arXiv:2302.01846v1 [math.OC] 1 Feb 2023

通过能量整形实现分布参数端口哈密顿系统的降阶域内控制 ⋆

Ning Liu [a]，吴永信 n Wu [a]，Yann Le Gorrec [a]，Laurent Lefevre [b]，Hector Ramirez [c]

[a] *Institute FEMTO-ST CNRS UMR 6174, Université Bourgogne Franche-Comté, 26 chemin de l'épitaphe, F-25030,Besançon, France*

[b] *Université Grenoble Alpes, LCIS, F-26902, Valence, France*

[c] *Universidad Tecnica Federico Santa Maria, Valparaiso, Chile*

摘要

本文提出一种有限维域内控制器，用于一类在端口哈密顿框架下建模的一维空间域分布参数系统。基于 [25] 采用正反馈和后集总方法的方案，我们扩展了互联控制方法，并提出一种新颖的能量整形方法，在系统的分布式空间域上采用早期集总方法。我们的两个主要控制目标是稳定闭环系统，并提升闭环动态性能。采用早期集总方法，我们研究了两种控制器设计情形：理想情形下，每个分布式控制器在空间域上独立作用（全驱动）；更贴近实际的情形下，控制器在特定区间内为分段常数（欠驱动）。随后，我们分析无限维被控对象系统与有限维控制器互联时闭环系统的渐近稳定性。此外，我们以弹性振动弦为例，提供仿真结果，对比全驱动情形和欠驱动情形的性能。

Key words: 端口哈密顿系统；分布参数系统；基于无源性的控制；卡西米尔函数；优化。

1 引言

过去几十年来，由偏微分方程（PDEs）描述的分布参数系统的控制一直是研究热点 [4]。根据执行器和传感器的位置，偏微分方程的控制可分为边界分布式控制和域内分布式控制。迄今为止，大多数控制设计成果都针对边界控制系统 [10], ，而对实际域内分布式控制的研究则相当有限。然而，后者在流体动力学、化学过程以及近年来因软执行器的发展而采用软执行器驱动的柔性结构领域中发挥着重要作用 [23,13] 。此外，这种控制还有望扩展到更高维的空间域。本文聚焦于分布参数端口哈密顿系统（PHSs）的域内分布式控制，因为它在多物理场非线性系统的建模与控制方面具有优势 [5]。

端口哈密顿系统的概念最早于 20 世纪 90 年代在 [19] 中针对集总参数系统提出。它是一种基于能量的表示，利用能量变量、余能变量以及内在的几何结构——狄拉克结构——来描述系统内部及系统与环境之间的功率交换。随后，端口哈密顿系统被推广至[18]中的分布参数系统。 [11] 采用半群理论研究了定义在一维空间域上的线性分布参数端口-哈密顿系统的几何斯托克斯-狄拉克结构。在控制方面，哈密顿量是良好的李雅普诺夫候选函数，而这类系统具有内在的无源性

⋆本研究得到了 EIPHI 研究生院（合同编号“ANR-17-EURE-0002”）和 ANR IMPACTS项目的资助。第四作者感谢智利FONDECYT 1191544和 CONICYT BASAL FB0008 项目的支持。通讯作者：Yongxin Wu。*Email addresses:* ning.liu@femto-st.fr（Ning Liu）、yongxin.wu@femto-st.fr（Yongxin Wu）、yann.le.gorrec@ens2m.fr（Yann Le Gorrec）、laurent.lefevre@lcis.grenoble-inp.fr（Laurent Lefevre）、hector.ramireze@usm.cl（Hector Ramirez）。

这一性质使基于无源性的控制技术适用于这类系统。此外，通过基于无源性的控制设计的控制器具有明确的物理解释。基于无源性的控制已应用于集总参数端口-哈密顿系统，并在 [22,26] 中得到广泛研究，由此形成了互联控制（CbI）和互联与阻尼配置（IDA）-基于无源性的控制等高效控制设计技术。 [17] 将互联控制推广至采用边界控制的分布参数端口-哈密顿系统。控制器被设计为一个端口哈密顿系统。通过被控对象与控制器之间的无源互联，闭环系统仍为端口哈密顿系统 [26]。随后，利用卡西米尔函数寻找被控对象与控制器状态变量之间的不变关系。通过调整控制器参数，可以向闭环系统注入阻尼（阻尼注入），并改变其闭环哈密顿量的形状，从而调整平衡状态和动态性能（能量整形）。关于采用域内分布式控制的分布参数端口哈密顿系统互联控制的首项成果见 [25] ，其中研究了正反馈、后集总方法和全驱动。不同于 [25], ，本文研究采用负反馈、早集总方法以及数量有限的执行器对分布参数端口哈密顿系统实施互联控制。

本文的主要贡献如下:

(1) 将文献 [14] 中针对 Timoshenko梁建立的域内 CbI 推广至一类一维线性分布参数端口-哈密顿系统，该类系统涵盖振动弦、铁木辛柯梁、Euler-Bernoulli梁等不同物理应用。采用早期集总方法，基于近似的有限维被控系统设计有限维控制器。

(2) 利用半群理论和无源性性质，证明将有限维控制器应用于无限维被控对象时，闭环系统渐近稳定，从而消除了众所周知的溢出效应 [3]。

(3) 除了实现闭环系统的渐近镇定外，该控制器还能改善系统在给定频率范围内的动态性能即使系统更快地响应，同时减少振荡和超调。

针对动态性能的提升，本文研究了两种不同情形：理想的全驱动情形，其中控制输入独立作用于离散化模型的每个单元；以及欠驱动情形 ，其中输入以相同方式作用于若干组单元，因此自由度较少。后一种情形更接近实际实现，因为控制通常通过压电片实现，而压电片对空间单元的作用方式相似。本文展示了当系统为全驱动时，如何完美地改变离散化系统的闭环能量特性；当系统为欠驱动时，则以最优方式 改变其闭环能量特性。

