最优 C　容量调整与多对一匹配问题 S

Jiehua Chen[1] Gergely Cs´aji[23]

[1]维也纳工业大学，奥地利[2]匈牙利 HUN-REN 经济与区域研究中心 [3]罗兰大学 E¨otv¨os Lor´and，匈牙利

arXiv:2302.01815v2 [cs.GT] 6 Mar 2024

摘要

我们研究多对一匹配问题，其中一方是学生，另一方是受到容量约束的学校。我们探讨如何以最优方式增加学校的容量，从而获得稳定且完美的匹配（即每名学生都得到匹配），或帕累托有效匹配，或学生受欢迎匹配（即不存在一种匹配，使得受益的学生人数多于受损的学生人数）。我们考虑两种常见的最优性标准：一种旨在最小化所有学校容量增加量之和（简称MinSum），另一种旨在最小化任一学校容量增加量的最大值（简称 Min-Max）。我们全面分析了这些问题的计算复杂性：对于稳定且完美匹配，以及采用MinMax 标准的稳定且学生受欢迎匹配，问题均可在多项式时间内求解；其余所有问题均为 NP 困难。我们还研究了参数化复杂性和近似性，发现通过最小幅度的容量增加来实现稳定且有效匹配，比实现稳定且完美匹配困难得多。最后，我们考虑了允许减少容量的这些问题变体，并得到了类似的结果。

1 引言

具有双边偏好的多对一匹配有各种现实应用，例如学校选择，即将学生分配到学校 [1], 学院与大学招生 [13, 26], 医院与住院医师项目 [20],员工招聘 [27, 4], 或医疗保健领域的公平分配 [24]。通常，给定两个互不相交的主体集合，U 和 W，其中每个主体都对另一集合中的某些成员有一个偏好列表，并且集合 W中的每个主体都有一个容量约束（也称配额），用于规定集合 U 中的多少个主体可以与其匹配。目标是在不违反容量约束的前提下，找到良好的匹配（或分配），使 U 与 W 相匹配。例如，在学校选择和大学招生中，集合 U 中的主体是学生或高中毕业生，而集合 W 中的主体分别是学校和大学。为统一术语，我们考虑学校选择这一应用，并将集合 U 中的主体称为学生，将集合 W 中的主体称为学校。

对于什么样的匹配才算是好的匹配，答案因应用场景而异。可以说，最突出且最广为人知的概念是稳定匹配 [13, 16, 21], ，它确保不存在两个主体形成阻塞对，即他们不会更希望彼此匹配，而不是与各自已分配的配偶匹配。稳定性是一项关键要求，也是许多匹配应用中的标准准则。另一方面，最简单的概念是确保每个学生都得到匹配，我们将这种匹配称为完美匹配。请注意，在学校选择或大学招生中，拥有完美匹配尤为重要，因为每个学生至少都应被某所学校或大学录取。一个帕累托有效（缩写为有效）匹配确保不存在其他匹配，能够在不使任何其他学生处境变差的情况下改善某个学生的状况[1] [12, 1]。效率对学生而言非常理想，因为它使他们无需尝试寻找更好的解。我们还可以施加一种比帕累托有效性更强的限制，即学生受欢迎性。如果不存在其他匹配 μ'，使得严格更多的学生偏好他们在 μ' 中的分配而非在 μ中的分配，则称匹配 μ 是学生受欢迎的。

稳定性和效率同样值得追求，但二者并不兼容（即可能无法同时满足）。稳定性也无法与学生受欢迎性或完美性兼容。在最坏情况下，稳定匹配的规模可能只有最大匹配的一半。不过，如果我们可以调整学校的容量呢？举例来说，考虑以下情况：五名学生 $u_1, \ldots, u_5$ 和三所学校 w_1, w_2, w_3 ，每所学校的容量均为一。

[1]不要将其与帕累托最优性混淆，后者要求不存在任何一种匹配，能够在不使其他主体处境变差的情况下，让某个主体（学生或学校）处境变得更好。

	常数近似	$\|U_{\mathsf{un}}\|$ -近似	常数 Δ_u	常数 $\|U_{\mathsf{un}}\|$	常数 $\|U_{\mathsf{un}}\| + \Delta_u$
MinSumSP	NP-h [T2]	P类 [T4]	NP-c [T1]	XP [T5], W[1]-h [T3]	固定参数可 tractable [T5]
MinMaxSP	P类 (c=1) [T6]	P类 [T6]	P类 [T6]	P类 [T6]	P类 [T6]
MinSumSE	NP-h [T8]	NP-h [T8]	NP-c [T8]	NP-c [T8]	NP-c [T8]
MinMaxSE	NP-h [T8]	NP-h [T8]	NP-c [T8]	NP-c [T8]	NP-c [T8]
MinSumSSP	NP-h [T9]	NP-h [T9]	NP-c [T9]	NP-c [T9]	NP-c [T9]
MinMaxSSP	P类 (c=1) [T12]	P类 [T12]	P类 [T12]	P类 [T12]	P类 [T12]

表 1：复杂度结果概览。这里，“const-apx”表示具有任意常数 c 近似因子的算法的复杂度；“$|U_{\mathsf{un}}|$-apx”和“Δ_u-apx”表示 $|U_{\mathsf{un}}|$ 或 Δ_u 近似算法的复杂度；最后，“const $|U_{\mathsf{un}}|$”和“const Δ_u”分别表示以下判定问题的复杂度：初始未匹配学生人数有常数上界，或未分配学生的最长偏好列表长度为常数。

学生	学校
u_1: $w_1 \succ w_3 \succ w_2$	w_1: $u_2 \succ u_4 \succ u_1 \succ u_5$
u_2: $w_2 \succ w_1 \succ w_3$	w_2: $u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ u_4 \succ u_5$
u_3: $w_2 \succ w_3$	w_3: $u_3 \succ u_1 \succ u_2$
u_4, u_5: $w_1 \succ w_2$	

这里，$x \succ y$ 表示对应主体更偏好 x 而非 y。未出现在偏好列表中的主体表示该主体不可接受。唯一的稳定匹配 μ_1 是将 u_1 与 w_2匹配，将 u_2 与 w_1匹配，并将 u_3 与w_3匹配，而 u_4 和 u_5 未匹配。然而，如果 u_1 和 u_2 交换配偶，他们就能得到一个更好的、尽管不稳定的匹配 μ_2（它被 $\{u_4, w_1\}$阻挡）。如果将 w_1 的容量增加到二，那么将u_1 和 u_4 分配给 w_1，将 u_i 分配给 w_i，以及 $i \in \{1, 2\}$，即可得到稳定且有效匹配 μ_3。如果将 w_1的容量增加到三，那么我们还可以通过额外将 u_5 分配给 w_1，把 μ_3 扩展为稳定、有效且完美的匹配。

显然，如果我们将每所学校的容量增加到 $|U|$，使每位学生都能分配到自己的第一选择，那么我们就能得到稳定、有效且完美的匹配。然而，这显然并不经济有效，因此我们面临以下问题：

如何尽可能少地调整容量，以获得稳定且有效的匹配，或稳定且完美的匹配?

在本文中，我们 旨在通过计算回答这一问题，并考察两种最常见的成本函数： s,
所有学校容量变更的总量和最大值 所有学校的最大容量变化。

我们的贡献。在本文的第一部分中，我们引入并深入研究了确定最优容量增加向量的计算复杂性，以获得稳定且有效的（分别为稳定且完美、稳定且学生受欢迎的）匹配。我们考虑两种最优性标准：最小化容量增加之和以及最大容量增加。这产生了六个问题：MinSumSE、 Min-MaxSE、 MinSumSP、 MinMaxSP、 MinSumSSP、 MinMaxSSP。我们证明，除了 MinMaxSP 和 MinMaxSSP 外，其余四个问题在计算上都是困难的；即使偏好列表具有常数长度，它们仍然是困难的。我们进一步研究参数化算法和近似算法。对于 MinSumSP，我们证明了一个结构性结果（引理 3），这有助于构造参数化算法和近似算法。在观察到当容量上界 k^+ 为常数时（即关于 k^+ 属于 XP），MinSumSE 和 MinSumSP 可以在多项式时间内求解之后，我们证明该结果本质上是紧的，因为无法将其改进为一个 $f(k^+) \cdot (|U| + |W|)^{O(1)}$-时间算法。对于组合参数“初始未匹配学生的数量”和“任何未匹配学生的最长偏好列表的长度”， Min-SumSP 是固定参数可解的，而 MinSumSE 仍然是 NP 困难。对于 NP 困难的 MinSumSP，我们给出了一个整数规划公式。尽管这三个 NP困难问题通常都难以在任意常数因子内近似，但 MinSumSP 对任意常数 c 都存在一个 $|U_{\mathsf{un}}|/c$-近似算法（即运行时间关于 c 呈指数级），而 MinSumSE 和 MinMaxSE 无法在因子 $(|U|+|W|+|E|)^{1-\varepsilon}$ 内近似（对于任意常数 $\varepsilon > 0$），其中 E 是可接受性图 $G =$（U、 W、 E）中的边集合。

关于稳定匹配和学生受欢迎匹配，我们证明MinSumSSP同样是 NP困难的，且不存在任何多项式时间常数因子近似算法。积极的一面是，我们为 MinMaxSSP提供了一种多项式时间算法。

最后，在论文的第二部分，我们通过举例说明，允许容量减少也可能对某些问题有益；不过，对于这一修改后的模型，我们得到了类似的算法和复杂度结果。

相关研究。 在经济学中，研究稳定性与效率之间的权衡和矛盾由来已久 [1, 2, 11, 12, 17, 28], ，计算机科学领域亦是如此 [4, 29]。例如，Abdulkadiroglu 和 S¨onmez [1] 考察了 Gale/Shapley 的学生提议的延迟接受算法（该算法始终产生学生最优稳定匹配）以及简单的顶层交易环算法（该算法有效）。Ergin [12]

刻画了优先级结构——即所谓的无环结构——在这种结构下，稳定且有效匹配总是存在。Kesten [17] 提出了一种效率调整型延迟接受算法，以获得一种不稳定匹配；该匹配有效，且帕累托优越于学生最优稳定匹配。据我们所知，目前尚无研究通过增加容量来实现稳定且有效匹配。

Chen、Skowron 和 Sorge [9] 研究了一对一匹配中稳定性与完美性之间的权衡问题，即通过对偏好列表进行少量修改，使匹配成为稳定的完美匹配。我们的模型与他们的不同之处在于，我们不允许修改代理人的偏好。Limaye 和 Nasre [19]提出了两个相关的匹配问题，其中每所学校的容量无界，并具有一个数值，用于衡量将某个（任意）学生分配到该校的成本；目标是找到一个稳定且完美的匹配，使成本总和最小或最大成本最小。他们的模型与我们的不同，因为他们假设给定学校的每个名额成本都相同，而在我们的框架中，每所学校都有一个容量 q，前 q 个名额被视为免费，只有额外名额才有非零成本。此外，他们不允许设置初始配额；在我们的框架中，这可以理解为将每所学校的初始配额设为零。

近年来，人们研究了多对一匹配中的容量变化，但研究目标各不相同。R´ıos等人[25] 提出了席位扩展机制，以增加学生福利。Ueda等人 [29] 设计了一种策略防护机制，以处理最小和最大配额问题。Nguyen和Vohra [23] 研究了包含夫妻的多对一匹配，并提出了通过扰动容量来寻找稳定匹配的算法。Bobbio等人[7, 6] 考虑了容量变化，以获得匹配学校排名总和最小的稳定匹配（AvgRank）或最大基数的稳定匹配（CarSM）。容量变化可以是容量增加总和，也可以是容量减少总和。我们的问题MinSumSP 可以通过引入足够多的虚拟学生和排名非常高的垃圾回收学校，归约为他们的 MinSumAvgRank问题，从而确保每个原始学生都能被匹配。因此，我们的困难性结果也适用于该问题。他们留下了 MinSumCarSM复杂性问题未解决，而根据我们对 MinSumSP的困难性结果，该问题是NP困难的。Abe、Komiyama和Iwasaki [3] 提出了一些替代方法，并针对 MinSumAvgRank进行了实验。Yahiro和Yokoo [30] 研究了这样一个问题：资源数量固定，学校的容量取决于我们为其分配的资源数量。在他们的框架中，资源只能分配给特定的学校，这些关系由二分图表示。我们可以通过为每所学校设置只能分配给该校的资源，并设置 k^+ 其他可以分配给任意学校的资源，将我们最小化所需容量增加总和的问题归约到他们的问题。在他们的论文中，Yahiro和Yokoo研究了不同的机制，并分析这些机制是否公平（稳定）、帕累托有效或具备策略防护性质，同时还给出了一些不可能性结果。本文的任何结果都不能由他们的结果推出。

论文结构。在第2节定义相关概念和符号后，我们将在第3节讨论稳定且完美匹配，在第4节讨论稳定且有效匹配，在第5节讨论稳定且学生受欢迎匹配。随后，我们将在第6节将结果扩展到也允许减少的情形。最后，我们将在第7节总结一些未来研究方向。

2 基本定义与基础知识

用 N 表示所有正整数构成的集合。给定一个整数 t，用 $[t]$ （不带任何前缀）表示集合 $\{1, \cdots, t\}$。给定两个维度为 t 的整数向量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$，即 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^t$，我们用 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ 表示新的整数向量 $\boldsymbol{r}$，其中对所有 $z \in [t]$，$\boldsymbol{r}[z] = \boldsymbol{x}[z] + \boldsymbol{y}[z]$；如果对于每个索引 $i \in [z]$，都有 $\boldsymbol{x}[i] \leq \boldsymbol{y}[i]$，则写作 $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$；否则，写作 $\boldsymbol{x} \not\leq \boldsymbol{y}$。集合 A 上的偏好列表（或优先级顺序） $\succ$ 是 A 上的线性序。如果 $x \succ y$，则称 x 优于 y。给定一个有限集合 A，用 $\langle A \rangle$ 表示 A 上一个任意但固定的线性序。如果 $A = \{a_1, \ldots, a_{|A|}\}$，则 $\langle A \rangle$ 始终表示递增顺序 a_1，....., $a_{|A|}$。

2.1 多对一匹配

Many-To-One Matching 问题（简称 MM）的输入包括 $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ 名学生的集合和 $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ 所学校的集合，以及以下信息。

– 每名学生 $u_i \in U$ 都有一个偏好列表 $\succ_{u_i}$，列出一个学校子集；其中的主体 $\succ_{u_i}$ 称为对 u_i可接受。

– 每所学校 $w_j \in W$ 都有一个优先级顺序 $\succ_{w_j}$，针对一个学生子集。

– 一个容量向量 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{N}^m$，用于指定每所学校最多允许录取的学生人数 $w_j \in W$。

注意到，遵循文献中的做法 [16, 12, 21], ，我们假设每所学校的容量至少为 1。对于每位学生 $x \in U$（分别地，对于学校 $x \in W$），令$\mathsf{A}(x)$ 表示可接受集合，其中包含 x可接受的所有学校 x （分别地，包含学校 x的优先级顺序中包含的所有学生）。在全文中，我们假设不存在

学生（分别地，学校）的偏好列表（分别地，优先级顺序）均非空；并且对于每位学生 u 和每所学校 w，有：u 认为 w 可接受，当且仅当 u 也位于 w 的优先级顺序中。若学校 w 是学生 u 根据 $\succ_u$ 最优的学校，则称学生u 为学校 w 的仰慕者。我们还可以用二分图 $G=(U,W;E)$ 对可接受关系建模，其中 $(u_i,w_j)\in E$ 当且仅当 u_i 和 w_j 彼此认为对方可接受。

匹配 μ 是从 U 到 W 的一个（部分）映射，使得每个学生 $u\in U$ 要么未匹配（即，$\mu(u)$ 未定义），要么与一所可接受学校匹配（即，$\mu(u)\in \mathrm{A}(u)$）；或者等价地说，它是可接受性图中边的一个子集，其中每个学生 u 至多有一条关联边。如果 u 未匹配，我们也记作 $\mu(u)=\perp$。如果 $\mu(u)=w$，则称 u 和 w 彼此被分配（或匹配）。如果学校 w_j 未满额，则称其为未满额学校，即 $|\mu^{-1}(w_j)|<\boldsymbol{q}[j]$；否则 w_j 已满额。我们假设每个学生 u 都更愿意被分配而非不被分配，即对于所有 $w\in\mathrm{A}(u)$，$w\succ_u\perp$，并且每所学校 w 都更愿意录取更多可接受的学生，而非保持未满额。

给定一个 MM 实例 $I=(U,W,(\succeq_x)_{x\in U\cup W},\boldsymbol{q})$以及一个匹配 μ对于 I，称 μ是完美的，如果每个学生在 μ下都匹配；如果它可行，则每所学校 $w_j\in W$ 所分配的 $\boldsymbol{q}[j]$ 学生至多为$|\mu^{-1}(w_j)|\le\boldsymbol{q}[j]$。

合理嫉妒、阻塞对与稳定匹配。设 μ 为一个匹配。若学生 u 在合理嫉妒 另一名学生（或对另一名学生有合理嫉妒） u' 下 μ 成立，当且仅当 $w=\mu(u')\succ_u\mu(u)$ 且$u\succ_w u'$。此时，学生 u （相应地，匹配 μ）被称为存在合理嫉妒。学生 u 与学校 w在匹配 μ 中构成一个阻塞对，当且仅当以下条件全部满足：

(i) $u\in\mathrm{A}(w)$,
(ii) u 未匹配，或更喜欢 w 而非 $\mu(u)$，并且
(iii) w 未满额，或更喜欢 u 而非至少一名分配给自己的学生。

因此，匹配 μ 是稳定的，当且仅当没有学生与任何学校构成阻塞对。显然，在稳定匹配中，不存在合理嫉妒。匹配 μ 称为学生最优稳定匹配，如果它是稳定的，并且每个学生 至少同样喜欢 μ 甚于所有其他稳定匹配；也就是说，对于所有学生 u 以及所有其他稳定匹配 σ，满足以下条件之一：$\mu(u)=\sigma(u)$，或 $\mu(u)\succ_u\sigma(u)$。众所周知，这样的学生最优稳定匹配总是存在 [16]。

支配与有效匹配。若匹配 μ 支配另一个匹配 σ，则满足以下条件：——对于每个学生 u，要么 $\mu(u)=\sigma(u)$，要么 $\mu(u)\succ_u\sigma(u)$，并且——至少有一名学生 u 在 $\mu(u)\succ_u\sigma(u)$。

显然，学生最优稳定匹配是不被任何其他稳定匹配支配的稳定匹配，但它可能被其他匹配支配。我们称匹配μ 有效(亦称帕累托有效)，若它不被其他匹配支配。众所周知，稳定性与效率并不兼容，即使是在受限的一对一匹配情形下也是如此；在这种情形中，每所学校的容量为一。

学生受欢迎匹配。接下来我们定义学生受欢迎性。为此，我们按以下方式比较两个匹配 μ 和μ'。每个学生 $u\in U$投一票 $vote_u(\mu,\mu')\in\{-1,0,1\}$，使得 $vote_u(\mu,\mu')=0$，若 $\mu(u)=\mu'(u)$；$vote_u(\mu,\mu')=1$，若 $\mu(u)\succ_u\mu'(u)$；否则 $vote_u(\mu,\mu')=-1$。于是，我们称匹配 μ 是学生受欢迎匹配，若不存在另一个匹配 μ' 能在这场投票中严格胜过 μ。也就是说，对于任意匹配 μ'，若 $\sum_{u\in U}vote_u(\mu,\mu')\ge 0$，则$\mu$ 是学生受欢迎匹配。

