arXiv:2302.01828v3 [math.RT] 7 Apr 2023

Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 箭图路径代数的精确 Borel 子代数

MARKUS THURESSON

乌普萨拉大学数学系，*Box 480*，*SE-75106*，瑞典

摘要

对于其简单模同构类指标集上的任意适配偏序，遗传代数都是准遗传的。对于 $\{1,\dots,n\}$ 上的任意适配偏序，我们计算具有 n 个顶点的一致定向线性箭图的路径代数上标准模的 Ext代数的箭图和关系。根据 König 的定义，这样的路径代数总是存在正则正合 Borel 子代数；我们证明总存在一个包含幂等元 $e1,\dots,en$ 的正则正合 Borel 子代数，并求出其极小生成集。对于箭图 Q，以及在汇点或源点 v处分解$Q = Q^1 \sqcup Q^2$ 得到的 Q，我们用结合代数同构的意义描述 KQ 上标准模的 Ext代数，并将其表示为 KQ^1 和 KQ^2 上相应 Ext代数的关系。此外，若 KQ^1 和 KQ^2 都存在正则正合 Borel 子代数，我们便确定 KQ 存在正则正合 Borel 子代数的充要条件。我们利用这些结果，得到任意定向的线性箭图路径代数存在正则正合 Borel 子代数的充要条件。

2020年数学主题分类： 16D90, 16E30, 16G20
关键词： 拟遗传代数；具有标准滤过的模；Ext代数；A∞代数；卡特兰数

电子邮件地址：markus.thuresson@math.uu.se。

1. 引言

最高权范畴最初由 [CPS88] 引入，旨在将复半单李代数表示论中自然出现的某些现象公理化。这促成了拟遗传代数的定义（见 [Sco87]）；作者证明，恰好是这类有限维代数的模范畴与最高权范畴等价。自引入以来，拟遗传代数的例子已被发现广泛存在于表示论中。经典例子包括遗传代数、整体维数为二的代数、舒尔代数以及 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 的分块。拟遗传代数表示论的核心对象是标准模。它们是不可分解投射模的某些商，取决于简单模同构类指标集上选定的偏序。对于 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 的分块，该偏序就是布鲁哈特序。与标准模相关联的是范畴 $\mathscr{F}(\Delta)$：由那些存在一个滤过、且其子商均为标准模的模所构成的模范畴满子范畴。给定一个拟遗传代数，其表示论的自然目标是理解标准模及其相关范畴 $\mathscr{F}(\Delta)$。

在试图理解一般拟遗传代数的 $\mathscr{F}(\Delta)$ 时，König、Külshammer 和 Ovsienko 在 [KKO14] 中取得了突破。他们证明，任意拟遗传代数 A 都与一个代数 Λ Morita 等价，而该代数含有一个非常特殊的子代数 B，称为正则正合 Borel 子代数。这个子代数具有一项令人惊讶的性质：其模范畴在函子$\Lambda \otimes_B$作用下的像与 $\mathscr{F}(\Delta)$ 等价。

一般而言，对于任意拟遗传代数 A，确定 Λ 和 B 可能非常困难。一种方法是确定 $\mathrm{Ext}^*_A(\Delta,\Delta)$ 上的一个 A_∞-结构；$\mathrm{Ext}^*_A(\Delta,\Delta)$ 是 A 上标准模之间的扩张代数，而这项工作可能十分艰巨。 [KS12; Thu22] 中给出了一些完成这项工作的例子。不过，在本文研究的情形中，上述 A_∞-结构可以很容易地计算出来。此外，我们能够运用 [Con21] 中的判据，检验我们的代数本身何时包含正则正合 Borel 子代数。

给定的结合代数可以具有不同的拟遗传结构，这取决于上文提到的偏序。特别是，不同的两个序可能产生相同的拟遗传结构。这一现象促使我们定义本质序：两个拟遗传结构重合，当且仅当它们生成相同的本质序。本文研究的代数均为遗传代数，而遗传代数恰好是指相对于其单模同构类指标集上的任意全序而言均为拟遗传的代数。于是，一个自然的问题是：存在多少种不同的拟遗传结构？Coulembier 在 [Cou20] 中证明，当所讨论的代数的模范畴上存在保持简单模的对偶时，其拟遗传结构本质上是唯一的。这使得本文研究的代数与 [KS12; Thu22], 中的例子形成对比，因为其中出现的代数都具有保持简单模的对偶。

在 Flores、Kimura 和 Rognerud 最近发表的一篇论文中， [FKR22], 作者证明，当 A 是由一致定向线性箭图的路径代数组成时，不同的拟遗传结构的数量由卡塔兰数给出。此外，他们还通过一种称为“分解”的组合过程，统计了更复杂箭图的路径代数的拟遗传结构。本文的主要目标是运用 Flores、Kimura 和 Rognerud 的组合技巧，进一步研究 [FKR22]中讨论的一些代数的拟遗传结构。特别是，我们希望描述其标准模的 Ext代数及其正则精确 Borel 子代数。

以下简要介绍本文的主要结果。对于准遗传代数A，记 Δ 为每个同构类中各取一个标准模后所得的直和，并将标准模之间的扩张代数记为 $\mathrm{Ext}^*_A(\Delta,\Delta)$。

(A) 设A_n 为以下箭图的路径代数：

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

对于 $\{1,\dots,n\}$ 上任意满足 $(A_n,\trianglelefteq)$ 为准遗传的偏序 $\trianglelefteq$，我们构造一个分次箭图 Q 和一个容许理想 $I \subset KQ$，使得存在一个分次结合代数的同构 $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta) \cong KQ/I$。根据 [FKR22]，中的结果，每种拟遗传结构都对应一棵唯一的二叉树；我们证明，这棵树编码了关于标准模之间扩张的所有必要信息。详情请参阅第 3 节。

(B) 令 A_n 如 (A) 中所述。对于 $\{1,\dots,n\}$ 上任意使 $(A_n,\trianglelefteq)$ 成为准遗传的偏序 $\trianglelefteq$，我们验证 A_n 存在正则正合 Borel 子代数。我们证明 A_n 总是存在一个正则正合 Borel 子代数 B，其中包含幂等元 $e_1,\dots,e_n$，并求出 B 的极小生成集。详情请参见第 3.2 节。

(C) 设 $Q = Q^1 \sqcup Q^2$ 是箭图 Q 在汇点或源点 v 处分解得到的箭图。令 $A = KQ$ 且 $A^\ell = KQ^\ell$，其中 $\ell = 1,\ 2$。我们通过某种“粘合”过程，以 A^ℓ 上标准模的 Ext-代数为依据，在同构意义下描述 $\mathrm{Ext}^*_A(\Delta,\Delta)$。

(D) 已知 A^ℓ 存在正则正合 Borel 子代数 B^ℓ，其中 $\ell = 1,\ 2$，我们证明如下结论：(i) 若 v 是源点，则 A 存在正则正合 Borel 子代数。(ii) 若 v 是汇点，则 A 存在正则正合 Borel 子代数，当且仅当 v 关于 Q_0 上的本质序是极小元或极大元。在 A 存在正则正合 Borel 子代数的情形下，我们仿照 (C) 中的“粘合”方法，由 B^1 和 B^2，构造 A 的正则正合 Borel 子代数。

本文按以下方式组织：第 2 节介绍准遗传 y
代数的必要背景并固定一些记号。第 3 节回顾 [FKR22] 关于 A_n 的拟遗传结构的结果，并在此基础上进一步展开，证明 (A)。第 3.1 小节计算 A_n 的 Ringel 对偶的箭图和关系。第 3.2 小节专门描述 A_n 的正则正合 Borel 子代数。第 3.3 小节简要讨论 Ext^*_A 上的 A_∞- 结构

$_n(\Delta,\Delta)$。

在第 4 节中，我们介绍 [FKR22] 中关于去拼接的背景，并证明 (C)。第 4.1 小节讨论正则精确 Borel 子代数在去拼接下的性质，并给出 (D) 的证明。在第 4.2 小节中，我们将结果应用于 Q 为任意定向的线性箭图的情形。

目录

1. 引言 2 2. 符号与背景 5 2.1. 子代数的粘合 6 3. $\mathbb{A}_n$ 6 的路径代数 3.1. Ringel 对偶 12 3.2. A_n 15 的正则精确 Borel 子代数 3.3. $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$ 上的 A_∞-结构 20 4. 去拼接下标准模的 Ext-代数 22 4.1. 去拼接下的精确 Borel 子代数 31 4.2. 线性箭图路径代数的正则精确 Borel 子代数 34 4.3. 非线性示例 36 5. 致谢 36 资助 36 利益冲突 36 参考文献 37

2. 符号与背景

下文中，设 K为代数闭域。对于箭图 $Q=(Q_0,Q_1)$，记KQ为Q的路径代数。设$I\subset KQ$为一个容许理想，并令A为商$A=KQ/I$。若无特别说明，A-模均指有限维左A-模。对于一个箭 $\alpha\in Q_1$,，记$s(\alpha)$和$t(\alpha)$分别为 α的起始顶点和终止顶点。我们约定箭的复合从右向左书写。也就是说，对于如下排列的顶点和箭，

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z,$$

我们将“先 α，再 β”的复合写作 $\beta\alpha$。我们将起始顶点和终止顶点的记号扩展到Q中的路径。若$p=\alpha_n\dots\alpha_1$，则令$s(p)=s(\alpha_1)$，且$t(p)=t(\alpha_n)$。

单A-模的同构类由顶点集Q_0，（属于Q）索引。记$L(i)$为与顶点i关联的单A-模。记$P(i)$和$I(i)$分别为$L(i)$的投射覆盖和内射包络。对于一个A-模M和单模$L(i)$，记 $[M:L(i)]$ 为M中$L(i)$的 Jordan–Hölder 重数。有限维左A-模范畴记为A-mod。

1. 定义。 [CPS88] 设 A 是一个有限维代数。设 $\{1,\dots,n\}$ 是单 A-模同构类的指标集，并设 $\trianglelefteq$ 是 $\{1,\dots,n\}$ 上的一个偏序。记 i处的标准模 为 $\Delta(i)$，它是 $P(i)$ 的最大商，其合成因子 $L(j)$ 满足 $j\trianglelefteq i$。若满足以下条件，则称代数 A 关于 $\trianglelefteq$ 是准遗传的 。

(QH1) 存在一个满射 $P(i)\twoheadrightarrow\Delta(i)$，其核具有一个滤过，子商为 $\Delta(j)$，其中 $j\rhd i$。(QH2) 存在一个满射 $\Delta(i)\twoheadrightarrow L(i)$，其核具有一个滤过，子商为 $L(j)$，其中 $j\lhd i$。
等价地，记 i处的余标准模 为 $\nabla(i)$，它是 $I(i)$ 的最大子模，其合成因子满足 $j\trianglelefteq i$。若满足以下条件，则称代数 A 关于 $\trianglelefteq$ 是准遗传的 。

(QH1)′ 存在一个单射 $\nabla(i)\to I(i)$，其余核有一个滤过，子商为 $\nabla(j)$，其中 $j\rhd i$。(QH2)′ 存在一个单射 $L(i)\to\nabla(i)$，其余核有一个滤过，子商为 $L(j)$，其中 $j\lhd i$。

对于拟遗传代数 A，自然会考虑其模范畴 A-模中的两个特定子范畴。这两个子范畴是 $\mathscr{F}(\Delta)$，由那些存在标准模滤过的模组成的 A-模满子范畴；以及 $\mathscr{F}(\nabla)$，由那些存在余标准模滤过的模组成的 A-模满子范畴。

对于一个 A-模 $M\in\mathscr{F}(\Delta)$（或 $\mathscr{F}(\nabla)$），特定标准模 $\Delta(i)$（或余标准模 $\nabla(i)$）作为 M 的某个滤过的子商出现的次数是确定的，我们将此数记为 $(M:\Delta(i))$（或 $(M:\nabla(i))$。

一般而言，细化偏序 $\trianglelefteq$ 可能会产生不同的标准模和余标准模。传统上，为避免这种情况，人们只考虑 $\{1,\dots,n\}$ 上所谓的适配序。

2. 定义。 [DR92] 设 A 为一个有限维代数。设 $\{1,\dots,n\}$ 是单 A-模同构类的指标集，并设 $\trianglelefteq$ 是 $\{1,\dots,n\}$ 上的一个偏序。我们称 $\trianglelefteq$ 与 A 适配 ，当且仅当对任意满足以下条件的 A-模 M：

$$\operatorname{top}M\cong L(i)\quad\text{and}\quad\operatorname{soc}M\cong L(j),$$

其中 i和 j不可比较，存在 $1\le k\le n$，使得 $i\lhd k$，$j\lhd k$且 $[M:L(k)]>0$。

3. 引理。 [Con16] 若 $(A,\trianglelefteq)$ 是一个拟遗传代数，则 $\trianglelefteq$ 与 A 适配。

若两个拟遗传结构 $(A,\trianglelefteq_1)$ 和 $(A,\trianglelefteq_2)$ 关于 $\trianglelefteq_1$ 和 $\trianglelefteq_2$ 的标准模（及余标准模）集合相同，则称它们等价。我们用 $\trianglelefteq_1\sim\trianglelefteq_2$ 表示这种关系。更精确地说：

$$\trianglelefteq_1\sim\trianglelefteq_2\iff\Delta_1(i)=\Delta_2(i)\wedge\nabla_1(i)=\nabla_2(i),\ \forall i\in Q_0.$$

E不同拟遗传结构的等价性也由本质序精确刻画 $r.$

4. **定义**。 [Cou20，定义 1.2。5] 设 $(A,\trianglelefteq)$ 是一个拟遗传代数。定义 $\trianglelefteq$的本质序 $\trianglelefteq^e$为由以下关系传递生成的偏序

$$i \trianglelefteq^e j \iff \big[\Delta(j) : L(i)\big] > 0 \quad \text{or} \quad (P(i) : \Delta(j)) > 0.$$

本质序通过以下方式与拟遗传结构的等价关系相关：

$$\trianglelefteq_1 \sim \trianglelefteq_2 \iff \trianglelefteq_1^e = \trianglelefteq_2^e.$$

2.1. **子代数的粘合**。 本文中若干处将会出现这样的代数：直观而言，它们是将某个环境代数中的两个子空间在共享维数处粘合而成的。设X 和Y 是某个代数A的子空间，且对乘法封闭。假设 $\dim X \cap Y = 1$，并分别在X和Y中选取$X \cap Y$的补空间$X_\prime$和$Y_\prime$。此外，假设$X_\prime \cdot Y_\prime = Y_\prime \cdot X_\prime = 0$，且$1_A \in \operatorname{span}(X,Y)$。令

$$C = X' \oplus Y' \oplus X \cap Y.$$

于是，C是A的子代数。我们称C为X与Y的粘合，并记作$C = X \diamond Y$。注意，当X和Y是分次的时，$X \diamond Y$上存在由X和Y的分次诱导的自然分次。

3. The path algebra of $\mathbb{A}_n$

在本节中，我们考虑一致定向线性箭图的路径代数

$$\mathbb{A}_n : \ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n \ .$$

在本节中，我们始终令 $A_n = K\mathbb{A}_n$。A_n上的单模由顶点 1,... ,n编号。此外，代数 A_n 是遗传的，因此，相对于任意适配序 $(\{1,\dots,n\},\trianglelefteq)$，$A_n$ [DR92]都是准遗传的。回想一下，A_n的不可分解模在同构意义下由区间模给出，这些模的洛维图具有以下形式：

$$M(i,j): \quad \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ i+1 \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ j-1 \\ \downarrow \\ j \end{array}$$

采用这一记号，我们有

$$L(i) = M(i,i), \quad P(i) = M(i,n) \quad \text{and} \quad I(i) = M(1,i), \quad \forall 1 \le i \le n.$$

区间模之间的同态和扩张已有充分研究，我们在下面的命题中总结这些信息。注意， [OT10] 采用的约定与本文不同。

5. **命题**。 [OT10，定理 3.6] 设 $M(i_1,j_1)$ 和 $M(i_2,j_2)$ 是区间模。那么，我们有 e

(i)

$$\dim \operatorname{Hom}_{A_n}(M(i_1,j_1), M(i_2,j_2)) = \begin{cases} 1 & \text{if } i_2 \le i_1 \le j_2 \le j_1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(ii)

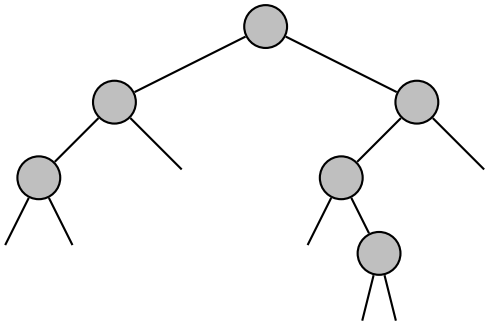
$$\dim \operatorname{Ext}^1_{A_n}(M(i_1,j_1), M(i_2,j_2)) = \begin{cases} 1 & \text{if } i_1+1 \le i_2 \le j_1+1 \le j_2; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

6. **定义**。 二叉树 T 要么是空集，要么是一个三元组 (s,L,R)，其中 s 是一个单元素集，称为T的根，而L 和R 是两棵二叉树，分别称为s的左子树和右子树。空集有一个叶，而$T=(s,L,R)$的叶集合是L 与R的叶集合的不交并。

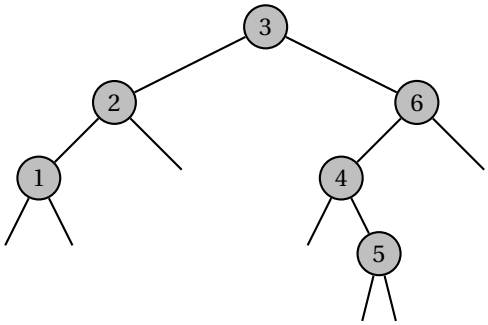
A 二叉搜索树是一棵二叉树，其顶点带有整数标记；如果顶点 x 的标记为 k，那么顶点 x 的左子树中的顶点标记均为小于 k的整数，而顶点 x 的右子树中的顶点标记均为大于 k的整数。

如果 T是一棵具有 n 个顶点的二叉树，则存在一种唯一的方式，用整数 $1,\ldots,n$为 T的顶点进行标记，使 T成为一棵二叉搜索树。获得这种标记的过程称为中序算法，该算法按递归方式依次访问左子树、根和右子树。第一个被访问的顶点标记为 1，第二个标记为 2，依此类推。

7. **例子**。 考虑下面这棵具有 6 个顶点的二叉树。



With 通过中序算法，这棵树的顶点标记如下，从而构成一棵二叉搜索树 .