本文结构安排如下：第 2 节介绍一类具有两条守恒律和域内控制的线性分布参数系统的端口哈密顿表述，以及其保结构离散化。第 3 节将探讨上述 CbI 和能量整形方法，并对闭环稳定性进行详细分析。这种控制策略兼具早期集总方法的优点，可直接实现控制器，并保证系统在给定频率范围内的性能。系统的无源性和阻尼注入保证了闭环系统的适定性和渐近稳定性。第 4 节以振动弦为例，提供仿真结果，并比较完全驱动与欠驱动情形。第 6 节最后总结全文并展望未来工作。

2 具有域内控制的端口哈密顿系统

本文考虑定义在一维空间域$\zeta \in [0, L]$ 上的分块端口哈密顿系统，其具有分布式控制、边界控制以及如下形式的观测:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} x_1(\zeta,t) \\ x_2(\zeta,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(\zeta)x_1(\zeta,t) \\ \mathcal{L}_2(\zeta)x_2(\zeta,t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix} u_d(\zeta,t) \tag{2}$$

$$y_d(\zeta,t) = \begin{bmatrix} 0 & B_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(\zeta)x_1(\zeta,t) \\ \mathcal{L}_2(\zeta)x_2(\zeta,t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$u_b = \mathcal{B}\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(\zeta)x_1(\zeta,t) \\ \mathcal{L}_2(\zeta)x_2(\zeta,t) \end{bmatrix},\ y_b = \mathcal{C}\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(\zeta)x_1(\zeta,t) \\ \mathcal{L}_2(\zeta)x_2(\zeta,t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中 $x = [x_1^T, x_2^T]^T \in X := L^2([a,b],\ \mathbb{R}^n) \times L^2\ [a,b]\ \mathbb{R}^n\quad \mathcal{L} = \qquad \mathcal{L}_1\ \mathcal{L}_2 \qquad\qquad (,\ ),$ diag(,) 是有界且 Lipschitz 连续的矩阵值函数，满足$\mathcal{L}(\zeta) = \mathcal{L}^T(\zeta)$ 且 $\mathcal{L}(\zeta) \geq \eta$，其中对所有 $\zeta \in [a,b], R \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $R = R^T > 0$, $\mathcal{B}(\cdot)$ 和 $\mathcal{C}(\cdot)$ 都是一些边界输入和边界输出映射算子，将在后文定义。状态空间 X 配备内积 $\langle x|\tilde{x}\rangle_{\mathcal{L}} = \langle x|\mathcal{L}\tilde{x}\rangle$ 和范数$\|x\|_{\mathcal{L}}^2 = \langle x|x\rangle_{\mathcal{L}}$，其中 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 表示自然的 L^2-内积。 $X \ni x$ 是能量变量空间，而 $\mathcal{L}x$表示与能量变量 x对应的余能变量。系统的总能量为

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\|x_1\|_{\mathcal{L}_1}^2 + \|x_2\|_{\mathcal{L}_2}^2\right). \tag{5}$$

此外，本文还考虑

$$\mathcal{G} = G_0 + G_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \tag{6}$$

其中 G_0，$G_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 G_1 满秩。$\mathcal{G}^*$ 是 $\mathcal{G}$ 的形式伴随，即

$$\mathcal{G}^* = G_0^T - G_1^T \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

耗散算子 R 有界、对称（$R^* = R$）且强制（$\langle z, Rz\rangle_{L_2} > a\|z\|_{L_2}, \forall z \in L_2([0,L], \mathbb{R}^n)$ 且 $a>0$）。u_d和 y_d分别表示分布式输入和输出。系统 (1-4) 与 (6) 源自对波动系统的建模，例如弹性弦、Timoshenko梁，或以网络形式组织的波和梁。所提出的方法很容易推广到二阶算子，例如定义欧拉-伯努利梁方程的二阶算子。

We define $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & G_1 \\ G_1^T & 0 \end{bmatrix}$.

定义 1 系统 (1) 对应的边界端口变量定义如下：

$$\begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I & I \end{bmatrix}}_{R_{ext}} \begin{bmatrix} \mathcal{L}x(L) \\ \mathcal{L}x(0) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

根据定义，边界端口变量满足：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \int_0^L y_d^* u_d \,\mathrm{d}\zeta + f_\partial^T e_\partial - \int_0^L (\mathcal{L}_2 x_2)^* R(\mathcal{L}_2 x_2) d\zeta. \tag{8}$$

定理1 设 W 为一个 $2n\times 4n$ 矩阵。如果 W 具有满秩且满足 $W\Sigma W^T \geq 0$，其中 $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$，那么

系统算子

$$\mathcal{A} = (\mathcal{J} - \mathcal{R})\,\mathcal{L}$$

其中

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & 0 \end{bmatrix} \quad and \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

定义域为

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in H^N\left([0,L], \mathbb{R}^{2n}\right) \mid \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} \in ker(W) \right\}$$

生成一个压缩半群。

证明。 证明参见 [11]中的定理4.1。

边界输入和输出定义如下：

$$u_b = W \begin{bmatrix} f_\partial^T & e_\partial^T \end{bmatrix}^T, \quad y_b = \tilde{W} \begin{bmatrix} f_\partial^T & e_\partial^T \end{bmatrix}^T, \tag{9}$$

with $\tilde{W}$ full rank and $\begin{bmatrix} W^T, \tilde{W}^T \end{bmatrix}^T$ invertible.

建立被控系统后，采用早期集总方法的设计流程的第一步是对式（1）进行空间离散化。为充分利用端口哈密顿系统的性质，离散化需要保留系统的结构和无源性。因此，我们采用混合有限元法 [6]，所得的式（1）近似系统仍是一个含有 p 个元素的端口哈密顿系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1d} \\ \dot{x}_{2d} \end{bmatrix} = (J_n - R_n) \begin{bmatrix} Q_1 x_{1d} \\ Q_2 x_{2d} \end{bmatrix} + B_b u_b + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{0d} \end{bmatrix} \mathbf{u}_d, \tag{10a}$$

$$y_b = B_b^T \begin{bmatrix} Q_1 x_{1d} \\ Q_2 x_{2d} \end{bmatrix} + D_b u_b, \tag{10b}$$

$$\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} 0 & B_{0d}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 x_{1d} \\ Q_2 x_{2d} \end{bmatrix}, \tag{10c}$$

