbol{u}^d$ 处发生 *Hopf*分岔。

3.2 $0<d\ll 1$的情形

本节将讨论 $0<d\ll 1$ 的情形。首先，我们给出 (3.3) 的解的先验估计。

引理 3.11 假设 $\left(\mu^d,\tau^d,\boldsymbol{\varphi}^d\right)$是(3.3)的解，其中 $\mathcal{R}e\mu^d,\tau^d\geqslant 0$和 $\boldsymbol{\varphi}^d=(\varphi_1^d,\cdots,\varphi_n^d)^T(\neq\mathbf{0})\in\mathbb{C}^n$。那么对于任意 $\tilde{d}>0$, $\left|\mu^d\right|$ 在 $d\in(0,\tilde{d}]$上有界。

证明 不失一般性，假设 $\|\boldsymbol{\varphi}^d\|_2^2=1$。将 $(\mu^d,\tau^d,\boldsymbol{\varphi}^d)$ 代入 (3.3)，并将 (3.3) 两边左乘 $\left(\varphi_1^d,\cdots,\varphi_n^d\right)$，可得

$$\begin{aligned}\left(\overline{\varphi_1^d},\cdots,\overline{\varphi_n^d}\right)\big[&dA\boldsymbol{\varphi}^d+\operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d,u_j^d)\right)\boldsymbol{\varphi}^d+\operatorname{diag}\left(u_j^da_j^d\right)\boldsymbol{\varphi}^d\\&+e^{-\mu^d\tau^d}\operatorname{diag}(u_j^db_j^d)\boldsymbol{\varphi}^d-\mu^d\boldsymbol{\varphi}^d\big]=0.\end{aligned}$$

˜于是，对于 $d\in(0,d]$，有

$$\left|\mu^d\right|\leqslant\max_{d\in[0,\tilde{d}],1\leqslant j\leqslant n}|f_j(u_j^d,u_j^d)|+\max_{d\in[0,\tilde{d}],1\leqslant j\leqslant n}|u_j^da_j^d|+\max_{d\in[0,\tilde{d}],1\leqslant j\leqslant n}|u_j^db_j^d|+\tilde{d}n\max_{1\leqslant j,k\leqslant n}|\alpha_{jk}|,$$

因此，对于 $d\in(0,\tilde{d}]$， $\left|\mu^d\right|$ 有界。 □

利用与定理 3.2 的证明类似的论证，可以得到以下结果。为简洁起见，此处省略证明。

定理 3.12 假设(**H0**)-(**H1**) 成立，且对于所有 $j=1,\cdots,n$， $a_j^0-b_j^0<0$，其中 a_j^0 和 b_j^0 定义见(2.10)。那么存在ˆ $d_1\in(0,d_*]$，使得

$$\sigma\left(A_\tau(d)\right)\subset\{x+\mathrm{i}y:x,y\in\mathbb{R},x<0\}\ \ for\ \ d\in(0,\hat{d}_1]\ \ and\ \ \tau\geqslant 0.$$

由定理 3.12 可知，若对于所有 $j=1,\cdots,n$， $a_j^0-b_j^0<0$，则对于 $0<d\ll 1$ 不会发生 Hopf 分岔。于是我们定义

$$\mathcal{M}=\left\{j\in 1,\cdots,n:a_j^0-b_j^0>0\right\},\tag{3.37}$$

并证明当 $\mathcal{M}\neq\emptyset$ 时可能发生 Hopf 分岔。为简便起见，我们作出如下假设:

(H2) $a_j^0-b_j^0>0$ 对于 $j=1,\ \cdots,\ p$，以及 $a_j^0-b_j^0<0$ 对于 $j=p+1,\ \cdots,\ n$，其中 $1\leqslant p\leqslant n$。

事实上，如果各斑块彼此独立（$d=0$），则有

$$u_j' = u_j f_j\left(u_j, u_j(t-\tau)\right),\ t>0,\ \ j=1,\cdots,n. \tag{3.38}$$

直接计算可得以下结果。

引理 3.13 假设(**H1**)-(**H2**) 成立。那么对于每个 $1 \leqslant j \leqslant n$，模型(3.38)都存在唯一正平衡点 u_j^0，其中 u_j^0 （由引理 *2.3* 定义）是 $f_j(x,x) = 0$的唯一正解。此外，以下结论成立。

(i) 对于每个 $1 \leqslant j \leqslant p$，当 $\tau \in [0,\tau_j^0)$时，模型(3.38) 的唯一正平衡点 u_j^0 局部渐近稳定；而当 $\tau \in (\tau_j^0,\infty)$时，该平衡点不稳定。此外，当 $\tau=\tau_j^0$时，模型(3.38) 发生 *Hopf*分岔，其中

$$\tau_j^0 = \frac{\theta_j^0}{\nu_j^0} \ \ with\ \ \theta_j^0 = \arccos(-a_j^0/b_j^0) \in (0,\pi) \ \ and\ \ \nu_j^0 = u_j^0\sqrt{(b_j^0)^2-(a_j^0)^2} > 0. \tag{3.39}$$

(ii) 对于每个 $p+1 \leqslant j \leqslant n$，当 $\tau \geqslant 0$时，模型(3.38) 的唯一正平衡点 u_j^0局部渐近稳定。

现在，我们考虑 $d=0$ 时 **(3.14)** 的解。

引理 3.14 假设(**H1**)-(**H2**) 成立， $d=0$，并且

$$\left(\nu_j^0,\theta_j^0\right) \neq \left(\nu_k^0,\theta_k^0\right) \ \ for\ any\ \ j\neq k \ \ and\ \ 1\leqslant j,k\leqslant p, \tag{3.40}$$

其中， θ_j^0和 ν_j^0在 $j=1$、$\cdots$、p 时由(3.39) 定义。于是

$$\left\{(\nu,\theta):\nu\geqslant 0,\ \theta\in[0,2\pi],\ \mathcal{S}^0(\nu,\theta)\neq\{\mathbf{0}\}\right\} = \left\{(\nu_q^0,\theta_q^0)\right\}_{q=1}^{p}, \tag{3.41}$$

其中，$(\nu_q^0$、$\theta_q^0)\in(0$、$\infty)\times(0$、$\pi)$，并且

$$\mathcal{S}^0(\nu,\theta) := \{\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{H}(0,\nu,\theta,\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}\}$$

其中 $\boldsymbol{H}(d$、ν、θ、$\boldsymbol{\varphi})$ 由(3.14)定义。此外，对于任意 q =1、$\cdots$、p，记 $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}^0($ ν_q^0、$\theta_q^0)$，则有 $\mathcal{S}_q = \{c\boldsymbol{\varphi}_q^0 :\ \ c\in\mathbb{C}\}$，其中 $\boldsymbol{\varphi}_q^0 = (\varphi_{q,\ 1}^0$、$\cdots$、$\varphi_{q,\ n}^0)$，$\varphi_{q,\ q}^0 = 1$ 和$\varphi_{q,\ j}^0 = 0$ 适用于 $j\neq q$。

证明 由引理 2.3可知， u_j^0满足 $f_j(u_j^0,\ u_j^0) = 0$，其中 $j = 1,\ \cdots,\ n$。因此，若存在 $\boldsymbol{\varphi}\neq\mathbf{0}$使得 $\boldsymbol{H}(0,\ \nu,\ \theta,\ \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(u_j^0a_j^0 + u_j^0b_j^0e^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{i}\nu) = 0,$$

因此，对于 $j=1,\ \cdots,\ n$，

$$\begin{cases} a_j^0 + b_j^0\cos\theta = 0, \\ u_j^0b_j^0\sin\theta + \nu = 0. \end{cases}$$

由（**H1**）和（**H2**）可得，对于 $j=1,\cdots,n$，有 $a_j^0+b_j^0<0$；并且对于 $j=1,\cdots,p$，有 $a_j^0-b_j^0>0$。于是，当 $j=1,\cdots,p$ 时，

$$b_j^0 < \min\left\{a_j^0,-a_j^0\right\} \leqslant 0 \text{ and } -1 < -a_j^0/b_j^0 < 1, \tag{3.42}$$