任意具有 n 个顶点的二叉搜索树 T都会在其顶点集合 $\{1,\ldots,n\}$ 上诱导一个偏序。我们用 $\trianglelefteq_T$ 表示这个偏序。其定义如下。

$$i \lhd_T j \iff i \text{ labels a vertex in the subtree of the vertex labeled by } j.$$

在上面的例子中，偏序 $\trianglelefteq_T$如下：

$$1 \lhd_T 2 \lhd_T 3, \quad 5 \lhd_T 4 \lhd_T 6 \lhd_T 3.$$

此时，自然会问：对于哪些二叉树 T，我们能得到拟遗传代数（$A_n, \trianglelefteq_T$）？

回顾一下，由于A_n 是遗传的，A_n 关于任意适配于A_n的偏序都是准遗传的。事实证明，任何使A_n 成为准遗传代数的偏序，都等价于（即产生相同的标准模和余标准模集合）由一棵二叉树产生的偏序。反过来，对于任意二叉树T，序 $\trianglelefteq_T$使A_n 成为准遗传代数。更准确地说，有如下结论。

8. **命题**。 [FKR22，命题 4。4] 设n 为自然数，且 $\mathscr{T}$为具有n 个顶点的二叉树集合。记 $\mathscr{A}$ 为A_n的适配序集合。对于 $\mathscr{A}$中的任意偏序 $\trianglelefteq$ ，记$\trianglelefteq$ 为 $\trianglelefteq$关于关系 ~的等价类。那么，由 $\mathscr{T}$到 $\mathscr{A}/\sim$ 的映射定义如下：

$$T \mapsto \overline{\trianglelefteq}_T$$

是一个双射。

现在，鉴于 A_n 上的任意准遗传结构都可以与一棵二叉树关联起来，因此用关联的二叉树来描述这一结构是很自然的。以下命题在 [FKR22, 命题 4.4] 的证明中陈述。为方便读者，我们给出证明。

9. **命题**。 设 T是一棵二叉搜索树，且 $\trianglelefteq_T$是与 A_n对应的适配序。则有如下结论。

(i) 标准模 $\Delta(i)$ 的合成因子由标记为 i 的顶点的右子树中各顶点的标记索引。(ii) 余标准模 $\nabla(i)$ 的合成因子由标记为 j 的顶点的左子树中各顶点的标记索引。

证明。 根据定义，标准模 $\Delta(i)$ 是不可分解投射模 $P(i)$ 的一个商。由于 $P(i) = M(i,n)$，这意味着存在一个整数 s_i，满足 $i \le s_i \le n$，使得 $\Delta(i) = M(i, s_i)$。于是， $\Delta(i)$ 的合成因子为 $L(i),\dots,L(s_i)$，且每个因子的 Jordan-Hölder 重数均为 1。记 v_i 为标记为 i 的顶点。

合成因子 $L(j)$ of $\Delta(i)$ must satisfy $v_j \trianglelefteq_T v_i$. By definition of $\trianglelefteq_T$, the vertices $v_j$such that $v_j \trianglelefteq_T v_i$ 阿拉伯语 e 恰好是 v_i 的左子树和右子树的顶点。

根据 $\trianglelefteq_T$ 的构造，v_i 左子树中的顶点均标记为小于 i 的整数，这说明相应的简单模可能不是 $\Delta(i)$ 的合成因子。由于 $\Delta(i)$ 是 $P(i)$ 的极大商，其合成因子 $L(j)$ 满足 $v_j \trianglelefteq_T v_i$，故得证。

余标准模的形式的论证类似。 □

对于T 的一个顶点v，分别用 $\ell(v)$和$r(v)$表示紧邻其下方且位于左侧或右侧的顶点。如果这样的顶点不存在，则记作 $\ell(v) = ;$ 或$r(v) = 。$

10. **命题**。 设T是一棵二叉搜索树，并设 $\trianglelefteq_T$为与A_n对应的适配序 .

(i) 假设i标记顶点 $\ell(v)$，且j标记顶点v。那么，我们有

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i), \Delta(j)) = 1.$$

(ii) 假设i标记顶点$r(v)$，且j标记顶点v。那么，我们有

$$\dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i), \Delta(j)) = 1.$$

证明。 令 $\Delta(i) = M(i, s_i)$，并令 $\Delta(j) = M(j, si)$。

(i) 注意，中序算法在访问完 $\ell(v)$的右子树后访问的第一个顶点是v。因此，由命题 9 可得$j = s_i + 1$。于是，命题 5 的条件 (ii) 为

$$i + 1 \le s_i + 1 \le s_i + 1 \le s_j,$$

这显然成立。

（ii）使用中序算法时，顶点 $r(v)$ 在 v 之后被访问。于是，根据命题 9，我们知道，如果$\Delta(i) = M(i,s_i)$，那么对于某个 $k \le s_i - i$， $\Delta(j) = M(i + k,s_i)$。于是命题 5 的第（i）部分的条件为

$$i \le i + k \le s_i \le s_i,$$

这显然成立。 □

11. **引理**。 (i) 设 v_i和 v_j分别是标记为 i和 j的顶点。假设 v_j位于 v_i的左子树中。则有

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j)) = \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) = 0.$$

(ii) 设 v_i 和 v_j 分别为标记为 i 和 j 的顶点。假设 v_j 位于 v_i 的右子树中。那么，我们有

$$\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j)) = \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) = 0.$$

(iii) 设 v_i 和 v_j 为分别标记为 i 和 j 的顶点。假设 v_i 不在 v_j 的子树中，且 v_j 不在 v_i 的子树中。那么，我们有

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j)) = \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) = \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j)) = \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) = 0.$$

Proof. 根据命题 9 的证明，我们有 $\Delta(i) = M(i, s_i)$ 和 $\Delta(j) = M(j, s_j)$，其中这些整数

$$i+1, i+2, \ldots, s_i$$

为 v_i 的右子树中的顶点标号，而这些整数

$$j+1, j+2, \ldots, s_j$$

为 v_j 的右子树中的顶点标号。

(i) 根据中序算法，整数 $j+1$、...、s_j 小于 i。我们立即得到

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j)) = 0,$$

因为 $v_j \lhd_T v_i$，且 A_n 是准遗传的。再由命题 5 的 (ii) 部分，可得

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) = 0,$$

因为条件 $i \le j \le s_i \le s_j$不成立，这是因为 $j < i$。

(ii) 由于 v_j位于 v_i的右子树中，因此有 $s_j \le s_i$。由此立即可得

$$\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j)) = 0,$$

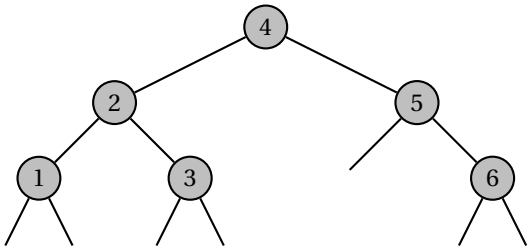
因为 $v_j \lhd_T v_i$，且 A_n 是准遗传的。此外，由命题 5 的 (i) 部分，可得

$$\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) = 0,$$

因为条件 $i+1 \le j \le s_i + 1 \le s_j$不成立，这是因为 $s_j \le s_i$。

(iii) T his i这显然是直接的，因为A_n 是准遗传的，而顶点v_i和v_j 相对于 ct
而言， . □
$\trianglelefteq_T$

12. **例子**。 考虑以下二叉搜索树T，其顶点按照中序算法标记。



偏序 $\trianglelefteq_T$定义如下:

$$1 \lhd_T 2 \lhd_T 4, \quad 3 \lhd_T 2 \lhd_T 4, \quad \text{and} \quad 6 \lhd_T 5 \lhd_T 4.$$

对于标准模和余标准模，我们有

$$\Delta(1) \cong L(1), \Delta(2) \cong M(2,3), \Delta(3) \cong L(3), \Delta(4) \cong P(4), \Delta(5) \cong P(6), \Delta(6) \cong L(6), \nabla(1) \cong L(1), \nabla(2) \cong M(1,2), \nabla(3) \cong L(3), \nabla(4) \cong M(1,4), \nabla(5) \cong L(5), \text{ 以及 } \nabla(6) \cong L(6),$$

这是应用命题 9 得出的。此外，我们有非分裂短正合列

$$\Delta(2) \hookrightarrow I(3) \twoheadrightarrow \Delta(1) \quad \text{and} \quad \Delta(4) \hookrightarrow P(2) \twoheadrightarrow \Delta(2),$$

由此得到命题 10 的 (i) 部分所保证的扩张。

接下来，我们看到存在自然单态射 $\Delta(3) \to \Delta(2)$ 和 $\Delta(6) \to \Delta(5) \to \Delta(4)$，从而得到命题 10 的 (ii) 部分所保证的同态。

最后，我们有

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(1),\Delta(2)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(2),\Delta(1)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(1),\Delta(3)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(3),\Delta(1)) = 0;\\
&\dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(2),\Delta(4)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(4),\Delta(2)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(1),\Delta(4)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(4),\Delta(1)) = 0;\\
&\dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(2),\Delta(5)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(5),\Delta(2)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(2),\Delta(6)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(6),\Delta(2)) = 0;\\
&\dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(1),\Delta(5)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(5),\Delta(1)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(1),\Delta(6)) = \dim \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(6),\Delta(1)) = 0,
\end{aligned}$$

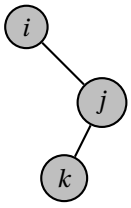
如引理 11 所规定。

13. **引理**。设 v、$r(v)$ 和 $\ell(r(v))$ 分别是标记为 i、j 和 k 的顶点。那么，乘法映射

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) \times \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(k),\Delta(j)) \to \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(k),\Delta(i))$$

是零映射。

证明。注意，顶点 i、j 和 k 的配置如下：



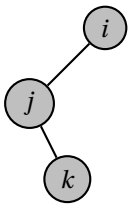
所讨论的乘法映射产生一个扩张，属于空间 $\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(k),\Delta(i))$。但是，由于 $\ell(r(v))$ 是 v 的右子树中的一个顶点，根据引理 11 的 (ii) 部分，该空间为零。□

14. **引理**。设 v、$\ell(v)$ 和 $r(\ell(v))$ 分别为标记为 i、j 和 k 的顶点。那么，乘法映射

$$\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(j),\Delta(i)) \times \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(k),\Delta(j)) \to \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(k),\Delta(i))$$

非零。

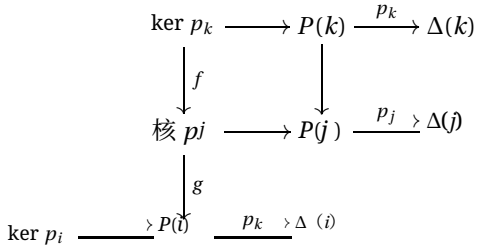
Proof. 我们首先注意到，标记为 i、j 和 k 的顶点按如下方式排列：



根据中序算法，我们有 $j < k < i$。注意，由于 A_n 是遗传的，标准模 $\Delta(x)$ 的极小投射分解形式如下

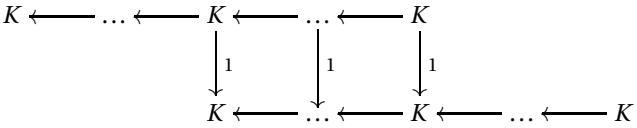
$$\ker p_x \longrightarrow P(x) \xrightarrow{p_x} \Delta(x) .$$

请看下面的图：



从 Δ(k) 到 Δ(i) 的一个扩张由一个链映射表示，该映射只有一个（可能）非零分量，即映射 g ◦ f。现在，假设 Δ(k) = M(k, s_k) 且 Δ(i) = M(i , s_i)。那么，我们有 ker p_k = P(s_k +1) 且 ker p_i = P(s_i + 1)。由于 k < i 且 s $_k$ < s_i，我们有 Hom$_{A_n}$(P(k),P(i)) = Hom$_{A_n}$(ker p_k,ker p_i) = 0。因此，若该链映射非零，它就不可能是零伦的。根据构造，f 是从 M(s_k + 1,n) 到 M(s_j + 1,n) 的唯一（相差一个标量）非零映射。接下来注意，在我们的配置中，中序算法访问完 ℓ(v) 的整个右子树后访问的第一个顶点是 v。这意味着 s_j + 1 = i，因此上图中的映射 g 是 P(i) 上恒等同态的某个标量倍数。由此可知，复合映射 g ◦ f 因而也就是表示该扩张的链映射非零。□

对于两个区间模 $M(i_1, j_1)$ 和 $M(i_2, j_2)$，空间 Hom$_{A_n}$($M(i_1, j_1)$,$M(i_2, j_2)$) 若非零，则为一维。固定该空间的一组基，对应于以下表示的同态：



注意，这一基的选择也显然确定了空间 Ext^1 $_{A_n}$($M(i_1, j_1)$,$M(i_2, j_2)$) 的一组基。现在假设我们已选定了这样的基向量

$$y \in \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i), \Delta(j)); \quad x \in \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(j), \Delta(k)); \quad z \in \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i), \Delta(k));$$

并且 i、j和k如引理 14 的陈述所述。那么，我们有 $xy = z$。

15. **定理**。 设 T是一个具有 n 个顶点的二叉搜索树，这些顶点按照中序算法标记，并设 $\trianglelefteq_T$为与 A_n相应的适配序。按以下方式构造一个箭图 Q：

(i) Q的顶点为 1,2,... ,n。(ii) 当且仅当整数i和j分别标记顶点集合 $\{v, \ell(v)\}$ 或 $\{v, r(v)\}$时，我们在i与j之间画一条边。如果i标记 $\ell(v)$，而j标记v，则边的定向为从 $\ell(v)$ 指向v，次数为 1，记作 $\varepsilon^j{}_i$。如果i标记$r(v)$，而j标记v，则边的定向为从$r(v)$ 指向v，次数为 0，记作f_{ji}。

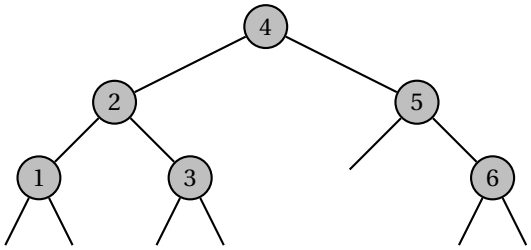
令$I \subset KQ$为由以下元素生成的理想：

(•) $f_{kj}\varepsilon^j{}_i$，对所有i、j和k;

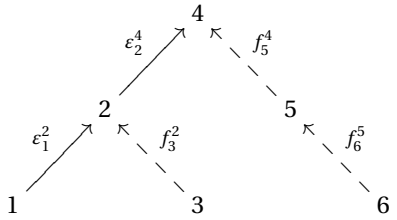
(•) $\varepsilon^k{}_j\varepsilon^j{}_i$，对所有$i$、$j$和$k$;

于是，存在一个分次代数的同构 $KQ/I \cong \mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta, \Delta)$.

16. **例子**。 考虑二叉搜索树



那么，相应的箭图Q为



理想$I = \langle \varepsilon_2^4 \varepsilon_1^2 \rangle$。实线箭 ε_1^2 和 ε_2^4的次数为 1，而虚线箭头$f23$、$f45$ 和$f56$ 的次数为 0。

定理 15 的证明。 固定所有非零 $\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j))$ 和 $\mathrm{Ext}^1{}_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j))$ 空间的基向量 $\varphi^j{}_i \in \mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j))$ 和$e_j{}_i \in \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j))$，如定理 15 之前所述。定义映射 $\Phi : KQ/I \to \mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$，如下：

$$\varepsilon_i^j \mapsto e_i^j, \quad f_i^j \mapsto \varphi_i^j, \quad e_i \mapsto 1_{\Delta(i)},$$

并按线性性延拓。应用引理 13 和引理 11，再结合不存在次数大于 1 的扩张这一事实（因为A_n是遗传的），可知$I \subset \ker\Phi$，因此 Φ 是良定义的。

要验证 Φ 是代数同态，只需验证 Φ 与形如 $\varepsilon^k{}_j f_j{}_i$ 的乘积相容。我们有：

$$\Phi(\varepsilon_j^k f_i^j) = \Phi(\varepsilon_i^k) = e_i^k = e_j^k \varphi_i^j = \Phi(\varepsilon_j^k)\Phi(f_i^j).$$

由于 i mage of Φ 包含 $\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j))$ 和 $\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j))$ 的基（对所有i和j），因此 Φ 是满射 .

接下来，我们比较维数。考虑空间 e j K Q／I e$_i$ 的 0 次部分。该空间的维数等于 Q 中从 i 到 j 的 0 次路径的数量。显然，这样的路径必定是形如 f j k$_s$ f j k$_{s-1}$ ... f k$_2$ k$_1$ f k^1 i 的乘积。由于 Q 中顶点的出度至多为 1，因此这样的路径是唯一的。所以，e j K Q／I e$_i$ 的 0 次部分的维数为 0 或 1。根据 Q 的构造，现在显然该维数与 dim Hom_{A_n}(Δ(i),Δ(j)) 相同。接下来，考虑空间 e j K Q／I e$_i$ 的 1 次部分。类似地，该空间的维数为 0 或 1，取决于 Q 中从 i 到 j 的路径数量。这样的路径要么是 ε^j i 的形式，要么是 ε^j k f k i 的形式。同样，根据 Q 的构造可知，该维数与 $\mathrm{Ext}^1_{A_n}$(Δ(i),Δ(j)) 相同。因此， Φ 是两个维数相同的向量空间之间的满射线性映射，故为同构。□

3.1. **Ringel 对偶**。 我们回顾一下，对于任意拟遗传代数 A，都存在一个模 T，称为特征倾斜模，其加法闭包等于 $\mathscr{F}(\Delta) \cap \mathscr{F}(\nabla)$。特征倾斜模可分解为

$$\mathrm{T} = \bigoplus_{i=1}^{n} T(i),$$

其中每个 $T(i)$ 都是不可分解的。根据定义，Ringel 对偶为 $R(A) = \mathrm{End}(\mathrm{T})^{\mathrm{op}}$。本节利用相关的二叉搜索树，计算 $(A_n, \trianglelefteq_T)$ 的 Ringel 对偶的箭图和关系。以下陈述是 [FKR22] 中定理 4.6 证明的一部分。为方便读者，我们给出证明。

17. **命题**。设v是一个标记为i的顶点。特征倾斜模的不可分解直和项$T(i)$是区间模$M(t_i, s_i)$，其中t_i是左子树中标记值最小的顶点的整数标记，v的右子树中标记值最大的顶点的整数标记为s_i。

证明。要证明 $\mathrm{T(i)} = \mathrm{M}(\mathrm{t}_i, \mathrm{s}_i)$，只需证明 $\Delta(\mathrm{i})$ 同构于 $\mathrm{T(i)}$ 的一个子模，该单同态的余核具有由标准模构成的滤过，并且 $\mathrm{T(i)}$ 包含于 $\mathscr{F}(\Delta) \cap \mathscr{F}(\nabla)$ [Rin91，命题 2]。我们对 v 的子树大小使用归纳法。归纳基显然，因为若 $\ell(\mathrm{v}) = \mathrm{r(v)} =;$，则有 $\Delta(\mathrm{i}) = \nabla(\mathrm{i}) = \mathrm{L(i)} = \mathrm{T(i)}$。由于 $\mathrm{t}_i \le \mathrm{i}$，显然 $\Delta(\mathrm{i})$ 嵌入 $\mathrm{M}(\mathrm{t}_i, \mathrm{s}_i)$。显然，此嵌入的余核是模 $\mathrm{M}(\mathrm{t}_i, \mathrm{i}-1)$。