其中 $x_{id} = \begin{bmatrix} x_i^1 & \cdots & x_i^p \end{bmatrix}^T$ 对于 $i \in \{1, \cdots, 2n\}$，$\mathbf{u}_d \in \mathbb{R}^p$，$\mathbf{y}_d \in \mathbb{R}^p$，

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & J_i \\ -J_i^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad R_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_d \end{bmatrix},$$

分别是算子 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{R}$的离散矩阵，其中 J_i 和 R_d 是算子$\mathcal{G}$ 和 R的离散矩阵。$B_{0d} \in \mathbb{R}^{np\times p}$、$Q_1 \in \mathbb{R}^{np\times np}$ 和 $Q_2 \in \mathbb{R}^{np\times np}$分别是 B_0、$\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$的离散矩阵。输入 u_b 表示与边界驱动和/或边界条件相对应的边界输入。由于考虑了系统的分布式驱动，我们假设空间域边界处不存在能量变化（驱动），即$u_b = 0$，因此离散化系统（10）可以简化。

离散化模型 (10) 的哈密顿量为：

$$H_d(x_{1d}, x_{2d}) = \frac{1}{2}\left(x_{1d}^T Q_1 x_{1d} + x_{2d}^T Q_2 x_{2d}\right). \tag{11}$$

需要注意的是，在下文中，保结构离散化方法的选择并非唯一。也可以采用其他离散化方法，例如 [9,20]，这些方法同样能够保证端口哈密顿结构和结构不变量的存在，适用于控制设计。此外，我们在控制设计中考虑有限数量的输入。在这种情况下，无限维系统 (1) 通常不可控，但可稳定化，因为不可控模态本身已经是指数稳定的。

3 互联控制与能量整形

本节将 CbI 方法扩展到域内分布式输入和输出的情形。与有限维端口哈密顿系统的 CbI 方法相比，其主要区别在于控制器会考虑被控对象的整体信息，如图 1 所示。因此，通过对控制器进行适当参数化并利用结构不变量即卡西米尔函数 [5]，可以对整个系统的分布式哈密顿量函数进行整形。所提出的 CbI 方法的主要目标是在给定频率范围内改善闭环性能，同时保证整个闭环的稳定性（相较于综合过程中忽略的动态）。此外，通过改变能量函数的极小值，也可以改变平衡点。

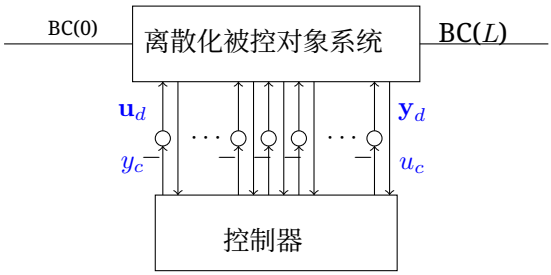


图 1. 基于互联的分布式控制策略。

图 1 中的控制器被设计为有限维端口哈密顿系统，其表达式如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= [J_c - R_c]\, Q_c x_c + B_c u_c, \\ y_c &= B_c^T Q_c x_c + D_c u_c, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $x_c \in \mathbb{R}^m$、$J_c = -J_c^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$、$R_c = R_c^T \geq 0$，以及 $Q_c = Q_c^T \geq 0$、$B_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$、$\mathbb{R}^{m\times m} \ni D_c > 0$、$u_c \in \mathbb{R}^m$ 和 $y_c \in \mathbb{R}^m$。矩阵 Q_c 和 D_c 分别用于能量整形和阻尼注入/扩散。

不考虑外部信号时，离散化被控对象系统 (10) 与控制器 (12) 之间的互联关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -M \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_d \\ y_c \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中 $M = I_m \otimes \mathbf{1}_k \in \mathbb{R}^{p\times m}$，$\otimes$ 表示克罗内克积，I_m 表示维数为 m 的单位矩阵，k 是一个执行器所覆盖的元素数量。

无源互联 (13) 保证了闭环系统的无源性，由此得到一个新的闭环端口哈密顿系统：

$$\dot{x}_{cl} = [J_{cl} - R_{cl}]\, Q_{cl} x_{cl}, \tag{14}$$

where $x_{cl} = \left[x_{1d}^T,\, x_{2d}^T,\, x_c^T\right]^T$, $Q_{cl} = \operatorname{diag}\left[Q_1,\, Q_2,\, Q_c\right]$,

$$J_{cl} = \begin{bmatrix} O & J_i & 0 \\ -J_i^T & 0 & -B_{0d} M B_c^T \\ 0 & B_c M^T B_{0d}^T & J_c \end{bmatrix},$$

$$R_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_d + B_{0d} M D_c M^T B_{0d}^T & 0 \\ 0 & 0 & R_c \end{bmatrix}.$$

控制器 (12) 的哈密顿量为：

$$H_c(x_c) = \frac{1}{2} x_c^T Q_c x_c. \tag{15}$$

因此，闭环哈密顿函数为：

$$H_{cld}(x_{1d}, x_{2d}, x_c) = H_d(x_{1d}, x_{2d}) + H_c(x_c). \tag{16}$$

下一步是设计控制器矩阵 J_c,R_c, B_c, Q_c 和 D_c，以整形闭环哈密顿量 (16)。在命题1中，我们首先说明如何利用结构不变量将控制器状态与被控对象状态关联起来。

命题1 选择 $J_c = 0$ 和 $R_c = 0$ 后，闭环系统 (14) 具有卡西米尔函数$C(x_{1d}, x_c)$，其定义如下：

$$C(x_{1d}, x_c) = B_c M^T B_{0d}^T J_i^{-1} x_{1d} - x_c \tag{17}$$

作为结构不变量，即 $C(x_{1d}, x_c) = 0$ 沿闭环轨迹保持不变。如果 $x_{1d}(0)$和 $x_c(0)$ 的初始条件满足 $C(x_{1d}(0)\ x_c(0)) = 0$, 则该控制器是

一种比例积分控制，控制律(12)-(13)等价于以下状态反馈：

$$\begin{aligned} y_c &= B_c^T Q_c B_c M^T B_{0d}^T J_i^{-1} x_{1d} + D_c M^T B_{0d}^T Q_2 x_{2d}, \\ \mathbf{u}_d &= -M y_c. \end{aligned} \tag{18}$$