由此得到 $\nu=\nu_q^0, \theta=\theta_q^0$，对于 $q=1,\cdots,p$，其中 ν_q^0 和 θ_q^0 在（3.39）中定义。由于对于任意 $j\neq k$ 和 $1\leqslant j,k\leqslant p$，都有 $\left(\nu_j^0,\theta_j^0\right)\neq\left(\nu_k^0,\theta_k^0\right)$，因此可得 $\mathcal{S}_q^0=\{c\boldsymbol{\varphi}_q^0\colon\ c\in\mathbb{C}\}$。证明至此完成。 □

注 3.15 我们指出，如果

$$\frac{\theta_j^0}{\nu_j^0}\neq\frac{\theta_k^0}{\nu_k^0}\ \ for\ any\ \ j\neq k\ \ and\ \ 1\leqslant j,k\leqslant p, \tag{3.43}$$

那么引理 *3.14* 中的(3.40) 成立。由引理 *3.13* 可知，(3.43) 意味着模型(3.38) 对于 $1\leqslant j\leqslant p$ 的第一个 *Hopf* 分岔值并不相同。也就是说，每个孤立斑块 j 对于 $1\leqslant j\leqslant p$ 的第一个 *Hopf* 分岔值并不相同。

接下来，我们考察 $0<d\ll 1$时 **(3.14)** 的解。

引理 3.16 假设(**H0**)-(**H2**) 和(3.40) 成立，且 $d\in(0,d)$ 满足 $0<d\ll 1$。则存在 p 对$(\nu_q^d,\theta_q^d)\in(0,\infty)\times(0,\pi)$，使得

$$\left\{(\nu,\theta):\nu\geqslant 0,\ \theta\in[0,2\pi),\ \mathcal{S}^d(\nu,\theta)\neq\{\mathbf{0}\}\right\}=\left\{(\nu_q^d,\theta_q^d)\right\}_{q=1}^p, \tag{3.44}$$

其中

$$\mathcal{S}^d(\nu,\theta):=\{\boldsymbol{\varphi}:\boldsymbol{H}(d,\nu,\theta,\boldsymbol{\varphi})=\mathbf{0}\}$$

其中 $\boldsymbol{H}(d,\nu,\theta,\boldsymbol{\varphi})$ 由(3.14)定义。此外，记 $\mathcal{S}_q^d=S^d(\nu_q^d,\theta_q^d)$，对任意 $q=1,\cdots,p$，有 $\mathcal{S}_q^d=\{c\boldsymbol{\varphi}_q^d\colon\ c\in\mathbb{C}\}$，并且

$$\lim_{d\to 0}\nu_q^d=\nu_q^0=u_q^0\sqrt{(b_q^0)^2-(a_q^0)^2},\ \ \lim_{d\to 0}\theta_q^d=\theta_q^0=\arccos(-a_q^0/b_q^0)\ \ and\ \ \lim_{d\to 0}\boldsymbol{\varphi}_q^d=\boldsymbol{\varphi}_q^0,$$

其中 ν_q^0、θ_q^0 和 $\boldsymbol{\varphi}_q^0$ 由引理 *3.14* 定义。

证明 首先，我们证明存在性。这里，我们只证明 (ν_1^d,θ_1^d) 的存在性，其余情况可类似得到。令

$$Y_1:=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{C}^n:x_1=0\},$$

因此 $\mathbb{C}^n=$张成$\{\boldsymbol{\varphi}_1^0\}\oplus Y_1$。令

$$\boldsymbol{H}_1(d,\nu,\theta,\boldsymbol{\xi}_1):=\boldsymbol{H}(d,\nu,\theta,\boldsymbol{\varphi}_1^0+\boldsymbol{\xi}_1):\mathbb{R}^3\times Y_1\to\mathbb{C}^n.$$

显然，我们有 $\boldsymbol{H}_1(\mathbf{0},\nu_1^0,\theta_1^0,\mathbf{0})=\mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{H}_1$ 关于 $(\nu,\theta,\boldsymbol{\xi}_1)$ 在 $(\mathbf{0},\nu_1^0,\theta_1^0,\mathbf{0})$ 处的弗雷歇导数为

$$D_{(\nu,\theta,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{H}_1(0,\nu_1^0,\theta_1^0,\mathbf{0})[\vartheta,\epsilon,\boldsymbol{\chi}]=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta_1^0}b_1^0u_1^0\epsilon-\mathrm{i}\vartheta\\ \left(a_2^0u_2^0+b_2^0u_2^0e^{-\mathrm{i}\theta_1^0}-\mathrm{i}\nu_1^0\right)\chi_2\\ \vdots\\ \left(a_n^0u_n^0+b_n^0u_n^0e^{-\mathrm{i}\theta_1^0}-\mathrm{i}\nu_1^0\right)\chi_n\end{pmatrix},$$

其中 $\vartheta,\epsilon\in\mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{\chi}=(\chi_1,\cdots,\chi_n)\in Y_1$。由 **(3.40)** 可知，$D_{(\nu,\theta,\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{H}_1(\mathbf{0},\nu_1^0,\theta_1^0,\mathbf{0})$ 是一个双射。于是根据隐函数定理，存在一个常数 $\delta>0$，以及一个

邻域 N_1，它是 $(\nu_1^0, \theta_1^0, \mathbf{0})$ 的邻域，并且存在一个连续可微函数

$$(\nu_1^d, \theta_1^d, \boldsymbol{\xi}_1^d) : [0, \delta) \mapsto N_1$$

使得对于任意 $d \in [0, \delta)$，$\boldsymbol{H}_1(d, \nu, \theta, \boldsymbol{\xi}_1)$ 在邻域 N_1 中的唯一解为 $(\nu_1^d, \theta_1^d, \boldsymbol{\xi}_1^d)$。令 $\boldsymbol{\varphi}_1^d = \boldsymbol{\varphi}_1^0 + \boldsymbol{\xi}_1^d$，可知

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{\varphi}_1^d) \subset \mathcal{S}_1^d \text{ for any } d \in [0, \delta). \tag{3.45}$$

由于 $\mathcal{S}_1^d$ 的维数是上半连续的，因此存在 $\delta_1 < \delta$，使得对于任意 $d \in [0, \delta_1)$，$\dim \mathcal{S}_1^d \leqslant 1$。由此结合 (3.45) 可得 $\mathcal{S}_1^d = \{c\boldsymbol{\varphi}_1^d \colon c \in \mathbb{C}\}$。根据 (3.39)，可知 $(\nu_q^0, \theta_q^0) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$，从而对于 $0 < d \ll 1$，有 $(\nu_q^d, \theta_q^d) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$。这就完成了存在性部分。

现在我们证明 (3.44) 成立。若不成立，则存在序列 $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ and $\left\{\left(\nu^{d_j}, \theta^{d_j}, \boldsymbol{\varphi}^{d_j}\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{j\to\infty} d_j = 0$，且对每个 $j = 1, 2, \cdots, \left(\nu^{d_j}, \theta^{d_j}\right) \neq (\nu_q^{d_j}, \theta_q^{d_j})(q = 1, \cdots, p)$，$\left\|\boldsymbol{\varphi}^{d_j}\right\|_2 = 1$，$\nu^{d_j} > 0$，$\theta^{d_j} \in [0, 2\pi)$，并且

$$\boldsymbol{H}\left(d_j, \nu^{d_j}, \theta^{d_j}, \boldsymbol{\varphi}^{d_j}\right) = \mathbf{0}.$$

由引理 3.11 可知，$\{\nu^{d_j}\}$ 有界。按照引理 [7, 引理 3.4], 的证明中的类似论证，我们证明存在 $1 \leqslant q_0 \leqslant p$，使得当 j 充分大时，$\left(\nu^{d_j}, \theta^{d_j}\right) = (\nu_{q_0}^{d_j}, \theta_{q_0}^{d_j})$。这就产生了矛盾。因此，(3.44) 成立。 □