假设j标记顶点 $\ell(v)$。$M(t_i, i-1)$ 的合成因子由 $\ell(v)$ 的子树中的顶点标记，因此根据归纳假设，$M(t_i, i-1) = T(j)$。换句话说，我们有一个短正合列

$$0 \to \Delta(i) \hookrightarrow M(t_i, s_i) \twoheadrightarrow T(j) \to 0.$$

由于$T(j) \in \mathscr{F}(\Delta) \cap \mathscr{F}(\nabla)$，因此$M(t_i, s_i) \in \mathscr{F}(\Delta)$。通过类似的论证，我们可知存在一个短正合列

$$0 \to T(k) \hookrightarrow T(i) \twoheadrightarrow \nabla(i) \to 0,$$

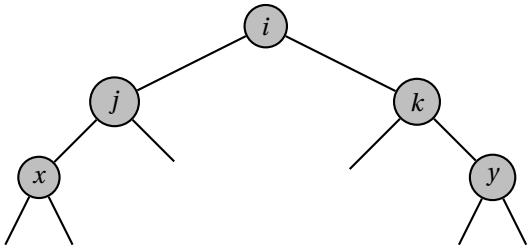
其中 k 标记顶点 r (v)。于是，由于 $\mathrm{T(k)} \in \mathscr{F}(\Delta) \cap \mathscr{F}(\nabla)$，我们得到 $\mathrm{M}(\mathrm{t}_i, \mathrm{s}_i) \in \mathscr{F}(\nabla)$。现在，$\mathrm{M}(\mathrm{t}_i, \mathrm{s}_i)$ 是一个模，使得 $\Delta(\mathrm{i})$ 嵌入其中，该嵌入的余核包含于 $\mathscr{F}(\Delta)$ 中，并且 $\mathrm{M}(\mathrm{t}_i, \mathrm{s}_i) \in \mathscr{F}(\Delta) \cap \mathscr{F}(\nabla)$。这证实了 $\mathrm{M}(\mathrm{t}_i, \mathrm{s}_i) = \mathrm{T(i)}$。□

18. **推论**。设顶点 v、$\ell(v)$ 和 $r(v)$ 分别标记为 i、j和 k。那么，对于任意 v，存在一个满同态 p_{ji}：$T(i) \twoheadrightarrow T(j)$，以及一个单同态 $q^i{}_k$：$T(k) \to T(i)$。

19. **命题**。设顶点 $\ell(\ell(v))$、$\ell(v)$、v、$r(v)$ 和 $r(r(v))$ 分别标记为 x、j、i、k和 y。令 p_{ji}、$p^x{}_j$、$q^i{}_k$和 q^k_y 为推论18中的同态。那么，我们有：

(i) $p^x{}_j p_{ji} \neq 0$和 $q^i{}_k q^k_y \neq 0$；(ii) $p^j{}_i q^i{}_k = 0$；(iii) $\mathrm{Hom}_{A_n}(T(j), T(i)) = 0$；(iv) $\mathrm{Hom}_{A_n}(T(i), T(k)) = 0$。

证明。顶点按以下方式配置：



(i) 这显然成立，因为$p^x{}_j p_{ji}$是两个满同态的复合，而$q^i{}_k q^k_y$是两个单同态的复合。

(ii) 应用命题 17，可知$T(k)$和$T(j)$没有公共合成因子，这意味着 $\mathrm{Hom}_{A_n}(T(k), T(j)) = 0$，从而得证。

(iii) 设$T(j) = M(t_j, s_j)$，且$T(i) = M(t_i, s_i)$，其中$t_j = t_i$，且$s_j < s_i$。然后，利用命题 5，$\mathrm{Hom}_{A_n}(T(j), T(i))$ 非零的条件是

$$t_i \le t_j \le s_i \le s_j,$$

这不成立，因为 $s_j < s_i$。

(iv) 与 (iii) 类似。 □

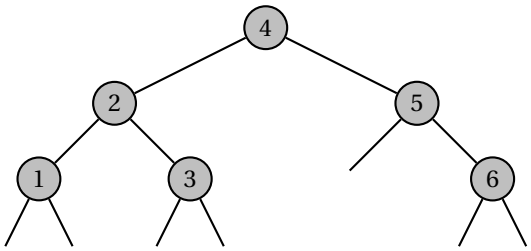
有了这些观察结果，我们就可以描述 Ringel 对偶 $R(A_n)$。

20. **定理**。设 T 是一个具有 n 个顶点的二叉搜索树，顶点按照中序算法进行标记，并设 $\trianglelefteq_T$ 为与 A_n 相应的适配序。按如下方式构造箭图 Q：

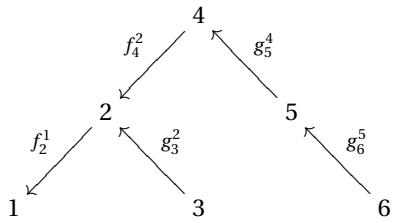
(i) Q 的顶点为 $1, \ldots, n$。(ii) 当且仅当整数 i 和 j 分别标记集合 $\{v, \ell(v)\}$ 或 $\{v, r(v)\}$ 中的顶点时，我们在 i 和 j 之间画一条边。若 i 标记 v 且 j 标记 $\ell(v)$，则这条边记为 f_{ji}，其定向为从 i 指向 j。若 i 标记 v 且 j 标记 $r(v)$，则这条边记为 g_{ij}，其定向为从 j 指向 i。

设 $I \subset KQ$ 为由元素 $f_{ji}g_{ik}$ 生成的理想，其中 i、j 和 k 遍历所有可能取值。于是，存在代数同构 $KQ/I \cong \mathrm{End}(\mathrm{T})$，因此 $R(A_n) \cong KQ/I^{\mathrm{op}}$。

21. **例子**。考虑二叉搜索树



那么，相应的箭图 Q 为



而理想 $I \subset KQ$ 由元素 $f24$、$g45$ 和 $f12$、$g23$ 生成。

定理*20*的证明。回顾定理 15 之前的讨论可知，对于T的不可分解直和项之间的可复合同态，我们可以选取基向量

$$x \in \mathrm{Hom}_{A_n}(T(i), T(j)); \quad y \in \mathrm{Hom}_{A_n}(T(j), T(k)); \quad z \in \mathrm{Hom}_{A_n}(T(i), T(k))$$

使得 $xy = z$。定义一个映射 $\tilde{\Psi}: KQ \to \mathrm{End}(\mathrm{T})$，如下

$$f_i^j \mapsto p_i^j, \quad g_i^j \mapsto q_i^j, \quad e_i \mapsto 1_{T(i)}$$

并按线性性延拓。利用命题19的(ii)部分，我们得到 $I \subset \ker \tilde{\Psi}$，因此 $\tilde{\Psi}$ 可唯一地通过商 KQ/I 分解。这给出了一个良定义的代数同态 $\Psi: KQ/I \to \mathrm{End}(\mathrm{T})$。由于同态 p_{ji}、$q^i{}_k$ 和 $1_T(i)$ 生成 $\mathrm{End}(\mathrm{T})$，故 Ψ 是满射。现在很容易看出，$\dim KQ/I = \dim \mathrm{End}(\mathrm{T})$，因此 Ψ 是两个维数相同空间之间的满射线性映射，故为同构。□

3.2. **A**$_n$ 的正则精确 *Borel* 子代数。本节考察 $(A_n, \trianglelefteq_T)$ 何时存在正则精确 Borel 子代数。回顾如下结论。

22. **定义**。 [Kön95；BKK20，定义 3.4] 设 $(\Lambda, \trianglelefteq)$ 是一个准遗传代数，具有 Λ 个两两不同构的单模。则称子代数 $B \subset \Lambda$ 为精确 *Borel* 子代数，若满足

(i) B 也有 n 个两两不同构的单模，且 $(B, \trianglelefteq)$ 是具有简单标准模的准遗传代数；(ii) 函子 $\Lambda \otimes_B$ 是正合的；(iii) 存在同构 $\Lambda \otimes_B L_B(i) \cong \Delta_\Lambda(i)$。

此外，若由函子 $\Lambda \otimes_B$ 诱导的映射 $\mathrm{Ext}^k_B(L_B(i), L_B(j)) \to \mathrm{Ext}^k_\Lambda(\Lambda \otimes_B L_B(i), \Lambda \otimes_B L_B(j))$ 对所有 $k \geq 1$ 和 i、$j \in \{1, \ldots, n\}$ 都是同构，则称 $B \subset \Lambda$ 为正则正合 *Borel* 子代数。若该映射对所有 $k \geq 2$ 都是同构，且当 $k = 1$ 时是满同态，则称 $B \subset \Lambda$ 为同调 Borel 精确 Borel 子代数。

23. **定理**。 [Con21，定理 D，第 5] 部分：每个与 $(A_n, \trianglelefteq_T)$ 等价的准遗传代数，当且仅当对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$\mathrm{rad}\,\Delta(i)$ 包含于 $\mathscr{F}(\nabla)$ 中时，才具有正则正合 Borel 子代数。

24. **命题**。 $(A_n, \trianglelefteq_T)$ 具有正则正合 Borel 子代数。

证明。 设顶点 v 的标记为 i，并考虑 $\Delta(i) = M(i, s_i)$。于是，$\mathrm{rad}\,\Delta(i) = M(i+1, s_i)$。设顶点 $r(v)$ 的标记为 k。根据中序算法，在 v 之后立即访问的第一个顶点，是 $r(v)$ 的子树中最左侧的顶点。这说明，按照我们之前的记号，$t_k = i + 1$。这一事实意味着

$$M(i+1, s_i) = M(t_k, s_i) = M(t_k, s_k) = T(k),$$

根据命题 17 的证明。由于 $T(k) \in \mathscr{F}(\nabla)$，由定理 23 可得该结论。 □

根据本节前文的观察，要找出正则正合 Borel 子代数 $B \subset A_n$ 的箭图 Q_B 相当容易。回顾一下，若 $B \subset A_n$ 是正则正合 Borel 子代数，则存在向量空间同构

$$\mathrm{Ext}^k_B(L(i), L(j)) \cong \mathrm{Ext}^k_{A_n}(\Delta(i), \Delta(j)),$$

对所有 $k \geq 1$ 以及 i、$j \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立。特别地，上述空间具有相同的维数。在我们的设定中，当 $k > 1$ 时，这些空间为零。众所周知，

$$\dim \mathrm{Ext}^1_B(L(i), L(j)) = \text{number of arrows from } i \text{ to } j \text{ in } Q_B.$$

这意味着我们可以通过计算 A_n 上的标准模之间的扩张来确定箭图 Q_B。为此，我们应用定理 15，得到如下结果。

25. **命题**。 设 $B \subset A_n$ 是一个正则正合 Borel 子代数。那么，存在代数同构 $B \cong KQ_B$，其中 Q_B 是以下箭图。

(i) Q_B 的顶点集为 $\{1, \ldots, n\}$。(ii) 存在一条箭 $i \to j$ 当且仅当 $\dim \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i), \Delta(j)) = 1$。

接下来，我们希望确定如何将 B 实现为 A_n 的子代数。为此，我们可以借助以下结果。

26. **定理**（韦德伯恩–马尔采夫）. [Wed08；Mal42] 设 A 是代数闭域上的有限维代数。则存在 A 的一个半单子代数 S，使得

$$A = \mathrm{rad}\, A \oplus S$$

作为向量空间。此外，如果 T 是 A 的另一个半单子代数，且 $A = \text{根}\ A \oplus T$，那么存在 A 的一个内自同构 σ，使得 $\sigma(S) = T$。

我们指出，如果S是定理中的半单子代数，且T是另一个半单子代数，并且$\dim_K S = \dim_K T$，那么必然有$A =$ 根 $A \oplus T$，因为任何半单子代数与根A的交都平凡。因此，S与T共轭。

设$A = KQ/I$是某个箭图的路径代数模去一个容许理想所得，并设$S \subset A$是子代数$S = \langle e_1,\dots,e_n\rangle$。那么，$S$是半单的，且$A = \operatorname{rad} A \oplus S$。若$\{d_1,\dots,d_n\}$是另一组本原正交幂等元完全集，则$T = \langle d_1,\dots,d_n\rangle$是$A$的另一个半单子代数，且$\dim_K S = \dim_K T$，因此$S$和$T$必定共轭。由此可知，对于$A$中的任意两组本原正交幂等元完全集，都存在$A$的一个内自同构将其中一组映到另一组。

27. **定理**。 [Zha00，命题 3.4] 设A是一个有限维拟遗传代数，且$B \subset A$是一个精确 Borel 子代数。那么，$C = \sigma(B)$仍是一个精确 Borel 子代数。

28. **定理**。 [Zha00，定理 3。6] 设A是有限维拟遗传代数，且$B \subset A$是一个精确 Borel 子代数。那么，$B \subset A$在A的内自同构意义下唯一；也就是说，若$B' \subset A$是另一个精确 Borel 子代数，则B与B'共轭。

设$\{\mathrm{d}_1,\dots,\mathrm{d}_n\}$是 B 中一组完备的本原正交幂等元。对于$\mathrm{A}_n$的任意一组完备的本原正交幂等元$\{\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_n\}$，存在$\mathrm{A}_n$的一个内自同构$\sigma$，将$\{\mathrm{d}_1,\dots,\mathrm{d}_n\}$映射到$\{\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_n\}$。然而，根据定理 27，$\sigma(\mathrm{B})$是$\mathrm{A}_n$的一个精确 Borel 子代数，并且按构造它包含幂等元$\{\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_n\}$。由此可知，对于$\mathrm{A}_n$中任意一组完备的本原正交幂等元$\{\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_n\}$，都存在一个包含它们的精确 Borel 子代数 C。特别地，存在一个包含幂等元$\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n$的精确 Borel 子代数。

29. **例** a. **子**。 考虑A_2, 的路径代数 $1 \xrightarrow{\alpha} 2$，并设$B \subset A_2$为一个正则正合 Borel 子代数固定次序 $1 \lhd 2$。则有

$$\Delta(1) \cong L(1) \quad \text{and} \quad \Delta(2) \cong L(2).$$

因此，B的箭图与A_2, 的箭图重合，并且（唯一的）正则正合 Borel 子代数为$B = A_2$。若改为固定次序 $2 \lhd 1$，则有

$$\Delta(1) \cong P(1) \quad \text{and} \quad \Delta(2) \cong P(2).$$

由于投射模之间不存在非分裂扩张，B的箭图没有箭。因此，我们有$B \cong K \times K$。于是，B显然可取子代数$B = \langle e_1, e_2\rangle$。设$xe_1 + ye_2 + z\alpha \in A_2$是一个幂等元。则有：

$$(xe_1 + ye_2 + z\alpha)^2 = x^2 e_1 + y^2 e_2 + z(x+y)\alpha = xe_1 + ye_2 + z\alpha$$

这意味着所有可能的完备原始正交幂等元组都是$\{e_1 + z\alpha, e_2 - z\alpha\}$，其中$z \in K$是某个标量。因此，我们得到精确 Borel 子代数$B_z = \langle e_1 + z\alpha, e_2 - z\alpha\rangle$。由于$z\alpha \in \operatorname{rad} A_2$,，元素 $1 - z\alpha$可逆（逆元为 $1 + z\alpha$）。由此可知

$$(1 + z\alpha)e_1(1 - z\alpha) = 1 + z\alpha \quad \text{and} \quad (1 + z\alpha)e_2(1 - z\alpha) = 1 - z\alpha,$$

因此，对所有$z \neq 0$，子代数B和B_z共轭。

接下来，我们要仿照定理 28 后的讨论来论证，总存在一个正则正合 Borel 子代数包含幂等元$e_1,\dots,e_n$。该论证依赖于 [Zha00，命题 3.4]，其中指出拟遗传代数的内自同构保持正合 Borel 子代数。我们的下一个目标是将这一结论推广到正则和同调正合 Borel 子代数。

对于任意自同构 σ of A，存在一个自函子 Φ_σ of A-模，其定义是将一个 A-模 V映射为底层向量空间相同、但作用定义为 $a \cdot_\sigma v := \sigma(a) \cdot v$的模。为便于记号，我们用 $\Phi_\sigma(V)$ 表示 ${}_\sigma V$，这表明 A的作用被自同构 σ扭曲。若$B \subset A$是一个子代数，那么$C := \sigma(B)$也同样是子代数。显然，Φ_σ 自然地限制为一个函子 C-模 $\to B$-模。

令 $b_1,\dots,b_n$ 为 $B \subset A$ 的一组完备本原正交幂等元。于是，集合 $\{b_1,\dots,b_n\}$ 为简单 B-模的同构类编了号；我们将以 $L_B(i)$ 表示其中的简单模，其中 $1 \le i \le$

其基为幂等元 b_i，作用定义为令 b_i 作用为恒等映射，而其他基元素作用为 0。由于 $\sigma:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ 是一个同构，$\sigma(\mathrm{b}_1),\ldots,\sigma(\mathrm{b}_n)$ 是 C 的一组完备本原正交幂等元；令 $\sigma(\mathrm{b}_i)=\mathrm{c}_i$，对于 $1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}$，我们以 $\mathrm{L}_C(\mathrm{i})$ 表示简单 C-模，其基为幂等元 c_i，作用定义为令 c_i 作用为恒等映射，而其他基元素作用为 0。采用这一记号，考虑模 ${}_\sigma\mathrm{L}_C(\mathrm{i})$，并固定基 c_i。在此基下，幂等元的作用为 $\mathrm{b}_i\cdot_\sigma \mathrm{c}_i := \sigma(\mathrm{b}_i)\cdot \mathrm{c}_i = \mathrm{c}_i\cdot \mathrm{c}_i = \mathrm{c}_i$。因此，采用这一记号可得 ${}_\sigma\mathrm{L}_C(\mathrm{i}) = \mathrm{L}_B(\mathrm{i})$。

30. **引理**。设 A 是一个代数，且 $B\subset A$ 是一个子代数。设 σ 是 A 的一个内自同构，由 $\sigma(x)=u^{-1}xu$ 给出，其中 u 是某个可逆元，且 $x\in A$。令 $C=\sigma(B)$。

(i) 存在一个 A-A-双模 $A\cong {}_\sigma A$ 的同构，由 u^{-1} 左乘法给出。(ii) 对任意 C-模 M，存在左 A-模之间的同构 ${}_\sigma A\otimes_C M\to A\otimes_B {}_\sigma M$。(iii) 对任意 C-模 M，存在左 A-模之间的同构 $A\otimes_C M\to A\otimes_B {}_\sigma M$。

证明。(i) 映射 $x\mapsto u^{-1}(x)$ 是 A 上的线性双射，这一点显然，因此我们来验证它是一个双模同态。事实上，

$$u^{-1}(axb)=u^{-1}auu^{-1}xb=\sigma(a)u^{-1}(x)b=a\cdot_\sigma u^{-1}(x)\cdot b.$$

(ii) 在生成元上定义映射 $\varphi:{}_\sigma A\otimes_C M\to A\otimes_B {}_\sigma M$，令 $a\otimes m\mapsto \sigma^{-1}(a)\otimes m$，并通过线性性扩张。于是，$\varphi$ 是良定义的：

$$\begin{aligned}\varphi(ac\otimes_C m)&=\sigma^{-1}(ac)\otimes_B m=\sigma^{-1}(a)\sigma^{-1}(c)\otimes_B m=\sigma^{-1}(a)\otimes_B \sigma^{-1}(c)\cdot_\sigma m\\&=\sigma^{-1}(a)\otimes_B c\cdot m=\varphi(a\otimes_C c\cdot m),\end{aligned}$$