因此，闭环系统得到：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1d} \\ \dot{x}_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_i \\ -J_i^T & -\tilde{R}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 x_{1d} \\ Q_2 x_{2d} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中

$$\tilde{R}_d = \left[R_d + B_{0d} M D_c M^T B_{0d}^T \right], \tag{20}$$

$$\tilde{Q}_1 = Q_1 + J_i^{-T} B_{0d} M B_c^T Q_c B_c M^T B_{0d}^T J_i^{-1} \tag{21}$$

是与 x_{1d}相关联的新闭环耗散矩阵和能量矩阵。

证明。 这里考虑以下形式的卡西米尔函数：

$$C(x_{1d}, x_{2d}, x_c) = F(x_{1d}, x_{2d}) - x_c. \tag{22}$$

C 的时间导数为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial^T C}{\partial x_{cl}} \frac{\partial x_{cl}}{\partial t} \\ &= \left[\tfrac{\partial^T F}{\partial x_{1d}}, \tfrac{\partial^T F}{\partial x_{2d}}, -I \right] (J_{cl} - R_{cl}) e_{cl}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $e_{cl} = \frac{\partial H_{cld}}{\partial x_{cl}} = Q_{cl} x_{cl}$。卡西米尔函数是动态不变量，即 $\dot{C} = 0$不依赖于系统的轨迹即 不依赖于哈密顿量。因此，令 $\dot{C} = 0$ 代入式 (23)，可得以下匹配方程：

$$\frac{\partial^T F}{\partial x_{2d}} \left(-J_i^T \right) = 0, \tag{24a}$$

$$\frac{\partial^T F}{\partial x_{1d}} J_i - \frac{\partial^T F}{\partial x_{2d}} \tilde{R}_d - B_c M^T B_{0d}^T = 0, \tag{24b}$$

$$\frac{\partial^T F}{\partial x_{2d}} \left(-B_{0d} M B_c^T \right) - (J_c - R_c) = 0. \tag{24c}$$

求解 (24a)，可得 $\partial F / \partial x_{2d} = 0$，这表明 x_c 不依赖于 x_{2d}。因此，结合 $J_c = -J_c^T$和 $R_c = R_c^T > 0$，(24c) 表明 J_c 和 R_c均为零。由于 J_i 满秩，根据 (24b)，只要适当选取初始条件x_c(0)，即可得到 (17) 作为结构不变量。取初始条件x_{1d}(0) 和 x_c(0)，使得 C(x_{1d}(0) x_c(0)) $= 0$，则 (17) 变为

$$B_c M^T B_{0d}^T J_i^{-1} x_{1d} - x_c = 0, \tag{25}$$

这使得控制器的状态能够与被控对象的状态建立联系。将式（14）中的 x_c 替换为式（25）后，控制律（12）就变为式（18）所述的状态反馈。

因此，闭环系统（14）变为式（19）。

根据命题1，闭环哈密顿量函数 (16) 现在仅是离散化被控对象状态变量的函数：

$$H_{cld}(x_{1d}, x_{2d}) = \frac{1}{2} \left(x_{1d}^T \tilde{Q}_1 x_{1d} + x_{2d}^T Q_2 x_{2d} \right), \tag{26}$$

其时间导数为：

$$\frac{\mathrm{d}H_{cld}}{\mathrm{d}t} = -x_{2d}^T Q_2 \left(R_d + B_{0d} M D_c M^T B_{0d}^T \right) Q_2 x_{2d} \leq 0. \tag{27}$$

从物理角度来看，(26) 表明，动态控制器 (12) 等价于状态反馈 (18)，因此可以（至少部分地，取决于 p 和 B_{0d}的值域）改变与 x_{1d}相关的能量矩阵。实际上，只能对 x_{1d}的前 p 个元素相关的能量矩阵进行整形，即 $\left(\tilde{Q}_1 \right)_{p \times p}$。给定分布式输入的数量 m后，能量整形的目标是寻找矩阵 B_c 和 Q_c，使差值的范数（此处采用弗罗贝尼乌斯范数，参见 [24]的定义6.4）˜期望能量矩阵 Q_{1d} 与闭环能量矩阵Q_1 之间的差值最小：

$$\min_{B_c^T Q_c B_c} \left\| J_i^{-T} B_{0d} M B_c^T Q_c B_c M^T B_{0d}^T J_i^{-1} + Q_1 - \tilde{Q}_{1d} \right\|_F. \tag{28}$$

如果考虑 p 个元素并消去 B_{0d}，则 (28) 等价于：

$$\min_{B_c^T Q_c B_c} \left\| (J_i)_{p \times p}^{-T} M B_c^T Q_c B_c M^T (J_i)_{p \times p}^{-1} - Q_m \right\|_F, \tag{29}$$

其中，$(J_i)_{p \times p}$ 是 J_i和 $Q_m = \left(\tilde{Q}_{1d} - Q_1 \right)_{p \times p} \geq 0$的前 p 行、 p 列。此外，(29) 可通过优化问题 1 形式化。

问题 1 当且仅当 $X = B_c^T Q_c B_c \in SR_0^{m \times m}$ 使准则达到最小值时，与 x_{1d} 的前 p 个元素相关的闭环能量函数才以最优方式成形：

$$f(X) = \left\| A X A^T - Q_m \right\|_F, \tag{30}$$

其中 $A = (J_i)_{p \times p}^{-T} M \in \mathbb{R}^{p \times m}$， $SR_0^{m \times m}$ 表示对称半正定矩阵的集合。

问题 1 的解决方案取决于可用分布式输入的独立数量。我们考虑两种不同情形：理想的全驱动情形（$m = p$）和欠驱动情形（$m < p$）。

3.1 全驱动情形

我们首先考虑全驱动情形，此时被控对象的每个离散化单元都由一个独立输入控制，即 $u_d \in \mathbb{R}^m$ 和 $m = p$，如图 2 所示。输入矩阵 $M = I \in \mathbb{R}^{p\times p}$。因此，