2.2 通过容量增加获得最优匹配

我们考虑以下判定问题：$\Pi\in$ {稳定且完美、稳定且有效、稳定且学生受欢迎 }。

MinSum Cap Π (分别为 MinMax Cap Π)

输入：一个实例 $I=(U,W,(\succ_x)_{x\in U\cup W},\boldsymbol{q})$，其中属于 MM，以及一个容量上界 $k^+\in\mathbb{N}$（分别为 $k^{\max}\in\mathbb{N}$）。
问题：是否存在一个容量增加向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $|\boldsymbol{r}|_1\le k^+$（分别满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty\le k^{\max}$），使得 $I'=(U,W,(\succ_x)_{x\in U\cup W},\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})$ 存在一个 Π匹配。

我们将这些问题分别简称为 MinSum Cap Stable and Perfect、MinMax Cap Stable and Perfect、MinSum Cap Stable and Efficient、MinMax Cap Stable and Efficient、MinSum Cap Stable andStudent-popular、MinMax Cap Stable and Student-popular，其中 MinSumSP、MinMaxSP、Min-SumSE、MinMaxSE、MinSumSSP和MinMaxSSP。

为简洁起见，我们也用相同的名称指代相应的最小化变体。对于上述每个问题，我们称容量增加向量 $\boldsymbol{r}$ – 可行，如果它能为相应问题产生一个解，——良好的，若其是肯定答案的见证；而——最优的，若 $|\boldsymbol{r}|_1$（分别是 $|\boldsymbol{r}|_\infty$）在 MinSum（分别是 MinMax）的所有可行向量中取最小值。

在第6 节中，我们将考察这些问题的变体。在这些变体中，容量也允许减少，这相当于允许 $\boldsymbol{r}$ 为负数，因此在这种情况下，我们称 $\boldsymbol{r}$ 为容量变化向量，而不是容量增加向量。

显然， MinSumSP 和 MinMaxSP 都属于 NP。其他问题的 NP 包含性基于以下结论。

引理1. 检查一个 MM 实例是否存在稳定且有效的匹配，或稳定且学生受欢迎的匹配，可以在多项式时间内完成。

证明。首先注意，稳定且有效的匹配或稳定且学生受欢迎的匹配必定是学生最优稳定匹配；否则，学生最优稳定匹配会帕累托支配它（因此在投票中也会胜过它）。所以，只需证明我们能够检查学生最优稳定匹配对学生而言是否帕累托有效或受欢迎，因为学生最优稳定匹配可以在线性时间内求得。对于这两种情况，我们都可以将该实例视为具有单边偏好的实例。根据 Cechl´arov´a 等人 [8], 的结果，检查单边偏好下的帕累托有效性可以在多项式时间内完成。根据 Bir´o、Irving 和 Manlove[5], ，检查学生受欢迎性也可以在多项式时间内完成。□

首先，我们陈述一个显而易见但重要的观察。

观察1. 任何学生受欢迎匹配 μ 也都是有效的。

因此，寻找学生受欢迎且有效的匹配，与寻找学生受欢迎匹配完全相同。

例子 引言中的例子讨论了稳定且有效的匹配。另一个例子如下 g.

例1. 假设有三所学校 w_1、 w_2、 w_3，每所学校的容量为一，以及五名学生 u_1、 u_2、 u_3、 u_4、 u_5。优先级列表和偏好列表如下，其中 $i \in [5] \setminus \{3\}$ 和 $j \in [2]$。

学生 学校u_i: $w_1 \succ w_2$ w_j:

$u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ u_4 \succ u_5$$u_3$: $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ w_3: u_3

学生最优（也是唯一的）稳定匹配为 $\mu = \{(u_1, w_1), (u_2, w_2), (u_3, w_3)\}$。学生 u_4和 u_5是两名未分配学生。如果我们将 u_4 和 u_5 都分配给 w_1，那么还需要将 u_2 和 u_3 重新分配给w_1 ，否则 u_2 和 u_3 都会有充分理由嫉妒 u_4 和 u_5。这相当于将容量增加四。如果我们改为将 u_4 和 u_5 都分配给 w_2 ，那么只有学生 u_3 会有充分理由嫉妒。此时，我们也可以将 u_3 重新分配给 w_2 （将 w_2 的容量增加三），从而得到一个匹配所有学生的稳定匹配。可以验证，要获得稳定且完美的匹配，容量增加至少需要三。

记号。根据著名的乡村医院定理 [16], ，每个 MM实例都存在一个稳定匹配，并且所有稳定匹配所匹配的学生集合和学校集合相同。因此，除非另有说明，给定一个 MM实例，令U_{as} 和 U_{un} 分别表示某个稳定匹配中已分配和未分配的学生集合。此外，令 Δ_u 表示 U_{un}中所有未分配学生的偏好长度的最大值。最后，令 Δ_{sc} 表示各学校优先级列表长度的最大值。

2.3 结构性质

Kominers [18] 证明，将一所学校的容量增加一个单位，不会使学生的结果变差。基于这一结论，我们可以观察到以下内容。

引理 2. 令 $I_1 = (U, W, (\succ_x)_{x \in U \cup W}, \boldsymbol{q}_1)$ 和 $I_2 = (U, W, (\succ_x)_{x \in U \cup W}, \boldsymbol{q}_2)$ 表示两个具有相同学生集合和学校集合、相同偏好及优先级列表，且满足 $\boldsymbol{q}_1 \leq \boldsymbol{q}_2$ 的 MM实例。那么，以下结论成立。

(i) 每位学生都弱偏好于 μ_2 中的学生最优稳定匹配，而不是 I_2 中的学生最优稳定匹配。 (ii) 如果学校 w 在 μ_1中未满额，则$\mu_2^{-1}(w) \subseteq \mu_1^{-1}(w)$成立。

证明。设 I_1和 I_2如上所定义。设 U、 W、 $\boldsymbol{q}_1$、 $\boldsymbol{q}_2$分别为 I_1 和 I_2的学生集合、学校集合及容量向量。为证明第一条结论，只需考虑恰有一所学校增加了容量，且增加量为一的情形，因为弱偏好关系具有传递性，这一点已由 Kominers [18]证明。

对于陈述（ii），反证地假设存在一名学生 $u \in \mu_2(w) \setminus \mu_1(w)$。注意，根据第一个陈述， u 严格偏好 $\mu_2(u) = w$ 而非 $\mu_1(u)$。由于 w 在 μ_1中未满额，它与 u 在 μ_1中构成一个阻塞对，矛盾。□

我们接下来给出一个关键观察，它有助于减少MinSumSP或 MinMaxSP的输入实例中的边数。

观察 2. 如果从实例中删除每条边 MinSumSP和 MinMaxSP 之间的边（u, w），则 $\mu(u) \succ_u w$ 的学生最优稳定匹配 $\hat{}\mu$的最优值不会改变。

事实上，对于任意容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，根据引理 2 可知，每个学生 u 在容量按 $\mu[u]$ 增加时，都会被分配到至少与 $\hat{}\,\boldsymbol{r} \geq 0$同样好的学校，因此删除这些边不会降低稳定匹配的规模。这带来了以下关键性质，我们可以假设 MinSumSP 或 MinMaxSP的任意输入实例都具有这一性质。

推论 1. 对于 MinSumSP和 MinMaxSP ，我们可以假设在输入实例 I中，存在唯一的稳定匹配（因此它同时是学校最优和学生最优的稳定匹配），其中每个学生要么未匹配，要么被分配到其最差的可接受学校。

接下来，我们引入一些新概念，并证明一个有用的引理，以便设计后续的参数化算法和近似算法。令 $\hat{}\mu$ 为给定实例 I的学生最优稳定匹配。考虑所有可能的向量 $\boldsymbol{v}$，其坐标对应未分配学生；对于每个坐标 u，其取值为相应未分配学生 u可接受的一所学校。将这类向量构成的集合记为 $\mathcal{V}$。

设 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ 为这样的向量。我们按如下方式创建一个新实例 $I(\boldsymbol{v})$。对于每所学校 w，令 $n(w, \boldsymbol{v})$ 表示 $\boldsymbol{v}$ 中等于 w的坐标数量。将每所学校 w的容量减少为 $(\boldsymbol{q}[w] - n(w, \boldsymbol{v}))^+ = \max\{0, \boldsymbol{q}[w] - n(w, \boldsymbol{v})\}$。删除每条 (u, w) 边，其中 $u \in U_{\mathsf{as}}$且存在 $u' \in U_{\mathsf{un}}$ 使得 $w \succ_{u'} \boldsymbol{v}[u']$且 $u' \succ_w u$。然后，删除每条边 (u, w)，其中 $u \in U_{\mathsf{as}}$，且存在学生 u' 满足 $\boldsymbol{v}[u'] \succ_u w$ 和$u \succ_{\boldsymbol{v}[u']} u'$。我们还删除 U_{un}中的每名学生。如果删除了与某名学生 u 相 incident 的所有边，则不定义 $I(\boldsymbol{v})$。因此，假设所有 $u \in U_{\mathsf{as}}$ 仍有可接受学校。至此，新实例 $I(\boldsymbol{v})$ 的创建完成。然后，对于每名学生 $u \in U_{\mathsf{as}}$，令 $wo(u, \boldsymbol{v})$ 表示在 $I(\boldsymbol{v})$ 中对 u 而言的最差剩余学校 w。

最后，令 $\mathrm{F}(\boldsymbol{v})$ 表示在 $I(\boldsymbol{v})$ 的学生最优稳定匹配 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$ 中仍未匹配的学生集合，并令 $\mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v})$ 表示 $|\{u \in \mathrm{F}(\boldsymbol{v}) \mid wo(u, \boldsymbol{v}) = w\}|$。

按如下方式构造匹配 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$。将每位 $u \in U_{\mathsf{un}}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 中其坐标对应的学校匹配。将每位 $u \in U_{\mathsf{as}} \setminus \mathrm{F}(\boldsymbol{v})$ 与她在 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$ 中匹配到的学校匹配。最后，将每位 $u \in \mathrm{F}(\boldsymbol{v})$ 与 $wo(u, \boldsymbol{v})$ 匹配；如有需要，增加学校的容量，使其等于录取的学生人数。将由此创建的新实例记为 $I^*(\boldsymbol{v})$。不难看出，每所学校 w 的容量变为 $\max\{n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{q}[w]\}$。

为清晰起见，我们给出如何创建实例的伪代码 $I^*(\boldsymbol{v})$ 以及匹配 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$，见算法1。

引理 3。令 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ 为满足 $I^*(\boldsymbol{v})$ 存在且 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$ 在 $I^*(\boldsymbol{v})$ 中是稳定的那些 $\boldsymbol{v}$ 向量的集合。则 MinSumSP 的最优容量增加向量的数值之和等于 $\min_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}'} \{\sum_{w \in W} (n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{q}[w])^+\}$。

证明。 令 $I = (U、W、(\succ_x)_{x \in U \cup W}、\boldsymbol{q})$ 为一个 MM 实例，并令 $\boldsymbol{r}$ 为具有最小 $|\boldsymbol{r}|_1$ 的容量增加向量，使得 $(U、W、(\succ_x)_{x \in U \cup W}、\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r})$ admits a stable and perfect matching。根据推论 1，我们假设在 I 中存在唯一的（因此也是学生最优的）稳定匹配 $\hat{}\mu$，其中每个 $u \in U$ 要么未匹配，要么与其最差的可接受学校匹配。

首先，我们证明 $\min_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}'} \{\sum_{w \in W} (n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{q}[w])^+\} \geq |\boldsymbol{r}|_1$。令 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}'$。那么，根据上述内容，我们可以构造一个新的实例 $I^*(\boldsymbol{v})$，它存在一个稳定匹配 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$，其中每个学生都已分配。由于学校 w 的容量变为 $\max\{n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{q}[w]\}$，我们需要将 $\boldsymbol{q}[w]$ 增加 $(n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{q}[w])^+$。因此，存在一个可行容量增加向量，其总增加量至多为 $\sum_{w \in W} (n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{q}[w])^+$。

接下来，我们证明 $\min_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}'} \{\sum_{w \in W} (n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{q}[w])^+\} \leq |\boldsymbol{r}|_1$。考虑最优容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，并令 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 为 $(U, W, (\succ_x)_{x \in U \cup W}, \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r})$ 中的学生最优稳定匹配。取向量 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$，其中每个 $u \in U_{\mathsf{un}}$ 都分配到与 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 中相同的学校。显然，若根据 $\boldsymbol{v}$ 进行分配， U_{un} 中的学生之间不存在合理嫉妒。显然，在 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 中，(i) 每个学生 $u \in U_{\mathsf{as}}$ 都在一所没有学生 $u' \in U_{\mathsf{un}}$ 嫉妒的学校 w 就读；(ii) 根据 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 的稳定性，每个学生 $u \in U_{\mathsf{as}}$ 所在的学校至少与 $wo(u, \boldsymbol{v})$ 一样好。这意味着，如果将实例限制为 $U_{\mathsf{as}} \cup W$，删除每条边 (u, w)（若存在学生 $u' \in U_{\mathsf{un}}$ 使得 $u' \succ_w u, w \succ_{u'} \boldsymbol{v}[u']$，或者存在一个 $u' \in U_{\mathsf{un}}$ 使得 $\boldsymbol{v}[u'] \succ_u w$ 且 $u \succ_{\boldsymbol{v}[u']} u'$（这意味着 $wo(u, \boldsymbol{v}) \succ_u w$）），并将每所学校$w$的容量设为 $\boldsymbol{q}[w] + \boldsymbol{r}[w] - n(w, \boldsymbol{v}) \geq 0$，那么该实例中就存在完美稳定匹配。将这个实例记为 $\hat{}$instance I。

在实例 $I(\boldsymbol{v})$ 中，每所学校 w的容量恰好为 $(\boldsymbol{q}[w] - n(w, \boldsymbol{v}))^+$；这是根据 $\boldsymbol{v}$ 将 U_{un}中的学生分配后， w 在不增加容量的情况下仍可用的原有学位数的上界。由于对于每个 w，$(\boldsymbol{q}[w] - n(w, \boldsymbol{v}))^+ \leq \boldsymbol{q}[w] + \boldsymbol{r}[w] - n(w, \boldsymbol{v})$，并且在实例 $I(\boldsymbol{v})$ 中，$\hat{}$ 学校、学生和边的集合与 I 中的相同，且有 $\sum_{w \in W} \mathrm{n}_{\mathrm{F}}(w, \boldsymbol{v})$ 名学生未被分配

算法1 创建 $I^*(\boldsymbol{v})$ 和 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$

输入： $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$，一个 Many-To-One Matching 的实例 I 以及集合 U_{as}、U_{un} 输出： $I^*(\boldsymbol{v})$ $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$

集合 $E = E' := \{(u, w) \mid u \in \mathsf{A}(w) \wedge w \in \mathsf{A}(u)\}$

对于每个学校 $w \in W$，执行

$n(w, \boldsymbol{v})$:= $\boldsymbol{v}$ 中等于 w的坐标数量

集合 $\boldsymbol{q}'[w] = \max\{\boldsymbol{q}[w] - n(w, \boldsymbol{v}),\ 0\}$

结束循环

对于 $(u, w) \in E'$，使用 $u \in U_{\mathsf{as}}$ 执行

如果存在一个 $u' \in U_{\mathsf{un}}$ 使得 $w \succ_{u'} \boldsymbol{v}[u'] \wedge u' \succ_w u$，则

从 E' 中删除 (u, w)

否则，如果存在一个 $u' \in U_{\mathsf{un}}$ 使得 $\boldsymbol{v}[u'] \succ_u w \wedge u \succ_{\boldsymbol{v}[u']} u'$，则

从 E' 中删除 (u, w)

结束 if

结束 for

如果存在一个没有剩余关联边的 $u \in U_{\mathsf{as}}$，则

返回"无 $I^*(\boldsymbol{v})$ 实例"

结束 if

对于 $x \in U_{\mathsf{as}} \cup W$，执行

令 $\succ'_x$ 为 $U_{\mathsf{as}} \cup W$ 中 $\succ_x$ 对其剩余伙伴的限制

结束循环

集合 $I(\boldsymbol{v}) = (U_{\mathsf{as}}, W, (\succ_x)_{x \in U_{\mathsf{as}} \cup W}, \boldsymbol{q}')$

$\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$:= $I(\boldsymbol{v})$ 的学生最优稳定匹配

$\mathsf{F}(\boldsymbol{v})$:= $\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$ 中未匹配的学生，且 $\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w, \boldsymbol{v}) := |\{u \in \mathsf{F}(\boldsymbol{v}) \mid wo(u, \boldsymbol{v}) = w\}|$

对于 $u \in U_{\mathsf{as}}$，执行

$wo(u, \boldsymbol{v})$: $I(\boldsymbol{v})$中 u 的最差剩余学校

结束循环

对于 $u \in U$，执行

如果 $u \in U_{\mathsf{un}}$，则

$\mu^*_{\boldsymbol{v}}(u)$: $= \boldsymbol{v}[u]$

否则，如果 $u \in \mathsf{F}(\boldsymbol{v})$，则

$\mu^*_{\boldsymbol{v}}(u) := wo(u, \boldsymbol{v})$

else

$\mu^*_{\boldsymbol{v}}(u) := \hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(u)$

如果结束

循环结束

对于 $w \in W$，执行

$\boldsymbol{q}^*[w]$:=最大值$\{n(w, \boldsymbol{v}) + |\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)| + \mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w, \boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{q}[w]\}$

结束循环

返回 $I^*(\boldsymbol{v}) = (U, W, (\succ_x)_{x \in U \cup W}, \boldsymbol{q}^*)$ 和 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$

在 $I(\boldsymbol{v})$ 的学生最优稳定匹配中，我们至少需要在 $I(\boldsymbol{v})$ 中新增 $\sum_{w\in W}\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v})$ 个名额，才能得到一个所有学生（在 U_{as} 中）均已分配的稳定匹配，因此

$$\sum_{w\in W}\boldsymbol{q}[w]+\boldsymbol{r}[w]-n(w,\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{q}[w]-n(w,\boldsymbol{v}))^{+}\geq\sum_{w\in W}\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v}).$$

重新整理后可得

$$\sum_{w\in W}\boldsymbol{r}[w]\geq\sum_{w\in W}\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v})-\boldsymbol{q}[w]+n(w,\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{q}[w]-n(w,v))^{+}$$

.