由引理 3.16，我们得到以下结果。

定理 3.17 假设(**H0**)-(**H2**) 和(3.40) 成立，且 $d \in (0, d)$，其中 $0 < d \ll 1$。那么$(\nu, \tau, \boldsymbol{\varphi})$ 是方程的解

$$\begin{cases} \Delta(d, \mathrm{i}\nu, \tau)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \\ \nu > 0,\ \tau \geqslant 0,\ \boldsymbol{\varphi}(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{C}^n, \end{cases}$$

当且仅当存在 $1 \leqslant q \leqslant p$ 使得

$$\nu = \nu_q^d,\ \boldsymbol{\varphi} = c\boldsymbol{\varphi}_q^d,\ \tau = \tau_{q,l}^d = \frac{\theta_q^d + 2l\pi}{\nu_q^d},\ l = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.46}$$

其中 ν_q^d、θ_q^d 和 $\boldsymbol{\varphi}_q^d$ 在引理 *3.16* 中定义。

接下来证明这个纯虚特征值是单特征值。

定理 3.18 假设(**H0**)-(**H2**) 和(3.40) 成立。那么，对于每个 $d \in (0, d)$，其中 $0 < \tilde{d} \ll 1$，$\mu = \mathrm{i}\nu_q^d$ 是 $A_{\tau_{q,l}^d}(d)$ 的单特征值，适用于 $q = 1, \cdots, p$ 和 $l = 0, 1, 2, \cdots$.

证明 由定理 3.17 可知

$$\mathscr{N}\left[A_{\tau_{q,l}^d}(d) - \mathrm{i}\nu_q^d\right] = \operatorname{span}\left[e^{\mathrm{i}\nu_q^d\theta}\boldsymbol{\varphi}_q^d\right],$$

其中 $\theta \in \left[-\tau_{q,l}^d, 0\right]$， $\boldsymbol{\varphi}_q^d$ 在定理 3.17 中定义。接下来，我们将证明

$$\mathscr{N}\left[A_{\tau_{q,l}^d}(d) - \mathrm{i}\nu_q^d\right]^2 = \mathscr{N}\left[A_{\tau_{q,l}^d}(d) - \mathrm{i}\nu_q^d\right].$$

若 $\boldsymbol{\phi} \in \mathscr{N}\left[A_{\tau_{q,l}^d}(d) - \mathrm{i}\nu_q^d\right]^2$，则

$$\left[A_{\tau_{q,l}^d}(d) - \mathrm{i}\nu_q^d\right]\boldsymbol{\phi} \in \mathscr{N}\left[A_{\tau_{q,l}^d}(d) - \mathrm{i}\nu_q^d\right] = \mathrm{span}\left[e^{\mathrm{i}\nu_q^d\theta}\boldsymbol{\varphi}_q^d\right],$$

因此，存在一个常数 γ 使得

$$\left[A_{\tau_{q,l}^d}(d) - \mathrm{i}\nu_q^d\right]\boldsymbol{\phi} = \gamma e^{\mathrm{i}\nu_q^d\theta}\boldsymbol{\varphi}_q^d,$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\phi}}(\theta) =& \mathrm{i}\nu_q^d\boldsymbol{\phi}(\theta) + \gamma e^{\mathrm{i}\nu_q^d\theta}\boldsymbol{\varphi}_q^d, \quad \theta \in \left[-\tau_{q,l}^d, 0\right], \\
\dot{\boldsymbol{\phi}}(0) =& dA\boldsymbol{\phi}(0) + \mathrm{diag}\left(f_j(u_j^d, u_j^d)\right)\boldsymbol{\phi}(0) + \mathrm{diag}\left(u_j^d a_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(0) \\
&+ \mathrm{diag}\left(u_j^d b_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(-\tau_{q,l}^d).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

由公式 (3.47) 的第一个方程可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}(\theta) &= \boldsymbol{\phi}(0)e^{\mathrm{i}\nu_q^d\theta} + \gamma\theta e^{\mathrm{i}\nu_q^d\theta}\boldsymbol{\varphi}_q^d, \\
\dot{\boldsymbol{\phi}}(0) &= \mathrm{i}\nu_q^d\boldsymbol{\phi}(0) + \gamma\boldsymbol{\varphi}_q^d.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

于是由公式 (3.47) 和 (3.48) 可得

$$\begin{aligned}
\Delta\left(d, \mathrm{i}\nu_q^d, \tau_{q,l}^d\right)\boldsymbol{\phi}(0) =& dA\boldsymbol{\phi}(0) + \mathrm{diag}\left(f_j(u_j^d, u_j^d)\right)\boldsymbol{\phi}(0) + \mathrm{diag}\left(u_j^d a_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(0) \\
&+ e^{-\mathrm{i}\theta_q^d}\,\mathrm{diag}\left(u_j^d b_j^d\right)\boldsymbol{\phi}(0) - \mathrm{i}\nu_q^d\boldsymbol{\phi}(0) \\
=& \gamma\left(\boldsymbol{\varphi}_q^d + \tau_{q,l}^d e^{-\mathrm{i}\theta_q^d}\,\mathrm{diag}(u_j^d b_j^d)\boldsymbol{\varphi}_q^d\right).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

令 $\widetilde{\Delta}\left(d, \mathrm{i}\nu_q^d, \tau_{q,l}^d\right)$ 为 $\Delta\left(d, \mathrm{i}\nu_q^d, \tau_{q,l}^d\right)$ 的共轭转置矩阵，并令 $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_q^d = (\widetilde{\varphi}_{q,1}^d, \cdots, \widetilde{\varphi}_{q,n}^d)^T$ 为 $\widetilde{\Delta}\left(d, \mathrm{i}\nu_q^d, \tau_{q,l}^d\right)$ 对应于特征值 0 的特征向量。于是，运用与命题 3.7 的证明中类似的论证可知，忽略一个标量因子后，$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_q^d$ 满足

$$\lim_{d\to 0}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_q^d = \boldsymbol{\varphi}_q^0, \tag{3.50}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_q^0$ 在引理 3.14 中定义。将 (3.49) 两边左乘 $(\widetilde{\varphi}_{q,1}^d, \cdots, \widetilde{\varphi}_{q,n}^d)$，得到

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle\widetilde{\Delta}\left(d, \mathrm{i}\nu_q^d, \tau_{q,l}^d\right)\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_q^d, \boldsymbol{\phi}(0)\right\rangle = \left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_q^d, \Delta\left(d, \mathrm{i}\nu_q^d, \tau_{q,l}^d\right)\boldsymbol{\phi}(0)\right\rangle \\
&= \gamma\left(\sum_{j=1}^n \overline{\widetilde{\varphi}}_{q,j}^d\varphi_{q,j}^d + \tau_{q,l}^d e^{-\mathrm{i}\theta_q^d}\sum_{j=1}^n u_j^d b_j^d\overline{\widetilde{\varphi}}_{q,j}^d\varphi_{q,j}^d\right) := \gamma S_q(d).
\end{aligned}$$

由引理 3.16、定理 3.17 和公式 (3.50) 可知

$$\lim_{d\to 0} S_q(d) \neq 0.$$

这意味着，对于 $d \in (0,\ \tilde{d})$，$\gamma = 0$，其中 $0 < \tilde{d} \ll 1$；因此，$\mathrm{i}\nu_q^d$ 是 $A_{\tau_q^d,\ l}(d)$ 的单特征值，其中 $q = 1,\ \cdots,\ p$ 以及 $l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。 □