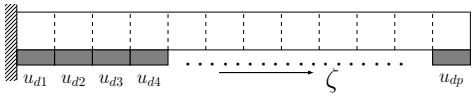


图2. 全驱动情形示意图。

优化问题 1 有一个精确解，如命题2所示。

命题2 在全驱动情形下，即 $m = p$ 优化问题 *1* 存在一个精确解析解$\hat{} X = M^{-1}(J_i)^T_{p\times p} Q_m (J_i)_{p\times p} M^{-T}$从而得到 $f(X)$ =0。控制器矩阵 B_c 和 Q_c 可选为：

$$B_c = (J_i)_{p\times p}, \quad Q_c = Q_m. \tag{31}$$

证明。 矩阵 A 可逆，因此在0处存在最小值，当 (30)

$$\begin{aligned}\hat{X} &= A^{-1}Q_m A^{-T} = M^{-1}\,(J_i)^T_{p\times p}\, Q_m\,(J_i)_{p\times p}\, M^{-T} \\ &= (J_i)^T_{p\times p}\, Q_m\,(J_i)_{p\times p}\,.\end{aligned} \tag{32}$$

根据 X的表达式，可按（31）选择 B_c 和 Q_c，使其满足（32）。

注1 选择 B_c =$(J_i)_{p\times p}$ 可视为算子 $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ 的数值近似，该算子也曾用于 *[25]*中的后期集总控制设计方法。

3.2 欠驱动情形

现在我们研究一种更符合实际的情形：同一控制输入施加于一组元素，如图3所示，其中 k 表示共享同一输入的元素数量。分布式输入的数量 m 少于离散化元素的数量，并满足$m = p/k$。

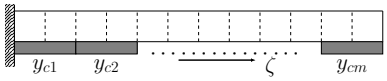


图3. $k = 2$时的欠驱动情形。

在这种情况下，控制器的自由度少于完全驱动的情况，因此式 (30) 中的矩阵 A 不可逆，优化问题 1 条件不良。优化问题 1 的解由命题3给出。

命题 3 $f(X)$ 中定义的 (30) 是凸的，而 $f(X)$ 的最小化等价于 $f^2(X)$的最小化，其唯一极小值为 $\hat{} X = V\Sigma_0^{-1}U_1^T Q_m U_1 \Sigma_0^{-1} V^T$，其中 V、 Σ_0 和 U_1 是矩阵 A 的奇异值分解（*SVD*）所得的矩阵，即

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_0 \\ 0 \end{bmatrix} V^T, \tag{33}$$

其中 $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是酉矩阵，$U_1 \in \mathbb{R}^{p\times m}$、$U_2 \in \mathbb{R}^{p\times q}$、 $q = p - m$和 $\Sigma_0 = \Sigma_0^T \geq 0$ 是 A的奇异值对角矩阵。

证明。 命题3的证明与 [14]中命题3的证明类似。将（33）代入 f^2（X），可得：

$$\begin{aligned}&\min_{X\in SR_0^{m\times m}} f^2(X) \\ &= \min_{X\in SR_0^{m\times m}} \left\| U\Sigma V^T X V \Sigma^T U^T - Q_m \right\|_F^2 \\ &= \min_{X\in SR_0^{m\times m}} \left(\left\| \Sigma_0 V^T X V \Sigma_0^T - T_1 \right\|_F^2 + 2\|T_2\|_F^2 + \|T_3\|_F^2 \right),\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $T_1 = U_1^T Q_m U_1$、 $T_2 = U_1^T Q_m U_2$和 $_3$ ~~T~~ $U_2^T Q_m U_2$。由于一旦定义矩阵 A 和 Q_m ， $\|T_2\|_F^2$ 和 $\|T_3\|_F^2$ 就已给定，因此最小化式 (34) 等价于：

$$\min_{\bar{X}\in SR_0^{m\times m}} \left\| \bar{X} - T_1 \right\|_F^2, \text{ with } \bar{X} = \Sigma_0 V^T X V \Sigma_0^T. \tag{35}$$

根据 [7] 中的定理2.1， $T_1 \in SR_0^{m\times m}$，且 (35) $\hat{}$ 有唯一解 $X = T_1$。因此，当满足以下条件时，(34) 取得最小值：

$$\hat{X} = V\Sigma_0^{-1}\hat{X}\Sigma_0^{-1}V^T = V\Sigma_0^{-1}U_1^T Q_m U_1 \Sigma_0^{-1} V^T. \tag{36}$$

只要满足条件 (36)，控制器矩阵 B_c 和 Q_c 的选取并不唯一。我们将在第 4.2 小节介绍一种可能的选取方式。

注 2 我们分别在命题*2*和命题*3*中研究了两种不同情况下控制器矩阵 B_c 和 Q_c 的选择。目标是通过修改部分势能矩阵来调整闭环哈密顿量 H_{cld} 。控制器矩阵 D_c 的选择遵循类似的步骤，即优化(27) 与期望值之间的差异。

3.3 闭环稳定性

本小节考虑由通过早期集总方法得到的有限维控制器 (12) 控制的无限维系统 (1) 的闭环稳定性。(1) 与 (12) 之间的功率守恒互连形式如下：

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{1}_\zeta \\ \mathbf{1}_\zeta^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ y_c \end{bmatrix}, \tag{37}$$

with

$$\mathbf{1}_\zeta : \mathbb{R}^m \to L_2, \qquad \mathbf{1}_\zeta^* : L_2 \to \mathbb{R}^m. \tag{38}$$

$\mathbf{1}_\zeta$ 是特征函数，用于将控制器在 R^m 空间中的逐点值分配至子区间 L_2 空间，如图4所示。

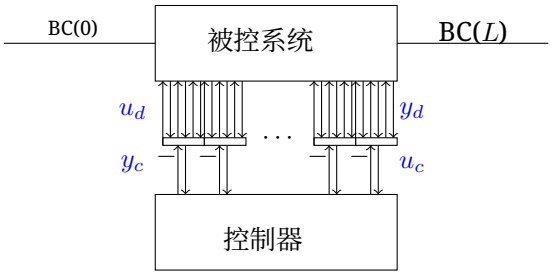


图4. 基于互联的分布式控制策略。

引理1 互联(37) 生成一个狄拉克结构，并满足以下功率守恒关系：

$$\int_0^L y_d^* \mathbf{1}_\zeta y_c \, \mathrm{d}\zeta = y_c^T \mathbf{1}_\zeta^* y_d. \tag{39}$$