利用 $|\hat{\mu}_{\boldsymbol{v}}(w)|\leq(\boldsymbol{q}[w]-n(w,\boldsymbol{v}))^{+}$ 以及 $\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v})-\boldsymbol{q}[w]+n(w,\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{q}[w]-n(w,v))^{+}\geq 0$，当 $\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v})\geq 0$ 时，可得

$$\sum_{w\in W}\boldsymbol{r}[w]\geq\sum_{w\in W}(n(w,\boldsymbol{v})+|\hat{\mu}_{\boldsymbol{v}}(w)|+\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v})-\boldsymbol{q}[w])^{+}.$$

由于 $|\boldsymbol{r}|_1=\sum_{w\in W}\boldsymbol{r}[w]$，只需证明 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}'$。

$\hat{}$ 根据我们上文对 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 的观察可知，在实例 I 中，$\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 的限制是一个稳定匹配，它将 U_{as} 中的每个学生都分配了，并且填满了每一所受到学生 $u\in U_{\mathsf{un}}$ 嫉妒的学校 w。要 $\hat{}$ 证明 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 在 I 上的限制是稳定的，注意到未满额的学校集合相同，因此该匹配中的阻塞边也必定是 $\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 的阻塞边。特别地，这意味着 $I(\boldsymbol{v})$，因此$\mu^*_{\boldsymbol{v}}$ 存在。所以，我们只需证明 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$ 的稳定性。

在实例 $I(\boldsymbol{v})$ 中，每所学校的容量都小于或等于 $\boldsymbol{q}[w]+\boldsymbol{r}[w]-n(w,\boldsymbol{v})$ 中 w 的容量。并且，正如我们所证明的，I 中的学生最优稳定匹配会填满所有被 I 中某个学生嫉妒的学校。$u\in U_{\mathsf{un}}$ 结合上述结论可知，$\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}$ 中的学生最优稳定匹配 $\mu_{\boldsymbol{v}}$ 在 $I(\boldsymbol{v})$ 中也会填满所有被 $u\in U_{\mathsf{un}}$ 中某个学生嫉妒的学校（如果降低某所学校的容量，那么根据引理 2 (ii)），若该校在学生最优稳定匹配中已满额，则仍会保持满额）。

因此，在 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$ 中，对于任意学生 $u\in U_{\mathsf{un}}$ 和学校 $w\succ_u\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}(u)$，$w$ 在 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$ 中都是满额的。此外，根据 $I(\boldsymbol{v})$ 中边的定义以及学校 $wo(u',\boldsymbol{v})$，可知 U_{as} 中的所有学生在 w 处都比 u 更受 w 偏好。因此，结合 U_{un} 中学生之间不存在合理嫉妒这一事实，我们得出结论：不存在通向 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$ 的阻塞边 (u,w)，其中 $u\in U_{\mathsf{un}}$。

同样地，如果存在一条边 (u,w)，其中 $u\in U_{\mathsf{as}}$ 在 $I(\boldsymbol{v})$ 中被删除，那么要么 u 被录取到一所她更偏好的学校 w，如果 $wo(u,\boldsymbol{v})\succ_u w$，要么存在一个学生 $u'\in U_{\mathsf{un}}$，使得 u' 更偏好 w 而不是$\hat{}\mu_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}(u')=\mu^*_{\boldsymbol{v}}(u')$ 且 $u'\succ_w u$。因此，如果这样的一条边 (u,w) 阻塞了$\mu^*_{\boldsymbol{v}}$，那么存在一条边 (u',w)，其中$u'\in U_{\mathsf{un}}$ 阻挡了它，矛盾。

假设存在一条阻塞边 (u,w)，其中 $u\in U_{\mathsf{as}}$ 也存在于 $I(v)$ 中。如果 w 在$\mu^*_{\boldsymbol{v}}$中未满额，则 $\boldsymbol{q}[w]>n(w,\boldsymbol{v})+|\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)|+\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v})$，因此在匹配$\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$下，$w$ 在 $I(\boldsymbol{v})$ 中也未满额。如果 $u\in\mathbf{F}(\boldsymbol{v})$，那么 (u,w) 将阻塞$\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$，矛盾。如果 $u\notin\mathbf{F}(\boldsymbol{v})$，那么 u 在 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$ 和$\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$中被分配到同一所学校，因此 (u,w) 将再次阻塞$\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$，矛盾。因此，$w$ 是满额的。根据 $I(\boldsymbol{v})$ 中边的定义，在 w 中不存在学生 $u'\in U_{\mathsf{un}}$ 使得 $u\succ_w u'$（否则 $w\succ_u\mu^*_{\boldsymbol{v}}(u)\succeq wo(u,\boldsymbol{v})\succeq w$，矛盾）。所以必然存在一个学生 $u'\in U_{\mathsf{as}}$，使得 $u'\in\mu^*_{\boldsymbol{v}}(w)$ 且 $u\succ_w u'$。如果 $u'\in\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)$，我们将得到$\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$ 不稳定，矛盾。否则，u' 在$\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}$ 中未被分配，且 $w=wo(u',\boldsymbol{v})$。因此，w 是 u'中最差的条目。根据推论 1，我们可以假设，对于 u' 而言，w 至少与 u' 在学生最优稳定匹配$\hat{}\mu$ 中于 I被分配到的学校一样好。由于 (u,w) 也不阻塞 I 中的这个稳定匹配$\hat{}\mu$，我们有 w 比学校 $w'=\hat{}\mu(u)$ u更差。然而，u 被录取到一所至少与 w' 一样好的学校（即使从 I中也会删除通向更差学校的边），因此 (u,w) 不会阻塞，矛盾。

我们得出结论：$\mu^*_{\boldsymbol{v}}$是稳定的，对于这个 $\boldsymbol{v}$，有 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}'$和 $\sum_{w\in W}(n(w,\boldsymbol{v})+|\hat{}\mu_{\boldsymbol{v}}(w)|+\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(w,\boldsymbol{v})-\boldsymbol{q}[w])^{+}=|\boldsymbol{r}|_1$，证明至此完成。

□

3 稳定匹配与完美匹配

本节重点讨论稳定且完美的匹配，以及有关 MinSumSP和 MinMaxSP的计算复杂度。

3.1 最小和容量

3.1.1 困难性结果

我们首先给出一个关于优先级/偏好列表长度的两分结果。

定理 1。 MinSumSP 是 NP完全的；即使 $\boldsymbol{q} = 1^m$，所有学生至多有四所可接受学校， $\Delta_u = 2$ 且 $\Delta_{sc} = 3$。如果 $\Delta_u \leq 1$ 或 $\Delta_{sc} \leq 2$，那么 MinSumSP 将变为多项式时间可解。

证明。我们首先证明多项式时间的结果。显然，如果 $\Delta_u \leq 1$，那么未分配学生只有一种可能的分配向量；根据引理 3 ，该问题可以在多项式时间内求解。接下来，假设 $\Delta_{sc} \leq 2$。我们要证明每个分配向量都是“良好”的。由于每所学校至少有一个席位，因此在每个初始稳定匹配中，它都必须接收至少一名学生；否则，根据引理 2(ii)，我们可以忽略这所学校。如果一名未分配学生被分配到某所学校，那么加上原先已分配的学生，该校就已有两名学生，不会有其他已分配或未分配学生产生合理嫉妒。因此，每个分配向量都直接对应一个良好容量增加向量。换言之，我们只需检查 $k^+ \geq |U_{\mathsf{un}}|$。

现在，我们转而讨论困难性，并通过从 NP完全的 Vertex Cover 问题 [14]归约。

Vertex Cover

输入：图 $G = (V, E)$ 和一个非负整数 h。

问题：是否存在一个大小至多为 h 的顶点覆盖？也就是说，是否存在一个大小至多为 $V' \subseteq V$ 的子集 V'，使得 $G[V \setminus V']$ 不存在边？

注意，即使每个顶点的度至多为三，该问题仍为 NP困难 [15]。设 $I = (G, h)$ 是 Vertex Cover 的一个实例，其中 $G = (V, E)$ 满足 $V = \{v_1, \ldots, v_{\hat{n}}\}$ 和 $E = \{e_1, \ldots, e_{\hat{m}}\}$。我们按如下方式构造本问题的一个实例。对于每条边 $e_t \in E$，创建一个边学生 e_t。对于每个顶点 $v_i \in V$ 以及每条关联边 e_t （即 $v_i \in e_t$），创建一所容量为一的学校 v_i^t，并配备一个虚拟学生 d_i^t。对于每个 $i \in [\hat{n}]$，创建一所容量为一的学校 w_i ，以及一名学生 u_i。偏好和优先级列表如下：

Students	Schools
$e_t : v_i^t \succ v_j^t$	$v_i^t : d_i^t \succ u_i \succ e_t$
$u_i : \langle \{v_i^z \mid v_i \in e_z\} \rangle \succ w_i$	$w_i : u_i$
$d_i^t : v_i^t$	

为完成构造，设容量向量为 $\hat{m} + \hat{n}$。不难验证，在所构造的实例中，每所学校的容量均为一，其优先级列表中至多有三名学生；由于每个顶点至多关联三条边，因此每名学生至多有四所可接受学校。至于未分配学生，我们注意到，学生最优稳定匹配将每个 u_i 分配给相应的学校 w_i ，并将每个虚拟学生 d_i^t 分配给相应的学校 v_i^t，其中 $v_i \in V$ 和 $e_t \in E$ 满足 $v_i \in e_t$。这意味着边学生 e_t 是唯一的未分配学生，且每名学生有两所可接受学校。

断言 1.1。 如果 G 存在一个顶点覆盖 V'，那么存在一个良好容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq \hat{m} + |V'|$。

断言 1.1 的证明。设 V' 为一个顶点覆盖。我们首先定义一个匹配 μ ，然后定义容量增加向量。对于每个顶点 $v_i \in V$及其所有关联边 e_t，令 $\mu(d_i^t) = v_i^t$。对于每个顶点 $v_i \in V \setminus V'$，令 $\mu(v_i) = w_i$。对于每个顶点 $v_i \in V'$，令 $\mu(u_i) = v_i^t$，其中 v_i^t 是 u_i最偏好的学校；如果 e_t 的另一个端点是 v_j ，且 $i < j$ 或 $v_j \notin V'$ 成立，则令 $\mu(e_t) = v_i^t$ 。现在，我们定义 $\boldsymbol{r}$。对于每个 $i \in [\hat{n}]$，令 $\boldsymbol{r}[w_i] = 0$。对于每个 $v_i \in V$ 以及满足 $v_i \in e_t$ 的每条关联边 $e_t \in E$，令 $\boldsymbol{r}[v_i^t] = |\mu^{-1}(v_i^t)| - 1$。显然， $|\boldsymbol{r}|_1 \leq \hat{m} + |V'|$，因为恰有 $|V'|$ 名学生 u_i 被重新匹配到其最偏好的学校。此外， μ匹配每名学生，因为 V' 是一个顶点覆盖。我们声称，匹配 μ 确实是稳定的。反设存在一名学生 x 和一所学校 y 构成阻塞对。显然， x 不可能是虚拟学生，因为他们已经获得各自最偏好的学校。如果 x 是边学生，那么她唯一更偏好的学校必定是某所 v_i^t 学校，满足 $v_i \notin V'$。因此， v_i^t 的容量为一，并且已分配给一名更优秀的学生 d_i^t，矛盾。这意味着，对于某个 $i \in [\hat{n}]$，有 $x = u_i$ 。于是， $\mu(u_i) = w_i$ ，否则 u_i 已经获得她最偏好的学校。因此，对于某个 $t \in [\hat{m}]$ 且满足 $v_i \in e_t$，有 $y = v_i^t$ 。根据构造， $v_i \notin V'$ ，而 v_i^t 只被分配给一名学生，即 d_i^t ，并且不会与 u_i 构成阻塞对，因为 $\boldsymbol{r}[v_i^t] = 0$，矛盾。这证明了 $\boldsymbol{r}$ 是一个良好容量增加向量。$\diamond$

命题 1.2. 如果存在可行容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，那么就存在一个大小至多为 $|\boldsymbol{r}|_1 - \hat{m}$ 的顶点覆盖。

命题 1.2 的证明。设 $\boldsymbol{r}$ 是一个良好容量增加向量，并设 μ 是根据 $\boldsymbol{r}$ 增加容量后为每位学生分配席位的稳定匹配。设 $V' = \{v_i \in V \mid \mu(e_t) = v_i^t$ ，其中某个 e_t 满足 $v_i \in e_t\}$。我们声称， V' 是一个大小至多为 $|\boldsymbol{r}|_1 - \hat{m}$ 的顶点覆盖。显然， V' 是一个顶点覆盖，因为 μ 为每位学生（包括边学生）都安排了匹配。这意味着，至少创建了 $\hat{m}$ 个席位来容纳边学生。为说明为何 $|V'| \leq |\boldsymbol{r}|_1 - \hat{m}$，我们注意到，对于每个顶点 $v_i \in V'$，必定存在一所学校 v_i^t ，使得 $\mu(e_t) = v_i^t$。然而，由于 v_i^t 将 u_i 排在 e_t 之前，学生 u_i 必须重新匹配到某所

形式为 v_i^z 的学校。如果 V' 中的顶点超过 $|\boldsymbol{r}|_1 - \hat{}m$ 个，那么我们就需要超过 $|\boldsymbol{r}|_1 - \hat{}m$ 个额外席位来容纳满足 $v_i \in V'$ 的学生 u_i，这就产生了矛盾。$\diamond$

正确性由上述两个断言得出。 □

在下一部分中，我们将证明 MinSumSP具有很强的不可近似性。

定理 2. MinSumSP不存在常数因子近似算法，除非 P=NP。即使偏好列表和优先级列表均由主列表导出，这一结论仍然成立。

证明. 我们从 NP困难 Set Cover 问题进行归约。

Set Cover
输入：$\hat{}m$ 个子集 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_{\hat{}m}\}$，它们取自包含 $\hat{}n$ 个元素 $\mathcal{X} = [$的集合$\hat{}n]$。
任务：求 $\mathcal{C}$ 的一个子族 $\mathcal{F}$，使其基数 $|\mathcal{F}|$ 最小，且满足 $\cup_{C_i \in \mathcal{F}} C_i = [\hat{}n]$?

我们指出，Dinur 和 Steurer [10] 证明，除非 P==NP，否则无法在多项式时间内以任何常数因子近似最优值。换句话说，给定一个实例 I，其属于 Set Cover，且最优值为 k，即使如此，对于任意常数 dk，找到至多使用 d 个集合的集合覆盖仍是 NP困难的。

设 I 是 Set Cover 的一个实例，其中 $OPT(I) = k$。我们按如下方式构造（优化变体） MinSumSP 的一个实例 I'。对于每个集合 C_j，我们创建一所容量为 1 的集合学校 c_j，并配备一名虚拟学生 d_j。对于每个元素 $i \in [\hat{}n]$，我们添加一名元素学生 e_i。对于每个 $j \in [\hat{}m]$，我们添加 n 名学生u_j^1，……，$u_j^{\hat{}n}$，并添加学校 w_j^1，……，$w_j^{\hat{}n}$，其容量均为 1。

设 $U_j := \{u_j^1, \ldots, u_j^{\hat{}n}\}$。偏好和优先级定义如下：

Students	Schools
$e_i : \langle \mathcal{C}(e_i) \rangle$	$c_j : d_j \succ \langle U_j \rangle \succ \langle \mathcal{X}(c_j) \rangle$
$u_j^\ell : c_j \succ w_j^\ell$	$w_j^\ell : u_j^\ell$
$d_j : c_j$,	

其中，对于每个集合，c_j、$\mathcal{X}$ c_j 表示与 C_j中的元素对应的学生集合；对于每个学生e_i，$\mathcal{C}(e_i)$表示包含 i的集合所对应的学校集合。

不难验证，所有偏好都与学生的主列表 c_1、……、$c_{\hat{}m}$、w_1^1、……、$w_1^{\hat{}n}$、……、$w_{\hat{}m}^1$、……、$w_{\hat{}m}^{\hat{}n}$ 以及学校的主列表 d_1、……、$d_{\hat{}m}$、u_1^1、……、$u_1^{\hat{}n}$、……、$u_{\hat{}m}^1$、……、$u_{\hat{}m}^{\hat{}n}$、e_1、……、$e_{\hat{}n}$ 一致。每所学校的初始容量均为一。

断言 2.1。对于任意常数 $d \geq 1$，如果我们能够找到一个良好容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，使得$|\boldsymbol{r}|_1 \leq d(k+1)\hat{}n$，那么我们就能找到一个至多包含 $d(k+1)-1$ 个集合的集合覆盖。

证明。设 $\boldsymbol{r}$ 是一个良好的容量向量，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq d(k+1)\hat{}n$，并设 μ 是一个为每位学生都分配了对象的稳定匹配。对于每个 c_j，d_j 都与其匹配，因为双方互为彼此最优选择。因此，对于每个 c_j，原始容量 1 都由 d_j 填满。设 l 表示有学生 e_i 被分配到的学校数量。对于每个 c_j，所有 u_j^1、……、$u_j^{\hat{}n}$ 都比任何 e_i 学生更优，因此对于每所这样的学校，其对应的所有 u_j^ℓ 学生都必须分配给该校。由于 μ 分配了所有 e_i 学生，我们可得容量增加至少为 $\hat{}nl + \hat{}n$。又因为 $\hat{}nl + \hat{}n \leq d(k+1)\hat{}n$，可得 $l \leq d(k+1) - 1$。由于所有元素代理都在 μ 中匹配，与这些学校相对应的 l 集合构成一个集合覆盖。$\diamond$

断言 2.2. 对于 $\boldsymbol{r}$ in I' 中的最优容量增加向量，我们有 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq k\hat{}n + \hat{}n$.

证明. 设 $C_{j_1}, \ldots, C_{j_k}$ 是一个最优集合覆盖。定义 $\boldsymbol{r}$ 如下：对于所有 $j \in [\hat{}m]$，$\boldsymbol{r}[w_j^\ell] = 0$。$\ell \in [\hat{}n]$。如果 $j \in \{j_1, \ldots, j_k\}$，则 $\boldsymbol{r}[c_j] = \hat{}n + p$，其中 p 是满足以下条件的元素数量：i，且 C_j 是覆盖 i的 $\{j_1, \ldots, j_k\}$ 中索引最小的集合。最后，其他情况下 $\boldsymbol{r}[c_j] = 0$。显然，$|\boldsymbol{r}|_1 \leq k\hat{}n + \hat{}n$。

我们声称，由边 $\{(d_j, c_j) \mid j \in [\hat{}m]\} \cup \{(u_j^\ell, w_j^\ell) \mid j \in [\hat{}m] \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}, \ell \in [\hat{}n]\} \cup \{(u_j^\ell, c_j), (e_i, c_{l_i}) \mid j \in \{j_1, \ldots, j_k\}, i, \ell \in [\hat{}n]\}$ 构成的匹配 μ 是稳定的，其中 l_i 是满足 $i \in C_{l_i}$的 $\{j_1, \ldots, j_k\}$ 中索引最小的。对于 $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$，$\mu$ 显然是可行的。

假设存在一个针对 μ 的阻塞对 (x, y)。学生 x 不可能是 d_j，因为 d_j 是她的最优选择。她也不可能是 u_j^ℓ，因为对于每个 $j \in [\hat{}m]$，要么 u_j 是她的最优选择 c_j（如果 $j \in \{j_1, \ldots, j_k\}$），要么她唯一更好的学校 c_j 在 $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ 中容量为 1，且已被一名更优的学生 d_j 占据。最后，x 不可能是 e_i，因为同样地，要么 e_i 是她的最优学校，要么她更好的学校容量都为 1，且已被更优的学生 d_j 占据。这是因为 $C_{j_1}, \ldots, C_{j_k}$ 是一个集合覆盖，而对于每个 e_i，我们都将她匹配到了增加了容量的最优学校（即索引最小的那所）。因此，不存在可行的阻塞学生选择 x，矛盾。

□

现在，假设我们有一个多项式时间的 d近似算法，用于 MinSumSP，其中某个常数为 d。那么根据断言2.2，我们可以找到一个良好容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，其中 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq d(k+1)\hat{}n$。根据断言 2.1，我们可以找到一个集合覆盖，所使用的集合数至多为 $d(k+1)-1$。由于 $^{d\,(k+1)}{}_{k}{}^{-1} \leq 2d$，该算法为集合覆盖问题提供了一~~个多项式~~ $2d$-近似算法；当 $P \neq NP$ 时，这与事实矛盾。 □

接下来，我们证明 MinSumSP 是参数化难解的。

定理 3. MinSumSP关于容量上界 k^+是 W[1]-困难的。

我们给出一个从 Multi-Colored Clique 到该问题的参数化归约； Multi-Colored Clique关于解的大小 h是 W[1]-困难的。

Multi-Colored Clique(MCC)

输入：一个无 向图 $G=(V,E)$、一个数 $h\in\mathbb{N}$，以及顶点 V 的一个划分 $(V_1,\dots,V_h)$.
问题：是否存在一个多彩色的 h-团，也就是说，一个包含 h 个顶点且每个集合 V_i 中恰好包含一个顶点的完全子图?