根据定理 3.18 和隐函数定理，我们看到，对于每个 $q = 1$、$\cdots$、p 和 $l = 0,\ 1$、2、$\cdots$，存在 $(\tau_q^d$、$_l$、$\mathrm{i}\nu_q^d$、$\boldsymbol{\varphi}_q^d)$ 的一个邻域 O_q、$_l \times D_q$、$_l \times H_q$、$_l$ 以及一个连续可微函数 $(\mu(\tau)$ $\boldsymbol{\varphi}(\tau))$：$O_q$、$_l \to D_q$、$_l \times H_q$、$_l$，使得 $\mu(\tau_q^d$、$_l) = \mathrm{i}\nu_q^d$、$\boldsymbol{\varphi}(\tau_q^d$、$_l) = \boldsymbol{\varphi}_q^d$，并且对于每个 $\tau \in O_q$、$_l$，$A_\tau(d)$ 在 D_q、$_l$ 中的唯一特征值为 $\mu(\tau)$，且

$$\begin{aligned}\Delta(d, \mu(\tau), \tau)\boldsymbol{\varphi}(\tau) =& dA\boldsymbol{\varphi}(\tau) + \operatorname{diag}\left(f_j(u_j^d, u_j^d)\right)\boldsymbol{\varphi}(\tau) + \operatorname{diag}\left(u_j^d a_j^d\right)\boldsymbol{\varphi}(\tau) \\ &+ e^{-\mu(\tau)\tau}\operatorname{diag}\left(u_j^d b_j^d\right)\boldsymbol{\varphi}(\tau) - \mu(\tau)\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

然后，运用与定理 3.9 类似的论证，我们得到如下横截条件。

定理 3.19 假设(**H0**)-(**H2**) 和 (3.40) 成立。则

$$\frac{d\mathcal{R}e\left[\mu\left(\tau_{q,l}^d\right)\right]}{d\tau} > 0,\ \ q = 1, \cdots, p,\ \ l = 0, 1, 2, \cdots.$$

由定理 3.12 和 3.17–3.19，可得以下结果。

定理 3.20 假设(**H0**)-(**H1**) 成立，且 $d \in (0, \tilde{d})$，其中 $0 < \tilde{d} \ll 1$。令 $\boldsymbol{u}^d$为引理 *2.2* 中得到的唯一正平衡点。则以下结论成立。

(i) 若对所有 $j = 1, \cdots, n$，$a_j^0 - b_j^0 < 0$ 成立，则当$\tau \in [0, \infty)$(ii) 时，$\boldsymbol{u}^d$ 局部渐近稳定。若(**H2**) 和(3.43) 成立，则当 $\tau \in [0, \tau_{\hat{q},0}^d)$时，$\boldsymbol{u}^d$ 局部渐近稳定；当 $\tau \in (\tau_{\hat{q},0}^d, \infty)$时，则不稳定，其中 $\tau^{d_{\hat{q},0}} = \min_{1 \leqslant q \leqslant p} \tau_{q,0}^d$。此外，当 $\tau = \tau^{d_{\hat{q},0}}$时，系统 (1.2) 发生 *Hopf*分岔。

4 一个例子

在本节中，我们将第 3 节中得到的结果应用于一个具体例子，并讨论网络拓扑对 Hopf 分岔的影响。选择人均增长率如下：

$$f_j(u_j, u_j(t-\tau)) = m_j - \hat{a}_j u_j(t) - \hat{b}_j u_j(t-\tau) \quad \text{for} \quad j = 1, \cdots, n.$$

于是，模型（1.2）具有以下形式：

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = d\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} u_k + u_j\left(m_j - \hat{a}_j u_j(t) - \hat{b}_j u_j(t-\tau)\right), & t > 0,\ \ j = 1, \cdots, n, \\ \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \geqslant \mathbf{0}, & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{4.1}$$

其中，(α_{jk}) 满足假设 **(H0)**，m_j 表示斑块 $\hat{}j$中的内禀增长率，而 $\hat{a}_j, b_j > 0$ 分别表示增长率的即时依赖和延迟依赖

，分别在斑块 j中。显然，假设 **(H1)** 成立。我们指出，具有空间均质环境的模型（ 4.1）的连续空间版本已在 [38]中得到研究。

4.1 稳定性与 Hopf 分岔

~对于情形（I）（$0 < d_* - d \ll 1$），量 $\tilde{a}$ 和 b 具有如下形式：

$$\tilde{a} = -\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j \eta_j^2 \varsigma_j, \ \ \tilde{b} = -\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j \eta_j^2 \varsigma_j, \tag{4.2}$$

其中，$\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\varsigma}$ 在（2.1）中定义。由定理 3.10 可得以下结果。

命题 4.1 设 $\boldsymbol{u}^d$ 为引理~ ~2.2 中得到的(1.2)的唯一正平衡点，其中 $d \in (0, d_*)$。那么，对于 $d \in [d_2, d_*)$ 且满足 $0 < d_* - d_2 \ll 1$，以下结论成立。

(i) 若 $\sum_{j=1}^{n} \left(\hat{a}_j - \hat{b}_j \right) \eta_j^2 \varsigma_j > 0$，则模型 (1.2) 的 $\boldsymbol{u}^d$ 在 $\tau \in [0, \infty)$时局部渐近稳定。(ii) 若 $\sum_{j=1}^{n} \left(\hat{a}_j - \hat{b}_j \right) \eta_j^2 \varsigma_j < 0$，则 $\boldsymbol{u}^d$ 在 $\tau \in [0, \tau_{d,0})$ 时局部渐近稳定，而在 $\tau \in (\tau_{d,0}, \infty)$时不稳定，其中 $\tau_{d,0}$ 在定理 *3.6* 中定义。此外，当 $\tau = \tau_{d,0}$时，系统 (4.1) 在 $\boldsymbol{u}^d$处发生 *Hopf* 分岔。

现在考虑情形（II）($0 < d \ll 1$)。此情形下的各个量具有如下形式：

$$a_j^0 = -\hat{a}_j, \ \ b_j^0 = -\hat{b}_j, \ \ \nu_j^0 = \frac{m_j \sqrt{(\hat{b}_j)^2 - (\hat{a}_j)^2}}{\hat{a}_j + \hat{b}_j}, \ \ \theta_j^0 = \arccos\left(-\frac{\hat{a}_j}{\hat{b}_j} \right). \tag{4.3}$$

此外，**(H2)** 可化简如下：

($\tilde{\mathbf{H2}}$) $\hat{a}_j - \hat{b}_j < 0$ for $j = 1, \cdots, p$, and $\hat{a}_j - \hat{b}_j > 0$ for $j = p+1, \cdots, n$, where $1 \leqslant p \leqslant n$.

于是，根据定理 3.20，可得如下结果。

命题 4.2 设 $\boldsymbol{u}^d$ 为引理~ ~2.2 中得到的(1.2) 的唯一正平衡点，其中 $d \in (0, d_*)$。那么，对于 $d \in (0, d)$ 且 $0 < d \ll 1$，下列结论成立。

(i) 若对于所有 $j = 1$、$\cdots$、n，$\hat{a}_j - \hat{b}_j > 0$，则当$\tau \in [0, \infty)$时，$\boldsymbol{u}^d$局部渐近稳定。*(ii)* 若*(~H2)*成立，且对于任意 $j \neq k$ 和 $1 \leqslant j, k \leqslant p$，$\theta_j^0 \neq \theta_k^0$ 或 $\nu_j^0 \neq \nu_k^0$，则当 $\tau \in [0, \tau_{\hat{q},0}^d)$时，$\boldsymbol{u}^d$ 局部渐近稳定；而当 $\tau \in (\tau_{\hat{q},0}^d, \infty)$时，$\boldsymbol{u}^d$ 不稳定，其中 $\tau_{\hat{q},0}^d$ 在定理 *3.20* 中定义。此外，当 $\tau = \tau_{\hat{q},0}^d$ 时，系统 *(1.2)* 在 $\boldsymbol{u}^d$ 处发生 *Hopf*分岔。

注记 4.3 我们指出，若将(**H2**) 替换为以下假设，则命题 *4.2 (ii)* 仍然成立：

(**$\tilde{\mathbf{A}}$2**) $\{\hat{a}_j - b_j\}_{j=1}^n$ 变号，且对于所有 $j = 1, \cdots, n$，$\hat{a}_j - b_j \neq 0$。