闭环系统等价于：

$$\dot{\mathcal{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{G} & 0 \\ -\mathcal{G}^* & -\mathcal{R}_{cl} & -B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T \\ 0 & B_c \mathbf{1}_\zeta^* B_0^* & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{cl}} \mathcal{L}_{cl} \, \mathcal{X}, \tag{40}$$

其中，$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \in X_s$ 是定义在状态空间

$X_s = L_2\left([0,L], \mathbb{R}^{2n}\right) \times \mathbb{R}^m$, $\mathcal{R}_{cl} = R + B_0 \mathbf{1}_\zeta D_c \mathbf{1}_\zeta^* B_0^*$上的状态，$\mathcal{L}_{cl} =$为diag$(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, Q_c)$。

式（40）的哈密顿量为：

$$H_{cl} = \frac{1}{2}\left(\|x_1\|_{\mathcal{L}_1}^2 + \|x_2\|_{\mathcal{L}_2}^2\right) + \frac{1}{2} x_c^T Q_c x_c \tag{41}$$

with

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H_{cl}}{\mathrm{d}t} &= \int_0^L y_d^* u_d \, \mathrm{d}\zeta + y_c^T u_c - \int_0^L (\mathcal{L}_2 x_2)^* \mathcal{R}_{cl} (\mathcal{L}_2 x_2) d\zeta \\ &= - \int_0^L (\mathcal{L}_2 x_2)^* \mathcal{R}_{cl} (\mathcal{L}_2 x_2) d\zeta. \end{aligned} \tag{42}$$

根据式（39）推导出式（42）的最后一步。

为了通过李雅普诺夫论证和LaSalle不变性原理证明闭环系统的稳定性，我们首先提出以下定理。

定理2 式(40) 中定义的线性算子 $\mathcal{A}_{cl}$ 在 X_s上生成一个压缩半群。

证明。 为证明闭环算子 $\mathcal{A}_{cl}$生成一个压缩半群，我们应用 Lumer-Phillips 定理（ [15]中的定理1.2.3）。证明分两步进行：首先，我们证明算子 $\mathcal{A}_{cl}$是耗散的；其次，我们证明

$$\text{range}\,(\lambda I - \mathcal{A}_{cl}) \in X_s, \text{ for } \lambda > 0. \tag{43}$$

根据 [8]中的定义6.1.4，若 Re$\langle \mathcal{A}_{cl}\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle \le 0$，则 $\mathcal{A}_{cl}$ 是耗散的，这等价于 $\langle \mathcal{A}_{cl}\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle + \langle \mathcal{X}, \mathcal{A}_{cl}\mathcal{X}\rangle \le 0$。为清晰起见，且不失一般性，在本节余下部分我们取 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = 1$ 和 $Q_c = I$。由（40）可得：

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}_{cl}\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle + \langle \mathcal{X}, \mathcal{A}_{cl}\mathcal{X}\rangle \\ =&\langle \mathcal{G}x_2, x_1\rangle_{L_2} + \langle -\mathcal{G}^* x_1 - \mathcal{R}_{cl} x_2, x_2\rangle_{L_2} \\ &+ \langle -B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T x_c, x_2\rangle_{L_2} + \langle B_c \mathbf{1}_\zeta^* B_0^* x_2, x_c\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &+ \langle x_1, \mathcal{G}x_2\rangle_{L_2} + \langle x_2, -\mathcal{G}^* x_1 - \mathcal{R}_{cl} x_2\rangle_{L_2} \\ &+ \langle x_2, -B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T x_c\rangle_{L_2} + \langle x_c, B_c \mathbf{1}_\zeta^* B_0^* x_2\rangle_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \tag{44}$$

根据（39），可得

$$\begin{aligned} \langle B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T x_c, x_2\rangle_{L_2} &= \langle B_c \mathbf{1}_\zeta^* B_0^* x_2, x_c\rangle_{\mathbb{R}^m}, \\ \langle x_2, -B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T x_c\rangle_{L_2} &= \langle x_c, B_c \mathbf{1}_\zeta^* B_0^* x_2\rangle_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \tag{45}$$

将（45）代入（44），可得：

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}_{cl}\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle + \langle \mathcal{X}, \mathcal{A}_{cl}\mathcal{X}\rangle \\ =&\langle \mathcal{G}x_2, x_1\rangle_{L_2} + \langle -\mathcal{G}^* x_1, x_2\rangle_{L_2} - \langle \mathcal{R}_{cl} x_2, x_2\rangle_{L_2} \\ &+ \langle x_1, \mathcal{G}x_2\rangle_{L_2} + \langle x_2, -\mathcal{G}^* x_1\rangle_{L_2} - \langle x_2, -\mathcal{R}_{cl} x_2\rangle_{L_2} \\ =&- \langle \mathcal{R}_{cl} x_2, x_2\rangle_{L_2} - \langle x_2, -\mathcal{R}_{cl} x_2\rangle_{L_2} \le 0, \end{aligned}$$

最后一步根据边界条件得出。因此，算子 $\mathcal{A}_{cl}$ 是耗散的。

为证明（43），我们采用[2] 中定理 3.3.6 的证明，并针对我们的域内控制作相应调整。

为简便起见，我们选择 $\lambda = 1$。取任意函数

$$f = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_c \end{bmatrix} \in X_s,$$

(43) 因而等价于以下问题：

$$\text{find } \mathcal{X} \in X_s : (I - \mathcal{A}_{cl})\, \mathcal{X} = f, \tag{46}$$

这又等价于：

$$x_1 - \mathcal{G} x_2 = \tilde{x}_1, \tag{47a}$$
$$\mathcal{G}^* x_1 + (I + \mathcal{R}_{cl})\, x_2 + B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T x_c = \tilde{x}_2, \tag{47b}$$
$$-B_c \mathbf{1}_\zeta^* B_0^* x_2 + x_c = \tilde{x}_c. \tag{47c}$$