设 $I=(G,h,(V_1,\dots,V_h))$ 是 MCC 的一个实例，其中 $G=(V,E)$ 满足 $V=\{v_1,\dots,v_{\hat{n}}\}$ 且 $E=\{e_1,\dots,e_{\hat{m}}\}$。我们按如下方式构造 MinSumSP 的一个实例 I'。对于每一对颜色 $p=\{z,z'\}\subseteq[h]$，创建一个边选择学生 s_p，并令 E^p 表示端点分别属于 V_z 和 $V_{z'}$ 的边的集合。对于每条边 $e_t\in E$，创建一所学校 e_t 和一名学生 f_t。对于每个顶点 $v_i\in V$，创建一所学校 w_i 和一名学生 v_i。定义 $U=\{s_p\mid p\subseteq[h]$，使其满足 $|p|=2\}\cup\{f_t\mid e_t\in E\}\cup V$ 和 $W=E\cup\{w_i\mid v_i\in V\}$。总共创建了 $\binom{h}{2}+\hat{m}+\hat{n}$ 名学生和 $\hat{m}+\hat{n}$ 所学校。

偏好列表和优先级顺序定义如下，其中 p 表示来自 $[h]$ 的任意颜色对， $e_t\in E^p$ 表示端点为 v_i 和 v 的一条边。

Students	Schools
$f_t\colon e_t$	$e_t\colon f_t\succ\langle\{v_i,v_j\}\rangle\succ s_p$
$v_i\colon\langle\{e_z\mid e_z\in E \text{ such that } v_i\in e_z\}\rangle\succ w_i$	$w_i\colon v_i$
$v_j\colon\langle\{e_z\mid e_z\in E \text{ such that } v_j\in e_z\}\rangle\succ w_j$	$w_j\colon v_j$
$s_p\colon\langle E^p\rangle$	

为便于论述，若 X 表示边的一个子集，则顺序 X 按照 X中各边索引的递增顺序排列。初始时，每所学校的容量均为一。容量增量上界设为 $k^+=\binom{h}{2}+h$。至此，实例的构造完成，该构造可在多项式时间内完成。

接下来证明正确性，即 I 存在一个多彩色 h-团，当且仅当存在容量向量 $\boldsymbol{r}$，满足 $|\boldsymbol{r}|_1\le k^+$，使得 $(U,W,(\succ_x)_{x\in U\cup W},\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})$ 存在一个稳定且完美的匹配。对于“仅当”部分，设 K 是 I 中的一个多彩色 h- 团。我们声称，可以增加与 $E(K)$中的边对应的学校的容量，总容量增加量为 k^+，从而得到一个完美且稳定的匹配。我们先定义所需的匹配 μ，再据此定义容量增加向量。对于每个“团顶点” $v_i\in V(K)$，令 e_t 为所有关联“团边” $E(K)\cap\{e_z\in E\mid v_i\in e_z\}$ 中索引最小的一条边，并设 $\mu(v_i)=e_t$。对于每个颜色对 $p\subseteq[h]$，令 $e_t\in E(K)$ 为其两个端点颜色属于 p的“团边”，并设 $\mu(s_p)=e_t$。最后，对于每个剩余顶点 $v_i\in V\setminus V(K)$（以及每条边 $e_t\in E$），设 $\mu(v_i)=w_i$ （以及 $\mu(f_t)=e_t$）。显然，所得匹配 μ 是完美匹配。容量增加向量根据 μ 定义。更具体地，对于每个 $e_t\in E(K)$，定义 $\boldsymbol{r}[e_t]=\mu^{-1}(e_t)-1$；对于每所剩余学校 $x\in W\setminus E(K)$，定义 $\boldsymbol{r}[x]=0$。现在注意到，恰有 $\binom{h}{2}$ 所学校的容量从一增加到至少二。这些 $\binom{h}{2}$ 所学校总共接收 $\binom{h}{2}+\binom{h}{2}+h$ 名学生，其中包括 $\binom{h}{2}$名边选择学生，以及对应于团顶点的 h 名学生。因此，总容量增加量确实为 $\binom{h}{2}+h$。接下来证明 μ 是稳定的。显然，所有学生 f_t, $t\in[\hat{m}]$都获得了自己的最优选择，因此不会与任何学校构成阻塞对。由于每所 s_p 可接受的学校都已满额，且将她排在最后一位，学生 s_p, $p\subseteq[h]$也不可能参与任何阻塞对。最后，学生 $v_i\in V$不可能参与任何阻塞对，因为 v_i 比 $\mu(v_i)$更偏好的每所学校容量均为一，且已经分配给了其最偏好的学生。

对于“若”部分，设 $\boldsymbol{r}$是一个容量增加向量，满足 $|\boldsymbol{r}|_1\le k^+$，使得 $(U,W,\succ_{x\in U\cup W},\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})$ 存在一个稳定且完美的匹配，记为 μ。首先，根据稳定性，对于所有 $e_t\in E$， $\mu(f_t)=e_t$ 都成立，因为 f_t 和 e_t互为最优选择。其次，由于 μ 是完美匹配，每个边选择学生 s_p 都必须与某个 $e_t\in E^p$匹配。由于来自 $\{s_p\mid p\subseteq[h]$ 且满足 $|p|=2\}$ 的学生中，任意两人都没有共同的可接受学校，因此至少有 $\binom{h}{2}$ 所学校需要增加容量。此外，对于每个 $v_i\in\mu(s_p)$，为了避免学校 $\mu(s_p)$与 v_i 形成阻塞对，必须满足 $\mu(v_i)\in\{e_z\in E\mid v_i\in e_z\}$。这意味着，与 $\mu(s_p)$ 的端点相对应的学生必须与 E中的某所学校匹配。根据容量上界，此类学生至多有 h 名，这意味着对于某个 $s_p\}|\le h$，
$V'=|\{v_i,v_j\mid\{v_i,v_j\}=\mu(s_p)$。只有当 V' 构成一个大小为 h的团 K 时，这种情况才可能发生。 K 是多彩色的，这是因为每个边选择器学生都对应一对不同的颜色。

由于$k^+=\binom{h}{2}+h$，可立即推出 MinSumSP 是关于[1]的 W k^+困难问题。 □

3.1.2 算法结果

有利的一面是，我们为 MinSumSP 给出了一个整数规划公式。

$$\min \sum_{w\in W} r_w \qquad \text{subject to}$$

$$|U|\cdot \sum_{w'|w'\succeq_u w} x_{(u,w')} + \sum_{u'|u'\succ_w u} x_{(u',w)} \geq \boldsymbol{q}[w] + r_w \qquad \forall (u,w)\in E \tag{1}$$

$$\sum_{w\in \mathsf{A}(u)} x_{(u,w)} = 1 \qquad \forall u\in U \tag{2}$$

$$\sum_{u\in \mathsf{A}(w)} x_{(u,w)} \leq \boldsymbol{q}[w] + r_w \qquad \forall w\in W \tag{3}$$

$$x_{(u,w)} \in \{0,1\}, \qquad \forall (u,w)\in E \tag{4}$$

$$r_w \in \mathbb{N} \qquad \forall w\in W \tag{5}$$

图 1：整数规划表述MinSumSP。

引理 4. 图中整数规划的最优解 *1* 给出了 MinSumSP 的最优解。

证明。令 $\boldsymbol{r}$ 为最优容量增加向量，并令 $\hat{}\mu$ 为 $(U,W,(\succ_x)_{x\in U\cup W},\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})$ 的学生最优稳定匹配。设 $r_w = \boldsymbol{r}[w]$ 和 $x_{(u,w)} = 1$；若 $(u,w)\in \hat{}\mu$，则取该值，否则取 0。令 $(u,w)\in E$。那么，根据 $\hat{}\mu$ 的稳定性，u 要么就读于一所至少与 w 一样好的学校，要么 w 中的学生都严格优于 u。由于任意 $w\in W$ 都满足 $\boldsymbol{q}[w]+\boldsymbol{r}[w]\leq n$（任何一所学校最多有 n 名学生），第一个不等式成立。由于每名学生都已匹配，且 $\hat{}\mu$ 可行，第二和第三个不等式也成立，因此 (x, r) 是该整数规划的一个解，且 $\sum_{w\in W} r_w = |\boldsymbol{r}|_1$。所以，该整数规划的最优值至多为 $|\boldsymbol{r}|_1$。

反过来，取整数规划的一个最优解 (x, r)。若 $x_{(u,w)} = 1$，则令 $\boldsymbol{r}[w] = r_w$ 和 $\mu[u] = w$。根据第二个和第三个不等式，可得到一个可行匹配 μ。假设一条边 (u,w) 阻挡了 μ。那么，$\sum_{w'|w'\succeq_u w} x_{(u,w)} = 0$ 和 $\sum_{u'|u'\succ_w u} x_{(u,w)} < \boldsymbol{q}[w] + r_w$，因此第一个不等式不成立，矛盾。由于 $\sum_{w\in W} r_w = |\boldsymbol{r}|_1$，我们得到整数规划的最优值给出了 MinSumSP 的一个最优解。

□

根据引理3，我们还可以给出一种简单的贪心近似算法。

算法 2 $\lceil |U_{\mathsf{un}}|/c\rceil$-近似

输入：一个 I 的实例
$\mu := \emptyset$

U_{un}：学生最优稳定匹配 $\hat{}\mu$ 中未匹配的学生
设 $L := U_{\mathsf{un}}$
从 $u\in U$ 中删除学生 $u\in U_{\mathsf{un}}$ 从 I 中
当 $L\neq\emptyset$ 时
  选择接下来的至多 c 个元素，并从 L中将它们加入 I 并定义 $\mathcal{V}$，如引理 3
  设 U_{un} 为 I 中学生最优稳定匹配的未匹配学生
  对所有 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}$ 执行
    若存在，则使用算法 1 计算 $I^*(\boldsymbol{v})$ $\mu^*_{\boldsymbol{v}}$
  结束循环
  令 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}'$ 为所需总容量增量最小的向量
  根据 $I^*(\boldsymbol{v})$ 更新容量，并令 $I := I^*(\boldsymbol{v})$
  $\mu := \mu^*_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v})$
结束循环
返回 μ

定理 4。 MinSumSP可实现一个 $|U_{\mathsf{un}}|$-近似算法。此外，对于任意常数 $\lceil |U_{\mathsf{un}}|/c\rceil$，可实现一个多项式时间 c-近似算法。

证明。我们证明，对于任意固定常数c，算法 2 都能在多项式时间内生成一个 $\lceil |U_{\mathsf{un}}|/c\rceil$-近似解。显然，在 while 循环的每次迭代中，实际的学生最优稳定匹配中至多有 c 名未分配学生，因此对于集合 $\mathcal{V}$，有 $|\mathcal{V}|\leq \Delta_u^c$。所以，运行时间为 $\Delta_u^c\cdot poly(|E|)$。

要证明这能得到 $\lceil |U_{\mathsf{un}}|/c \rceil$-近似解，请注意，在 while 循环的任意一次迭代中，所需增加的席位数至多为 OPT。事实上，在 while 循环每次迭代开始时，容量都不小于 I中的容量，因此我们知道存在一个容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq OPT$，使得在容量 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 下，每个学生都能在一个稳定匹配中获得匹配。

因此，该算法的总容量增加至多为 $OPT \cdot \lceil |U_{\mathsf{un}}|/c \rceil$，因为 while 循环共执行 $\lceil |U_{\mathsf{un}}|/c \rceil$ 次。

□

通过检查所有可能的分配向量，我们得到以下简单结果。

定理 5. MinSumSP 可以在 $\Delta_u^{|U_{\mathsf{un}}|} \cdot (n+m)^{O(1)}$ 时间内求解，因此关于 $(|U_{\mathsf{un}}|, \Delta_u)$ 是固定参数可 tractable。

证明。 由引理 3可知，为了计算最优值（以及一个最优容量增加向量），只需遍历 $\mathcal{V}$，计算 $\mu^*_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v})$（如果存在），然后从稳定匹配中选出最优者。对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$，$\mathsf{n}_{\mathsf{F}}(\boldsymbol{v})$ 可以在 $O(|E|)$ 时间内计算，其中 E 是所有可接受配对的集合。此外，$|\mathcal{V}| \leq \Delta_u^{|U_{\mathsf{un}}|}$。因此，我们可以遍历所有 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ 并在 $O(\Delta_u^{|U_{\mathsf{un}}|} \cdot |E|)$ 时间内找到最优解。

□

3.2 极小极大容量

尽管 MinSum 版本是 NP困难且不可近似的，但我们证明 MinMax 版本可以在多项式时间内求解。

算法 3 MinMaxSP的算法。

$\boldsymbol{r}[w] := 0$ 对于所有 $w \in W$
μ:= 学生最优稳定匹配
当 μ 尚未匹配所有学生时执行
  $\boldsymbol{r}[w] = \boldsymbol{r}[w] + 1$ 对于所有 $w \in W$
  $\mu :=$ 容量为 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 的学生最优稳定匹配
结束 while 循环

定理 6. MinMaxSP 可以在多项式时间内求解，并可找到相应的学生最优稳定完美匹配。

证明。 我们证明算法 3 返回一个学生最优解，使得 $|\boldsymbol{r}|_\infty$ 达到最小。为此，我们利用引理 2：增加学校的容量不会使任何学生的处境变差。因此，如果 $\boldsymbol{r}$ 是这样的最优容量增加向量，且 $|\boldsymbol{r}|_\infty = k^{\max}$，那么必然有：若 $\boldsymbol{r}[w] = k^{\max}$对所有 $w \in W$成立，则学生最优稳定匹配仍会匹配所有学生，并且对于任何满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq k^{\max}$ 的容量增加向量，该匹配对学生而言都是最优的。因此，算法找到了最优值 $k^{\max}$，以及与之对应的学生最优稳定匹配。 □

4 稳定且有效匹配

本节将探讨如何为稳定且有效匹配寻找最优容量向量，并证明该问题是 NP困难、难以近似且参数化不可解的。

4.1 最小和容量

首先，我们给出一个对困难性归约至关重要的例子。

例 2. 以下例子不存在有效且稳定的匹配，即使允许将一个容量增加一。我们有五名学生 $u_1, \ldots, u_5$ 和五所学校 $w_1, \ldots, w_5$，每所学校的容量均为一，其偏好如下。

u_1 :	$w_1 \succ w_3 \succ w_4$	w_1 :	$u_5 \succ u_3 \succ u_2 \succ u_1$
u_2 :	$w_1 \succ w_2$	w_2 :	$u_2 \succ u_5 \succ u_3 \succ u_4$
u_3 :	$w_2 \succ w_1 \succ w_3$	w_3 :	$u_3 \succ u_4 \succ u_1 \succ u_5$
u_4 :	$w_2 \succ w_3 \succ w_5$	w_4 :	u_1
u_5 :	$w_3 \succ w_2 \succ w_1$	w_5 :	u_4

如果不增加任何容量，或只将学校 w_4 或学校 w_5 的容量增加 1，那么学生最优稳定匹配为 $\mu = \{(u_5, w_1), (u_2, w_2), (u_3, w_3), (u_1, w_4), (u_4, w_5)\}$，该匹配帕累托劣于匹配 $\mu' = \{(u_2, w_1), (u_5, w_2), (u_3, w_3), (u_1, w_4), (u_4, w_5)\}$。

如果将学校 w_1 的容量增加 1，那么学生最优稳定匹配变为 μ ={(u_2, w_1), (u_3, w_1), (u_5, w_2), (u_4, w_3), (u_1, w_4)}，该匹配帕累托劣于 $\mu' = \{(u_2, w_1), (u_3, w_1), (u_4, w_2), (u_5, w_3), (u_1, w_4)\}$。

如果将学校 w_2 的容量增加 1，那么学生最优稳定匹配为 $\mu = \{(u_2, w_1)$、(u_3, w_2)、(u_5, w_2)、(u_4, w_3)、$(u_1, w_4)\}$，该匹配被 $\mu' = \{(u_2, w_1)$、(u_3, w_2)、(u_4, w_2)、(u_5, w_3)、$(u_1, w_4)\}$帕累托劣于。

最后，如果将学校 w_3 的容量增加 1，那么学生最优稳定匹配为 μ ={(u_5, w_1)、(u_2, w_2)、(u_3, w_3)、(u_4, w_3)、$(u_1, w_4)\}$，该匹配被 $\mu' = \{(u_2, w_1)$、(u_3, w_2)、(u_4, w_3)、(u_5, w_3)、$(u_1, w_4)\}$帕累托劣于。

然而，如果删除学生 u_5，那么 $\mu = \{(u_2, w_1), (u_3, w_2), (u_4, w_3), (u_1, w_4)\}$ 就是稳定、完美且有效的，无需增加任何容量。

利用例 2 中的构件以及类似于定理 3中的构造，我们可以证明 MinSumSE 的困难性。

定理 7. MinSumSE 是 NP完全，且关于容量上界 k^+ 是 W*[1]*-困难的。

证明。为了证明困难性，我们给出一个从 NP完全问题 Multi-Colored Clique 出发的多项式时间参数化归约；该问题关于解的大小 h 是 W[1]-困难的。设 $I = (G, h, (V_1, \ldots, V_h))$ 是 MCC 的一个实例，其中 $G = (V, E)$，且 $V = \{v_1, \ldots, v_{\hat{n}}\}$ 和 $E = \{e_1, \ldots, e_{\hat{m}}\}$。我们按如下方式构造 MinSumSP 的一个实例 I'。对于每一对颜色 $p = \{z, z'\} \subseteq [h]$，创建一个边选择器构件 G_p。这些构件是例 2 的复制品，包含 5 所学校 $w_1^p, \ldots, w_5^p$ 和 5 名学生 $u_1^p \ldots, u_5^p$。将第五名学生 u_5^p 称为 s_p，它将担任颜色对 p 的边选择学生。偏好相同，但对于每个这样的构件，G_p, s_p 还有其他可接受学校。对于每条边 $e_t \in E$，创建一所学校 e_t 和一名学生 f_t。对于每个顶点 $v_i \in V$，创建一所学校 w_i 和一名学生 v_i。定义
$U = \{u_1^p, u_2^p, \ldots, u_5^p = s_p \mid p \subseteq [h]$，使其满足 $|p| = 2\} \cup \{f_t \mid e_t \in E\} \cup V$，并定义
$W = E \cup \{w_i \mid v_i \in V\} \cup \{w_1^p, w_2^p, \ldots, w_5^p \mid p \subseteq [h]$，使其满足 $|p| = 2\}$。

令 $p = \{z, z'\} \subseteq [h]$ 为一对颜色，并令 E^p 表示端点分别属于 V_z 和 $V_{z'}$的边所组成的集合。学生的偏好列表和学校的优先级顺序定义如下，其中 $e_t \in E^p$ 表示端点为 v_i 和 v_j的边。 G_p 构件内局部学生和学校的偏好及优先级未列出（除 $u_5^p = s_p$外，其偏好列表以非局部方式扩展），因为它们继承自例 2。