证明过程类似，为简洁起见，此处省略细节。

4.2 网络拓扑的影响

本小节讨论网络拓扑对 $0 < d \ll 1$ 的 Hopf分岔值的影响。由于计算较为繁琐，为简化起见，我们只考虑一个特殊情形。令 $\hat{a}_j = 0$ 和 $b_j = 1$ 对于 $j = 1, \cdots, n$，模型（4.1）可化简为以下系统：

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = d\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{jk} u_k + u_j \left(m_j - u_j(t-\tau)\right), & t > 0, \quad j = 1, \cdots, n, \\ \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \geqslant \mathbf{0}, & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 (α_{jk}) 满足假设（**H0**），且 $m_j > 0$ 对于 $j = 1, \cdots, n$。显然，（**H1**）-（**H2**）成立。根据命题 4.2 (ii) 并经直接计算可知，若

$$m_j \neq m_k \text{ for any } j \neq k, \tag{4.5}$$

则模型（4.4）在 $0 < d \ll 1$ 处发生 Hopf分岔，其第一个 Hopf分岔值为 $\tau = \tau_{\hat{q},0}^d$，其中 $\hat{q}$ 满足 $m_{\hat{q}} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} m_j$。由引理 3.16 和定理 3.17，可知

$$\tau_{\hat{q},0}^d = \frac{\theta_{\hat{q}}^d}{\nu_{\hat{q}}^d} \text{ and } \lim_{d \to 0} \tau_{\hat{q},0}^d = \frac{\pi}{2m_{\hat{q}}}. \tag{4.6}$$

因此，为了获得网络拓扑的影响，我们需要计算下文中 $\tau_{\hat{q},0}^d$ 关于 d 的一阶导数。

命题 4.4 设 $\tau_{\hat{q},0}^d$ 由(4.6)定义，其中 $\hat{q}$ 满足 $m_{\hat{q}} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} m_j$。

$$\left(\tau_{\hat{q},0}^d\right)'\big|_{d=0} = \frac{\mathcal{T}(A)}{m_{\hat{q}}^2}, \tag{4.7}$$

其中

$$\mathcal{T}(A) := -\frac{\pi}{2}\alpha_{\hat{q}\hat{q}} + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{m_{\hat{q}}}\sum_{k \neq \hat{q}} \alpha_{\hat{q}k} m_k. \tag{4.8}$$

证明 由 (4.6)，可得

$$\left(\tau_{\hat{q},0}^d\right)' = \left(\frac{\theta_{\hat{q}}^d}{\nu_{\hat{q}}^d}\right)' = \frac{\left(\theta_{\hat{q}}^d\right)'\nu_{\hat{q}}^d - \theta_{\hat{q}}^d\left(\nu_{\hat{q}}^d\right)'}{\left(\nu_{\hat{q}}^d\right)^2}, \tag{4.9}$$

其中，$'$ 是关于 d的导数。将 $\nu = \nu_{\hat{q}}^d$、$\theta = \theta_{\hat{q}}^d$ 和 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^d$ 代入

（3.14），得

$$dA\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}+\operatorname{diag}\left(m_{j}-u_{j}^{d}\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}-e^{-\mathrm{i}\theta_{\hat{q}}^{d}}\operatorname{diag}\left(u_{j}^{d}\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}-\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d}\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}=\mathbf{0}. \tag{4.10}$$

对 d 求 (4.10) 的导数，我们得到

$$\begin{aligned}-\Delta\left(d,\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d},\tau_{\hat{q},0}^{d}\right)\left(\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right)'=&A\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}-\operatorname{diag}\left(\left(u_{j}^{d}\right)'\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}+\mathrm{i}(\theta_{\hat{q}}^{d})'e^{-\mathrm{i}\theta_{\hat{q}}^{d}}\operatorname{diag}\left(u_{j}^{d}\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\\&-e^{-\mathrm{i}\theta_{\hat{q}}^{d}}\operatorname{diag}\left(\left(u_{j}^{d}\right)'\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}-\mathrm{i}(\nu_{\hat{q}}^{d})'\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d},\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中，$\Delta(d,\ \mu,\ \tau)$ 定义见 (3.3)。令 $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d}=(\widetilde{\varphi}_{\hat{q},\ 1}^{d},\ \cdots,\ \widetilde{\varphi}_{\hat{q},\ n}^{d})^{T}$ 为 $\widetilde{\Delta}\left(d,\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d},\ \tau_{\hat{q},\ 0}^{d}\right)$ 对应于特征值 0 的特征向量，其中 $\widetilde{\Delta}\left(d,\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d},\ \tau^{d_{\hat{q},\ 0}}\right)$ 是 $\Delta\left(d,\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d},\ \tau_{\hat{q},\ 0}^{d}\right)$ 的共轭转置矩阵。采用与命题 3.7 证明中类似的论证可知，忽略一个标量因子后，$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d}$ 满足

$$\lim_{d\to 0}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d}=\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{0}, \tag{4.12}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_{q}^{0}$ 在引理 3.14 中定义。注意，

$$0=\left\langle\widetilde{\Delta}\left(d,\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d},\tau_{\hat{q},0}^{d}\right)\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},\left(\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right)'\right\rangle=\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},\Delta\left(d,\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d},\tau_{\hat{q},0}^{d}\right)\left(\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right)'\right\rangle.$$

然后，将 (4.11) 的两边左乘 $(\widetilde{\varphi}^{d}{}_{\hat{q},1},\cdots,\widetilde{\varphi}^{d}{}_{\hat{q},\overline{n}})$，得到 −

$$\begin{aligned}0=&-\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},\Delta\left(d,\mathrm{i}\nu_{\hat{q}}^{d},\tau_{\hat{q},0}^{d}\right)\left(\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right)'\right\rangle\\=&\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},A\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right\rangle-\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},\operatorname{diag}\left(\left(u_{j}^{d}\right)'\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right\rangle+\mathrm{i}(\theta_{\hat{q}}^{d})'e^{-\mathrm{i}\theta_{\hat{q}}^{d}}\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},\operatorname{diag}\left(u_{j}^{d}\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right\rangle\\&-e^{-\mathrm{i}\theta_{\hat{q}}^{d}}\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},\operatorname{diag}\left(\left(u_{j}^{d}\right)'\right)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right\rangle-\mathrm{i}(\nu_{\hat{q}}^{d})'\left\langle\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d},\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d}\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.13}$$

由引理 2.3 可知，若我们对 $j=1,\cdots,n$ 定义 $u_{j}^{0}=m_{j}$，则 $\boldsymbol{u}^{d}$ 关于 $d\in[0,d_{*})$ 连续可微。直接计算可得

$$\left(u_{j}^{d}\right)'\big|_{d=0}=\frac{1}{m_{j}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}m_{k}. \tag{4.14}$$

由 (4.12) 和引理 3.16 可得

$$\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{d},\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\hat{q}}^{d}\to\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{0},\ \ \nu_{\hat{q}}^{d}\to m_{\hat{q}},\text{and}\ \ \theta_{\hat{q}}^{d}\to\theta_{\hat{q}}^{0}=\frac{\pi}{2}\ \text{ as }\ d\to 0, \tag{4.15}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_{\hat{q}}^{0}$ 满足 $\varphi_{\hat{q},\hat{q}}^{0}=1$，且 $\varphi_{\hat{q},k}^{0}=0$ 对 $k\neq\hat{}q$ 成立。结合 (4.13) 和 (4.14)，可得

$$(\theta_{\hat{q}}^{d})'\big|_{d=0}=\frac{1}{m_{\hat{q}}^{2}}\sum_{k\neq\hat{q}}\alpha_{\hat{q}k}m_{k}\ \text{ and }\ (\nu_{\hat{q}}^{d})'\big|_{d=0}=\frac{1}{m_{\hat{q}}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{\hat{q}k}m_{k}. \tag{4.16}$$