将 (47c) 代入 (47b)，得到：

$$\mathcal{G}^* x_1 + (I + \mathcal{M})\, x_2 = \tilde{x}_2 - B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T \tilde{x}_c, \tag{48}$$

其中 $\mathcal{M} = \mathcal{R}_{cl} + B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T \mathbf{1}_\zeta^* B_0^*$。

根据 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^*$ 的定义，(47a) 和 (48) 可写为：

$$x_1 - \sum_{k=0}^{1} G_k \frac{\partial^k}{\partial \zeta^k} x_2 = \tilde{x}_1, \tag{49}$$

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k G_k^T \frac{\partial^k}{\partial \zeta^k} x_1 + (I + \mathcal{M})\, x_2 = \tilde{x}_f, \tag{50}$$

其中 $\tilde{x}_f = \tilde{x}_2 - B_0 \mathbf{1}_\zeta B_c^T \tilde{x}_c$。因此得到：

$$\frac{\partial^N x_1}{\partial \zeta^N} = (-1)^{N+1} G_N^{-T} \left[\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k G_k^T \frac{\partial^k x_1}{\partial \zeta^k} + (I + \mathcal{M})\, x_2 - \tilde{x}_f \right], \tag{51}$$

$$\frac{\partial^N x_2}{\partial \zeta^N} = G_N^{-1} \left[x_1 - \sum_{k=0}^{N-1} G_k \frac{\partial^k x_2}{\partial \zeta^k} - \tilde{x}_1 \right]. \tag{52}$$

定义：

$$h = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{53}$$

根据（51）和（52），可以推导出以下关系：

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} = B_h h + g_h. \tag{54}$$

对于 $N = 1$,

$$B_h = \begin{bmatrix} G_1^{-T} \left[G_0^T,\ I + \mathcal{M} \right] \\ G_1^{-1} \left[1,\ -G_0 \right] \end{bmatrix}, \quad g_h = \begin{bmatrix} -G_1^{-T} \tilde{x}_f \\ -G_1^{-1} \tilde{x}_1 \end{bmatrix}.$$

函数 (54) 的解推导如下：

$$h(\zeta) = e^{B_h \zeta} h(0) + q(\zeta), \tag{55}$$

其中 $q(\zeta) = \int_0^\zeta e^{\zeta - s} B_h g_h \, \mathrm{d}s$。

因此，要解决问题（46），需要求出 $h(\zeta)$ 的解，最终求得 $h(0)$ 的解。根据定理1中的边界条件，有：

$$W R_{\text{ext}} \begin{bmatrix} h(L) \\ h(0) \end{bmatrix} = W R_{\text{ext}} \begin{bmatrix} e^{B_h} h(0) + q(L) \\ h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

经计算，$W R_{\text{ext}} \begin{bmatrix} e^{B_h} \\ I \end{bmatrix}$ 满秩。因此，可以得到 $h(0)$ 的解：

$$h(0) = -\left(W R_{\text{ext}} \begin{bmatrix} e^{B_h} \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1} W R_{\text{ext}} \begin{bmatrix} q(L) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因此，由（55）可得 $h(\zeta)$。进而可得 $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} h(\zeta)$ 的解。将 x 代入（47b），得到 x_c。由此，问题（46）得以解决。根据Lumer-Phillips定理，算子 $\mathcal{A}_{cl}$ 生成一个压缩半群，证明完毕。

Theorem 3 *The operator $\mathcal{A}_{cl}$ has a compact resolvent.*

证明。根据 [4], 中的定义 A.4.24，我们需要证明，对于某个 $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_{cl})$，算子 $(\lambda I - \mathcal{A}_{cl})^{-1}$ 是紧算子，其中 $\rho(\mathcal{A}_{cl})$ 表示 $\mathcal{A}_{cl}$ 的预解集。该证明可由 Garding 不等式（[21] 中的定理 7.6.4）以及 [27] 中定理 2.26 的证明推出。

定义 $\mathcal{T} = \lambda I - \mathcal{A}_{cl}$。根据前面的定理2，$\mathcal{A}_{cl}$ 生成一个压缩半群，因此 $\lambda > 0$ 属于 $\mathcal{A}_{cl}$ 的预解集。$\mathcal{T}$ 有界可逆，并满足 $\|\mathcal{T}\mathcal{X}\|_{L_2} \geq \|\mathcal{X}\|_{H^N}$。因此，$\mathcal{T}^{-1}$ 是紧算子，证明完毕。

根据定理2和定理3，闭环系统的轨迹是预紧的，其渐近稳定性可通过李雅普诺夫论证和LaSalle不变性原理（[16]中的定理 3.64）证明，如定理4所示。

定理4 对于任意 $\mathcal{X}(0)\in L_2\left([0,L],\mathbb{R}^{2n}\right)\times\mathbb{R}^m$，(40) 的唯一解渐近趋于零，且闭环系统(40) 是全局渐近稳定的。

证明。 我们选择闭环系统的能量作为李雅普诺夫函数。由 (42) 可知，李雅普诺夫函数的时间导数为半负定：

$$\frac{\mathrm{d}H_{cl}}{\mathrm{d}t}=-\int_0^L(\mathcal{L}_2x_2)^*\mathcal{R}_{cl}(\mathcal{L}_2x_2)d\zeta\leq 0. \tag{56}$$

利用 LaSalle不变性原理，接下来只需证明与 $\frac{\mathrm{d}H_{cl}}{\mathrm{d}t}$ 相关的唯一解是 0，即与 $\mathcal{L}_2x_2=0$ 相关的唯一解是 $x_2=0$。由于存在内部耗散且边界输入为零，该问题的唯一解是 0。控制器是一个简单积分器，如果初始化得当，随着系统状态收敛到 $x=0$，它也会收敛到 $x_c=0$。

4 数值仿真

作为说明性示例，我们考虑一根长度为 $L=2$ m、弹性模量为 $T=1.4\times10^6$ N、密度为 $\rho=1.225$ / $R=$ kg m、耗散系数为 10^{-3} 的振动弦。该弦的动力学模型可写为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial}{\partial\zeta} & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{L}_1x_1\\ \mathcal{L}_2x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_d \tag{57}$$