对任意 $c\in C$ 均成立。此外，φ 是左 A-模同态：

$$\varphi(x\cdot_\sigma(a\otimes_C m))=\varphi(\sigma(x)a\otimes_C m)=\sigma^{-1}(\sigma(x)a)\otimes_B m=x\sigma^{-1}(a)\otimes_B m=x\cdot(\sigma^{-1}(a)\cdot_B m)=x\cdot\varphi(a\otimes_C m)$$

对任意 $x\in A$ 均成立。在生成元上定义映射 $\psi:A\otimes_B {}_\sigma M\to {}_\sigma A\otimes_C M$，令 $a\otimes m\mapsto \sigma(a)\otimes m$，并通过线性性扩张。于是，

$$\psi\varphi(a\otimes_C m)=\psi(\sigma^{-1}(a)\otimes_B m)=a\otimes_C m\quad\text{and}\quad\varphi\psi(a\otimes_B m)=\varphi(\sigma(a)\otimes_C m)=a\otimes_B m,$$

因此，φ 和 ψ 互为逆双射。我们得出结论：φ 是一个同构。

(iii) 综合 (i) 和 (ii)。 □

31. **定理**。设 A 是一个基本拟遗传代数，并设 $B\subset A$ 是一个正则（分别地，同调）精确 Borel 子代数。令 σ 为 A 的一个内自同构。则，$\sigma(B)$ 仍是 A 的一个正则（分别地，同调）精确 Borel 子代数。

证明。根据定理 27，我们知道 C 是一个精确 Borel 子代数。我们将空间 $\mathrm{Ext}^k{}_B(L_B(i),L_B(j))$ 和 $\mathrm{Ext}^k{}_C(L_C(i),L_C(j))$ 中的元素解释为长度为 $k+2$ 的正合列，模去等价关系。由于 $A\otimes_B$ 和 $A\otimes_C$ 是正合函子，将它们作用于 $\mathrm{Ext}^k_B(L_B(i),L_B(j))$ 和 $\mathrm{Ext}^k_C(L_C(i),L_C(j))$ 中的正合列，会在这些空间中产生正合列

$$\mathrm{Ext}^k_A(A\otimes_B L_B(i),A\otimes_B L_B(j))\quad\text{and}\quad\mathrm{Ext}^k_A(A\otimes_C L_C(i),A\otimes_C L_C(j)).$$

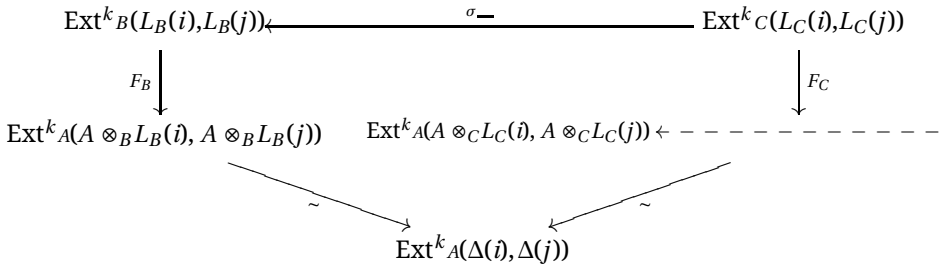
函子性确保这些映射定义良好。分别将它们记为 F_B 和 F_C。我们将由 σ 下述映射记为 $\mathrm{Ext}^k{}_C(L_C(i),L_C(j))\to \mathrm{Ext}^k{}_B(L_B(i),L_B(j))$，其定义方式是取一个正合序列

$$L_C(j)\to M_k\to\cdots\to M_1\to L_C(i)\in\mathrm{Ext}^k_C(L_C(i),L_C(j))$$

到该序列

$$\begin{aligned}&{}_\sigma L_C(j)\to_\sigma M_k\to\cdots\to_\sigma M_1\to_\sigma L_C(i)\\&=\\&L_B(j)\to_\sigma M_k\to\cdots\to_\sigma M_1\to L_B(i).\end{aligned}$$

考虑以下图。



令 $L_C(j) \to M_k \to \cdots \to M_1 \to L_C(i)$ 为一个正合序列，将其视为空间 $\mathrm{Ext}^k{}_C(L_C(i),L_C(j))$ 的元素。先应用 σ，再应用 F_B，我们得到

$$A\otimes_B L_B(j) \to A\otimes_B {}_\sigma M_k \to \cdots \to A\otimes_B {}_\sigma M_1 \to A\otimes_B L_B(i).$$

如果我们改为将 F_C应用于原序列 $L_C(j) \to M_k \to \cdots \to M_1 \to L_C(i)$，则得到

$$A\otimes_C L_C(j) \to A\otimes_C M_k \to \cdots \to A\otimes_C M_1 \to A\otimes_C L_C(i).$$

应用引理 30，我们知道存在一个左 A-模的同构，它由以下复合映射给出 te

$$A\otimes_C M \to {}_\sigma A\otimes_C M \to A\otimes_B {}_\sigma M.$$

这意味着我们可以将图中的虚线箭头选为映射

$$\begin{aligned} &A\otimes_C L_C(j) \to A\otimes_C M_k \to \cdots \to A\otimes_C M_1 \to A\otimes_C L_C(i) \\ &\qquad\qquad \mapsto \\ &A\otimes_B L_B(j) \to A\otimes_B {}_\sigma M_k \to \cdots \to A\otimes_B {}_\sigma M_1 \to A\otimes_B L_B(i), \end{aligned}$$

根据构造，该映射是一个同构，并使顶端方块交换。由此可得，F_C是一个同构。对于第二个陈述，同上述相同的论证保证，当 $k \geq 2$时，映射 $\mathrm{Ext}^k_C(L_C(i),L_C(j)) \to \mathrm{Ext}^k{}_A(A\otimes L_C(i), A\otimes L_C(j))$ 是同构。对于 $k = 1$，上面的图表明我们可以解出 F_C，从而看到 F_C是三个满同态的复合，因此是一个满同态。□

32. **推论**。设$A = KQ/I$是一个包含正则正合 Borel 子代数的基本拟遗传代数。那么，A 的所有正合 Borel 子代数都是正则的。特别地，A 具有一个包含幂等元 $e_1,\ldots,e_n$的正则正合 Borel 子代数。

证明。根据假设，存在一个正则正合 Borel 子代数B属于A。设C是A的一个精确 Borel 子代数。根据定理 28，存在A的一个内自同构 σ，使得 $\sigma(B) = C$；又因为内自同构保持正则正合 Borel 子代数不变，根据定理 31，C是一个正则正合 Borel 子代数。在定理 28 后的讨论中，我们看到A有一个包含幂等元$e_1,\ldots,e_n$的精确 Borel 子代数。由上述论证可知，它是正则的。□

33. **命题**。设$B \subset A_n$ 是一个包含幂等元$e_1,\ldots,e_n$ 的正则正合 Borel 子代数，并假设 $\Delta(i) = M(i,s_i)$。

(i) 若$i \leq s_i < n$，则 $\alpha_j \ldots \alpha_i \notin B$，对任意$i < j < s_i$，且 $\alpha_{s_i}\ldots\alpha_i \in B$。(ii) 若 $s_i = n$，也就是说，若 $\Delta(i)$ 是投射的，则对任意$i \leq j < n$，有 $\alpha_j \ldots \alpha_i \notin B$。

证明。(i) 反设 $\alpha_j \ldots \alpha_i \in B$对于某个$i < j < s_i$成立。令$p \in A_n$为一条路径，并考虑$p \otimes e_i$，即$A_n \otimes_B L(i)$的生成元。若$s(p) \neq$ i</style}，则

$$e_{j+1}\cdot(p\otimes e_i) = e_{j+1}\cdot(p\otimes e_{s(p)}e_i) = 0,$$

因为 $e_{s(p)} \in B$。类似地，如果 $t(p) \neq j+1$，那么

$$e_{j+1}\cdot(p\otimes e_i) = e_{j+1}e_{t(p)}p\otimes e_i = 0.$$

若 $s(p)=i$ 且 $t(p)=j+1$，那么 $p=\alpha_j\dots\alpha_i$，我们假设它包含于 B 中。于是得到

$$\alpha_j\dots\alpha_i\otimes e_i=e_j\otimes\alpha_j\dots\alpha_i e_i=0,$$

因此 $e_{j+1}\cdot(A_n\otimes_B L(i))=0$。然而，$e_{j+1}\cdot\Delta(i)\neq 0$，这正是我们所要的矛盾。

对于第二个陈述，反设 $\alpha_{s_i}\dots\alpha_i\notin B$。于是，$\alpha_{s_i}\dots\alpha_i\otimes e_i$ 是 $A_n\otimes_B L(i)$ 中的非零元素。为说明这一点，注意到对于任意 $i<j<s_i$，根据第一部分，$\alpha_j\dots\alpha_i\notin B$。因此同样有 $e_{s_i+1}\cdot(\alpha_{s_i}\dots\alpha_i\otimes e_i)\neq 0$。现在我们看到，$e_{s_i+1}\cdot\Delta(i)=0$，而 $e_{s_i+1}\cdot A_n\otimes_B L(i)$，从而得到与上面类似的矛盾。

(ii) 类似于 (i) 的第一部分。我们指出，这里之所以单独列为一种情形，仅仅是因为当 $\Delta(i)$ 是投射对象时，(ii) 的第一个陈述没有意义。□

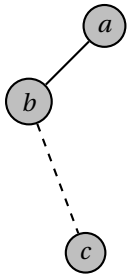
34. **命题**。设 $B\subset A_n$ 是一个正则正合 Borel 子代数，且包含幂等元 $e_1,\dots,e_n$。令 S_B 为由命题 33 得到的包含于 B 中的路径集合，并加上幂等元 $e_1,\dots,e_n$。那么，S_B 是 B 的极小生成集。

证明。众所周知，代数闭域 K 上的任意基本连通有限维代数，都同构于某个箭图的路径代数模去某个容许理想所得的商。我们回顾这一同构的构造。详情请参阅 [ASS06，定理 3.7]。

令 $\Phi: KQ_B\to B$ 为上文提到的同构。于是，Φ 在 Q_B 的平凡路径上定义为 $\Phi(e_i)=e_i$，其中 $1\leq i\leq n$。注意，这样定义是合理的，因为我们可以将幂等元 e_i 视为 KQ_B 和 B 中的元素。

考虑 Q_B 中的箭 $\mathrm{i}\to\mathrm{j}$。如命题 25 之前所述，该集合的基数等于 $\dim\mathrm{Ext}^1\,\mathrm{A}_n(\Delta(\mathrm{i}),\Delta(\mathrm{j}))$，根据定理 15，该值可能为 0 或 1。因此，该集合要么为空，要么只包含一个箭，我们将其记为 $\mathrm{x}^j\mathrm{i}$。箭 $\mathrm{x}^j\mathrm{i}$ 应映射到一个元素 $\mathrm{y}\in\mathrm{radB}$，使得剩余类 $\mathrm{y}+\mathrm{rad}^2\mathrm{B}$ 构成 $\mathrm{e}_j\mathrm{radB}/\mathrm{rad}^2\mathrm{Be}_i$ 的一组基。可通过定义 $\Phi(\mathrm{x\,j\,i})=\alpha_{j-1}\dots\alpha_i$ 来实现。由于我们知道 Φ 是一个同构，因此幂等元 e_i 与形如 $\Phi(\mathrm{x}^j\mathrm{i})$ 的路径共同构成 B 的一个极小生成集。

回想一下，当且仅当 $\dim\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(i),\Delta(j))=1$ 时，箭 $x_{ji}\in Q_B$ 才存在。考虑下图。b 与 c 之间的虚线边表示 b 的右子树中有一个顶点 c（不一定是顶点 $r(b)$），且存在一个从 $\Delta(c)$ 到 $\Delta(b)$ 的非零同态。



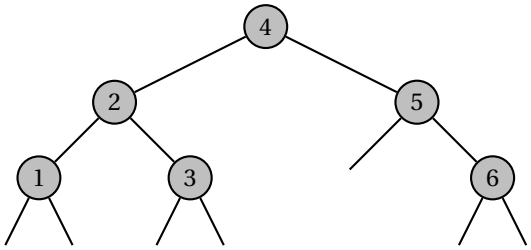
由定理 15 可知，标准模之间可能存在的非零扩张要么是 $\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(b),\Delta(a))$，要么是 $\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(c),\Delta(a))$，其中 a、b 和 c 按上述方式配置。由于 b 标记了 $\ell(a)$，顶点 a 是遍历完 a 的整个右子树后立即访问的第一个顶点。因此，$a=s_b+1$。由于 c 位于 b 的右子树中，我们有 $s_b=s_c$，因此 $a=s_c+1$。将此代入上式可知，B 的生成元具有如下形式

$$\Phi(x_i^{s_i+1})=\alpha_{s_i}\dots\alpha_i,$$

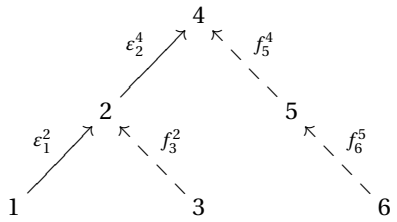
由此可知，S_B 是一个极小生成集。□

35. **推论**。设 B 是包含幂等元 $e_1,\dots,e_n$ 的精确 Borel 子代数 $B\subset A_n$。那么，精确 Borel 子代数恰好是形如 $C=\langle u^{-1}S_B u\rangle$ 的子代数，其中 $u\in A_n$ 是某个可逆元。

36. **例子**。 我们考虑二叉搜索树



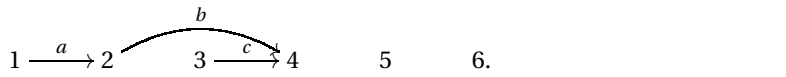
我们在定理 15 之后的例子中看到，A_n 上的标准模的 Ext代数由以下箭图给出



模去关系 $I = \langle \varepsilon_2^4 \varepsilon_1^2 \rangle$ 。这里有三个非零的扩张空间，即

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(1),\Delta(2)) = \dim \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(2),\Delta(4)) = \dim \mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(3),\Delta(4)) = 1.$$

令 取$B \subset A_n$为包含$e_1,\ldots,e_n$的正则正合 Borel 子代数，我们看到，B的箭图为 s



这些箭 a、b和c分别对应路径 α_1、$\alpha_3\alpha_2$和 α_3。于是B的一个生成集S为

$$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_3\alpha_2\}.$$

3.3. A_∞**-结构，作用于** $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$。 A_∞-代数这一概念旨在描述一种并非严格结合、而是仅在一系列“高阶同伦”意义下结合的代数。还有一种自然的“多对象”版本，称为A_∞-范畴，定义如下。本节尤其关注 $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$，它总是具有$A_\infty$-代数结构。不过，我们将把 $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$视为具有$n$ 个对象的A_∞-范畴，这些对象由标准模给出。这种做法很有用，因为它使我们能够强制 $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$的高阶同伦与其自然幂等元相容：恒等同态 $1_{\Delta(i)}$。

37. **定义**。 [Kel01] 设K为一个域。一个A_∞-范畴 $\mathscr{A}$由以下内容组成：

(i) 对象类 $\mathrm{Ob}(\mathscr{A})$；(ii) 对于每一对对象A和B，一个 $\mathbb{Z}$ 分次向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$；(iii) 对于所有$n \geq 1$ 以及对象$A_0,\ldots,A_n$，一个齐次线性映射

$$m_n : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_{n-1},A_n) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_{n-2},A_{n-1}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_0,A_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_0,A_n)$$

次数为 $2-n$，使得

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0.$$

按照上文所述，将 $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$ 视为一个 A_∞-范畴，意味着如下：若我们有扩张ε_i 排列如下

$$\Delta(i_1) \xrightarrow{\varepsilon_1} \Delta(i_2) \xrightarrow{\varepsilon_2} \ldots \longrightarrow \Delta(i_\ell) \xrightarrow{\varepsilon_\ell} \Delta(i_{\ell+1})$$

那么，$m_\ell(\varepsilon_\ell,\dots,\varepsilon_1)$ 是从 $\Delta(i_1)$ 到 $\Delta(i_{\ell+1})$ 的扩张。写出前几个 n 对应的 A_∞-关系，我们得到：

$\mathrm{n}=1$: $\mathrm{m}_1\mathrm{m}_1=0$，这意味着 A 是一个复形。$\mathrm{n}=2$: $\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2=\mathrm{m}_2(\mathrm{m}_1\otimes 1+1\otimes\mathrm{m}_1)$，这意味着 m_1 是关于 m_2的导子。$\mathrm{n}=3$: $\mathrm{m}_2(1\otimes\mathrm{m}_2-\mathrm{m}_2\otimes 1)=\mathrm{m}_1\mathrm{m}_3+\mathrm{m}_3(\mathrm{m}_1\otimes 1\otimes 1+1\otimes\mathrm{m}_1\otimes 1+1\otimes 1\otimes\mathrm{m}_1)$，这意味着 m_2 在由 m_3给出的同伦意义下满足结合律。

在实际元素上求值时，根据 Koszul符号规则，还会出现更多符号：

$$(f\otimes g)(x\otimes y)=(-1)^{|g||x|}f(x)\otimes g(y).$$

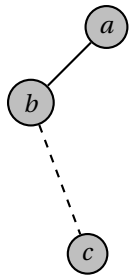
这里，f和g 是齐次映射，x 和y 是齐次元素。竖线表示次数。若一个分次范畴 A 上的任意 A_∞-结构都满足 $m_n=0$（对$n\geq 3$ 而言），则称该范畴为内在形式化。

38. **命题**。 $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$ 是内在形式化的。

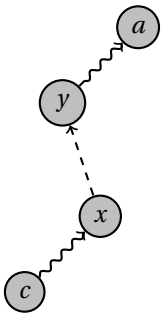
证明。 令 $\varphi_1,\dots,\varphi_\ell$ 为 $\mathrm{Ext}^*_{A_n}(\Delta,\Delta)$ 中的齐次扩张。设 $i=\sum^{\ell}_{j=1}\deg\varphi_j$。由于 m_ℓ 的次数为 $2-\ell$，扩张 $m_\ell(\varphi_\ell,\dots,\varphi_1)$ 的次数为 $2-\ell+i$。因为 A_n 是遗传的，若扩张 $m_\ell(\varphi_\ell,\dots,\varphi_1)$ 非零，则其次数为 0 或 1。这意味着存在以下几种情况：

$$2-\ell+i=\begin{cases}0, & \text{if } i=\ell-2\\ 1, & \text{if } i=\ell-1.\end{cases}$$

假设 $i=\ell-1$，且 $m_\ell(\varphi_\ell,\dots,\varphi_1)$ 在 $\mathrm{Ext}^1_{A_n}(\Delta(c),\Delta(a))$ 中产生一个扩张。我们知道，若此扩张非零，则顶点 a 和 c 必须按如下方式配置：此处虚线边表示一条路径，该路径由连接顶点 v 与 $r(v)$ 的边首尾相接而成。



由于 $i=\ell-1$，$m_\ell(\varphi_\ell,\dots,\varphi_1)$ 的参数中恰有一个 φ_j 是同态而非真扩张。考虑下图，其中虚线边表示同态φ_j：$\Delta(x)\to\Delta(y)$；从 c到 x以及从 y到 a的波浪箭头分别表示复合 $\varphi_{j-1},\dots,\varphi_1$ 和 $\varphi_\ell,\dots,\varphi_{j+1}$。