Students	Schools
f_t: e_t	e_t: $f_t \succ \langle\{v_i, v_j\}\rangle \succ s_p$
v_i: $\langle\{e_z \mid e_t \in E \text{ s.t. } v_i \in e_z\}\rangle \succ w_i$	w_i: v_i
v_j: $\langle\{e_z \mid e_t \in E \text{ s.t. } v_j \in e_z\}\rangle \succ w_j$	w_j: v_j
s_p: $\langle E^p \rangle \succ w_3^p \succ w_2^p \succ w_1^p$	

初始时，每所学校的容量均为一。总容量增量上界设为 $k^+ = \binom{h}{2} + h$。至此，实例构造完成，该构造可在多项式时间内完成。

剩下要证明正确性，即 I 存在一个多彩色的 h-团，当且仅当存在一个容量向量 $\boldsymbol{r}$，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq k^+$，使得 $(U, W, (\succ_x)_{x \in U \cup W}, \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r})$ 存在稳定、完美且有效的匹配。

对于“仅当”部分，令 K 为 I的一个多彩色 h团。我们声称，可以增加与 $E(K)$中的边相对应的学校的容量，使总容量增加量为 k^+，从而得到一个稳定、完美且有效的匹配。我们首先定义所需的匹配 μ，再据此定义容量增加向量。对于每个“团顶点” $v_i \in V(K)$，令 e_t 为所有与之关联的“团边”$E(K) \cap \{e_z \in E \mid v_i \in e_z\}$ 中索引最小的一条边，并设 $\mu(v_i) = e_t$。对于每个颜色对 $p \subseteq [h]$，令$e_t \in E(K)$为其两个端点的颜色属于 p的那条“团边”，并设 $\mu(s_p) = e_t$。对于构件中的其他学生，令 $\mu(u_2^p) = w_1^p$、$\mu(u_3^p) = w_2^p$、$\mu(u_4^p) = w_3^p$、$\mu(u_1^p) = w_4^p$。最后，对于每个剩余顶点 $v_i \in V \setminus V(K)$（以及每条边 $e_t \in E$），设 $\mu(v_i) = w_i$（以及 $\mu(f_t) = e_t$）。显然，所得匹配 μ是完美的。容量增加向量根据 μ定义。更确切地说，对于每个 $e_t \in E(K)$，定义$\boldsymbol{r}[e_t] = |\mu^{-1}(e_t)| - 1$；对于每所剩余学校 $x \in W \setminus E(K)$，定义 $\boldsymbol{r}[x] = 0$。现在注意，恰有 $\binom{h}{2}$ 所学校的容量从一增加到至少二。这些 $\binom{h}{2}$ 所学校总共接纳 $\binom{h}{2} + \binom{h}{2} + h$名学生，其中包括 $\binom{h}{2}$ 名边选择器学生，以及与团顶点对应的 h 名学生。因此，总容量增加量确实为 $\binom{h}{2} + h$。还需证明 μ 是稳定且有效的。

正如我们在例 2 中所见，μ限制为 $\{u_1^p, \ldots, u_4^p, w_1^p, \ldots, w_5^p\}$时，对于任意颜色对 p，都是稳定且有效的。此外，它们都没有各自构件之外的可接受学校/学生，因此不可能存在一种匹配，使其中一方严格改善而其他各方至少不变。所有学生 f_t、 $t \in [\hat{m}]$都获得了最优选择，因此不会与任何学校形成阻塞对。由此可知，他们也无法严格改善。学生 s_p、 $p \subseteq [h]$也不可能参与任何阻塞对，因为每所对 s_p 而言更好的学校 e_t 容量为一，且已分配给更好的学生 f_t。由于 f_t 只有一所可接受学校e_t，因此只有在从 e_t中移除 f_t 时， s_p 才可能严格改善，而这意味着她无法至少不变。最后，没有学生 $v_i \in V$ 能参与任何阻塞对，因为每所 v_i认为优于 $\mu(v_i)$ 的学校容量为一，且已经分配给其最偏好的学生。与前文

情形类似，这名学生没有其他可接受学校，因此只有将一名 f_t学生从其学校中移除， v_i 学生才可能严格改善。

因此，我们得出 μ 是稳定的；学生只有在另一名学生获得更差的名次时，才可能严格改善自己的名次，因此它也是帕累托有效的。

对于“若”部分，设 $\boldsymbol{r}$ 是一个容量增加向量，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq k^+$，且 $(U, W, \succ_{x\in U\cup W}, \boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})$ 存在一个稳定、完美且有效的匹配，记为 μ。首先，根据稳定性，对于所有 $e_t \in E$， $\mu(f_t) = e_t$ 都成立，因为 f_t 和e_t 互为最优选择。其次，由于 μ 是完美、稳定且有效的，每个边选择学生 s_p都必须与某个 $e_t \in E^p$ 匹配；否则，构件G_p 中各学校的容量增加量之和至少为 2。设被分配到学校 $e_t \in E^p$ 的边选择学生人数为 ℓ。由于来自 $\{s_p \mid p \subseteq [h] \text{ 且满足 } |p| = 2\}$ 的学生没有共同的可接受学校，因此 E 中至少有 ℓ所学校必须增加容量。此外，对于每个 $v_i \in \mu(s_p)$，为避免学校 $\mu(s_p)$ 与 v_i 形成阻塞对，必须满足 $\mu(v_i) \in \{e_z \in E \mid v_i \in e_z\}$。这意味着，与 $\mu(s_p)$ 的端点对应的学生必须与 E中的某所学校匹配。

综上可得，容量增加之和至少为 $2(\binom{h}{2} - \ell) + \ell + \frac{1+\sqrt{1+8\ell}}{2}$，因为有 $\binom{h}{2} - \ell$ 个构件，其中增加量之和至少为 2；其余 ℓ 个边选择学生与来自 E 的 ℓ 所学校匹配，并且 ℓ 条边至少与 $\frac{1+\sqrt{1+8\ell}}{2}$ 个顶点关联（因为 x 个顶点最多只能跨越 $\binom{x}{2}$ 条边）。由于 $-\ell + \frac{1+\sqrt{1+8\ell}}{2}$ 的导数为 $-1 + \frac{2}{\sqrt{1+8\ell}} < 0$，每当 $\ell \geq 1$ 时，我们就有 $-\ell + \frac{1+\sqrt{1+8\ell}}{2}$ 在区间 $[1, \binom{h}{2}]$ 上严格递减。因此，它在 $\ell = \binom{h}{2}$ 或 $\ell = 0$ 处取最小值。此外，若 $\ell = \binom{h}{2}$，则 $2(\binom{h}{2} - \ell) + \ell + \frac{1+\sqrt{1+8\ell}}{2} = \binom{h}{2} + h = k^+$；若 $\ell = 0$，则所需的容量增加至少为 $2\binom{h}{2} > k^+$，因为 $h \geq 2$。因此，所有边选择学生都必须与 e_t 所学校匹配，相应的 $\binom{h}{2}$ 条边必须恰好与 h 个顶点相邻。只有当这些顶点构成一个大小为 h 的团 K 时，这种情况才可能发生。 K 是多彩色的这一点，可由每个边选择学生都对应一个不同的颜色对这一事实得出。

至此，NP困难性结果的证明完成。由于 $k^+ = \binom{h}{2} + h$，可立即得出 MinSumSE是 W[1]-困难的（关于 k^+）。 □

请注意，在定理7的证明中，所构造的实例具有完美且稳定的匹配。因此，即使 MinSumSE，其仍然是 NP困难的。

推论2. MinSumSE 无法被 Δ_u-近似，也无法被 $|U_{\text{un}}|$-近似，若 $P \neq NP$。

注释1. 以类似方式将例 2 作为构件用于定理 2 的证明（用例 e_i2 的构件替换原先未分配的学生），我们可以证明 MinSumSE 即使偏好长度和优先级长度均为常数，仍然是 NP完全的。（我们还利用了这样一个事实：即使每个集合的大小至多为三，且每个元素恰好出现在三个集合中， Set Cover 仍然是 NP困难的，因此度有一个常数上界。）

4.2 极小极大容量

We s从一个例子开始，说明 MinMaxSE 相较于 MinMaxSP 的难点 .

例 3。虽然 MinMaxSP可以用算法 3 轻松求解，但它无法为MinMaxSE给出最优解。考虑例 2 中的实例。再添加 10 所学校 $w'_1, \ldots w'_5, v_1, \ldots, v_5$。 $w'_1, \ldots, w'_5$学校对 u_i 学生的排序方式与 $w_1, \ldots, w_5$相同。此外，对于每个 u_i，我们先将 v_i 追加到她的偏好列表中，然后对于每个 j，若 w_j 对 u_i可接受，则按照可接受的 w_j 学校在偏好列表中的相同顺序，将 w'_j 学校追加到她的偏好列表末尾。最后，对于每个 $\{w_1, \ldots, w_5, v_1, \ldots, v_5\}$，添加一名虚拟学生，使每所学校及其虚拟学生都将对方视为最优选择。偏好如下（偏好列表中不包括虚拟学生）：

u_1：	$w_1 \succ w_3 \succ w_4 \succ v_1 \succ w'_1 \succ w'_3 \succ w'_4$	w_1, w'_1：	$u_5 \succ u_3 \succ u_2 \succ u_1$
u_2：	$w_1 \succ w_2 \succ v_2 \succ w'_1 \succ w'_2$	w_2, w'_2：	$u_2 \succ u_5 \succ u_3 \succ u_4$
u_3：	$w_2 \succ w_1 \succ w_3 \succ v_3 \succ w'_2 \succ w'_1 \succ w'_3$	w_3, w'_3：	$u_3 \succ u_4 \succ u_1 \succ u_5$
u_4：	$w_2 \succ w_3 \succ w_5 \succ v_4 \succ w'_2 \succ w'_3 \succ w'_5$	w_4, w'_4：	u_1
u_5：	$w_3 \succ w_2 \succ w_1 \succ v_5 \succ w'_3 \succ w'_2 \succ w'_1$	w_5, w'_5：	u_4
		v_i：u_i	

每个容量均为 1。显然，在不增加容量的情况下，不存在稳定且有效的匹配：每所配有虚拟学生的学校都必须只录取其虚拟学生，而 u_1、……、u_5 无法以稳定且有效的方式分配给 w'_1、……、w'_5，正如我们在例2中所见。存在一个最优容量增加向量，其最大增加量为 1：将 v_1、……、v_5的容量各增加 1，其他学校的容量增加 0。然后，如果将 u_i 分配给 v_i，那么匹配将同时稳定且帕累托有效。然而，如果将所有学校的容量都增加 1，那么所有 u_1、……、u_5 都必须分配到 w_1、……、w_5中的一所学校。但正如我们在例2中所见，这不可能以稳定且有效的方式实现。

最后，我们证明 MinMaxSE 也是 NP完全且不可近似的，这与我们关于 MinMaxSP的结果形成对比。

定理 8. MinMaxSE 是 NP完全的，即使 $k^{\max} = 3$ 且每个偏好列表和优先级列表的长度都有常数上界。此外，MinMaxSE 和 MinSumSE 均不存在多项式时间的 $\mathcal{O}((|U| + |E|)^{1-\varepsilon})$近似算法，适用于任意 $\varepsilon > 0$若 $P \neq NP$，即使学生的偏好列表长度至多为 5。

证明。在开始证明之前，我们先描述将要使用的两个构件。令 $\eta \geq 3$ 为稍后指定的一个正整数。

子句构件。我们有 3 名学生 u_1、u_2、c 和 3 所学校 w_1、w_2、w_3，以及 2η 个虚拟学生 d_1^1，……，d_1^η、d_2^1，……，d_2^η 和 2η 所虚拟学校 s_1^1，……，s_1^η、s_2^1，……，s_2^η。偏好如下：

$u_1:$	$w_1 \succ w_2$	$w_1:$	$c \succ u_1 \succ d_1^1 \succ \cdot \succ d_1^\eta \succ u_2$
$u_2:$	$w_1 \succ w_2 \succ w_3$	$w_2:$	$u_1 \succ u_2 \succ d_2^1 \succ \cdots \succ d_2^\eta \succ c$
$c:$	$w_2 \succ w_1$	$w_3:$	u_2
$d_i^j:$	$w_i \succ s_i^j$	$s_i^j:$	d_i^j,

对于 $i \in [2]$、$j \in [\eta]$。所有学校的初始容量均为一。该构件的关键性质是：如果每所学校的容量至多为 $\eta + 1$ （且至少为一），那么在学生最优稳定匹配中，c 与 w_1 匹配，并且 u_1 与 w_2 匹配（如果 w_1 的容量为一），或 u_2 与 w_2 匹配（如果 w_1 的容量大于一）。无论哪种情况，所得匹配都不是帕累托有效的，因为学生 c 会希望与 u_1 或 u_2 （位于 w_2的那位）互换位置，且对方也有同样意愿。

然而，如果学生 c 被匹配到构件之外的一所更好的学校，那么无需增加任何容量，就存在一个稳定且帕累托有效的匹配，$\mu = \{(u_1, w_1), (u_2, w_2), (d_i^j, s_i^j) \mid i \in [2], j \in [\eta]\}$。

变量构件。我们有 5 名学生 p_1、p_2、p_3、T、F 和 5 所学校 z_1、z_2、z_3、z_4、z_5，以及 2η 名虚拟学生 e_1^1、……、e_1^η、e_2^1、……、e_2^η 和 2η 所虚拟学校 t_1^1、……、t_1^η、t_2^1、……、t_2^η。偏好和优先级如下：

$p_1:$	$z_1 \succ z_2$	$z_1:$	$T \succ F \succ p_3 \succ e_1^1 \succ \cdots \succ e_1^\eta \succ p_1 \succ p_2$
$p_2:$	$z_1 \succ z_2 \succ z_3$	$z_2:$	$p_1 \succ e_2^1 \succ \cdots \succ e_2^\eta \succ p_2 \succ p_3$
$p_3:$	$z_2 \succ z_1 \succ z_4$	$z_3:$	p_2
$T:$	z_1	$z_4:$	p_3
$F:$	$z_1 \succ z_5$	$z_5:$	F
$e_i^j:$	$z_i \succ t_i^j$	$t_i^j:$	e_i^j,

其中 $i \in [2]$、$j \in [\eta]$。

每个初始容量均为 1。该构件的关键观察是：如果 T 和 F 都被匹配到构件外更好的学校，并且构件内每所学校的容量至多为 $\eta + 1$，那么在学生最优稳定匹配中，p_3 被匹配到 z_1，而 p_1 被匹配到 z_2。因此，p_1 和 p_3 都会嫉妒对方所在的学校，所以该匹配不是帕累托有效的。然而，如果 T 和 F 中有一人被匹配到构件内，那么在不增加任何容量的情况下，学生最优稳定匹配会将其匹配到 z_1 （如果 T 和 F 都被匹配到构件内，则 T 被匹配到 z_1，而 F 被匹配到 z_5）；同时，它将 p_1 匹配到 z_2，将 p_2 匹配到 z_3，将 p_3 匹配到 z_4，并将每个 e_i^j 匹配到 t_i^j，且该匹配是有效的。

归约。现在我们给出从 (2,2)-3SAT出发的归约。

(2,2)-3SAT

输入：一个布尔 3CNF 公式 $\varphi = \{C_1 \wedge \cdots \wedge C_{\hat{}m}\}$，其变量集合为 $X_1, \ldots, X_{\hat{n}}$，且每个子句 C_j都包含三个文字，每个变量 X_i 恰好以正形式出现两次，并以否定形式出现两次。

问题：φ 是否存在满足赋值?

令 $I = \varphi$ b 为 (2,2)-3SAT 的一个实例，其中子句为 $C_1, \ldots, C_{\hat{m}}$，变量为 $X_1, \ldots, X_{\hat{n}}$。注意 at $3\hat{}m = 4\hat{}n$。我们创建 构造一个实例 I' 属于MinMaxSE，并构造一个实例 I'' 属于 MinSumSE，如下所示。

– 对于每个子句 C_j, $j \in [\hat{}m]$，我们构造一个子句构件 G_1^j。我们将构件 G_1^j 中的学生 c 记为 c^j。– 对于每个变量 X_i，我们构造一个变量构件 G_2^i。我们将 G_2^i 中的 T 和 F 学生分别记为 T^i 和 F^i。– 最后，对于每个变量 X_i，构造两个文字学校 x_i 和 $\overline{x_i}$，它们分别各有一个虚拟学生 y_i 和 $\overline{y_i}$。

总计，我们有 $(3 + 2\eta)\hat{}m + (7 + 2\eta)\hat{}n$ 所学校和 $(3 + 2\eta)\hat{}m + (7 + 2\eta)\hat{}n$ 名学生。由于 $3\hat{}m = 4\hat{}n$，这两个数量均为 $\mathcal{O}(\eta\hat{}n)$。

对于每个文字学校 x_i，其优先级列表为 $y_i \succ T^i \succ c^1(x_i) \succ c^2(x_i)$，其中 $c^l(x_i) = c^j$，当且仅当文字 X_i 的第 l 次出现位于 C_j 中时成立。对于每个文字学校 $\overline{x_i}$，其优先级列表为 $\overline{y_i} \succ F^i \succ c^1(\overline{x_i}) \succ c^2(\overline{x_i})$，其中 $c^l(\overline{x_i}) = c^j$，当且仅当文字 $\overline{X_i}$ 的第 l 次出现位于 C_j 中时成立。虚拟学生 y_i、$\overline{y_i}$ 仅将各自对应的学校视为可接受。

其他每个学生和学校都继承其对应构件的偏好列表/优先级列表，并进行如下扩展。对于每个构件 G_1^j, $j \in [\hat{}m]$，我们将 c^j 的偏好列表扩展为在其开头添加 $\ell_{j_1} \succ \ell_{j_2} \succ \ell_{j_3}$

，其中 $\ell_{j_1}, \ell_{j_2}, \ell_{j_3}$ 对应于与 C_j 中文字相对应的三个文字学校。最后，对于每个学生 T^i，我们将 x_i 加为其最优学校；对于每个学生 F^i，我们将 $\overline{x_i}$ 加为其最优学校。

每个初始容量均为 1。此外， $k^{\max} = 3$ 对 I' 而言， $k^+ = 3\hat{}n$ 对 I''而言。

命题 8.1。 如果存在一个满足赋值，那么就存在一个良好的容量增加向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $|\boldsymbol{r}|_1 = 3\hat{}n$且 $|\boldsymbol{r}|_\infty = 3$。

证明。设 f 是一个满足赋值。首先，我们描述 $\boldsymbol{r}$。对于每个 $i \in [\hat{}n]$ ，如果 X_i 被赋值为真，那么令$\boldsymbol{r}[x_i] = 3$ 和 $\boldsymbol{r}[\overline{x_i}] = 0$；否则，令 $\boldsymbol{r}[\overline{x_i}] = 3$ 和 $\boldsymbol{r}[x_i] = 0$。对于所有其他学校 s，令 $\boldsymbol{r}[s] = 0$。显然， $|\boldsymbol{r}|_1 = 3\hat{}n$且 $|\boldsymbol{r}|_\infty = 3$。令 μ 为如下匹配。将每个虚拟学生 y_i、 $\overline{y_i}$、 $i \in [\hat{}n]$ 匹配到其虚拟学校。如果 X_i被赋值为真，那么我们将 T^i匹配到学校 x_i；否则，将 F^i匹配到学校$\overline{x_i}$。然后，对于每个子句C_j，令 ℓ_{i_j}为 C_j中第一个为真的文字，并将学生 c^j匹配到 ℓ_{i_j}的文字学校。对于$\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$， μ是可行的，因为每个变量在正文字形式和负文字形式中都恰好出现两次，因此每所文字学校只有 4 个相邻学生，包括其虚拟学生。所以，即使我们将该子句的两个 c^j 学生都匹配到该校，其在 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 中的容量 $1+3$ 也不会被违反。