将 (4.16) 代入 (4.9)，得到 (4.7) 成立。证明完毕。 □

因此，对于 $0<d\ll 1$ 和给定的扩散矩阵 A，由（4.6）和（4.7）可得

$$\tau_{\hat{q},0}^{d}=\frac{\pi}{2m_{\hat{q}}}+\frac{d}{m_{\hat{q}}^{2}}\mathcal{T}(A)+\mathcal{O}(d^{2}), \tag{4.17}$$

其中 $\mathcal{T}$（A）定义见（4.8）。

因此，根据命题 4.4，我们得到网络拓扑的影响如下。

命题 *4.5* 设 $\tau_{\hat{q}}^{d,0}(A_i)$ 为模型（*4.4*）在 $A = A_i$ 下的第一个 *Hopf*分岔，其中 $A_i = \left(\alpha_{jk}^{(i)}\right)(i = 1, 2)$ 满足 *(H0)*。若 $\mathcal{T}(A_1) > \mathcal{T}(A_2)$，则存在一个依赖于 A_1和 A_2 的 $\hat{} d > 0$，使得当 $d \in \left(0, \hat{d}\right]$ 时，$\tau_{\hat{q}}^{d,0}(A_1) > \tau_{\hat{q}}^{d,0}(A_2)$。

注释 4.6 我们注意到，若对所有 $k = 1, \cdots, n$，均有 $\alpha^{(1)}{}_{\hat{q}k} < \alpha_{qk}^{(2)}{}_{\hat{}}$，则 $\mathcal{T}(A_1) > \mathcal{T}(A_2)$。

根据命题 4.4，我们还可以证明$\tau_{\hat{q},0}^{d}$ 关于 $0 < d \ll 1$的单调性。

命题 4.7 设$\tau_{\hat{q},0}^{d}$ 是模型（*4.4*）的第一个 *Hopf*分岔，其中$\hat{} q$ 满足$m_{\hat{q}} =$ 最大值$_{1 \leqslant j \leqslant n}\, m_j$。则以下结论成立。

(i) *If* $\mathcal{T}(A) > 0$, *then* $\left(\tau_{\hat{q},0}^{d}\right)' > 0$ *for* $0 < d \ll 1$.

(ii) *If* $\mathcal{T}(A) < 0$, *then* $\left(\tau_{\hat{q},0}^{d}\right)' < 0$ *for* $0 < d \ll 1$.

因此，网络拓扑也会影响$\tau_{\hat{q},0}^{d}$ 关于 $0 < d \ll 1$的单调性。

4.3 数值模拟

现在，我们通过一些数值模拟来说明模型（4.4）的理论结果。令 $n = 4$ 和（m_j） = (7.5,7,6.5,6)，并选取以下两个扩散矩阵：

$$A_1 = \left(\alpha_{jk}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & -1.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -1.2 \end{pmatrix},$$

and

$$A_2 = \left(\alpha_{jk}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -1.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -1.2 \end{pmatrix}.$$

那么，与 A_1 和 A_2 对应的网络拓扑不同，见图 2。

我们首先选择 $A = A_1$，并通过数值结果表明，时滞 τ 可诱发 Hopf 分岔；当 $0 < d \ll 1$ 或 $0 < d_* - d \leqslant 1$时，可能出现周期解，见图 3。随后，我们讨论网络拓扑的影响。显然，$\hat{} q = 1$ 和 $\mathcal{T}(A_1) > \mathcal{T}(A_2)$，其中 $\mathcal{T}(A)$ 定义于（4.8）式。结合命题 4.4 可知，$\tau_{1,0}^{d}(A_1) > \tau_{1,0}^{d}(A_2)$。为验证这一点，我们固定 $\tau_1(= 0.2144)$，并通过数值结果表明，当 $A = A_1$时，模型（4.4）的正平衡点是稳定的；而当 $A = A_2$时，模型（4.4）存在正周期解，见图 4。因此，$\tau_{1,0}^{d}(A_1) > \tau_{1,0}^{d}(A_2)$。

此外，一个有趣的问题是，当 d 处于

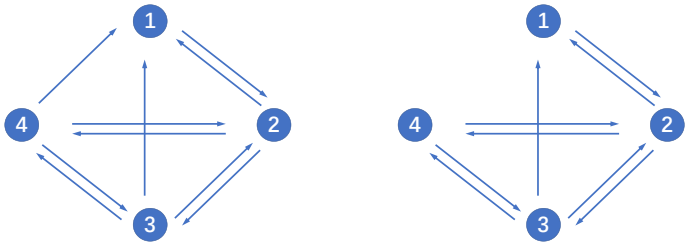

图 2. 两种不同的网络拓扑。（左）： $A = A_1$; （右）： $A = A_2$。

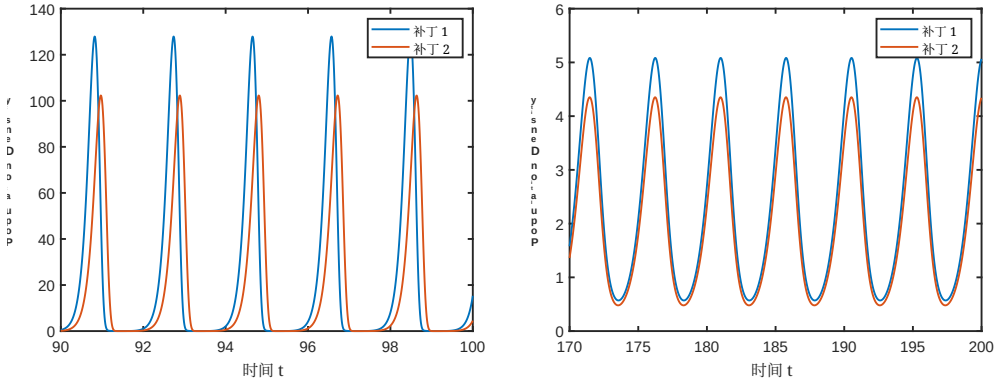

图 3. 对于模型（4.4）， $A = A_1$时由 Hopf分岔诱导的周期解。（左）小扩散情形： $d = 0.3$ 和 $\tau = 0.5$。（右）大扩散情形：$d = 10$ 和 $\tau = 1.2$。

中间状态时，是否会发生Hopf分岔。若 $n \geqslant 3$，这是一个挑战。对于双斑块模型，可以计算出Hopf分岔值$\tau_{\hat{q}}^{d}, 0$对应于 $d \in (0, d_*)$的情形，参见 [27] 中的对称扩散矩阵。现在我们考虑非对称情形。令$(m_1, m_2) = (1, 2)$，并选取以下两个扩散矩阵：

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0.9 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

对于 $A = A_i$且 $i = 3, 4$，我们分别通过数值计算得到 Hopf分岔曲线 $\tau_{\hat{q}}^{d}, 0(A_i)$。这里，$\lim_{d \to 0} \tau_{\hat{q}}^{d}, 0(A_i) = \pi/4$且 $\lim_{d \to d_*^{(i)}} \tau_{q}^{d_*}, 0(A_i) = \infty$，其中 $d_*^{(i)}$满足$s(d_*^{(i)} A_i + \text{diag}(m_j)) = 0$，对于 $i = 3, 4$。根据命题 4.7，我们发现网络拓扑也会影响 $\tau^{d}_{\hat{q}}, 0$ 对于 $0 < d \ll 1$的单调性。如图 5 所示，对于 $0 < d \ll 1$ 且 $\mathcal{T}(A_3) = 1.3139 > 0$， $\tau_{\hat{q}}^{d}$, $0(A_3)$ 单调递增；对于 $0 < d \ll 1$ 且 $\mathcal{T}(A_4) = -2.7102 < 0$， $\tau^{d}_{\hat{q}}, 0(A_4)$ 单调递减。