请注意，任一波浪边都可能表示一条长度为 >1 的路径，而非实际的边。此外，取决于 j，c 与 x 之间的边或 y 与 a 之间的边可能是“空的”。我们看到，不可能出现前一幅图中的允许的构型。

若 $i=\ell-2$，则 $m_\ell(\varphi_\ell,\dots\varphi_1)$ 的结果是 $\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(c),\Delta(a))$ 的一个元素。由于 $\ell\geq 3$，$m_\ell(\varphi_\ell,\dots,\varphi_1)$ 至少有一个参数 φ_j 是真扩张。根据上文的允许构型，这意味着 c 位于 a 的左子树中。由定理 15 可得 $\mathrm{Hom}_{A_n}(\Delta(c),\Delta(a))=0$。□

4. 分解上的标准模的 Ext代数

在上一节中，我们研究了具有线性定向的 $\mathbb{A}_n$ 的路径代数。为了将这项研究推广到任意定向，我们采用在汇点或源点处对箭图 Q 进行“分解”的方法。在[FKR22], 中，作者使用这一方法，根据 Q 的某些子箭图的路径代数上的拟遗传结构，研究路径代数 KQ 的不同拟遗传结构。本节中，我们将这一研究推广到标准模的 Ext代数。

39. 定义。 [FKR22，定义 3.1] 设 Q 是一个有限连通箭图，且 v 是 Q 的一个作为汇点或源点的顶点。Q 在顶点 v 处分解，是指 Q 的满子箭图 $Q^1\sqcup\cdots\sqcup Q^\ell$ 的并，其中 Q^i 是 Q 的满子箭图，并满足以下条件。

(i) 每个 Q^i 都是 Q 的连通满子箭图，并且 $v\in Q_0^i$。（ii）对于所有 i、j $\in\{1,\dots,\ell\}$，若 $i\neq j$，则有 $Q_0=\left(Q_0^1\backslash\{v\}\right)\sqcup\cdots\sqcup\left(Q_0^\ell\backslash\{v\}\right)\sqcup\{v\}$，且 $Q_0^i\cap Q_{j0}=\{v\}$。（iii）对于 $x\in Q_0^i\backslash\{v\}$ 和 $y\in Q_{j0}\backslash\{v\}$，其中 i、j $\in\{1,\dots,\ell\}$ 满足 $i\neq j$，则 Q 中 x 与 y 之间不存在箭。

40. 例子。 考虑箭图 $Q=1\longleftarrow 2\longleftarrow 3\longrightarrow 4\longrightarrow 5$。我们看到，$Q$ 在源点 3 处分解：

$$(1\longleftarrow 2\longleftarrow 3)\sqcup(3\longrightarrow 4\longrightarrow 5).$$

我们沿用 [FKR22] 的记号，并令

$$A^\ell=A\big/\langle e_u\mid u\in Q_0\backslash Q_0^\ell\rangle.$$

于是，A 满射到 A^ℓ，因此存在一个全忠实正合函子 $F^\ell\colon A^\ell\text{-模}\to A\text{-模}$。通过函子 F^ℓ，将 A^ℓ-模视为 A-模的一个满子范畴。我们指出，一个 A-模 M 是 A^ℓ-模，当且仅当对于任意 $u\in Q_0\backslash\backslash Q_0^\ell$，$M=0$。

41. 引理。 设 M 是一个 A^ℓ-模，设 N 是一个 A-模，并考虑商 $\overline{N}=N\big/\sum e_u\cdot N$，其中求和遍历所有 $u\in\overline{Q_0^\ell\backslash\backslash\{v\}}$。于是，$N$ 是一个 A^ℓ-模，并且存在向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_A(M,\overline{N})\cong\mathrm{Hom}_{A^\ell}(M,\overline{N})\cong\mathrm{Hom}_A(M,N).$$

证明。 第一个同构由 F^ℓ 是完全忠实函子这一事实立即得出。为说明第二个同构，令 $e^\ell=\sum e_u$，其中求和如引理陈述所示。于是存在一个 A-模同构

$$\overline{N}\cong\mathrm{Hom}_A(A/\langle e^\ell\rangle,N).$$

接下来注意，根据张量-Hom伴随，存在一对伴随函子 $(F^\ell,\mathrm{Hom}_A(A/\langle e^\ell\rangle,-))$。于是，

$$\mathrm{Hom}_A(M,N)\cong\mathrm{Hom}_A(F^\ell(M),N)\cong\mathrm{Hom}_{A^\ell}(M,\mathrm{Hom}_A(A/\langle e^\ell\rangle,N))\cong\mathrm{Hom}_{A^\ell}(M,\overline{N}).$$

□

42. 引理。 [FKR22，引理 3。3] 设 $Q^1\sqcup Q^2$ 是 Q 在汇点或源点 v 处分解，并令 $\ell=1,2$。

(i) 对所有 $i\in Q_0^\ell$，有 $L(i)\cong L^\ell(i)$。(ii) 对所有 $i\in Q_0^\ell\backslash\{v\}$，有 $P(i)\cong P^\ell(i)$，且 $I(i)\cong I^\ell(i)$。(iii) 若 v 是汇点，则有 $L(v)\cong P(v)\cong P^\ell(v)$，其中 $\ell=1,2$。

(iv) 若 v 是源点，则有 $L(v) \cong I(v) \cong I^{\ell}(v)$，其中 $\ell = 1,2$。
(v) 对于任意非零的 A-模 M，如果顶M和底 M都是单模，那么我们有 $M \in A^1$-模或$M \in A^2$-模。

(vi) 设 M是一个 A^{ℓ}-模，且 $i \in Q_0$ 是一个顶点。如果 $[M\colon L(i)] \neq 0$，则 $i \in Q_0^{\ell}$。

给定 Q_0 上的偏序 $\trianglelefteq$ 以及在汇点或源点 v处分解得到的 $Q_1 \sqcup Q_2,$，我们可以构造限制 $\trianglelefteq|_{Q_0^{\ell}}$，从而得到$Q_0^{\ell}$上的偏序 $\trianglelefteq^{\ell} = \trianglelefteq|_{Q_0^{\ell}}$。

43. 引理。 [FKR22，引理 3。4] 设 Q_2 是Q 在汇点或源点 v 处分解得到的结果，并设 $\trianglelefteq$ 是Q_0上的偏序。记 Δ 和 ∇ 分别为与 $\trianglelefteq$相关联的标准模和余标准模的集合。记 Δ^{ℓ} 和 ∇^{ℓ} 分别为标准模和余标准 A^{ℓ}-模的集合。

(i) 对任意 $i \in Q_0^{\ell} \backslash \{v\}$，存在 A-模的同构 $\Delta(i) \cong \Delta^{\ell}(i)$ 和 $\nabla(i) \cong \nabla^{\ell}(i)$，其中 $\ell = 1,2$。(ii) 若 v是汇点，则存在 A-模的同构 $L(v) \cong \Delta(v) \cong \Delta^{\ell}(v)$。(iii) 若 v是源点，则存在 A-模的同构 $L(v) \cong \nabla(v) \cong \nabla^{\ell}(i)$。(iv) 若 A关于 $\trianglelefteq$ 是准遗传的，则 A^{ℓ} 关于 $\trianglelefteq^{\ell}$ 是准遗传的，其中 $\ell = 1,2$。

设 $Q = Q^1 \sqcup Q^2$ 是在源点或汇点 v处分解 Q所得，并设 $\trianglelefteq^{\ell}$ 是 Q_0^{ℓ} 上关于$\ell = 1,2$的偏序。令 $1 = 2$ 和 $2 = 1$。按如下方式定义 Q_0 上的偏序 $\trianglelefteq = \trianglelefteq(\trianglelefteq^1, \trianglelefteq^2)$。对于 <style id='i、$j \in Q_0,$，若满足以下条件之一，则称 $i \lhd j$。

(i) 对于某个 ℓ，有 i、$j \in Q_0^{\ell}$以及 $i \lhd^{\ell} j$。
(ii) 有$i \in Q_0^{\ell}$、$j \in Q_0^{\overline{\ell}}$、$i \lhd^{\ell} v$以及 $v \lhd^{\overline{\ell}} j$。

44. 引理。 [FKR22，引理 3。5] 设$Q^1 \sqcup Q^2$ 是Q 在汇点或源点v处分解。设 $\trianglelefteq^{\ell}$ 是Q_0^{ℓ} 上的偏序，并以 Δ^{ℓ} 和 ∇^{ℓ} 分别表示与$\trianglelefteq^{\ell}$相关的标准模和余标准模的集合，其中 $\ell = 1,\ 2$。以 Δ 和 ∇ 分别表示与 $\trianglelefteq = \trianglelefteq(\trianglelefteq^1, \trianglelefteq^2)$ 相关的标准模和余标准模的集合。那么有如下结论。

(i) 对任意$i \in Q_0^{\ell} \backslash \{v\}$，存在$A$-模的同构 $\Delta(i) \cong \Delta^{\ell}(i)$ 和 $\nabla(i) \cong \nabla^{\ell}(i)$。(ii) 若$v$是汇点，则存在$A$-模的同构 $L(v) \cong \Delta(v) \cong \Delta^{\ell}(v)$。(iii) 若$v$是源点，则存在$A$-模的同构$L(v) \cong \nabla(v) \cong \nabla^{\ell}(i)$。(iv) 若 $\trianglelefteq^{\ell}$ 在A^{ℓ} 上为 $\ell = 1$ 和 $\ell = 2$定义了准遗传结构，则 $\trianglelefteq = \trianglelefteq(\trianglelefteq^1, \trianglelefteq^2)$ 在A上定义了一个准遗传结构。

我们有如下关于不可分解投射模之间同态空间的观察。

45. 引理。 设$Q^1 \sqcup Q^2$ 是Q在汇点或源点v处分解得到的。则对$i \in Q_0^1 \backslash \{v\}$和$j \in Q_0^2 \backslash \{v\}$，有 $\mathrm{Hom}_A(P(i), P(j)) = \mathrm{Hom}_A(P(j), P(i)) = 0$。

46. 命题。 设$Q^1 \sqcup Q^2$ 是Q在汇点或源点v处分解得到的。设$i \in Q_0^1 \backslash \{v\}$和$j \in Q_0^2 \backslash \{v\}$。（i）如果$v$是源点，则有

$$\mathrm{Ext}_A^k(\Delta(i), \Delta(j)) = \mathrm{Ext}_A^k(\Delta(j), \Delta(i)) = 0,$$

对所有$k \geq 0$均成立。

（ii）如果v是汇点，且相对于 $\trianglelefteq^e$为极大或极小，则有

$$\mathrm{Ext}_A^k(\Delta(i), \Delta(j)) = \mathrm{Ext}_A^k(\Delta(j), \Delta(i)) = 0,$$

对所有$k \geq 0$均成立。

证明。 (i) 设v 为一个源点，并设$P^{\bullet} \to \Delta(i)$是一个极小投射分解。我们断言，该分解$P^{\bullet}$ 的每一项P^k 都可分解为不可分解投射模的直和，如下所示：

$$P^k = \bigoplus_{\ell=1}^{n} P(\ell)^{m_{\ell,k}},$$

其中，若 $m_{\ell,k} > 0$，则 $\ell \in Q_0^1\backslash\{v\}$。由于 v 是源点，我们必有 $[P(i) : L(v)] = 0$。因此，若π_i: P(i) → Δ(i) 是自然投影，则也必有 $[\ker \pi_i : L(v)] = 0$。由此可知，$\ker \pi_i$ 的投射覆盖不含合成因子 L(v)。通过归纳法，断言成立。对 $P^\bullet$施以 $\mathrm{Hom}_A(\ ,\Delta(j))$，我们考察空间 $\mathrm{Hom}_A(P^k,\Delta(j))$。根据我们的断言，该空间分解为直和，其直和项形如 $\mathrm{Hom}_A(P(\ell),\Delta(j))$，其中 $\ell \in Q_0^1\backslash\{v\}$。于是可得

$$\dim \mathrm{Hom}_A(P(\ell),\Delta(j)) = [\Delta(j) : L(\ell)] = 0.$$

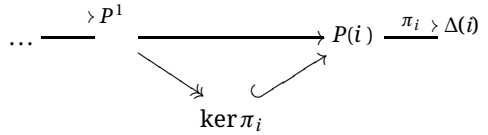
(ii) 令 v 为汇点，并假设 v 关于 $\trianglelefteq^e$ 是极大的。设存在从 Δ(i) 到 Δ(j) 的 k 次扩张。那么，在空间 $\mathrm{Hom}_A(P^k$, Δ(j)) 中存在一个非零同态。注意，P^k 的不可分解直和项具有 $P(\ell)$ 的形式，其中 $\ell \in Q_0$。由于 Hom 函子具有可加性，考虑空间 $\mathrm{Hom}_A(P(\ell),\Delta(j))$。要使这个空间含有非零元素，必须有 $[\Delta(j) : L(\ell)] > 0$。这种 ℓ 的唯一可能性是 $\ell = v$。但这样一来，$[\Delta(j) : L(v)] > 0$，这意味着 $v \lhd^e j$，与 v 的极大性矛盾。

反之，假设 v 关于 $\trianglelefteq^e$ 是极小的。对于 $k = 0$，命题的断言为

$$\mathrm{Hom}_A(\Delta(i),\Delta(j)) = 0,$$

这是成立的，因为 $i \in Q_0^1\backslash\{v\}$ 和 $j \in Q_0^2\backslash\{v\}$。

接下来，我们断言 $[P^k : L(v)] = 0$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立，并用归纳法证明。考虑下面的图:



由于A是准遗传的，模 $\ker \pi_i$包含于 $\mathscr{F}(\Delta(\triangleright^e i))$ 中，这意味着其滤过中出现的每个标准模 $\Delta(a)$ 都满足 $i \lhd^e a$。如果

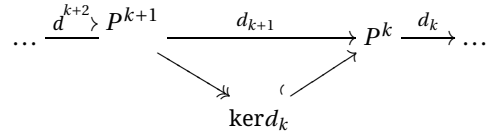
$$\dim \mathrm{Ext}_A^1(\Delta(i),\Delta(j)) > 0,$$

那么 $\dim \mathrm{Hom}_A(P^1,\Delta(j)) > 0$，这只有在 P^1 有一个与 L(v) 同构的直和项时才可能发生。这意味着 L(v) ⊂ top$\ker \pi_i$，也就是说，$\ker \pi_i$ 的标准滤过中出现了某个满足 $[\Delta(b) : L(v)] > 0$ 的 Δ(b)。由于 L(v) 包含于 top $\ker \pi_i$，模 Δ(v) 出现在其标准滤过中，因为任何其他含有合成因子 L(v) 的标准模 Δ(c) 都必须满足 L(v) ⊂rad Δ(c)。由于 $\ker \pi_i \in \mathscr{F}(\Delta(\triangleright^e i))$，这意味着 $v \lhd^e i$，与 v 的极小性矛盾。

在归纳步骤中，假设模P^k包含于 $\mathscr{F}(\Delta(\triangleright^e i))$。那么，$\ker d_k$也包含于其中，我们按上述方法进行论证。□

47. **引理**。假设v是一个源点。令$i \in Q_0^\ell\backslash\{v\}$，并令$P^\bullet \to \Delta^\ell(i)$为$\Delta^\ell(i)$作为$A$-模的极小投射分解。那么，投射分解 $P^\bullet$ 的任一项P^k 都不包含投射模$P^\ell(v)$作为直和项。

证明。我们用归纳法进行证明。基步显然成立，因为$P^0 = P^\ell(i)$。请看下图



假设该结论对模 P^k成立，并反设模 P^{k+1}含有一个直和项 $P^\ell(v)$。根据构造，P^{k+1} 是 $\ker d_k$的一个投射覆盖，因此我们得出，模 $\mathrm{top}\ker d_k$ 含有一个直和项 $L^\ell(v)$。这一事实进而意味着，P^k有一个直和项 $P^\ell(t)$，使得 $\left[P^\ell(t) : L^\ell(v)\right] > 0$。由于 $P^\ell(t)$ 的一组基由 A^ℓ 中以 t 为起点的路径构成，

这意味着 A^ℓ 中存在一条从 t 到 v的路径。这正是我们所需的矛盾，因为已假设 v 是一个源点。□

48. **命题**。 设$Q^1 \sqcup Q^2$ 是在汇点或源点v处分解得到的。

(i) 若 i , j $\in Q_0^\ell \backslash \{v\}$，则对所有 k ≥ 0，均有 $\mathrm{Ext}^k A^\ell(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(j)) \cong \mathrm{Ext}^k A(\Delta(i), \Delta(j))$。(ii) 若 v 是汇点，则对所有 k ≥ 0，均有 $\mathrm{Ext}^k A^\ell(\Delta^\ell(v), \Delta^\ell(j)) \cong \mathrm{Ext}^k_A(\Delta(v), \Delta(j))$。(iii) 若 v 是汇点，则对所有 k ≥ 0，均有 $\mathrm{Ext}^k A^\ell(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(v)) \cong \mathrm{Ext}^k A(\Delta(i), \Delta(v))$。

证明。设 $P^\bullet \to \Delta^\ell(i)$ 和 $Q^\bullet \to \Delta^\ell(j)$ 是极小投射分解。由引理 42，存在 A-模的同构 $P^\ell(x) \cong P(x)$，对所有 $x \in Q_0^\ell \backslash \{v\}$ 均成立。注意，这个同构由函子 F^ℓ 诱导，即 $F^\ell(P^\ell(x)) \cong P(x)$。类似地，我们有 $F^\ell(\Delta^\ell(i)) \cong \Delta(i)$ 和 $F^\ell(\Delta^\ell(j)) \cong \Delta(j)$。

(i) 函子 $F^\ell : A^\ell$-模 $\to A$-模是完全忠实且正合的。由引理 47 可知，投射分解 $P^\bullet \to \Delta^\ell(i)$ 的各项不含任何与 $P^\ell(v)$ 同构的直和项。因此，$F^\ell(P^\bullet) \to F^\ell(\Delta^\ell(i)) \cong \Delta(i)$ 是一个极小投射分解。同理，$F^\ell(Q^\bullet) \to F^\ell(\Delta^\ell(j)) \cong \Delta(j)$ 是一个极小投射分解。结论得证。(ii) 若 v 是汇点，则由引理 42，作为 A-模有 $P^\ell(v) \cong L(v) \cong P(v)$；由引理 43，作为 A-模有 $\Delta^\ell(v) \cong L(v) \cong \Delta(v)$。因此，对 $\Delta^\ell(v)$ 和 $\Delta^\ell(j)$ 的极小投射分解应用函子 F^ℓ，即可得到结论。(iii) 与 (ii) 类似。

□

我们回顾 [FKR22], 的记号，其中 $\overline{1} = 2$ 且 $\overline{2} = 1$。

49. **引理**。 设 $Q_1 \sqcup Q_2$ 是在源点 v处分解 Q所得，且 $i \in Q_0^\ell \backslash \{v\}$。那么，存在向量空间的同构

$$\mathrm{Hom}_A(P(i), P^\ell(v)) \cong \mathrm{Hom}_A(P(i), P(v)) \quad \text{and} \quad \mathrm{Hom}_A(P^\ell(v), P(i)) \cong \mathrm{Hom}_A(P(v), P(i)), \text{ for } \ell = 1, 2.$$