由于 f 是一个满足赋值，对于每个 $j \in [\hat{}m]$， c^j 都被匹配到构件 G_1^j 外部的一所更好的学校，因此正如我们之前所见，内部其余学生可以以稳定且帕累托有效的方式进行匹配。由于 f是一致的，对于每个 $i \in [\hat{}n]$， T^i和 F^i中恰有一个被匹配到 G_2^i外部的一所更好的学校，因此正如我们所见，内部剩余学生可以以稳定且帕累托有效的方式进行匹配。

我们断言所得匹配是稳定且帕累托有效的。对于稳定性，我们证明不存在由构件诱导的边以外的边会造成阻挡。显然，(y_i, x_i)、$(\overline{y_i}, \overline{x_i})$边都不会造成阻挡。类型为 (c^j, ℓ_i)、 $\ell \in \{x, \overline{x}\}$ 的边无法造成阻挡，因为我们将 c^j匹配到了增加其容量的那所学校中最优的学校，而其他学校都由各自最优的（虚拟）学生填满。最后，类型为 (T^i, x_i) 或 $(F^i, \overline{x_i})$ 的边也无法造成阻挡，因为它要么已包含在匹配中，要么该学校已由其最优学生填满。对于帕累托有效性，首先注意到，构件内部的匹配是帕累托有效的。容易验证，对于任何在其构件外有可接受学校且未被匹配到其最优学校的学生而言，她所有更好的学校都由处于其最优学校的学生填满。因此，学生只有在使另一名学生境况变差的情况下才能得到改善，所以该匹配也是有效的。$\diamond$

断言 8.2. 如果存在良好容量增加向量 $\boldsymbol{r}$ ，其满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq \eta$ 或 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq \eta$，那么就存在满足赋值 f。

证明。假设存在良好容量增加向量 $\boldsymbol{r}$ ，其满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq \eta$ ，并且相对于容量 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 存在稳定且有效匹配 μ 。那么，对于每个构件 G_1^j， c^j 必须与某所文字学校匹配；否则，在容量增加至多为 η 的情况下，G_1^j 内就不存在稳定且帕累托有效的匹配。此外，如果 c^j 与文字学校 ℓ_i 匹配， $\ell \in \{x, \overline{x}\}$，那么由于 ℓ_i 更喜欢其对应的 T^i，而不是 F^i 学生，后者则将 ℓ_i 视为她的最优学校，因此根据 μ 的稳定性，她也必须与 ℓ_i 在 μ 中匹配。因此，如果存在某个变量 X_i，使得 x_i 和 $\overline{x_i}$ 都有来自构件 G_1^j 的 c^j 居民，那么 T^i 和 F^i 都必须在 G_2^i 之外与更好的学校匹配。因此，正如我们之前所观察到的，在构件 G_2^i 内，容量增加至多为 η 时，不存在稳定且有效的匹配。这意味着，如果我们定义一个真值赋值：当 F^i 未与 $\overline{x_i}$ 匹配时，将 X_i 设为真；否则设为假，那么这个赋值是一致的，并且每个子句都有一个真文字。

现在，如果存在一个满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq \eta$ 的良好容量增加向量，那么 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq \eta$ ，同样的论证表明存在一个满足赋值 f。$\diamond$

如果令 $\eta = 3$，那么就证明了定理的第一个结论，即 MinMaxSE 是 NP完全的，即使偏好列表和优先级列表的长度至多为 8。最长的优先级列表是G_2^i 构件中学校 z_1 的优先级列表，长度为 8。最长的偏好列表是学生 c^j 的偏好列表，长度为 5。

对于另一个结论，令 $\eta = \hat{}n^c$，其中 $c > 0$ 是任意常数。显然， η 是输入规模的多项式，因此该归约仍然是多项式时间的。因此，根据断言 8.1 和 8.2 可知，对于任意$c > 0$，判定 MinMaxSE 和 MinSumSE 的最优值至多为 $3\hat{}n$ 还是至少为 $\eta = \hat{}n^c$ ，是 NP困难的。正如在 I' 和 I'' 中，我们有 $|U|$， $|E| = \mathcal{O}(\eta\hat{}n) = \mathcal{O}(\hat{}n^{c+1})$ ，这意味着如果 $P \neq NP$，则 MinSumSE 和 MinMaxSE 都不存在多项式时间的$\mathcal{O}((|U|+|E|)^{\frac{c-1}{c+1}})$ 近似算法。由于 c 可以是任意大的常数，且当 c 趋于 ∞ 时， $\frac{c-1}{c+1}$ 趋于 1，这等价于说，对于任意 $\varepsilon > 0$，都不存在$O((n+m)^{1-\varepsilon})$ 近似算法。此外，由于增加 η 不会增加学生偏好列表的长度，因此即使每个偏好列表的长度至多为 5，这一不可近似性结果仍然成立。 □

5 学生受欢迎匹配

本节我们考虑以下问题：MinSumSSP 和 MinMaxSSP，也就是说，我们希望找到一个稳定且学生受欢迎的匹配。回顾引理1中的以下简单观察。

观察 3. 如果存在学生受欢迎稳定匹配，那么它必定是学生最优稳定匹配。

我们还提出另一个简单但至关重要的观察。

观察4. 如果在匹配 μ中，任何学生 u 只有通过取代其最优学校中的一名学生 u' 才能改善自身状况，那么 μ 就是学生受欢迎的。

事实上，在这种情况下，对于任何改善自身状况的学生 u，都会有一名状况变差的学生 u'，她必定要离开自己的最优学校，因此对于任何其他匹配，所有学生的投票总和始终非负。

5.1 最小和容量

我们先给出一个例子。

例4. 设 η 为正整数。我们给出一个例子，其中不存在学生受欢迎稳定匹配，即使允许将每个容量增加 η也如此。设有 $3+2\eta$ 名学生 u_1、u_2、e、d_1^1、……、d_1^η、d_2^1、……、d_2^η，以及 $3+2\eta$所学校 w_1、w_2、w_3、s_1^1、……、s_1^η、s_2^1、……、s_2^η，每所学校的容量均为一。偏好如下：

$$\begin{array}{ll|ll} u_1: & w_1 & w_1: & u_1 \succ d_1^1 \succ \cdots \succ d_1^\eta \succ e \\ e: & w_1 \succ w_2 & w_2: & e \succ u_2 \succ d_2^1 \succ \cdots \succ d_2^\eta \\ u_2: & w_2 \succ w_3 & w_3: & u_2 \\ d_i^j: & w_i \succ s_i^j & s_i^j: & d_i^j \end{array}$$

如果我们最多只能将容量增加 η，那么在学生最优稳定匹配中，e位于 w_2，而 d_2^η 不在 w_2。因此，d_2^η 可以取代 e并改善自己的情况；同时，e 可以取代 w_1 进入 u_1的位置，也能改善自己的情况，而只有 u_1 的情况变差，这意味着该匹配不是学生受欢迎的。然而，如果 e被分配到外部一所更好的学校，那么匹配 $M=\{(u_1,w_1),(u_2,w_2),(s_i^j,d_i^j) \mid i\in[2],j\in[\eta]\}$是稳定且学生受欢迎的，因为任何学生若想改善自己的情况，都只能取代一名位于其第一志愿的学生，因此情况变差的学生人数至少也会同样多。

我们从 MinSum 变体入手，并证明 MinSumSSP 是 NP困难的。

定理 9. MinSumSSP 是 NP完全的，并且不存在多项式时间常数近似或 $|U_{\text{un}}|$-近似算法，如果 $P\neq NP$。即使 $|U_{\text{un}}|=0$，它仍然是 NP困难的。

证明。 NP包含性可由引理推出1 ，与前面的问题相同。

我们从以下问题归约：NP困难 Set Cover 问题。如第3.1小节所述，对于任意常数 d，近似仍然是 NP困难的 imate it within a f因子 f d 。设 I 是一个实例 由 Set Cover 和集合 $C_1,..,C_{\hat{}}m$ 以及元素 $\mathcal{X}=\{1,\ldots,\hat{}n\}$（$OPT(I)=k\leq$）构成 $\hat{m}$.

我们创建一个实例 实例 I' 如下： MinSumSSP

学生与学校

– 对于每 个集合 C_j, $j\in[\hat{}m]$，我们创建一个容量为 1 的集合学校 c_j，并配备一个虚拟学生 d_j. – 对于每个元素 $i\in[\hat{}n]$，我们添加一个构件 G^i，其包含 $\eta=\hat{}m(\hat{}m+1)\hat{}n$，它是例 4 的一个副本。我们称$e_i$ 中对应于例 G^i 4 中的 e 的学生为 。

– 对于每个 $j\in[\hat{}m]$，我们添加 $\hat{}n$ 名学生 $u_j^1,\ldots,u_j^{\hat{n}}$，以及学校 $w_j^1,\ldots,w_j^{\hat{n}}$，每所学校的容量为 1。令 $U_j:=\{u_j^1,\ldots,u_j^{\hat{n}}\}$。

偏好与优先级 偏好和优先级定义如下： p

Students	Schools
e_i: $\langle\mathcal{C}(e_i)\rangle \succ G^i$	c_j: $d_j \succ \langle U_j\rangle \succ \langle\mathcal{E}(C_j)\rangle$
u_j^ℓ: $c_j \succ w_j^\ell$	w_j^ℓ: u_j^ℓ
d_j: c_j,	

其中，对于每个集合 C_j，$\mathcal{E}(C_j)$ 表示来自对应于 C_j 中各元素的构件的学生集合 e_i；对于每个学生 e_i, $\mathcal{C}$, (e_i) 表示对应于包含 i 的各集合的学校集合。每所学校的初始容量为一。

断言 9.1. 对于任意常数 $d\geq 1$，如果我们能找到一个容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，使得 $|\boldsymbol{r}|_1\leq d(k+1)\hat{}n$，那么我们就能找到一个集合覆盖，使用至多 $d(k+1)\ -1$ 个集合。

证明。如果 $d > \hat{m}$，那么很容易找到一个集合覆盖，使用至多 $d(k+1) - 1 \geq \hat{m}$ 个集合，因为我们可以将所有集合都包括在内。

从现在起，假设 $d \leq \hat{m}$。设 $\boldsymbol{r}$ 为一个良好容量增加向量，使得 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq d(k+1)\hat{n}$，并设 μ 为一个学生受欢迎的稳定匹配。对于每个 c_j，d_j 都与其匹配，因为他们彼此都是对方的最佳选择。因此，对于每个 c_j，原有容量 1 均由 d_j 填满。由于 $\eta = \hat{m}(\hat{m}+1)\hat{n} \geq d(k+1)\hat{n}$（我们知道 d，$k \leq \hat{m}$），容量增加量不可能超过 η；因此，根据例4，在任何学生受欢迎的稳定匹配中，每个 e_i 都必须与一所 c_j 学校匹配。令 l 表示有学生 e_i 被分配到其中的学校数量。对于每个 c_j，所有 u_j^1、……、$u_j^{\hat{n}}$都比任何 e_i 学生更受青睐，因此对于每一所这样的学校，其对应的所有 u_j^ℓ 学生都必须分配给该校。由于 μ 将所有 e_i 学生分配到集合学校，我们得出容量增加量至少为 $\hat{n}l + \hat{n}$。由于 $\hat{n}l + \hat{n} \leq d(k+1)\hat{n}$，我们得到 $l \leq d(k+1) - 1$。由于所有元素代理都在 μ中匹配，与这些学校对应的 l 集合构成一个集合覆盖。$\diamond$

断言 9.2。 对于最优容量增加向量 $\boldsymbol{r}$ 的 I'，我们有 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq (k+1)\hat{n}$.

证明。设 C_{j_1}、……、C_{j_k} 是一个最优集合覆盖。定义 $\boldsymbol{r}$ 如下：对于所有 $j \in [\hat{m}]$，$\ell \in [\hat{n}]$，令 $\boldsymbol{r}[w_j^\ell] = 0$。若 $j \in \{j_1, \ldots, j_k\}$，则令 $\boldsymbol{r}[c_j] = \hat{n} + p$，其中 p 是这样的元素 i 的数量：C_j 是 $\{j_1, \ldots, j_k\}$ 中索引最小且覆盖 i 的集合。最后，其他情况下令 $\boldsymbol{r}[c_j] = 0$。显然，$|\boldsymbol{r}|_1 \leq k\hat{n} + \hat{n}$。

我们断言，由边 $\{(d_j, c_j) \mid j \in [\hat{m}]\} \cup \{(u_j^\ell, w_j^\ell) \mid j \in [\hat{m}] \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}, \ell \in [\hat{n}]\} \cup \{(u_j^\ell, c_j), (e_i, c_{l_i}) \mid j \in \{j_1, \ldots, j_k\}, i, \ell \in [\hat{n}]\}$ 给出的匹配 μ，与 G^i 构件内部唯一的稳定匹配（不含 e_i）一起，是稳定且学生受欢迎的；其中 l_i 是满足 $i \in C_{l_i}$ 的 $\{j_1, \ldots, j_k\}$ 中索引最小的项。对于 $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$，$\mu$ 显然是可行的。

假设存在一对阻塞对 (x, y) 指向 μ。学生 x 不可能是 d_j，因为 d_j 正处于她的最优选择。她也不可能是 u_j^ℓ，因为对于每个 $j \in [\hat{m}]$，要么 u_j 正处于她的最优选择 c_j（如果 $j \in \{j_1, \ldots, j_k\}$），要么她唯一更好的学校 c_j 在 $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$中的容量为 1，且已被一名更优秀的学生 d_j占据。学生 x 不可能是 e_i，因为同样地，要么 e_i 正处于她的最优学校，要么她所有更好的学校容量都为 1，且已被一名更优秀的学生 d_j占据。这是因为 C_{j_1}，…，C_{j_k} 构成一个集合覆盖，并且对于每个 e_i，我们都将她匹配到容量增加的最优学校（即索引最小的那所）。最后，x 不可能是构件 G^i中的其他任何学生，因为根据例4，μ 在构件内部是稳定且学生受欢迎的。因此，阻塞学生 x没有其他可能的人选，矛盾。为了证明 μ 是学生受欢迎的，注意在上述每种情况下，对于 x，要么 x 无法改善，要么她只能通过替换自己最喜欢的位置上的学生来改善，因此在任何匹配中，改善的学生人数都不会多于处境变差的学生人数。$\diamond$

现在假设我们有一个针对 MinSumSSP 的多项式时间 近似算法，其中 d 是某个常数。于是，根据断言 9.2，我们可以找到一个良好的容量增加向量 $\boldsymbol{r}$，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq d(k+1)\hat{n}$。由断言 9.1 可知，我们也可以找到一个至多使用 $d(k+1) - 1$ 个集合的集合覆盖。由于 ${}^{d}{}_{(k+1)_k}{}^{-1} \leq 2d$，该算法为集合覆盖问题提供了一个多项式 $2d$ 近似算法；若 $P \neq NP$，这便产生了矛盾。

与该归约 $|U_{\mathsf{un}}| = 0$ 类似，由此可知也不存在 $|U_{\mathsf{un}}|$ 近似算法，而且即使有 $|U_{\mathsf{un}}| = 0$，该问题仍然是困难的。 □

注 2。将示例 4 用于定理 7证明中的边选择器构件，我们还可以证明 MinSumSSP关于容量上界 k^+ 是 W[1]-困难的。

5.2 极小极大容量

最后，我们证明 MinMaxSSP 可以在多项式时间内求解。

我们先介绍一些记号。回想一下，如果 u 是学校的仰慕者，则称学生 w，如果 w 是 u的最优学校。

首先回顾 Malove 和 Sng 关于（单边）受欢迎匹配的以下定理 [22]（定理 1）。（该定理在容量受限的房屋分配问题背景下的表述略有不同；这里给出适用于我们情形的等价版本。）

定理 10. [22] 匹配 μ是学生受欢迎的，当且仅当：

1. 对于每所学校 w，如果其仰慕者不超过 $\boldsymbol{q}[w]$ 人，则每位仰慕者都与该校匹配；2. 对于每所学校 w，如果其仰慕者超过 $\boldsymbol{q}[w]$ 人，则该校由仰慕者填满；3. 每位学生都与其最优学校匹配，或与无法仅由仰慕者填满的学校中最优的一所匹配（我们允许这所学校为 $\emptyset$）。

我们首先给出一个稍微简单一些的刻画。

定理 11. 匹配 μ 是学生受欢迎的，当且仅当每个只能由仰慕者填满的学校 w 都只由仰慕者填满，并且对于每个学生 u，对 u 而言，优于 $\mu(u)$ 的每所学校都只由仰慕者填满。

证明。 一方面，很容易看出，如果定理 10 的条件成立，那么定理 11的条件也成立。事实上，根据 1 和 2 ，每个只能由仰慕者填满的学校都必须只由仰慕者填满；根据 3，如果某个学生不在她的最优学校，那么她必定在无法由仰慕者填满的学校中最优的那所学校，因此所有更好的学校都必须只由仰慕者填满。

反过来，假设匹配 μ 满足定理 11 的条件。那么，2 显然也成立。假设 1 不成立。那么，存在一所学校 w，其中没有坐满仰慕者，但有一位仰慕者 u 不在该校。然而，对于 u，存在一所优于 $\mu(u)$ 的学校，而该校没有坐满仰慕者，这就产生了矛盾。最后，假设 3 不成立。根据第二个性质，没有学生 u 会被分配到比那所无法只由仰慕者坐满的最优学校更差的学校。假设 u 被分配到一所严格更好、但不是她最优选择的学校 w。那么， w 可以坐满仰慕者，但 u 在该校且不是仰慕者，因此存在一位仰慕者 u' 属于 w ，却不在 μ。然而，这与关于 u' 和 $\mu(u')$ 的第一个假设相矛盾。

因此，我们得出结论：这两种刻画是等价的。 □

利用定理11，我们可以证明如下结论。

引理 5. 实例 $I = (U, W, (\succ_x)_{x\in U\cup W}, \boldsymbol{q})$ 属于 MM，存在稳定且学生受欢迎的匹配，当且仅当学生提议的盖尔-沙普利算法在第一次同时提议后，不会出现以下两种情况，并且最终终止：该算法开始时，所有学生同时向各自最优的学校提议；之后，被拒绝的学生依次开始提议：

1. 学生 u 被学校 w 拒绝，而该校并非只招满了仰慕 w 的学生
2. 学生 u' 因为有新的提议而被学校 w 淘汰。

证明。 首先，假设上述盖尔-沙普利算法终止，且两种情况均未发生。那么，第一步之后留在各自最优学校的学生都会继续留在那里，而第一所学校拒绝的学生会被最优的、并非只招满仰慕者的学校录取。此外，如果一所学校能够只招满仰慕者，那么它会在第一步招满，并且最终的学生集合与此相同，因此该校只招满了仰慕者。因此，根据定理11，算法输出的学生最优稳定匹配是学生受欢迎的。

反过来，假设学生最优稳定匹配是学生受欢迎的，但算法执行过程中出现了其中一种情况。如果出现情况 1，那么存在一名学生 u 和一所学校 w，使得 u在最终结果中的学校比 w 差，而且 w 并非只招收仰慕者。根据定理11，这意味着算法的输出（即学生最优稳定匹配）不是学生受欢迎的，矛盾。如果出现情况 2，那么在算法结束时， u' 的位置比 w差，同时至少有一名学生 u''在 w，且不是 w的仰慕者。因此，再根据定理11 ，学生最优稳定匹配不是学生受欢迎的，再次矛盾。

□

一种算法 针对MinMaxSSP。考虑以下算法。假设给定一个数 $k^{\max}$ x.
首先，将每个 容量设为 $\boldsymbol{q}[w] + k^{\max}$.