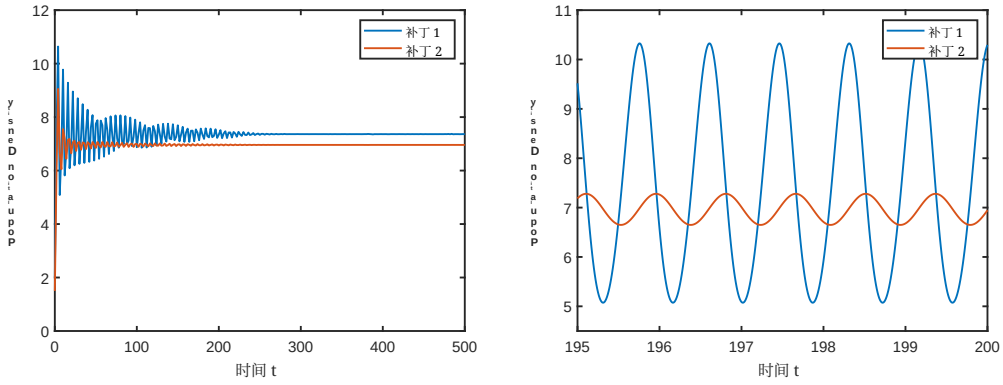

图4. 网络拓扑的影响。为简洁起见，我们仅绘制两个斑块。此处$\tau_1 = 0.2144$。（左）：$A = A_1$；（右）：$A = A_2$。

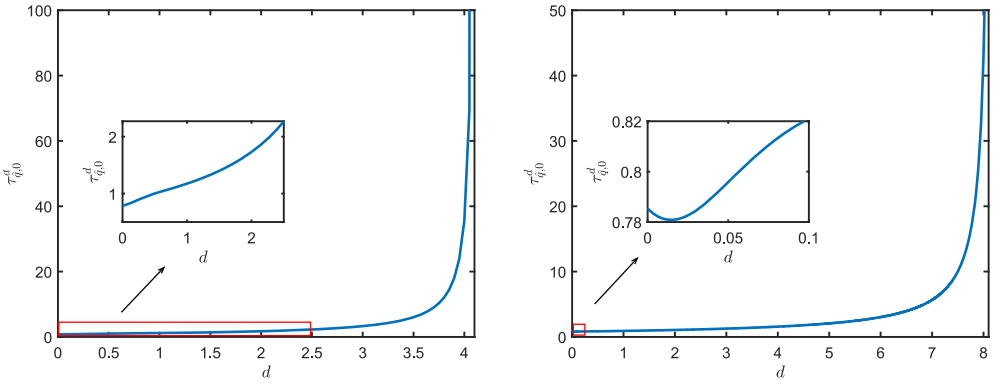

图5. Hopf分岔曲线。（左）：$A = A_3$；（右）：$A = A_4$。

5 讨论

受方法局限性的影响，我们仅证明了两种情况下 Hopf分岔的存在性：**(I)** $0 < d_* - d \ll 1$，以及 **(II)** $0 < d \ll 1$。

对于情形（I），$\tilde{a} - b$ 对于确定Hopf分岔的存在性至关重要。我们指出，$\tilde{a}$ 和 b 通常为负（例如，参见模型（4.1）），其中 $-\tilde{a} > 0$和$-b > 0$ 分别表示增长率的瞬时依赖和延迟依赖，因此，$\tilde{a} - b < 0$ 意味着瞬时项占主导地位，因而不会发生延迟诱导的Hopf分岔；而意味着延迟项占主导地位，因而可能发生延迟诱导的Hopf分岔。

根据（2.7），我们猜想（3.1）中的 $\boldsymbol{v}$（t）可表示如下：

$$\boldsymbol{v}(t)=(d_*-d)\left[c(t)\boldsymbol{\eta}+(d_*-d)\boldsymbol{z}(t)\right],\ \text{where}\ \ c(t)\in\mathbb{R}\ \ \text{and}\ \ \boldsymbol{z}(t)\in X_1. \tag{5.1}$$

将 (2.7) 代入 (3.1)，可将 (3.1) 重写如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'(t)=&\left[\frac{d}{d_*}\left(d_*A+\mathrm{diag}(m_j)\right)\right]\boldsymbol{v}(t)+(d_*-d)\mathrm{diag}\left(\frac{m_j}{d_*}+q_j(d,\beta^d,\boldsymbol{\xi}^d)\right)\boldsymbol{v}(t)\\&+(d_*-d)\mathrm{diag}\left(a_j^d\beta^d\left(\eta_j+(d_*-d)\xi_j^d\right)\right)\boldsymbol{v}(t)\\&+(d_*-d)\mathrm{diag}\left(b_j^d\beta^d\left(\eta_j+(d_*-d)\xi_j^d\right)\right)\boldsymbol{v}(t-\tau),\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $q_j(d,\ \beta,\ \boldsymbol{\xi})$ 和 a_j^d、b_j^d分别在 (2.14) 和 (3.2) 中定义。注意，对于 $d=d_*$，$a_j^d=a_j$ 和 $b_j^d=b_j$，其中 a_j 和 b_j 在 (2.6) 中定义。然后，将 (5.1) 代入 (5.2) 并去掉高阶项 $\mathcal{O}(d_*-d)^2$,，可得 $c(t)$ 满足

$$c'(t)\eta_j=\left(\frac{m_j}{d_*}+q_j(d_*,\beta^{d_*},\boldsymbol{\xi}^{d_*})\right)\eta_jc(t)+\beta^{d_*}a_j\eta_j^2c(t)+\beta^{d_*}b_j\eta_j^2c(t-\tau),\ \ j=1,2,\cdots, \tag{5.3}$$

其中，根据 (2.14)，$q_j(d_*,\ \beta^{d_*},\ \boldsymbol{\xi}^{d_*})=\beta^{d_*}(a_j+b_j)\eta_j$。将 (5.3) 乘以 ς_j并对所有 j求和，可得

$$\begin{aligned}c'(t)\sum_{j=1}^n\varsigma_j\eta_j=&\left[\frac{1}{d_*}\sum_{j=1}^n m_j\varsigma_j\eta_j+\beta^{d_*}(\tilde{a}+\tilde{b})\right]c(t)+\beta^{d_*}\tilde{a}c(t)+\beta^{d_*}\tilde{b}c(t-\tau)\\=&\beta^{d_*}\tilde{a}c(t)+\beta^{d_*}\tilde{b}c(t-\tau),\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中第一步用到了 (2.8)。因此，去掉高阶项 $\mathcal{O}(d_*-d)^2$, 后，线性化系统 (3.1) 可由 (5.4) 近似。这也解释了为什么 $\tilde{a}-b$ 对于 Hopf分岔的存在性至关重要。

对于情形（II），我们还证明了Hopf分岔的存在性，并针对一个具体模型讨论了网络拓扑对Hopf 分岔值的影响。我们的方法仅适用于空间异质性的情形，因为该方法基于 $\mathcal{S}_q$ 为一维这一事实（见引理 3.16）。例如，我们需要对模型（4.4）施加假设（4.5），以保证Hopf分岔的存在性。空间均质性的情形有待进一步研究。

致谢

我们感谢两位匿名审稿人提出的宝贵建议，这些建议极大地改进了本文。我们还感谢沈佐林博士就数值模拟提出的有益建议。

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12171117、11771109）和山东省自然科学基金（项目编号：ZR2020YQ01）的资助。

利益冲突

无。

参考文献

[1] A. Okubo 和 S. A. Levin。*Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives. New York: Springer* 2001 。