证明。 第一个结论恰好是将引理 41 应用于模 $P(i)$ 和 $P^\ell(v)$ 得到的。注意，按照引理 41 的记号，我们有 $P^\ell(v) = P(v)$。对于第二个结论，令 $p\colon P(v) \to P^{\overline{\ell}}(v)$ 表示自然满同态。那么，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \ker p \longrightarrow P(v) \xrightarrow{p} P^\ell(v) \longrightarrow 0\ .$$

注意，$P^\ell(v)$ 是一个 A^ℓ-模，而 $\ker p$ 是一个 $A^{\overline{\ell}}$-模。将 $\mathrm{Hom}_A(_, P(i))$ 应用于此序列，我们得到:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P^\ell(v), P(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P(v), P(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\ker p, P(i))$$

空间 $\mathrm{Hom}_A(\ker p, P(i))$ 为零，这是因为我们此前的观察，因此有

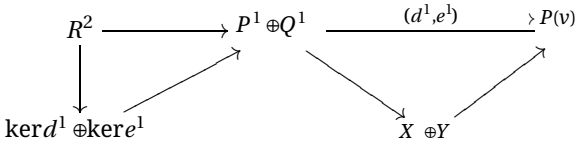
$$\mathrm{Hom}_A(P^\ell(v), P(i)) \cong \mathrm{Hom}_A(P(v), P(i))$$

因为 Hom 函子是左正合的。 □

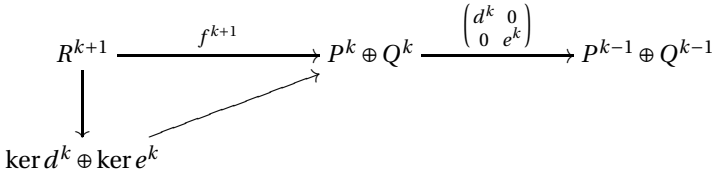
50. **引理**。 设v 是一个源点，$P^\bullet \to \Delta^1(v)$是一个极小投射分解，其项为$P^k$、$k \geq 0$；$Q^\bullet \to \Delta^2(v)$是一个极小投射分解，其项为$Q^k$、$k \geq 0$。那么，对于$k \geq 1$，存在一个极小投射分解$R^\bullet \to \Delta(v)$，其项为$R^k = P^k \oplus Q^k$；并且$R^0 = P(v)$。

证明。我们用归纳法。对于 k $= 1$ 的情形，考虑投影 $p : P(v) \to \Delta(v)$。模 $\ker p$ 的基由 A 中满足 s(q) $= v$ 且 t(q) $= j$（其中 $j \not\cong v$）的路径 q 组成。令 $x_1, \ldots, x_n$ 为满足 $t(x_i) \in Q_0^1$ 的路径，令 $y_1, \ldots, y_m$ 为满足 $t(y_i) \in Q_0^2$ 的路径。设 $X = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$，$Y = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_m\}$。显然，作为向量空间，$\ker p = X \oplus Y$。由于 A 在 X 和 Y 上的作用由左乘法给出，我们可知，事实上，作为 A-模，$\ker p = X \oplus Y$。

显然，作为 A^1-模，X 同构于投影 $p^1 : P^1(v) \twoheadrightarrow \Delta^1(v)$ 的核，因此P^1 是 X的投射覆盖。类似地，作为 A^2-模，Y 同构于投影$p^2 :P^2(v) \twoheadrightarrow \Delta^2(v)$ 的核，因此 Q^1 是 Y 的投射覆盖。当 $k = 2$ 时，我们考虑这幅图：



显然，我们可以将从 $P^1 \oplus Q^1$ 到 $P(v)$ 的映射视为 (d^1, e^1)。于是其核为 $\ker d^1 \oplus \ker e^1$，的直和，并且有一个投射覆盖 $R^2 = P^2 \oplus Q^2$。这就完成了归纳法的基础。考虑下面的图：



上面的右矩阵是对角矩阵，这由引理 45 和归纳假设可知。于是，映射 $\begin{pmatrix} d^k & 0 \\ 0 & e^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的核同构于 $\ker d^k \oplus \ker e^k$，因此其投射覆盖为 $P^{k+1} \oplus Q^{k+1}$。这表明 $R^{k+1} = P^{k+1} \oplus Q^{k+1}$ 以及 $f_{k+1} = \begin{pmatrix} d^{k+1} & 0 \\ 0 & e^{k+1} \end{pmatrix}$。

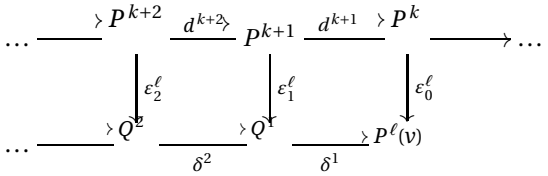
□

51. **命题**。 设 $Q_1 \sqcup Q_2$ 是 Q在源点 v处分解，且 $i \in Q_0^\ell \backslash \{v\}$。那么，存在如下向量空间同构

$$\mathrm{Ext}^k_{A^\ell}(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(v)) \cong \mathrm{Ext}^k_A(\Delta(i), \Delta(v)) \quad \text{and} \quad \mathrm{Ext}^k_{A^\ell}(\Delta^\ell(v), \Delta^\ell(i)) \cong \mathrm{Ext}^k_A(\Delta(v), \Delta(i)),$$

对所有 $k \geq 0$。

证明。 设 $P^\bullet \to \Delta^\ell(i)$ 和 $Q^\bullet \to \Delta^\ell(v)$ 是极小投射分解。令 $\varepsilon^\ell : P^\bullet \to Q^\bullet[k]$ 为链映射。



根据引理 50，存在一个极小投射分解 $T^\bullet \to \Delta(v)$，其各项为

$$T^k = \begin{cases} Q^k \oplus R^k, & \text{if } k \geq 1 \\ P(v), & \text{if } k = 0, \end{cases}$$

其中，模 R^k 构成 $\Delta^{\overline{\ell}}(v)$ 的极小投射分解。定义映射 $\varepsilon : P^\bullet \to T^\bullet[k],$ ，其各分量定义为

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varepsilon_n^\ell \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{if } n \geq 1 \\ \Phi(\varepsilon_0^\ell), & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

这里， $\Phi : \mathrm{Hom}_A(P^k, P^\ell(v)) \to \mathrm{Hom}_A(P^k, P(v))$ 是在引理 49 的证明中得到的同构，因此 ε_0 由方程 $p\varepsilon_0 = \varepsilon_0^\ell$ 唯一定义，其中 $p : P(v) \to P(v)^\ell$ 是自然投影。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{k+2} & \xrightarrow{d^{k+2}} & P^{k+1} & \xrightarrow{d^{k+1}} & P^k & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Q^2 \oplus R^2 & \xrightarrow[\left(\begin{smallmatrix}\delta^2 & 0\\ 0 & \partial^2\end{smallmatrix}\right)]{} & Q^1 \oplus R^1 & \longrightarrow & P(v) & &
\end{array}$$

我们断言 ε 是一个链映射。考虑下面的图，其中 $n \geq 1$。

$$\begin{array}{ccc}
P^{k+n+1} & \xrightarrow{d^{k+n+1}} & P^{k+n} \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_n} \\
Q^{n+1} \oplus R^{n+1} & \xrightarrow[\left(\begin{smallmatrix}\delta^{n+1} & 0\\ 0 & \partial^{n+1}\end{smallmatrix}\right)]{} & Q^n \oplus R^n
\end{array}$$

我们有

$$\begin{pmatrix}\delta^{n+1} & 0\\ 0 & \partial^{n+1}\end{pmatrix}\varepsilon_{n+1} = \begin{pmatrix}\delta^{n+1} & 0\\ 0 & \partial^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon^\ell_{n+1}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta^{n+1}\varepsilon^\ell_{n+1}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon^\ell_n d^{k+n+1}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon^\ell_n\\ 0\end{pmatrix} d^{k+n+1} = \varepsilon_n d^{k+n+1}$$

由于 ε^ℓ 是链映射，因此 $\delta^{n+1}\varepsilon^\ell_{n+1} = \varepsilon^\ell_n d^{k+n+1}$。接下来只需验证下面的交换图。

$$\begin{array}{ccc}
P^{k+1} & \xrightarrow{d^{k+1}} & P^k \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} \\
Q^1 \oplus R^1 & \longrightarrow & P(v)
\end{array}$$

在引理 50 的证明中，我们看到，投影 $P(v) \twoheadrightarrow \Delta(v)$ 的核同构于 $X \oplus Y$，其中 X 同构于投影 $P^1(v) \twoheadrightarrow \Delta^1(v)$ 的核，而 Y 同构于投影 $P^2(v) \twoheadrightarrow \Delta^2(v)$ 的核。考虑下面的图：

$$\begin{array}{ccccc}
Q^1 & \xrightarrow{\delta^1} & P^1(v) & \longrightarrow & \Delta^1(v)\,, \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & X & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
R^1 & \xrightarrow{\partial^1} & P^2(v) & \longrightarrow & \Delta^2(v) \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & Y & & &
\end{array}$$

根据构造， δ^1 和 ∂^1 是根映射。由于 $\mathrm{rad}P^1(v)$ 和 $\mathrm{rad}P^2(v)$ 同构于 $P(v)$ 的子模，我们可以将 δ^1 和 ∂^1 分别视为映射 $\delta^1 : Q^1 \to P(v)$ 和 $\partial^1 : R^1 \to P(v)$。于是，上述交换图中的底部映射可以写成 $(\delta^1, \partial^1) : P^1 \oplus R^1 \to P(v)$。考虑下面的图：

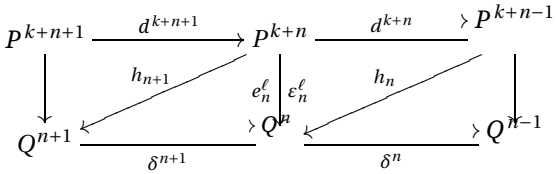
$$\begin{array}{ccccc}
P^{k+1} & \xrightarrow{d^{k+1}} & P^k & \xrightarrow{\varepsilon_0^\ell} & P^\ell(v) \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} & \nearrow{\scriptstyle p} & \\
Q^1 \oplus R^1 & \xrightarrow[(\delta^1, \partial^1)]{} & P(v) & &
\end{array}$$

根据构造，右侧的三角形交换。由于 ε^ℓ 是一个链映射，我们有

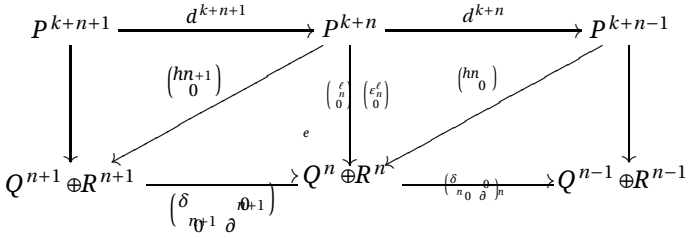
$$(\delta^1, \partial^1)\varepsilon_1 = (\delta^1, \partial^1)\begin{pmatrix}\varepsilon^\ell_1\\ 0\end{pmatrix} = \delta^1\varepsilon^\ell_1 = \varepsilon^\ell_0 d^{k+1}.$$

此外， $\delta^1\varepsilon_1^\ell = \varepsilon_0^\ell d^{k+1}$ 的像包含于子模 $\mathrm{rad}(A^\ell)\cdot P(v)$中，而$p$在该子模上作用为恒等映射。这意味着该图的外围交换；又由于p在 $\mathrm{rad}(A^\ell)\cdot P(v)$上是同构，故该方形交换。令$e^\ell : P^\bullet \to Q^\bullet[k]$ 为另一个链映射。我们断言，若 ε^ℓ 与 e^ℓ 同伦，则 ε 与e也同伦，其中$e\colon P^\bullet \to T^\bullet[k]$ 是分量如下的链映射

$$e_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} e_n^\ell \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{if } n \geq 1 \\ \Phi(e_0^\ell), & \text{if } n = 0. \end{cases}$$



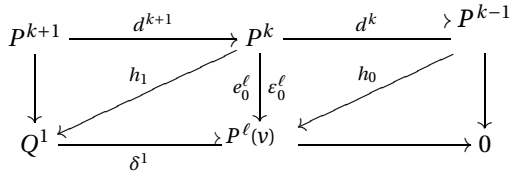
假设$h_n d^{k+n} + \delta^{n+1} h_{n+1} = \varepsilon_n^\ell - e_n^\ell$，对于$n \geq 1$。请看图:



于是，我们有

$$\begin{pmatrix} \delta^{n+1} & 0 \\ 0 & \partial^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_n \\ 0 \end{pmatrix} d^{k+n} = \begin{pmatrix} \delta^{n+1} h_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_n d^{k+n} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_n^\ell - e_n^\ell \\ 0 \end{pmatrix}.$$

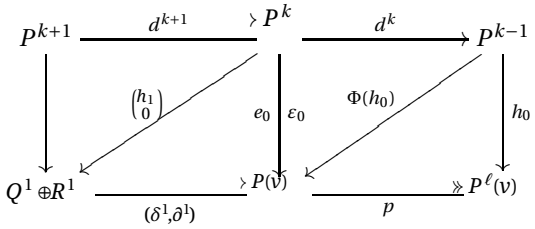
剩下需要检查的是$n = 0$的情形。考虑下面这幅图。



设$h_0 \circ d^k + \delta^1 h_1 = \varepsilon_0^\ell - e_0^\ell$是映射$P^k \to P^\ell(v)$。为了完成我们的同伦，我们取映射 $\Phi(h_0)$，其中

$$\Phi : \mathrm{Hom}_A(P^k, P^\ell(v)) \to \mathrm{Hom}_A(P^k, P(v))$$

是引理 49 的证明中构造的同构。



注意，映射 $\varepsilon_0 e_0$ 和 $\Phi(h_0)$ 由以下方程定义

$$p\varepsilon_0 = \varepsilon_0^\ell, \quad pe_0 = e_0^\ell, \quad \text{and} \quad p\Phi(h_0) = h_0.$$

由此，我们得到 $\delta^1 h_1 + p\Phi(h_0)d^k = p(\varepsilon_0 - e_0)$。由于 $\delta^1 h_1$ 的像包含于子模 $\mathrm{rad}P^\ell(v)$ 中，而该子模以自然方式是$P(v)$ 的子模，且$p: P(v) \to P^\ell(v)$ 在其上作用为恒等映射，因此我们有 $\delta^1 h_1 = p\delta^1 h_1$ 作为映射$P^k \to P^\ell(v)$。这意味着我们有等式

$$p(\delta^1 h_1 + \Phi(h_0)d^k) = p(\varepsilon_0 - e_0)$$

作为映射 $P^k \to P^\ell(v)$。现在，由于 P^k 是一个 A^ℓ-模，我们可以仿照引理 49 的证明进行论证，从而得出 $\delta^1 h1$、$\Phi(h_0)$、ε_0 和 e_0 的像都包含在子模 $\mathrm{rad}(A^\ell)\cdot P(v) \subset P(v)$ 中，而 p 在该子模上作用为恒等映射。这说明

$$\varepsilon_0 - e_0 = \delta^1 h_1 + \Phi(h_0)d^k = (\delta^1, \partial^1)\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi(h_0)d^k,$$

从而证实了 ε 和 e 同伦。因此，我们已经证明映射

$$\Upsilon : \mathrm{Ext}^k_{A^\ell}(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(v)) \to \mathrm{Ext}^k_A(\Delta(i), \Delta(v)),$$

由 $\varepsilon^\ell \mapsto \varepsilon$ 定义，是良定义的。

接下来注意，由于 $i \in Q_0^\ell \backslash \{v\}$，根据引理 47，$P^\bullet$ 的各项不含与 $P^\ell(v)$ 同构的不可分解直和项。于是，由于 R^s 的不可分解直和项具有 $P(j)$ 的形式，其中 $j \in \overline{Q_0^\ell}$，根据引理 45，对任意 $s \geq 1$，$\mathrm{Hom}_A(P^{k+s}, R^s) = 0$。因此，我们得到一个向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_{A^\ell}(P^{k+s}, Q^s) \cong \mathrm{Hom}_A(P^{k+s}, T^s),$$

对所有 $s \geq 1$，由 $f \mapsto \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ 给出（注意，对于 $s \geq 1$，$Ts = Q^s \oplus R^s$）。当 $s = 0$ 时，根据引理 49，由于 $Q^0 = P^\ell(v)$ 且 $T^0 = P(v)$，我们有同构 $\mathrm{Hom}_{A^\ell}(P^k, Q^0) \cong \mathrm{Hom}_A(P^k, T^0)$。这意味着我们有一个向量空间同构

$$\xi^s : \mathrm{Hom}_{A^\ell}(P^{k+s}, Q^s) \cong \mathrm{Hom}_A(P^{k+s}, T^s),$$

对所有 $s \geq 0$。注意，根据构造，对于所有 $n \geq 0$，$\big(\Upsilon(\varepsilon^\ell)\big)_n = \xi^n(\varepsilon_n^\ell)$，这表明 Υ 是线性同构。这证明了第一个结论。第二个结论的证明类似。□

令 $\mathrm{Ext}^*{}_{A^\ell}(\Delta^\ell, \Delta^\ell)$ 表示 $\ell = 1,2$ 时 A^ℓ 上标准模的 Ext代数。类似地，令 $\mathrm{Ext}^*_A(\Delta, \Delta)$ 表示 A 上标准模的 Ext代数。固定空间 $\mathrm{End}_A(\Delta(v))$ 的基 $1_{\Delta(v)}$。

52. **定理**。设$Q^1 \sqcup Q^2$ 是Q 在汇点或源点v处分解得到的，其中若v 是汇点，则v相对于 $\trianglelefteq^e$ 是极小或极大的。于是，存在分次代数的同构 $\mathrm{Ext}^*_A(\Delta, \Delta) \cong \mathrm{Ext}^*{}_{A^1}(\Delta^1, \Delta^1) \diamond \mathrm{Ext}^*{}_{A^2}(\Delta^2, \Delta^2)$。

证明。 我们首先注意到，根据命题48和命题51，有

$$\mathrm{Ext}^k_{A^\ell}(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(j)) \cong \mathrm{Ext}^k_A(\Delta(i), \Delta(j)),$$

对所有 i、j $\in Q_0^\ell$ 以及所有 k ≥ 0 均成立。令 C $= \mathrm{Ext}^* A^1(\Delta^1, \Delta^1) \diamond \mathrm{Ext}^* A^2(\Delta^2, \Delta^2)$。根据 C 上乘法的定义，对于任意 x $\in \mathrm{Ext}^* A^1(\Delta^1, \Delta^1)$ 和 y $\in \mathrm{Ext}^* A^2(\Delta^2, \Delta^2)$，若 deg x > 0 且 deg y > 0，则有 $\mathrm{x} \cdot_C \mathrm{y} = \mathrm{y} \cdot_C \mathrm{x} = 0$。类似地，根据命题 46，我们有

$$\mathrm{Ext}^{>0}_{A^1}(\Delta^1, \Delta^1) \cdot \mathrm{Ext}^{>0}_{A^2}(\Delta^2, \Delta^2) = \mathrm{Ext}^{>0}_{A^2}(\Delta^2, \Delta^2) \cdot \mathrm{Ext}^{>0}_{A^1}(\Delta^1, \Delta^1) = 0.$$