$b(u)$ 表示学生 u的最优学校。

阶段 1：让每位学生 u 向 $b(u)$ 提出申请。如果没有学校收到的申请数超过其容量，则停止，并输出当前容量增加向量对应的匹配。否则，各学校拒绝最差的学生，使留校学生人数不超过其容量。

阶段 2：阶段 1 中未匹配的学生按照各自偏好列表的顺序，依次开始提出申请。如果在任何时候，当前学生 u 会被一所学校 w 拒绝，而该校并非只招收 w 的仰慕者，或者由于学生 u提出申请，学生 u' 会被学校 w 淘汰，则执行以下操作：将 w 的容量减少至当前在 w 的、仰慕 w 且优于 u 以及所有在 w但不仰慕 w的学生 u' 的人数。如果容量小于 $\boldsymbol{q}[w]$，则停止并输出 NO，表示不存在学生受欢迎稳定匹配。否则，各学校拒绝最差的学生，并让新增的被拒学生继续提出申请。如果申请阶段结束时，没有学校的容量降至其原始配额以下，则停止并输出所得匹配 μ 及当前容量增加向量。

参见算法 4 的伪代码。

定理 12. MinMaxSSP 可在多项式时间内求解。

证明。 我们声称，算法 4 会输出实例 $I = (U, W, (\succ_x)_{x\in U\cup W}, \boldsymbol{q}, k^{\max})$ 的一个解，该实例属于 Min-MaxSSP，只要存在一个满足 $|r|_\infty \le k^{\max}$ 的良好容量增加向量。

假设算法输出了一个容量增加向量 $\boldsymbol{r}$和一个匹配 μ。显然，这是相对于容量向量 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$的学生最优稳定匹配，因为它是通过使用容量 $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$运行学生提议版盖尔-沙普利算法得到的。如果算法终止并输出了一个匹配，这意味着在这些容量下，引理5 中的两种情况都不会发生，因此根据引理5，输出的匹配也是学生受欢迎匹配。

算法 4： MinMaxSSP的算法

输入： 一个 I MinMaxSSP实例。
对所有 $w \in W$设置 $\boldsymbol{q}'[w] = \boldsymbol{q}[w] + k^{\max}$
对所有 $u \in U$设置 $\mu(u) := b(u)$
如果 μ 对于 $\boldsymbol{q}'$ 是可行的，则
  返回 μ, $\boldsymbol{r} \equiv k^{\max}$
else
  每所超额招收的学校 w 都会拒绝其学生中最差的 $|\mu(w)| - \boldsymbol{q}'[w]$
  更新 μ
结束 if
当存在未匹配的学生 u 时，执行
  u 向其偏好列表 w 中的下一所学校提出申请
  如果学生 u' 因 u 而被 w 拒绝，或者 w 未被仰慕者填满却拒绝了 u ，那么
    $L := \{u\} \cup \{u'' \in \mu(w) \mid b(u'') \neq w\}$ （当前在 w 的 w 的非仰慕者）。
    将 $\boldsymbol{q}'[w]$ 减少至 $|\{u' \in \mu(w) \mid u' \succ u'' \; \forall u'' \in L\}|$
    w 拒绝最差的 $|\mu(w)| - \boldsymbol{q}'[w]$ 名学生
    更新 μ
    如果 $\boldsymbol{q}'[w] < \boldsymbol{q}[w]$ ，则
      返回“无解”
    结束 if
  结束 if
结束 while
返回 μ, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}$

现在假设算法因某所学校的容量变得过小而终止。我们证明，对于任何满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq k^{\max}$ 的容量增加向量，都不存在相应的学生受欢迎稳定匹配（事实上，我们对任何容量变化向量都证明这一点）。

命题 12.1. 在算法的每次容量减少之后，都不存在满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq k^{\max}$ 的良好容量变更向量，使得任何学校在 $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ 中的容量都大于它们在算法中当前的容量。

证明。我们通过对容量减少的次数进行归纳来证明这一点。第一次容量减少之前，该命题显然成立，因为在满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq k^{\max}$ 的条件下，每所学校的容量都已达到其最大值。因此，假设我们知道该命题在前 k 次容量减少之后成立，并假设又发生了一次新的容量减少。

假设这是因为某位提出申请的学生 u 会被一所尚未被仰慕者填满的学校拒绝 w 。那么，算法就将 w 的容量降低为该校中比 u 和任何非仰慕者学生都更优秀的仰慕者人数。根据归纳法，我们知道不存在良好容量增加向量，使某所学校 $w' \neq w$ 的容量大于第 $k+1$ 次降低后所具有的容量，因为其容量保持不变。假设存在一个解，其中 w 的容量大于降低后得到的容量，但至多等于降低前的容量（根据归纳法，容量不可能更大）。由于其他学校的容量至多与此相等，因此必有 u 以及所有当时在 w 的学生，按照这些容量仍会向 w 提出申请，这也由引理 2 得出。因此，该校必有一名非仰慕者学生，因为存在一名非仰慕者提议者，使得 w 无法由更优秀的仰慕者学生填满。由于 u 之前已被拒绝，现在仍会被拒绝，因为现在在 w 的每位学生之前都已在 w ，而且都比u 更优秀。因此， u 会被一所拥有非仰慕者学生的学校拒绝，所以根据引理 5，在这些容量下不存在稳定且学生受欢迎的匹配，矛盾。

接下来，假设学生 u' 会因为学生u的提议而被学校 u拒绝。类似地，只需证明：相对于任何良好的容量增加向量，在减少容量后， w的容量 $\boldsymbol{q}'[w]$ 不可能更大。然而，若存在这样的良好容量增加向量（根据归纳法，其他学校的容量至多与原来相同），那么根据引理 2， u （以及减少容量前当前 μ（w）中的所有人）仍会向 w 提议。若 u' 在那里，那么她会被w 拒绝，这与引理 5 矛盾。否则，要么 w那里仍有一名不如 u 的学生，在 u 到来时被拒绝；要么在 u 提议时， w 已满额，且其中都是更优秀的学生，因此 u 会被拒绝。此外，在第二种情况下， w 那里也必定有一名非仰慕者学生 u'' ，因为根据我们对 $\boldsymbol{q}[w]$的假设，向 w提议的前 $\boldsymbol{q}'[w]$ 名提议者中必有一名非仰慕者。因此，这两种情况都与引理 5 矛盾。$\diamond$

根据命题 12.1 如果一所学校的容量降低到低于其原始配额，那么就不存在满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq k^{\max}$ 的非负良好容量增加向量。

□

推论3。 求解 MinMaxSSP 的优化版本所需时间为 $\mathcal{O}(|E|\cdot|U|\cdot\log(|U|)$，其中 $|E|$是申请数量。

证明。 显然，对于最优的 $k^{\max}$，有 $0 \le k^{\max} \le |U|$。因此，利用算法 4，我们可以通过二分搜索在 $|U|$ 次迭代中找到最优的 $k^{\max}$。此外，每次迭代中，可接受性图中的每条边至多有一次提议；当算法减少某个容量时，通过遍历该学校的偏好列表，可以在 $\mathcal{O}(|U|$ 时间内轻松计算出减少量。 □

6 允许减少

在前面的各节中，我们只允许学校增加容量。然而，当目标是实现稳定且有效匹配时，允许容量减少也可能有益。例如，考虑定理 8中的一个子句构件，将 w_1的容量减少一，就能通过将 u_1 匹配给 w_2，u_2 匹配给 w_3，并将每个 d_i^j 匹配给 s_i^j，得到一个稳定且有效匹配。但正如我们所见，如果只允许增加容量，那么无论以变化总和还是变化最大值为目标，最优容量增加至少为 η (其中 η 可以是任意值)。

因此，我们探讨允许容量减少是否也会改变相关问题的计算复杂性。

6.1 稳定且完美的匹配

对于稳定且完美的匹配，根据引理 2 可知，减少学校的容量绝不会增加稳定匹配的规模。因此，在该模型中，所有关于 MinSumSP 和 MinMaxSP的结果都可直接沿用。

6.2 稳定且有效的匹配

本节讨论在允许容量减少的模型中 MinSumSE 和 MinMaxSE 的情况。正如我们所见，在此情形下，允许容量减少确实可能使最优值大幅降低。

我们证明，在这种情况下， MinMaxSE 和 MinSumSE 仍然是 NP困难且不可近似的。

定理13。 MinMaxSE 和 MinSumSE 在以下范围内难以近似： $\mathcal{O}((|E|+|U|)^{1-\varepsilon})$ 对于任意$\varepsilon>0$，即使允许容量减少也如此。

证明。 证明采用了与定理 8 的证明类似的构造。

令 $\eta \ge 3$ 为稍后指定的正整数。

子句构件。我们有 3 个学生 u_1、u_2、c和 3 所学校 w_1、w_2、w_3，以及 4η个虚拟学生d_1^1、……、d_1^η、d_2^1、……、d_2^η、e_1^1、……、e_1^η、e_2^1、……、e_2^η和 4η所虚拟学校 s_1^1、……、s_1^η、s_2^1、……、s_2^η、t_1^1、……、t_1^η、t_2^1、……、t_2^η。偏好如下：

$u_1:$	$w_1 \succ w_2$	$w_1:$	$c \succ e_1^1 \succ \cdots \succ e_1^\eta \succ u_1 \succ d_1^1 \succ \cdots \succ d_1^\eta \succ u_2$
$u_2:$	$w_1 \succ w_2 \succ w_3$	$w_2:$	$u_1 \succ u_2 \succ e_1^1 \succ \cdots \succ e_1^\eta \succ d_2^1 \succ \cdots \succ d_2^\eta \succ c$
$c:$	$w_2 \succ w_1$	$w_3:$	u_2
$d_i^j:$	$w_i \succ s_i^j$	$s_i^j:$	d_i^j
$e_i^j:$	$w_i \succ t_i^j$	$t_i^j:$	e_i^j,

对于 $i \in [2], j \in [\eta]$。此外，所有学校的容量均为一。该构件的关键性质是：如果 w_1 和 w_2 的容量为 $\eta+1$，则除 u_1 和 u_2 外，每所学校的容量变化至多为 η，那么在学生最优稳定匹配中，c 会与 w_1 匹配；并且 u_1 会与 w_2 匹配（如果 w_1 的容量至多为$\eta+1$），或者 u_2 会与 w_2 匹配（如果 w_1 的容量大于 $\eta+1$）。无论哪种情况，所得匹配都不是有效匹配，因为学生 c 会希望与 u_1 或 u_2 （位于 w_2的那个）互换位置，且对方也有同样的意愿。

然而，如果学生 c 会从该构件中被匹配到一所更好的学校，那么无需任何容量变化，就存在一个稳定且有效匹配，$\mu = \{(u_1, w_1)、(u_2, w_2)、(e_i^j, w_i)、(d_i^j, s_i^j) \mid i \in [2], j \in [\eta]\}$。

变量构件。我们有 2 所学校 $x, \overline{x}$，以及 8 名学生 $T, F, c_1, c_2, \overline{c}_1, \overline{c}_2, y, \overline{y}$，还有 2η 名虚拟学生$f_1, \ldots, f_\eta, g_1, \ldots, g_\eta$ 和 2η 所虚拟学校 $p_1, \ldots, p_\eta, q_1, \ldots, q_\eta$。偏好如下：

$T:$	$x \succ \overline{x}$	$x:$	$y \succ F \succ c_1 \succ c_2 \succ f_1 \succ \cdots \succ f_\eta \succ T$
$F:$	$\overline{x} \succ x$	$\overline{x}:$	$\overline{y} \succ T \succ \overline{c}_1 \succ \overline{c}_2 \succ g_1 \succ \cdots \succ g_\eta \succ F$
$f_i:$	$x \succ p_i$	$p_i:$	f_i
$g_i:$	$\overline{x} \succ q_i$	$q_i:$	g_i,
$c_1, c_2, y:$	x		
$\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{y}:$	$\overline{x}$		

所有学校的初始容量均为 1。该构件的重要性质是：如果 x 和 $\overline{x}$ 都有一名 c^j 或 $\overline{c}^j$ 学生，那么就不存在容量变化至多为 η 的稳定且有效匹配。这是因为，如果每所学校的容量变化至多为 η，且 x 和 $\overline{x}$ 的容量都至少为 2（同时它们的容量至多为 $\eta+1$），那么在学生最优稳定匹配中，T 必须在 $\overline{x}$，而 F 必须在 x，因此他们会彼此希望交换学校。

然而，如果 x、$\overline{x}$中有一个（比如 $\overline{x}$）的容量为 0，那么就存在一个稳定且有效匹配 μ，其中 c_1、c_2 中的一个或两个可以匹配到 x，x 的容量为 $2+|\{c_1,c_2\}\cap\mu(x)|$，且其他学校的容量均不变，即$\mu=\{(y,x)、(F,x)、(c_j,x)、(f_i,p_i)、(g_i,q_i)\mid i\in[\eta]\}$；其中 $j\in\{1\}$、$\{2\}$ 或 $\{1,2\}$，具体取决于 $\{c_1,c_2\}$ 中的哪些学生与 x匹配。

归约。现在我们给出从 (2,2)-3SAT出发的归约。

令 $I=\varphi$ 为一个 (2,2)-3SAT实例，其子句为 C_1、……、$C_{\hat{m}}$，变量为 X_1、……、$X_{\hat{n}}$。注意，$3\hat{}m=4\hat{}n$。我们按如下方式构造一个 I' 实例MinMaxSE 和一个 I'' 实例 MinSumSE。

– 对于每个子句 C_j, $j\in[\hat{}m]$，我们创建一个子句构件 G^j。我们将构件 G^j 中的学生 c记作 c^j，并称这些学生为子句学生。

– 对于每个变量 X_i，我们创建一个变量构件 H^i。我们将 H^i 中的 T和 F学生分别记作 T^i和 F^i，并将学校 x 和 $\overline{x}$ 分别记作 x^i 和 $\overline{x}^i$。我们分别称这些学生和学校为布尔学生和文字学校。

由于 $3\hat{}m=4\hat{}n$，我们有 $\mathcal{O}(\eta\hat{}n)$ 个学生和学校。最后，只要 X_i或 $\overline{X}_i$ 出现在 C_j 中，我们就将子句构件 G^j 中的子句学生 c^j 与变量构件 H^i 中的某个学生 $c^i_1,c^i_2,\overline{c}^i_1,\overline{c}^i_2$ 合并。如果这是 X_i 第一次出现，就将其与 c^i_1 合并；如果这是 X_i 第二次出现，就将其与 c^i_2 合并；如果这是 $\overline{X}_i$ 第一次出现，就将其与 $\overline{c}^i_1$ 合并；如果这是 $\overline{X}_i$ 第二次出现，就将其与 $\overline{c}^i_2$ 合并。（例如，如果$C_1=(X_1\vee X_2\vee\overline{X_3})$，且 $X_1,\overline{X_3}$是第一次出现，而 X_2 是第二次出现，那么我们就将学生 c^1 与 c^1_1, c^2_2 和 $\overline{c}^3_1$合并。）我们扩展这些学生的偏好，使他们按照相应文字在 C_j 中出现的顺序，优先选择相邻的x^i 或 $\overline{x}^i$ 学校；之后再选择其子句构件中的学校，并保持原有顺序。

命题 13.1. 如果存在满足赋值，那么就存在一个良好容量变化向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $|\boldsymbol{r}|_1\leq 2\hat{}n+\hat{}m$ 并且 $|\boldsymbol{r}|_\infty\leq 3$。

证明。设 f 是一个满足赋值。设 μ 是如下匹配。如果将 X_i 设为真，那么我们将 F^i 和 y_i 匹配到学校 x^i，而不匹配任何人到 $\overline{x}_i$（其容量将为 0）；否则，我们将 $\overline{y}_i$ 和 T^i 匹配到学校 $\overline{x}^i$，而不匹配任何人到 x_i。接着，对于每个子句 C_j，令 ℓ_{i_j} 为 C_j 中第一个为真的文字，并将来自 G^j 的学生 c^j 匹配到 ℓ_{i_j}的文字学校。最后，在每个子句构件 G^i 中，将 u_1 匹配到 w_1，将 u_2 匹配到 w_2，并将每个虚拟学生匹配到其虚拟学校，但每个子句构件 G^i中的学生 e^1_j、……、e^η_j 将匹配到 w_j，其中 $j\in\{1,2\}$。接下来，我们描述 $\boldsymbol{r}$。对于每个 $i\in[\hat{}n]$，如果将 X_i 设为真，那么我们定义 $\boldsymbol{r}[x_i]$ 为匹配到该处的子句学生数量加一，并且$\boldsymbol{r}[\overline{x}_i]=-1$；否则，我们令 $\boldsymbol{r}[x_i]=-1$ 和 $\boldsymbol{r}[\overline{x}_i]$ 为匹配到该处的子句学生数量加一。对于所有其他学校 s，$\boldsymbol{r}[s]=0$。显然，$|\boldsymbol{r}|_1=2\hat{}n+\hat{}m$ 且 $|\boldsymbol{r}|_\infty\leq 3$，因为每所文字学校至多有两名子句学生。

很容易验证，μ 对于 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$是可行的。

由于 f 是一个满足赋值，对于每个 $j\in[\hat{}m]$，c^j 都在构件 G^j_1 之外匹配到了更好的学校，因此，正如我们之前所见，其余学生以稳定且有效的方式完成匹配。由于 f 是一致的，对于每个 $i\in[\hat{}n]$，x^i 和 $\overline{x}^i$ 中恰有一个具有非零容量。

要证明 μ 是稳定的，只需直接验证：对于每个没有进入其最优学校的学生，在 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$中，她所有更好的学校要么已被更优秀的学生占满，要么容量为零。

要证明 μ 是有效的，注意每所学校 x^i、$\overline{x}^i$ 要么容量为零，要么其中每个学生都在其最优学校，且该校容量非零。没有人嫉妒虚拟学校。最后，在构件 G^i 中，每所学校w_1、w_2、w_3 都满足其中所有学生均在其最优学校，且该校容量非零；但 u_2 学生除外，他们嫉妒 w_1。然而，若要让一名 u_2 学生改善处境，她就必须取代 w_1 中的某人，而被取代的学生无法改善处境，因为她已经在自己的最优学校。因此，没有学生能够通过转到另一所学校来改善处境而不使他人处境变差。由此可知，μ 是有效的。$\diamond$

命题 13.2. 如果存在一个良好容量变更向量 $\boldsymbol{r}$，且满足 $|\boldsymbol{r}|_\infty\leq\eta$ 或 $|\boldsymbol{r}|_1\leq\eta$，那么就存在一个满足赋值。