Springer，纽约，。[2] S. Busenberg 和 W. Huang。具有扩散效应的种群时滞模型的稳定性与Hopf分岔。 *J. Differential Equations*，124(1):80–107，1996年。[3] R.S. Cantrell 和 C. Cosner。 *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*。Wiley数学与计算生物学丛书。约翰·威利父子公司，奇切斯特，2003年。[4] L. Chang、M. Duan、G. Sun 和 Z. Jin。复杂网络上SIR流行病模型中的交叉扩散诱导模式。 *Chaos*，30(1):013147，2020年。[5] L. Chang、C. Liu、G. Sun、Z. Wang 和 Z. Jin。具有扩散作用的复杂网络捕食者-被捕食者模型中的时滞诱导模式。 *New J. Phys.*，21:073035，2019年。[6] S. Chen、Y. Lou 和 J. Wei。时滞反应-扩散-平流种群模型中的Hopf分岔。 *J. Differential Equations*，264(8):5333–5359，2018年。[7] S. Chen、Z. Shen 和 J. Wei。具有斑块结构的时滞单种群模型中的Hopf分岔。 *to appear in J. Dynam. Differential Equations*。[8] S. Chen、J. Shi、Z. Shuai 和 Y. Wu。扰动拟正矩阵的谱单调性及其在种群动力学中的应用。 *arXiv preprint arXiv:1911.02232*，2019年。[9] S. Chen、J. Wei 和 X. Zhang。平流异质环境中时滞扩散逻辑斯蒂种群模型的分岔分析。 *J. Dynam. Differential Equations* 32 2 823 847, 2020 ，（）：–。[10] S. Chen 和 J. Shi。具有非局部时滞效应的扩散逻辑斯蒂种群模型的稳定性与 Hopf 分岔。 *J. Differential Equations*，253(12):3440–3470，2012年。[11] S. Chen 和 J. Yu。具有时空时滞和Dirichlet边界条件的反应-扩散方程的稳定性分析。 *J. Dynam. Differential Equations*，28(3-4):857–866，2016年。[12] S. Chen 和 J. Yu。非局部时滞反应-扩散种群模型的稳定性与分岔。 *J. Differential Equations*，260(1):218–240，2016年。[13] Y. Du、B. Niu、Y. Guo 和 J. Li。双Hopf分岔诱发扩散Ginzburg-Landau模型中周期振荡的共存。 *Phys. Lett. A*，383(7):630–639，2019年。[14] Y. Du、B. Niu、Y. Guo 和 J. Wei。时滞反应-扩散系统中的双Hopf分岔。 *J. Dynam. Differential Equations*，32(1):313–358，2020年。[15] M. Duan、L. Chang 和 Z. Jin。复杂网络上具有交叉扩散的SI流行病模型的图灵模式。 *Physica A*，533:122023，2019年。[16] T. Faria。具有时滞的偏微分方程的规范形与Hopf分岔。*Trans. Amer. Math. Soc.*，352(5):2217–2238，2000年。[17] L. D. Fernandes 和 M. A. M. de Aguiar。网络上捕食者-被捕食者食物网的图灵模式与表观竞争。 *Phys. Rev. E*，86(5):056203，2019年。[18] S. A. Gourley 和 J. W.-H. So。有限区域上包含非局部时滞的食物限制种群模型的动力学。 *J. Math. Biol.*，44(1):49–78，2002年。[19] S. Guo 和 S. Yan。具有非局部时滞效应的扩散Lotka-Volterra型系统中的Hopf分岔。 *J. Differential Equations*，260(1):781–817，2016年。[20] K. P. Hadeler 和 S. Ruan。扩散与时滞的相互作用。 *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 8 1 95 105, 2007 ，（）：–。[21] R. Hu 和 Y. Yuan。具有分布时滞的反应 - 扩散系统中的空间非均匀平衡态。 *J. Differential Equations*，250(6):2779–2806，2011年。[22] D. Huang 和 S. Chen。空间异质环境中扩散Nicholson果蝇模型的稳定性与Hopf分岔。

Z. Angew. Math. Phys. 72 1 41, ，（）：。2021

[23] D. Huang、S. Chen 和 X. Zou。具有一般扩散矩阵和非局部相互作用的斑块间时滞种群模型中的Hopf分岔。 *submitted*。

[24] Z. Jin 和 R. Yuan。具有非局部时滞效应的反应-扩散-平流方程中的 Hopf 分岔。
J. Differential Equations，271:533–562，2021年。[25] M. Y. Li 和 Z. Shuai。网络上耦合微分方程组的全局稳定性问题。 *J. Differential Equations*，248(1):1–20，2010年。[26] Z. Li 和 B. Dai。具有时滞效应的 Lotka-Volterra 竞争-扩散-平流模型的稳定性与 Hopf 分岔分析。
Nonlinearity，34(5):3271–3313，2021年。[27] K.-L. Liao 和 Y. Lou。随机扩散双斑块模型中的时滞效应。*Bull. Math. Biol.*，76(2):335–376，2014年。[28] Z. Y. Lu 和 Y. Takeuchi。单物种离散扩散系统中的全局渐近行为。 *J. Math. Biol.*，32(1):67–77，1993年。[29] N. Madras、J. Wu 和 X. Zou。斑块化环境中单物种种群的局部-非局部相互作用与时空模式。
Canad. Appl. Math. Quart.，4 1 109 134，1996 ( ): – 。[30] P. Magal 和 S. Ruan。
Theory and applications of abstract semilinear Cauchy problems，第201卷，收录于
Applied Mathematical Sciences。Springer，Cham，2018年。前言由 Glenn Webb 撰写。[31] Y. Morita。多个空间维度中时滞-扩散系统所产生周期解的失稳。 *Japan J. Appl. Math.*，1(1):39–65，1984年。[32] J. Petit、M. Asllani、D. Fanelli、B. Lauwens 和 T. Carletti。网络上具有时滞过程的双组分反应-扩散系统中的斑图形成。 *Physica A*，462 230 249，2016 : – 。[33] H.-B. Shi、S. Ruan、Y. Su 和 J.-F. Zhang。具有比率依赖型功能反应的扩散型 Leslie-Gower 捕食者-被捕食者模型的时空动力学。
Internat. J. Bifur. ，( ): 。
Chaos Appl. Sci. Engrg. 25 5 1530014, 16, 2015
[34] Q. Shi、J. Shi 和 Y. Song。具有空间异质性的时滞扩散Logistic模型中的 Hopf 分岔与斑图形成。 *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*，24(2):467–486，2019年。[35] H.L. Smith，
Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems 41 1995 ，第
[36] 卷。美国数学学会电子书计划，。 *J. Math. Biol.*J. W.-H. So、J. Wu 和 X. Zou。双斑块上的结构化种群：扩散与时滞建模。[37] ，43(1):37–51，2001年。 *J. Differential Equations*Y. Su、J. Wei 和 J. Shi。具有时滞效应的反应-扩散种群模型中的 Hopf 分岔。[38] ，247(4):1156–1184，2009年。 *J. Dynam. Differential Equations*Y. Su、J. Wei 和 J. Shi。具有混合时滞与即时密度依赖的扩散Logistic方程中的 Hopf 分岔。[39] ，24 925，2012 4 897( ): – 。
*SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*C. Tian 和 S. Ruan。网络中具有时滞的化感浮游生物模型中的斑图形成与同步。[40] ，18(1):531–557，2019年。
*Theory and applications of partial functional-differential equations*J. Wu。
Applied Mathematical Sciences，第119卷，收录于[41] 。Springer-Verlag，纽约，1996年。
*Math. Med. Biol.*Y. Xiao、Y. Zhou 和 S. Tang。两个层级的扩散网络中的疾病传播建模。[42] ，28(3):227–244，2011年。 *Nonlinearity*X.-P. Yan 和 W.-T. Li。时滞反应-扩散种群模型中分岔周期解的稳定性。[43] ，23(6):1413–1431，2010年。 *Hiroshima Math. J.*K. Yoshida。生态学中具有时滞的半线性扩散方程的 Hopf 分岔及其稳定性。[44] ，12(2):321–348，1982年。
*Dynamical systems in population biology*X.-Q. Zhao。´。CMS 数学丛书/Ouvrages de Math
[45] ématiques de la SMC。Springer，Cham，第二版，2017年。
*Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*H. Zhu、X. Yan 和 Z. Jin。考虑多个渠道的多层网络创意扩散模型。，97 105734，2021 : 。