综上，这些事实表明存在一个分次代数同态 $\Phi : C \to \mathrm{Ext}^*_A(\Delta, \Delta)$。注意，由于命题 46，子空间 $\Phi(\mathrm{Ext}^*{}_{A^\ell}(\Delta^\ell, \Delta^\ell))$ 生成 $\mathrm{Ext}^*_A(\Delta, \Delta)$，这表明 Φ 是满射。最后，注意 $\dim_K C = \dim_K \mathrm{Ext}^*_A(\Delta, \Delta)$，因此 Φ 是同维向量空间之间的满射线性映射，故为线性同构。□

53. **例子**。 我们考虑箭 quiver 的分解 $(\ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3) \sqcup (\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5)$ r

$$Q = \ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5\ .$$

我们绘制了A^1上的投射模和标准模的洛维图。

$$P^1(1):1,\quad P^1(2):\begin{array}{c}2\\ \downarrow\\ 1\end{array},\quad P^1(3):\begin{array}{c}3\\ \downarrow\\ 2\\ \downarrow\\ 1\end{array},\quad \Delta^1(1)\cong P^1(1),\quad \Delta^1(2)\cong P^1(2),\quad \Delta^1(3)\cong P^1(3).$$

由于A^1 上的标准模是投射模，它们之间不存在非分裂扩张。我们看到存在同态$f\colon \Delta^1(1)\to\Delta^1(2)$、$g\colon \Delta^1(2)\to\Delta^1(3)$和$h\colon \Delta^1(1)\to\Delta^1(3)$，使得$h = g\circ f$。因此，Ext代数 $\mathrm{Ext}^*_{A_1}(\Delta^1,\Delta^1)$ 的箭图为

$$1 - \overset{f}{-} \to 2 - \overset{g}{-} \to 3\ ,$$

其中 $\deg f = \deg g = 0$，且没有额外的关系。

接下来，我们绘制A^2上的投射模和标准模的洛维图。

$$P^2(3):\begin{array}{c}3\\ \downarrow\\ 4\\ \downarrow\\ 5\end{array},\quad P^2(4):\begin{array}{c}4\\ \downarrow\\ 5\end{array},\quad P^2(5):5,\quad \Delta^2(3):3,\quad \Delta^2(4):4,\quad \Delta^2(5):5.$$

由于A^2 上的标准模是单模，我们看到存在非分裂扩张 $\alpha\in\mathrm{Ext}^1_{A_2}(\Delta^2(3),\Delta^2(4))$和 $\beta\in\mathrm{Ext}^1_{A_2}(\Delta^2(4),\Delta^2(5))$，使得 $\beta\alpha = 0$。因此，Ext代数 $\mathrm{Ext}^*_{A_2}(\Delta^2,\Delta^2)$ 的箭图为

$$3 \xrightarrow{\ \alpha\ } 4 \xrightarrow{\ \beta\ } 5\ ,$$

满足关系 $\beta\alpha = 0$。最后，我们绘制 A 上投射模和标准模的洛维图。

$$P(1):\ 1\ ,\quad P(2):\begin{array}{c}2\\ \downarrow\\ 1\end{array},\quad P(3):\begin{array}{ccc}&3&\\ \swarrow&&\searrow\\ 2&&4\\ \downarrow&&\downarrow\\ 1&&5\end{array},\quad P(4):\begin{array}{c}4\\ \downarrow\\ 5\end{array},\quad P(5):\ 5\ ,$$

$$\Delta(1)\cong P(1),\quad \Delta(2)\cong P(2),\quad \Delta(3):\begin{array}{c}3\\ \downarrow\\ 2\\ \downarrow\\ 1\end{array},\quad \Delta(4)\cong L(4),\quad \Delta(5)\cong P(5).$$

我们看到，存在同态 $f\prime\colon \Delta(1)\to\Delta(2)$、$g'\colon \Delta(2)\to\Delta(3)$ 和 $h'\colon \Delta(1)\to\Delta(3)$，使得 $h' = g'\circ f\prime$。此外，我们看到存在非分裂扩张 $\alpha'\in\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(3),\Delta(4))$ 和 $\beta'\in\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(4),\Delta(5))$，使得 $\beta'\alpha' = 0$。复合 $\alpha' g'$ 在 $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(2),\Delta(4))$ 中产生一个扩张，因此根据引理48，它等于零。因此，Ext代数 $\mathrm{Ext}^*_A(\Delta,\Delta)$ 由以下箭图给出

$$1 - \overset{f'}{-} \to 2 - \overset{g'}{-} \to 3 \xrightarrow{\ \alpha'\ } 4 \xrightarrow{\ \beta'\ } 5\ ,$$

s满足关系 $\beta'\alpha'=0$ 和 $\alpha'g'=0$。我们观察到，这个代数与该代数一致 ra

$$C=\mathrm{Ext}^*_{A^1}(\Delta^1,\Delta^1)\diamond\mathrm{Ext}^*_{A^2}(\Delta^2,\Delta^2).$$

4.1. **分解下的精确 Borel 子代数**。 考虑在汇点或源点v处对Q进行分解，得到$Q^1\sqcup Q^2$。设$B^2\subset A^2$是一个子代数，其基为 $\{b_1,\dots,b_m,e_v\}$；设$B^1\subset A^1$是一个子代数，其基为 $\{c_1,\dots,c_m,e_v\}$。那么$B=B^1\diamond B^2$是A的一个子代数。

54. **命题**。 设$Q=Q^1\sqcup Q^2$是在源点v处分解得到的，并假设我们有正则正合 Borel 子代数$B^1\subset A^1$ 和$B^2\subset A^2$。那么，A 存在一个正则正合 Borel 子代数。

证明。 对于任意$i\in Q_0^\ell\backslash\{v\}$，我们有 $\Delta(i)\cong\Delta^\ell(i)$。令 $0\subset M_n\subset\cdots\subset M_0=\mathrm{rad}\,\Delta^\ell(i)$ 为一个具有余标准子商的滤过。我们断言，这也是 $\mathrm{rad}\,\Delta(i)$ 的一个滤过。考虑该滤过的一个子商

$$M_k/M_{k+1}\cong\nabla^\ell(j).$$

于是，对所有 $j\in Q_0^\ell$， $\nabla^\ell(j)\cong\nabla(j)$。当$j\neq v$时，我们根据引理 43。对于$j=v$，结论显然成立，因为$v$的 ∇ 由于v是源点而为单。剩下要验证的是，我们有一个 $\mathrm{rad}\,\Delta(v)$ 的 ∇-滤过。由于v是源点，我们有如下直和分解：

$$\mathrm{rad}\,\Delta(v)=\mathrm{rad}\,\Delta^1(v)\oplus\mathrm{rad}\,\Delta^2(v).$$

由于A^1 具有正则正合 Borel 子代数，$\mathrm{rad}\,\Delta^1(v)$ 有一个滤过，其子商属于集合

$$\{\nabla(i)\mid i\in Q_0^1\backslash\{v\}\}.$$

要说明 $\nabla(v)$ 不会作为合成因子出现，注意到 $[\mathrm{rad}\,\Delta(v):L(v)]=0$。事实上，若出现合成因子$L(v)$，则意味着 $[P(v):L(v)]\geq 2$，这与v是源点这一事实矛盾。类似地，$\mathrm{rad}\,\Delta^2(v)$ 有一个滤过，其子商属于集合

$$\{\nabla(i)\mid i\in Q_0^2\backslash\{v\}\}.$$

由此得出 $\mathrm{rad}\,\Delta(v)\in\mathscr{F}(\nabla)$，命题得证。 □

55. **命题**。 设 $Q=Q^1\sqcup Q^2$ 是在汇点 v处分解。进一步假设我们有正则正合 Borel 子代数 $B^1\subset A^1$, $B^2\subset A^2$，且顶点 v 关于Q_0上的本质序是极小的。那么，存在一个正则正合 Borel 子代数 $B\subset A$。

证明。 对于任意 $i\in Q_0^\ell\backslash\{v\}$，我们有 $\Delta(i)\cong\Delta^\ell(i)$。设 $0\subset M_n\subset\cdots\subset M_0=\mathrm{rad}\,\Delta^\ell(i)$ 是一个具有余标准子商的滤过。我们断言，这也是 $\mathrm{rad}\,\Delta(i)$ 的一个滤过。考虑该滤过的一个子商

$$M_k/M_{k+1}\cong\nabla^\ell(j).$$

根据引理 43，对于所有$j\in Q_0^\ell\backslash\{v\}$，都有 $\nabla^\ell(j)\cong\nabla(j)$。对于$j=v$，我们断言，当$v$是汇点时，$v$关于$Q_0$ 上的本质序是极小的，当且仅当 $\nabla(v)$ 是单的。事实上，如果v是极小的，那么 $\nabla(v)$ 显然是单的。反过来，假设 $\nabla(v)$ 是单的，并且存在另一个顶点k，使得$k\lhd^e v$。那么我们有

$$[\Delta(v):L(k)]>0\quad\text{or}\quad(P(k):\Delta(v))>0.$$

第一个条件无法满足，因为 $\Delta(v)$ 是单对象，这是由于 v 是一个汇点。根据 [DR92，引理 2.5], wehave

$$(P(k):\Delta(v))=[\nabla(v):L(k)],$$

因此，这个条件也可能无法满足，因为已假设 $\nabla(v)$ 是单对象。因此，对于 $i\in Q_0^\ell\backslash\{v\}$，我们有 $\mathrm{rad}\,\Delta(i)\in\mathscr{F}(\nabla)$，因为根据定理 23，$A^1$和 A^2存在正则精确 Borel 子代数。由于 v是汇点， $\Delta(v)\cong L(v)$，这意味着 $\mathrm{rad}\,\Delta(v)=0$，因此无需再证明其他内容。□

56. **引理**。 设 $Q=Q^1\sqcup Q^2$是在汇点 v处分解。则对于所有 $i\in Q_0,$，有 $[\nabla(i):L(v)]>0$当且仅当 $i=v$。

证明。 根据定义， $\nabla(i)$ 是 $I(i)$ 的子模，因此 $[\nabla(i):L(v)]>0$ 当且仅当存在一条从 v 到 i 的路径，且不经过在 Q_0 中大于 i 的顶点。这是矛盾的，因为假设 v 是汇点。□

由引理 56 也可清楚看出，对于任意模 $M\in\mathscr{F}(\nabla)$，余标准模 $\nabla(v)$ 出现在 M 的滤过中作为子商，当且仅当 $[M:L(v)]>0$。

现在我们准备给出 A 存在正则正合 Borel 子代数 $B\subset A$ 的充要条件，其中 $A=KQ$，且 $Q=Q^1\sqcup Q^2$ 是在汇点 v 处分解。

57. **命题**。 设 $Q=Q^1\sqcup Q^2$ 是在汇点 v 处分解，并假设 $B^1\subset A^1$ 和 $B^2\subset A^2$ 是正则正合 Borel 子代数。此外，假设 v 相对于 Q_0 上的本质序不是极小的。那么，以下条件等价。

(i) 存在正则正合 Borel 子代数 $C\subset A$。(ii) 对所有 $i\in Q_0$，$[\mathrm{rad}\,\Delta(i):L(v)]=0$。(iii) 顶点 v 相对于 Q_0 上的本质序是极大的。

证明。我们首先证明等价关系 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。假设 (ii) 成立，并断言对于所有 $\mathrm{i}\in\mathrm{Q}_0$，都有 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i})\in\mathscr{F}(\nabla)$。若 $\mathrm{i}=\mathrm{v}$，则有 $\Delta(\mathrm{v})\cong\mathrm{L}(\mathrm{v})$，因此 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{v})=0$，故无需证明。假设 $\mathrm{i}\neq\mathrm{v}$，其中 $\mathrm{i}\in\mathrm{Q}_0^{\ell}$。于是，$\Delta^{\ell}(\mathrm{i})\cong\Delta(\mathrm{i})$。根据引理 56 后的注释，$\mathrm{rad}\,\Delta^{\ell}(\mathrm{i})$ 的任意 ∇-滤过都不包含 $\nabla^{\ell}(\mathrm{v})$ 作为子商。因此，$\mathrm{rad}\,\Delta^{\ell}(\mathrm{i})$ 的任意 ∇-滤过自动也是 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i})$ 的 ∇-滤过，因为 $\mathrm{rad}\,\Delta^{\ell}(\mathrm{i})$ 滤过中出现的所有子商都具有 $\nabla^{\ell}(\mathrm{j})$ 的形式，其中 $\mathrm{j}\neq\mathrm{v}$。

反过来，若 $\mathrm{C}\subset\mathrm{A}$ 是一个正则正合 Borel 子代数，则对 $1\leq\mathrm{i}\leq\mathrm{n}$，有 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i})\in\mathscr{F}(\nabla)$。取满足 $[\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i}):\mathrm{L}(\mathrm{v})]>0$ 的 i，并不失一般性地假设 $\mathrm{i}\in\mathrm{Q}_0^1\backslash\{\mathrm{v}\}$。于是，根据引理 56 后的说明，$(\nabla(\mathrm{v}))$ 出现在 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i})$ 的 ∇-滤过中。注意，由于假设 v 在本质序中不是极小的，$\nabla(\mathrm{v})$ 不是单模。由于 Q^2 是连通的，v 至少有一个邻点 $\mathrm{j}\in\mathrm{Q}_0^2\backslash\{\mathrm{v}\}$。若 $\mathrm{j}\lhd^e\mathrm{v}$，则 $\mathrm{L(j)}$ 是 $\nabla(\mathrm{v})$ 的一个合成因子，这意味着 $[\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i}):\mathrm{L(j)}]>0$，因为 $\nabla(\mathrm{v})$ 出现在 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i})$ 的 ∇-滤过中。这与 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i})$ 是一个 A^1-模矛盾。若 $\mathrm{v}\lhd^e\mathrm{j}$，则 $[\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{j}):\mathrm{L}(\mathrm{v})]>0$，因此 $\nabla(\mathrm{v})$ 是 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{j})$ 的一个子商。这与 $\nabla(\mathrm{v})$ 是 $\mathrm{rad}\,\Delta(\mathrm{i})$ 的子商矛盾，除非 $\nabla(\mathrm{v})$ 是单模。然而，我们假设 v 在本质序中不是极小的，因此它不是单模。若 v 与 j 不可比较，则考虑模 M，其洛维图如下:

$$\begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ v \end{array}$$

由于 A^2 是准遗传的，$\trianglelefteq^e$ 根据引理 3 适配于 A^2,。因此，根据定义，存在一个顶点 k，使得 $v\lhd^e k$，$j\lhd^e k$，且 $[M:L(k)]\neq 0$。这就产生了矛盾，因为 M 除了 $L(v)$ 和 $L(j)$ 之外没有其他合成因子。这证明了 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。

接下来，我们证明 (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)。假设 (ii) 成立，且 v 不是极大元。那么存在另一个顶点 k，使得 $v\lhd^e k$。于是，根据本质序的定义，我们有

$$[\Delta(k):L(v)]>0 \quad \text{or} \quad (P(v):\Delta(k))>0.$$

第一个条件无法满足，因为它与 (ii) 矛盾；第二个条件也无法满足，因为 v 是汇点，所以 $P(v)$ 是单模。反过来，假设 v 是极大元，并考虑 $P(i)$，其中 $i\in Q_0$。若 $[P(i):L(v)]=0$，则无需证明，因为 $\mathrm{rad}\,\Delta(i)$ 是 $P(i)$ 的一个商模的子模。否则，若 $[P(i):L(v)]>0$，则仍有 $[\Delta(i):L(v)]=0$，因为根据定义，$\Delta(i)$ 的合成因子 $L(t)$ 满足 $t\lhd i$。□

58. **命题**。 设 $Q=Q^1\sqcup Q^2$ 是在汇点或源点 v 处分解所得。假设存在正则正合 Borel 子代数 $B^1\subset A^1$ 和 $B^2\subset A^2$，它们分别包含幂等元集合 $\{e_i\mid i\in Q_0^1\}$ 和 $\{e_j\mid j\in Q_0^2\}$，且 A 存在一个正则正合 Borel 子代数。那么 $B^1\diamond B^2\subset A$ 是 A 的正则正合 Borel 子代数。

证明。 考虑正则正合 Borel 子代数 B^{ℓ}，其中 $\ell=1,2$。我们已经看到 $B^{\ell}=KQ_{B^{\ell}}$，其中 $Q_{B^{\ell}}$ 是以下箭图。

(i) Q_{B^ℓ}的顶点集合是 $Q_{B^\ell 0} = Q_0^\ell$。

(ii) 当且仅当 $\dim \mathrm{Ext}_{A^\ell}(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(j)) = 1$ 时，$i \to j$之间存在一条箭Q_{B^ℓ}。

设C是一个正则精确 Borel 子代数。那么，对于某个以Q_0为顶点集的箭图Q_C，有$C = KQ_C$。由命题 48 和 51，我们可得

$$\dim \mathrm{Ext}_{A^\ell}(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(j)) = \dim \mathrm{Ext}_A(\Delta(i), \Delta(j)),$$

对于i、$j \in Q_0^\ell$。利用B^1和B^2是正则精确 Borel 子代数这一事实，可得

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{B^\ell}(L(i), L(j)) = \dim \mathrm{Ext}^1_{A^\ell}(\Delta^\ell(i), \Delta^\ell(j)) = \dim \mathrm{Ext}^1_A(\Delta(i), \Delta(j)) = \dim \mathrm{Ext}^1_C(L(i), L(j)).$$

这表明，对于任意i、$j \in Q_0^\ell$，当且仅当$i \to j$之间在B^ℓ的箭图中存在一条箭时，$i \to j$之间在C的箭图中也存在一条箭。接下来，注意若$i \in Q_0^1 \setminus \{v\}$且$x \in Q_0^2 \setminus \{v\}$，则$i$与$x$之间在$Q_C$中没有箭，因为

$$\dim \mathrm{Ext}^1_C(L(i), L(x)) = \dim \mathrm{Ext}^1_A(\Delta(i), \Delta(x)) = 0,$$

根据命题 46。这意味着C和$B^1 \diamond B^2$的箭图相同，因此C与$B^1 \diamond B^2$同构。这表明$B^1 \diamond B^2$在同构意义下有n个简单模，且是具有简单标准模的准遗传代数。

接下来，我们验证函子 $A^{\otimes_{B^1 \diamond B^2}}$ 是正合的。为此，我们声称 A 作为右$B^1 \diamond B^2$-模是投射的。考虑右 A^1-模的直和分解

$$A^1 \cong \bigoplus_{i \in Q_0^1} P^1(i).$$

由于 $A^1 \otimes_{B^1}$是正合函子，A^1 作为右 B^1-模是投射的。由于 $B^1 \subset A^1$ 是一个子代数，上述直和分解也是右B^1-模的直和分解。进而，这意味着上述直和项$P^1(i)$作为右 B^1-模是投射的。由于 $B^1 \diamond B^2$ 满射到 B^1，，每个 B^1-模都具有自然的 $B^1 \diamond B^2$-模结构（参见引理 42 之前的注释）。于是，上述直和分解也是右 $B^1 \diamond B^2$-模的直和分解，因为 $\mathrm{rad} B^2$ 在每个直和项上的作用都是平凡的。现在，考虑直和分解

$$A \cong \bigoplus_{i \in Q_0^1 \setminus \{v\}} P(i) \oplus \bigoplus_{j \in Q_0^2 \setminus \{v\}} P(j) \oplus P(v)$$