证明。假设存在一个良好容量变化向量 $\boldsymbol{r}$，其中 $|\boldsymbol{r}|_\infty\leq\eta$，并且相对于容量 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$存在一个稳定且有效的匹配 μ。那么，对于每个构件 G^j，c^j 必须与一所文字学校匹配；否则，在容量变化不超过 η 的情况下，G^j 内就不存在稳定且有效的匹配。此外，对于每个 $i\in[\hat{}n]$，x^i 和 $\overline{x}^i$ 中至多有一个拥有一名 c^j 子句学生；否则，在增加不超过 η 的情况下就不存在稳定且有效的匹配，因为 T^i 和 F^i 会彼此嫉妒。这意味着，若我们定义一个真值赋值 f，使得当 x^i 在 μ 中有一名子句学生 c^j 时，将 X_i 设为真，否则设为假，那么这个赋值是一致的，并且每个子句中至少有一个真文字。

现在，如果存在一个良好容量增加向量，且 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq \eta$，那么 $|\boldsymbol{r}|_\infty \leq \eta$，同样的论证表明，存在一个满足赋值 f。
◇

若令 $\eta = 3$，则可证明 MinMaxSE 是 NP完全问题，即使偏好列表和优先级列表的长度有常数上界，且允许减少。

为了证明 MinSumSE 的不可近似性和困难性，我们也令 $\eta = (2\hat{}n + \hat{}m)^c$，其中 $c > 0$是任意常数。显然，η 是输入规模的多项式，因此该归约仍是多项式时间的。因此，根据断言13.1和13.2可知，对于 MinMaxSE 和 MinSumSE 两者，在任意 $c > 0$下，判定最优值至多为 $2\hat{}n + \hat{}m = \mathcal{O}(\hat{}n)$ 还是至少为 $\eta = (2\hat{}n + \hat{}m)^c = \mathcal{O}(\hat{}n^c)$，是 NP困难的。与 I' 和 I'' 中一样，我们有 $|U|, |E| = \mathcal{O}(\eta\hat{}n) = \mathcal{O}(\hat{}n^{c+1})$，这意味着，如果 $P \neq NP$，那么对于 MinSumSE和 MinMaxSE，都不存在多项式时间 $\mathcal{O}((|U|+|E|)^{\frac{c-1}{c+1}})$-近似算法。由于 c可以是任意大的常数，且当 c 趋于 ∞时，$\frac{c-1}{c+1}$ 趋于 1，这等价于说，对于任意 $\varepsilon > 0$，都不存在 $O((|U| + |E|)^{1-\varepsilon})$-近似算法。此外，由于增加 η 不会增加学生偏好列表的长度，因此即使每个偏好列表的长度至多为 5，这一不可近似性结果仍然成立（子句学生的偏好最长，为 5）。 □

6.3 允许容量减少的稳定匹配和学生受欢迎匹配

与稳定且有效的匹配类似，允许减少容量也可能有助于获得稳定匹配和学生受欢迎匹配。在例4中，如果将 w_1 的容量减少 1 至 0，那么匹配 $\mu = \{(e, w_2), (u_2, w_2), (d_i^j, s_i^j) \mid i \in [2], j \in [\eta]\}$ 便是稳定且学生受欢迎的；而如果只允许增加，至少需要 η 次变更（其中 η 可以任意选择）。因此，允许减少时，最优值可以小 $\mathcal{O}(|U|$倍。

我们将 针对 MinSumSSP 的困难性结果和针对 MinMaxSSP 的算法推广到这种情 e.

定理 14。MinSumSSP 是 NP困难的，且不存在多项式时间常数 $|U_{\text{un}}|$-近似算法，即使允许减少容量也是如此。

证明。我们从 NP困难 Set Cover 问题进行归约。令 d 为任意常数。令 I 为 SetCover 的一个实例，其中 $OPT(I) = k \leq \hat{}m$，且 $\hat{}m$ 为集合的数量。我们按如下方式构造 MinSumSSP 的一个实例 I'。

元素构件 首先，我们描述将要使用的元素构件。令 η为正整数。我们有 $3 + 4\eta$ 名学生：u_1、u_2、e、d_1^1、……、$d_1^{2\eta}$、d_2^1、……、$d_2^{2\eta}$；以及 $3 + 4\eta$所学校：w_1、w_2，容量为 $\eta + 1$；还有 w_3、s_1^1、……、$s_1^{2\eta}$、s_2^1、……、$s_2^{2\eta}$，容量为 1。偏好如下：

$u_1:$	w_1	$w_1:$	$u_1 \succ d_1^1 \succ \cdots \succ d_1^{2\eta} \succ e$
$e:$	$w_1 \succ w_2$	$w_2:$	$e \succ u_2 \succ d_2^1 \succ \cdots \succ d_2^{2\eta}$
$u_2:$	$w_2 \succ w_3$	$w_3:$	u_2
$d_i^j:$	$w_i \succ s_i^j$	$s_i^j:$	d_i^j

如果只允许将容量改变至多 η，那么在学生最优稳定匹配中，e 在 w_2，而 $d_2^{2\eta}$ 不在 w_2。因此，$d_2^{2\eta}$ 可以取代 e并改善自己的处境；同时，e 可以取代 u_1前往 w_1，也改善自己的处境；而只有 u_1 的处境变差，这意味着该匹配不是学生受欢迎的。然而，如果 e 被分配到外部一所更好的学校，那么匹配 $\mu = \{(u_1, w_1)$、(u_2, w_2)、(d_i^j, w_i)、$(d_i^l, s_i^l) \mid i \in [2]$、$j \in [\eta]$、$l \in \{\eta + 1, \ldots, 2\eta\}\}$ 是稳定且学生受欢迎的，因为任何学生若要改善处境，都只能取代一名目前就读于其首选学校的学生。

现在我们继续介绍这一归约。

学生与学校

– 对于每个集合 $C_j, j \in [\hat{}m]$，我们创建一个容量为 1 的集合学校 c_j，以及一个虚拟学生 d_j。– 对于每个元素 $i \in [\hat{}n]$，我们添加一个元素构件 G^i，其中包含 $\eta = \hat{}m(\hat{}m + 1)\hat{}n$。我们将 e^i 称为 G^i 中与 e 对应的学生。– 对于每个 $j \in [\hat{}m]$，我们添加 $\hat{}n$ 个学生 $u_j^1, \ldots, u_j^{\hat{n}}$，以及容量为 1 的学校 $w_j^1, \ldots, w_j^{\hat{n}}$。

偏好和优先级 偏好和优先级定义如下：

Students	Schools
$e^i\colon \langle \mathcal{C}(e^i)\rangle \succ w_1^i \succ w_2^i$	$c_j\colon d_j \succ \langle U_j\rangle \succ \langle \mathcal{E}(C_j)\rangle$
$u_j^\ell\colon c_j \succ w_j^\ell$	$w_j^\ell\colon u_j^\ell$
$d_j\colon c_j,$	

其中，对于每个集合 C_j,($\mathcal{E}$) C_j 表示来自与 C_j 中各元素对应的构件的学生集合 e^i ；对于每个学生 e^i， $\mathcal{C}$（e^i）表示与包含 i 和 $U_j\colon = \{u_j^1,\ldots,u_j^{\hat{}n}\}$ 的集合相对应的学校集合。每所学校的初始容量均为一。

命题 14.1. 对于每个常数 $d \geq 1$，如果我们能找到一个良好容量变化向量 $\boldsymbol{r}$，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq d\,(k+1)\hat{}n$，那么我们就能找到一个至多使用 $d\,(k+1) - 1$ 个集合的集合覆盖。

证明。如果 $d > \hat{}m$，那么显然可以找到一个至多使用 $d\,(k+1) - 1 \geq \hat{}m$ 个集合的集合覆盖。

从现在起，假设 $d \leq \hat{}m$。令 $\boldsymbol{r}$ 为一个良好容量变化向量，使得 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq d\,(k+1)\hat{}n$，并令 μ 为一个学生受欢迎的稳定匹配。对于每个 c_j， d_j 都与之匹配，因为它们彼此都是对方的最优选择；唯一的例外是 c_j 将其容量减少到 0 的情况。由于 $\eta = \hat{}m\,(\hat{}m+1)\hat{}n \geq d\,(k+1)\hat{}n$，容量增加幅度不会超过 η；因此，根据元素构件的这一已观察到的性质，在任何学生受欢迎的稳定匹配中，每个 e^i 都必须与一所 c_j 学校匹配。令 l 表示存在学生 e^i 被分配到的 c_j 学校的数量。由于对于每个 c_j，所有 u_j^1、.....、$u_j^{\hat{}n}$ 都优于任何 e^i 学生，因此对于每所这样的学校，与其对应的所有 u_j^ℓ 学生都必须分配给它。由于 μ 将所有 e^i 学生分配到集合学校，我们得到容量变化至少为 $\hat{}nl + \hat{}n$。由于 $\hat{}nl + \hat{}n \leq d\,(k+1)\hat{}n$，我们得到 $l \leq d\,(k+1) - 1$。由于所有元素代理都在 μ 中匹配，与这些学校对应的 l 个集合构成一个集合覆盖。$\diamond$

命题 14.2。我们有 $OPT(I') \leq k\hat{}n + \hat{}n$。

证明。令 $C_{j_1},\ldots,C_{j_k}$ 为使用 $k = OPT(I)$ 个集合的最优集合覆盖。如下定义 $\boldsymbol{r}$：对于所有 $j \in [\hat{}m]$， $\boldsymbol{r}[w_j^\ell] = 0$ $\ell \in [\hat{}n]$。若 $j \in \{j_1,\ldots,j_k\}$，则 $\boldsymbol{r}[c_j] = \hat{}n + p$，其中 p 是满足以下条件的元素 i 的数量： C_j 是覆盖 i 的 $\{j_1,\ldots,j_k\}$ 中索引最小的集合。最后，其他情况下 $\boldsymbol{r}[c_j] = 0$。显然， $|\boldsymbol{r}|_1 \leq k\hat{}n + \hat{}n$。

我们声称，由边 $\{(d_j,c_j) \mid j \in [\hat{}m]\} \cup \{(u_j^\ell,w_j^\ell) \mid j \in [\hat{}m] \setminus \{j_1,\ldots,j_k\}, \ell \in [\hat{}n]\} \cup \{(u_j^\ell,c_j),(e^i,c_{l_i}) \mid j \in \{j_1,\ldots,j_k\}, i,\ell \in [\hat{}n]\}$ 构成的匹配 μ，加上 G^i 构件内部唯一不含 e^i 的稳定匹配，是稳定且学生受欢迎的，其中 l_i 是满足 $i \in C_{l_i}$ 的 $\{j_1,\ldots,j_k\}$ 中索引最小的。对于 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$， μ 显然是可行的。

假设存在一对阻塞对 (x,y)，对应于 μ。学生 x 不能是 d_j，因为 d_j 已经处于她的最优选择。她也不能是 u_j^ℓ，因为对于每个 $j \in [\hat{}m]$，要么 u_j 已经处于她的最优选择 c_j（如果 $j \in \{j_1,\ldots,j_k\}$），要么她唯一更好的学校 c_j 在 $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$中的容量为 1，且已被一名更优的学生 d_j占据。她也不能是 e^i，因为同样地，要么e^i 已经处于她的最优学校，要么她所有更好的学校容量都为 1，且已被更优的学生 d_j占据。这是因为 $C_{j_1},\ldots,C_{j_k}$ 构成了一个集合覆盖；对于每个 e^i，我们都将她匹配到了增加容量的最优学校（即索引最小的那所）。最后， x 不能是构件 G^i中的其他任何学生，因为μ 在构件内部是稳定且学生受欢迎的。因此，不存在可以作为阻塞学生的选项 x，矛盾。为证明 μ 是学生受欢迎的，请注意，在上述每种情况下，对于 x，要么 x 无法改善，要么只能通过取代她最优位置上的一名学生来改善，因此在任何匹配中，改善的学生人数都不会多于处境变差的学生人数。$\diamond$

现在，假设我们有一个多项式时间的 d近似算法，用于解决 MinSumSSP，其中 d为某个常数。那么，我们可以判定是否存在一个良好容量变更向量 $\boldsymbol{r}$，满足 $|\boldsymbol{r}|_1 \leq d(k+1)\hat{}n$。根据断言 14.1，我们还可以判定是否存在一个至多使用 $d(k+1) - 1$ 个集合的集合覆盖。由于 $^{d}{}_{(k+1)_k}{}^{-1} \leq 2d$，该算法为集合覆盖问题提供了一个多项式 $2d$-近似算法；如果$P \neq NP$，这将产生矛盾。

与该归约 $|U_{\mathsf{un}}| = 0$ 中一样，可以推知不存在 $|U_{\mathsf{un}}|$-近似算法，而且即使具有 $|U_{\mathsf{un}}| = 0$，该问题仍然是困难的。□

最后，我们说明，针对 4 的算法 MinMaxSSP 可以轻松扩展到允许减少的情况。我们只需修改算法针对 NO 答案的停止条件：仅当某所学校的容量将减少到低于 $\boldsymbol{q}[w] - k^{\max}$ 时（而不是 $\boldsymbol{q}[w]$）才停止并输出 NO。

定理15。 MinMaxSSP 可以在多项式时间内求解，即使允许容量减少也是如此。

证明。 该证明同样可由断言 12.1得出。 □

7 未来工作

未来的研究可以探讨其他参数的参数化复杂性，例如学校数量 m。对于学校数量为常数的情形 m，显然可以通过猜测每所学校的容量增加量，并检查猜测的容量是否存在解，从而在多项式时间内解决所有问题。其次，可以研究最大基数的稳定匹配，而不是完美性。值得探究的是，关于MinSumSP 和 MinSumSP 的算法结果是否也适用于这种情形。

最后，还可以研究其他目标，例如稳定且受欢迎的匹配（而不是本文中的学生受欢迎匹配）。

8 致谢

Gergely Cs´aji 感谢匈牙利科学研究基金（OTKA）第 K143858 号资助、匈牙利文化与创新部通过国家研究、发展与创新基金在 KDP-2023 资助计划下提供的资助（资助编号 C2258525），以及匈牙利科学院 Momentum资助第 LP2021-1/2021 号资助。Jiehua Chen 获得了维也纳科学与技术基金（WWTF）的资助 [10.47379/VRG18012]。

偏好

[1] A. Abdulkadiroˇglu 和 T. S¨onmez。《学校选择：一种机制设计方法》。《美国经济评论》，93：729–747，2003 年。[2] A. Abdulkadiroˇglu、Y.-K. Che、P. A. Pathak、A. E. Roth 和 O. Tercieux。《基于优先级的匹配中的效率、合理嫉妒与激励》。《美国经济评论：洞见》，2(4)：425–442，2020 年。[3] K. Abe、J. Komiyama 和 A. Iwasaki。《通过蒙特卡洛树搜索在医学住院医师匹配中实现随时容量扩展》。载于 L. D. Raedt 编，《第 31 届国际人工智能联合会议论文集》（IJCAI ’22），第 3–9 页，2022 年。[4] M. Ba¨ıou 和 M. Balinski。《学生招生与教师招聘》。《理论计算机科学》，322(2)：245–265，2004 年。[5] P. Bir´o、R. W. Irving 和 D. F. Manlove。《婚姻与室友问题中的流行匹配》。载于《算法与复杂性：第七届国际会议》，CIAC 2010，意大利罗马，2010 年 5 月 26—28 日。论文集 7，第 97–108 页。施普林格，2010 年。[6] F. Bobbio、M. Carvalho、A. Lodi、I. Rios 和 A. Torrico。《稳定匹配中的容量规划：在学校选择中的应用》。技术报告，arXiv:2110.00734v2，2022 年。[7] F. Bobbio、M. Carvalho、A. Lodi 和 A. Torrico。《多对一稳定匹配中的容量变化》。技术报告，arXiv:2205.01302v1，2022 年。[8] K. Cechl´arov´a、P. Eirinakis、T. Fleiner、D. Magos、I. Mourtos 和 E. Potpinkov´a。《多对多匹配问题中的帕累托最优性》。《离散优化》，14：160–169，2014 年。[9] J. Chen、P. Skowron 和 M. Sorge。《偏好下的匹配：稳定性的强度与权衡》。《ACM经济学与计算汇刊》，6(4)：1–55，2022 年。[10] I. Dinur 和 D. Steurer。《平行重复的分析方法》。载于《第四十六届 ACM计算理论研讨会论文集》，第 624–633 页，2014 年。[11] L. Ehlers 和 A. Erdil。《尊重优先级的有效分配》。《经济理论杂志》，145(3)：1269–1282，2010 年。[12] H. Ergin。《基于优先级的有效资源分配》。《计量经济学》，70(6)：2489–2497，2002 年。[13] D. Gale 和 L. S. Shapley。《大学录取与婚姻稳定性》。《美国数学月刊》，120(5)：386–391，1962 年。[14] M. R. Garey 和 D. S. Johnson。《计算机与难解性——NP完全性理论指南》。W. H. Freeman and Company，1979 年。

[15] M. R. Garey、D. S. Johnson 和 L. J. Stockmeyer。《一些简化的 NP完全图问题》。《理论计算机科学》，1(3)：237–267，1976 年。[16] D. Gusfield 和 R. W. Irving。《稳定婚姻问题——结构与算法》。《计算机科学基础丛书》。麻省理工学院出版社，1989 年。[17] O. Kesten。《具有同意权的学校选择》。《经济学季刊》，125(3)：1297–1348，2010 年。[18] S. D. Kominers。《匹配市场中对改进的尊重与比较静态分析》。技术报告，2020 年。[19] G. Limaye 和 M. Nasre。《具有灵活配额的稳定匹配》。技术报告，arXiv:2101.04425v4，2022 年。[20] D. Manlove。《医院—住院医师问题》。载于 M. Kao 编，《算法百科全书》，2016 年。[21] D. F. Manlove。《偏好匹配算法》，《理论计算机科学丛书》第 2 卷。WorldScientific，2013 年。[22] D. F. Manlove 和 C. T. Sng。《容量受限的房屋分配问题中的流行匹配》。载于《算法—ESA 2006：第 14 届欧洲研讨会》，瑞士苏黎世，2006 年 9 月 11—13 日。论文集 14，第 492–503 页。施普林格，2006 年。[23] T. Nguyen 和 R. Vohra。《具有夫妻的近似可行的稳定匹配》。《美国经济评论》，108(11)：3154–3169，2018 年。.[24] P. A. Pathak、T. S¨onmez、M. U. Unver 和 M. B. Yenmez。《疫苗、呼吸机和抗病毒治疗的公平分配：在医疗保健配给中不遗漏任何伦理价值》。技术报告，arXiv:2008.00374v2，2020 年。[25] I. R´ıos、T. Larroucau、G. Parra 和 R. Cominetti。《具有并列偏好和灵活配额的大学录取问题》。技术报告，2014 年。[26] A. Romero-Medina。《在受限匹配市场中实施稳定解》。《经济设计评论》，3(2)：137–147，1998 年。[27] A. Roth 和 E. Peranson。《美国医生匹配市场的重新设计：经济设计的一些工程方面》。《美国经济评论》，89(4)：748–780，1999 年。[28] A. E. Roth。《匹配经济学：稳定性与激励》。《运筹学数学》，7(4)：617–628，1982 年。[29] S. Ueda、D. Fragiadakis、A. Iwasaki、P. Troyan 和 M. Yokoo。《具有最小和最大配额的双边匹配中的策略无关机制》。载于 W. van der Hoek、L. Padgham、V. Conitzer 和 M. Winikoff 编，《第 11 届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》（AAMAS ’12），第 1327–1328 页，2012 年。[30] K. Yahiro 和 M. Yokoo。《资源分配下双边匹配的博弈论分析》。载于《第 19 届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》，第 1548–1556 页，2020 年。