右 A-模。根据上述论证，首项中的直和项 $P(i)$ 是右 $B^1 \diamond B^2$-模中的投射模（注意，对于 $i \in Q_0^1 \setminus \{v\}$，有 $P(i) \cong P^1(i)$）。类似地，第二项中的直和项是右 $B^1 \diamond B^2$-模中的投射模。尚需验证 $P(v)$ 是右 $B^1 \diamond B^2$-模中的投射模。

设 v为汇点。则 $P(v) \cong L(v)$，因此无需证明。设 v为源点。如前所述，$P^\ell(v)$ 是右B^ℓ-模中的投射模。由于 v 在 B^ℓ 的箭图中同样是源点，模 $P^{\ell}{}_{B^\ell}(v)$ 是唯一一个以 $L(v)$ 为合成因子的不可分解投射 B^ℓ-模。这意味着存在一个右 B^ℓ-模同构 f^ℓ：

$$f^\ell : P^\ell(v) \to P^\ell_{B^\ell}(v) \oplus M^\ell,$$

其中M^ℓ 是不可分解投射B^ℓ-模的直和，且各项的重数可能不同。注意，M^ℓ不包含$P^{\ell}{}_{B^\ell}(v)$作为直和项。我们断言，存在右$B^1 \diamond B^2$-模的一个同构

$$f : P(v) \to P_{B^1 \diamond B^2}(v) \oplus M^1 \oplus M^2.$$

在$P(v)$中的路径上定义f如下：

$$p \mapsto \begin{cases} f^1(p) & \text{if } p \in A^1 \setminus \mathrm{span}(e_v) \\ f^2(p) & \text{if } p \in A^2 \setminus \mathrm{span}(e_v) \\ e_v & \text{if } p = e_v. \end{cases}$$

显然，f是双射，且是$B^1 \diamond B^2$-模同态，因此是一个同构。

接下来，我们验证对所有 $\mathrm{i} \in \mathrm{Q}_0$，都有 $\mathrm{A} \otimes_{B^1 \diamond B^2} \mathrm{L(i)} \cong \Delta(\mathrm{i})$。当 $\mathrm{i} \in \mathrm{Q}_0^{\ell} \backslash \{\mathrm{v}\}$ 时，我们知道 $\Delta^{\ell}(\mathrm{i}) \cong \Delta(\mathrm{i})$。特别地，$\Delta(\mathrm{i})$ 是一个 A^{ℓ}-模。设 $\varphi : \mathrm{A}^{\ell} \otimes_{B^{\ell}} \mathrm{L(i)} \to \Delta(\mathrm{i})$ 为一个同构。模 $\mathrm{A} \otimes_{B^1 \diamond B^2} \mathrm{L(i)}$ 由形如 $\mathrm{p} \otimes \mathrm{e}_i$ 的元素生成，其中 p 是 A 中的一条路径。注意，如果 p 是 $\mathrm{A}^{\overline{\ell}}$ 中不等于 e_v 的一条路径，那么

$$p \otimes e_i = p e_{s(p)} \otimes e_i = p \otimes e_{s(p)} e_i = 0.$$

为此，注意到p是$A^{\overline{\ell}}$中的一条路径，且$i \in Q_0^{\ell} \backslash \{v\}$，因此$i \neq s(p)$。于是，我们可以定义一个同态

$$\tilde{\varphi} : A \otimes_{B^1 \diamond B^2} L(i) \to \Delta(i)$$

在$A^{\otimes}{}_{B^1 \diamond B^2}\, e_i$的非零生成元上，定义如下:

$$p \otimes_{B^1 \diamond B^2} e_i \mapsto \varphi(p \otimes_{B^{\ell}} e_i),$$

这显然是一个同构。还需验证$A^{\otimes}{}_{B^1 \diamond B^2}\, L(v) \cong \Delta(v)$。当$v$是汇点时，有$\Delta(v) \cong L(v)$，因此，由$A^{\ell} \otimes_{B^{\ell}} L(v) \cong \Delta($ v)可知，结论显然成立。假设v是源点，并令

$$f_1 : A^1 \otimes_{B^1} L(v) \to \Delta^1(v), \quad \text{and} \quad f_2 : A^2 \otimes_{B^2} L(v) \to \Delta^2(v)$$

是同构。模$A^{\otimes}{}_{B^1 \diamond B^2}\, L(v)$由形如$p \otimes e_v$的元素生成，其中$p \in A$是某条路径。注意，除$e_v$之外，这样的$p$都属于$A^1$ 或A^2。定义一个映射

$$f : A \otimes_{B^1 \diamond B^2} L(v) \to \Delta(v)$$

在生成元上的定义为

$$p \otimes e_v \mapsto \begin{cases} f_1(p \otimes e_v) & \text{if } p \in A^1 \setminus \operatorname{span}(e_v), \\ f_2(p \otimes e_v) & \text{if } p \in A^2 \setminus \operatorname{span}(e_v), \\ e_v \otimes e_v & \text{if } p = e_v. \end{cases}$$

注意，若 $\mathrm{p} \in \mathrm{A}^1$ 且 $\mathrm{q} \in \mathrm{A}^2$,，则 $\mathrm{p} \otimes \mathrm{e}_v$ 和 $\mathrm{q} \otimes \mathrm{e}_v$ 或者为零，或者线性无关；唯一例外是 $\mathrm{p} = \mathrm{q} = \mathrm{e}_v$。于是，f 是定义良好的同态，因为 f_1 和 f_2 也是如此。类似地，f 是单射，因为 f_1 和 f_2 也是如此，且它们的像的交等于 $\operatorname{span}(\mathrm{e}_v)$。关于满射性，注意到作为向量空间，有 $\Delta(\mathrm{v}) = \operatorname{span}(\mathrm{e}_v) \oplus \operatorname{rad}\Delta^1(\mathrm{v}) \oplus \operatorname{rad}\Delta^2(\mathrm{v})$。

最后，注意到由于 $B^1 \diamond B^2$ 和 C 都是正合 Borel 子代数，根据定理 28，它们共轭。根据定理 31，$B^1 \diamond B^2$ 是正则的，因为 C 是正则的。□

我们完 成这一节，并简要观察（某些）A_∞-结构在……下的行为
或分解 。

59. **命题**。设 $Q = Q^1 \sqcup Q^2$ 是在汇点或源点 v 处的分解，且若v是汇点，则v相对于 $\trianglelefteq^e$ 是极小或极大；并假设 $\operatorname{Ext}_{A^{\ell}}(\Delta^{\ell}, \Delta^{\ell})$ 是内在形式化的，其中 $\ell = 1,2$。那么，$\operatorname{Ext}_A^*(\Delta, \Delta)$ 是内在形式化的。

证明。令 m_n 表示 $\operatorname{Ext}_A^*(\Delta, \Delta)$ 上的高阶乘法，并考察 $\mathrm{m}_n(\varphi_n, \ldots, \varphi_1)$，其中 $\varphi_i \in \operatorname{Ext}_A^*(\Delta, \Delta)$，对 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$ 均成立。假设对某些 $\mathrm{a,b} \in \mathrm{Q}_0$ 以及 $\mathrm{k} \geq 0$，有 $\mathrm{m}_n(\varphi_n, \ldots, \varphi_1) \in \operatorname{Ext}_A^k(\Delta(\mathrm{a}), \Delta(\mathrm{b}))$。若 $\mathrm{a,b} \in \mathrm{Q}_0^{\ell}$，则 $\mathrm{m}_n(\varphi_n, \ldots, \varphi_1) = 0$，因为 $\operatorname{Ext}^* \mathrm{A}^{\ell}(\Delta^{\ell}, \Delta^{\ell})$ 是内在形式化的。若 $\mathrm{a} \in \mathrm{Q}_0^{\ell} \backslash \{\mathrm{v}\}$ 且 $\mathrm{b} \in \mathrm{Q}_0^{\ell} \backslash \{\mathrm{v}\}$，则根据命题 46，$\mathrm{m}_n(\varphi_n, \ldots, \varphi_1) = 0$。若 $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{v}$，则 $\mathrm{m}_n(\varphi_n, \ldots, \varphi_1) = 0$，因为标准模没有非平凡的自扩张。□

4.2. **线性箭图路径代数的正则正合 Borel 子代数**。设 Q 为线性箭图 er

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

其中各边的定向可以任意选取，并令 $\Lambda = KQ$。将$\mathbf{A}_m$和$\mathbf{B}_{\ell}$这两个特殊情形记为

$$1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow m \quad \text{and} \quad 1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \ell\ ,$$

分别。根据命题 24，$K\mathbf{A}_m$ 存在一个正则正合 Borel 子代数，而不论顶点上的偏序如何。我们指出，第 2 节中所有关于如何通过其

二叉搜索树描述 $K\mathbf{B}_\ell$结构的论述，只要将“左”和“右”互换，仍然成立。例如，在 $K\mathbf{B}_\ell$上，标准模 $\Delta_{K\mathbf{B}_\ell}(i)$ 的合成因子位于标记为 i 的顶点的左子树中，而非右子树中。由此可知，无论顶点上的偏序如何，$K\mathbf{B}_\ell$ 也存在一个正则正合 Borel 子代数。现在，考虑 $\Lambda = KQ$。箭图 Q 允许进行迭代去连接

$$Q = Q^1 \sqcup \cdots \sqcup Q^s,$$

其中，对于每个 $1 \leq r \leq s$，箭图 Q^r 要么是 $\mathbf{A}m$，要么是 $\mathbf{B}_\ell$。回顾一下，Q的顶点集上的偏序按如下方式构造。当 $Q = Q^1 \sqcup Q^2,$，且 $Q_0^1 \cap Q_0^2 = \{v\}$，并且 i、$j \in Q_0,$时，若满足以下条件之一，我们称$i \lhd j$。

(i) 对某个 ℓ，有i、$j \in Q_0^\ell$，且$i \lhd^\ell j$。
(ii) 有$i \in Q_0^\ell$、$j \in Q_0^{\overline{\ell}}$、$i \lhd^\ell v$，且$v \lhd^{\overline{\ell}} j$。

显然，在此设定下，v在Q_0 中是极大的，当且仅当它在Q_0^ℓ和$Q_0^{\overline{\ell}}$中都是极大的。由此可得命题 55 的一个特例，如下所示。

60. **定理**。 代数 Λ 存在正则正合 Borel 子代数$C \subset \Lambda$，当且仅当$v \in Q_0$中的每个在发生分解处为汇点的顶点，相对于Q_0上的本质序都是极小或极大。

61. **例子**。 考虑箭图

$$Q = \ 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7.$$

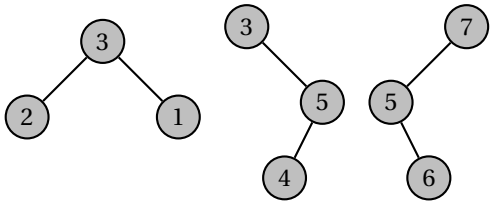
尽可能地对Q进行去拼接，我们发现

$$Q = (\ 1 \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3\ ) \sqcup (\ 3 \xleftarrow{a} 4 \xleftarrow{b} 5\ ) \sqcup (\ 5 \xrightarrow{u} 6 \xrightarrow{v} 7\ ).$$

假设Q_0 上的序由Q_0^1,Q_0^2和Q_0^3上的以下序给出。

$$1 \lhd_T 3, 2 \lhd_T 3, \quad 4 \lhd_T 5 \lhd_T 3, \quad 6 \lhd_T 5 \lhd_T 7,$$

对应于二叉搜索树



我们计算标准模。

$$\Delta(1) \cong L(1), \quad \Delta(2) \cong L(2), \quad \Delta(3) \cong L(3), \quad \Delta(4) \cong L(4), \quad \Delta(5) \cong M(4,5), \quad \Delta(6) \cong L(6), \quad \Delta(7) \cong L(7)$$

唯一具有非平凡根的标准模是 $\Delta(5)$，其根为$\Delta(5) \cong L(4) \cong \nabla(4)$，因此对所有$1 \leq i \leq 7$，均有 $\operatorname{rad}\Delta(i) \in \mathscr{F}(\nabla)$。于是，$A^1$,$A^2$和$A^3$ 具有如下正则正合 Borel 子代数

$$(\ 1 \xrightarrow{x} 2 \qquad 3\ ), \quad (\ 3 \qquad 4 \xrightarrow{b} 5\ ), \quad (\ 5 \overset{vu}{\frown} 6 \qquad 7\ ).$$

我们注意到，由于 3 在第一和第二个箭图中都是极大的，根据命题 58，A 具有一个正则正合 Borel 子代数，由以下箭图给出。

$$1 \xrightarrow{x} 2 \qquad 3 \qquad 4 \xrightarrow{b} 5 \overset{vu}{\frown} 6 \qquad 7\ .$$

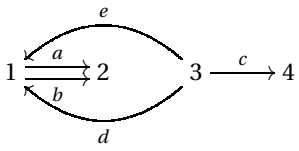
与上述情况类似，我们现在希望将命题 38 的陈述推广到本节讨论的代数 Λ。

62. **命题**。 $\mathrm{Ext}^*_\Lambda(\Delta,\Delta)$ 是内在形式化的。

证明。 这直接由命题 38 和命题 59 得出。 □

鉴于 [FKR22]，中所考察的情形，对 A_n 型 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$的箭图进行类似研究将会很有意义。

4.3. **一个非线性示例**。 考虑代数 A，其由以下箭图给出



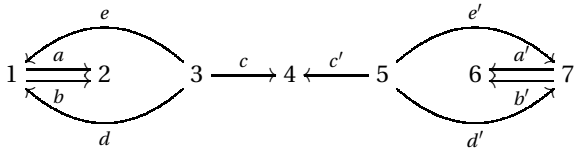
满足关系 t he $ae = bd$、$ad = 0$ 和 $be = 0$。在通常的序 $1 \lhd 2 \lhd 3 \lhd 4$ 下，标准模 ov er A 是

$$\Delta(1) \cong L(1), \quad \Delta(2) \cong L(2), \quad \Delta(3): \begin{array}{ccc} & 3 & \\ {\scriptstyle d}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle e} \\ 1 & & 1 \\ {\scriptstyle b}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle a} \\ & 2 & \end{array}, \quad \text{and} \quad \Delta(4) \cong L(4).$$

唯一具有非平凡根的标准模是 $\Delta(3)$，其根同构于余标准模 $\nabla(2)$。因此，A 有一个正则正合 Borel 子代数 $B \subset A$，我们发现它由以下箭图给出



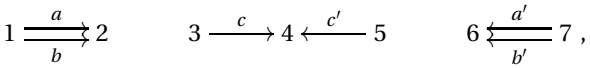
现在考虑由以下箭图给出的代数 Λ



满足以下关系

$$ae = bd, \quad a'e' = b'd', \quad ad = 0, \quad a'd' = 0, \quad be = 0, \quad \text{and} \quad b'e' = 0,$$

顶点上的序为 $1 < 2 < 3 < 4$, $7 < 6 < 5 < 4$。于是，4 是极大的，命题 57 适用，并且 Λ 有一个正则正合 Borel 子代数 $C \subset \Lambda$，由以下箭图给出



根据命题 58。

5. Acknowledgements

资助。开放获取资助由乌普萨拉大学提供。作者未获得任何组织对所提交工作的资助。

利益冲突。 作者声明不存在与本文内容相关、需要披露的利益冲突。

[ASS06] Ibrahim Assem、Andrzej Skowronski 和 Daniel Simson。《结合代数表示论基础：表示论方法》。第 1 卷。伦敦数学会学生教材。剑桥大学出版社，2006 年。[BKK20] Tomasz Brzezi´nski、Steffen Koenig 和 Julian Külshammer。“从具有正合 Borel 子代数的拟遗传代数到有向 bocs”。载于：《伦敦数学会会报》52.2（2020），第 367–378 页。[CPS88] E. Cline、B. Parshall 和 L. Scott。“有限维代数与最高权范畴”。载于：《纯粹与应用数学杂志》391（1988），第 85–99 页。ISSN：0075-4102。[Con21] Teresa Conde。“所有具有正则正合 Borel 子代数的拟遗传代数”。载于：《数学进展》384（2021），第 107751 页。ISSN：0001-8708。[Con16] Teresa Conde。“关于某些强拟遗传代数。博士论文。”牛津大学，2016 年。[Cou20] Kevin Coulembier。“BGG 范畴中块的分类 $\mathcal{O}$”。载于：《数学杂志》295（2020），第 821–837 页。[DR92] Vlastimil Dlab 和 Claus Michael Ringel。“拟遗传代数的模论方法”。载于：《代数表示与相关课题》。H. Tachikawa 和 S.Editors Brenner 编。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，1992 年，第 200–224 页。[FKR22] Manuel Flores、Yuta Kimura 和 Baptiste Rognerud。“拟遗传结构的组合学”。载于：《组合理论杂志 A 辑》187（2022），第 105559 页。ISSN：0097-3165。[Kel01] Bernhard Keller。“A∞代数与模导论”。载于：《同调、同伦与应用》3.1（2001），第 1–35 页。[KS12] Angela Klamt 和 Catharina Stroppel。“抛物 Verma 模的 Ext 代数与 A∞结构”。英文。载于：《纯粹与应用代数杂志》216.2（2012 年 2 月），第 323–336 页。ISSN：0022-4049。[KKO14] Steffen Koenig、Julian Külshammer 和 Sergiy Ovsienko。“拟遗传代数、正合 Borel 子代数、A∞范畴与箱”。载于：《数学进展》262（2014），第 546–592 页。ISSN：0001-8708。[Kön95] Steffen König。“拟遗传代数的精确 Borel 子代数，I”。载于：《数学杂志》220.1（1995），第 399–426 页。[Mal42] A.I. Mal’tsev。“关于将代数表示为根与半单子代数的直和”。载于：《苏联科学院通报》（1942），第 42–45 页。[OT10] Steffen Oppermann 和 Hugh Thomas。“高维簇组合学与表示论”。载于：《欧洲数学会杂志》14（2010 年 1 月）。[Rin91] Claus Michael Ringel。“拟遗传代数上具有良好滤过的模范畴具有几乎分裂列。”载于：《数学杂志》208.2（1991），第 209–224 页。[Sco87] Leonard L. Scott。“用代数模拟代数几何，I：导出范畴的代数理论”。载于：1987 年。[Thu22] Markus Thuresson。“对偶扩张代数上标准模的 Ext 代数”。载于：《代数杂志》606（2022），第 519–564 页。ISSN：0021-8693。[Wed08] John H. Maclagan Wedderburn。“关于超复数”。载于：《伦敦数学会会报》（1908），第 77–118 页。[Zha00] Yuehui Zhang。“拟遗传代数的强正合 Borel 子代数”。载于：《代数杂志》—J ALGEBRA 231（2000 年 9 月），第 463–472 页。