其中 $x_1(\zeta,t)=\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}(\zeta,t)$，且 $x_2(\zeta,t)=\rho(\zeta)\frac{\partial\omega}{\partial t}(\zeta,t)$。$\omega(\zeta,t)$ 是空间域上的纵向位移，其状态空间为 $x=\in L_2[0,L]\ \mathbb{R}^2\quad\mathcal{L}_1=(,)$。^{T} 且 $\mathcal{L}_2=\frac{1}{\rho}$。耗散项选取得非常小 $R=10^{-3}$。分布式输入 u_d 是力密度。根据定义 1：

$$Q=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ -P_2 & 0\end{bmatrix},\ \text{with}\quad P_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \text{and}\quad P_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

取满秩矩阵

$$M_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}^T,$$

可以计算出 $Q_M=P_1$ 和 $M_Q=M_0^T$。然后，边界端口变量给出：

$$\begin{bmatrix}f_\partial\\ e_\partial\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathcal{L}_2x_2(L)-\mathcal{L}_2x_2(0)\\ -\mathcal{L}_1x_1(L)+\mathcal{L}_1x_1(0)\\ \mathcal{L}_1x_1(L)+\mathcal{L}_1x_1(0)\\ \mathcal{L}_2x_2(L)+\mathcal{L}_2x_2(0)\end{bmatrix}.$$

我们考虑域内控制的固支-自由情形。因此，我们将式 (9) 中定义的边界输入设为：

$$W=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix},\quad\text{and } W\Sigma W^T\geq 0.$$

固支-自由边界条件意味着 $u_b=0$。

式 (10) 中的离散化矩阵为：

$$J_i=\begin{bmatrix}\frac{1}{\gamma}&&&\\ -\frac{1}{\gamma^2}&\frac{1}{\gamma}&&\\ \vdots&\ddots&\ddots&\\ (-1)^{p-1}\frac{(\gamma')^{p-2}}{\gamma^p}&\cdots&-\frac{1}{\gamma^2}&\frac{1}{\gamma}\end{bmatrix}_{p\times p},$$

$Q_1=\text{diag}(T_{ab})\in\mathbb{R}^{p\times p}$, $Q_2=\text{diag}\begin{pmatrix}1\\ \rho_{ab}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{p\times p}$, $R_d=\text{diag}(R_{ab})\in\mathbb{R}^{p\times p}$，其中 T_{ab}, $\frac{1}{\rho_{ab}}$ 和 R_{ab} 分别取为 $\frac{T}{L_{ab}}$, $\frac{1}{\rho L_{ab}}$ 和 RL_{ab}。$L_{ab}=L/p$.γ 表示努力映射参数 [6] 和 $\gamma'=1-\gamma$。它们取值为 1 2，以获得中心格式。

初始条件设为应变分布的空间分布$x_1(\zeta,0)\sim\mathcal{N}(1.5,0.113)$，速度分布则设为零即 $x_2(\zeta,0)=0$。将弦离散为 50 个单元。模拟采用时间步长 5×10^{-5}s 和中点时间离散方法[1]。弦变形的开环演化 ω 如图 5 所示。

接下来，我们将分别考察全驱动情形和欠驱动情形下闭环系统的数值仿真。

[1] 隐式中点法是一种已知的结构保持时间积分器，适用于端口哈密顿系统 [1]。它是用于时间积分的辛配点方法这一系列方法中的一个特例，相关研究见 [9]。

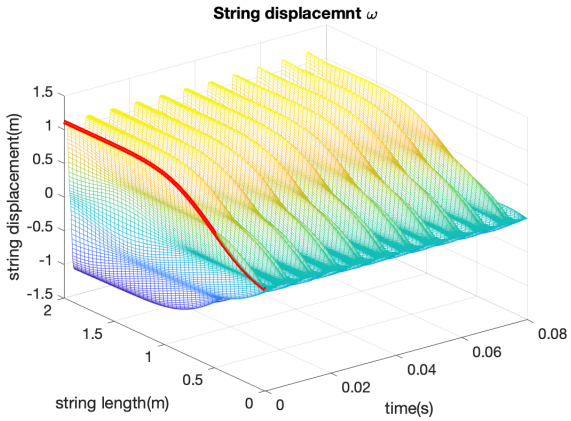


图 5. 振动弦的开环变形。

4.1 全驱动情形

根据命题1和命题2，我们选择$B_c = J_i$ 以保证结构不变量的存在，并选取控制器的初始条件使得 $C = 0$。在这种情况下，(17) 变为： $x_c = x_{1d}$，闭环系统 (19) 写作：

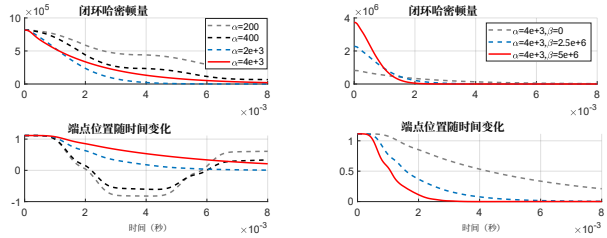
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1d} \\ \dot{x}_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_i \\ -J_i^T & -(R_d + D_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 x_{1d} \\ Q_2 x_{2d} \end{bmatrix}, \qquad (58)$$

˜可以看出，等效的闭环刚度 Q_1可以通过选择 Q_c来整形。

我们首先考虑纯阻尼注入情形，即改变 D_c，同时保持 $Q_c = 0$不变。我们考虑 $D_c = \text{diag}(\alpha L_{ab})$，其中 α 表示阻尼系数。从图 6(a) 可以看出，这个自由度能够抑制弦的振动，但会牺牲时间响应性能。

接下来，我们固定 $\alpha = 4000$，使其对应于轻微过阻尼情形，以说明能量整形对可实现性能的影响。为此，我们采用能量整形控制。从图 6(b) 可以看出，通过能量整形增大闭环刚度，可以加快闭环系统的响应，且不会引入超调。控制器的能量矩阵为 $Q_c = \text{diag}\left(\frac{\beta}{L_{ab}}\right)$，其中 β表示能量整形参数。当 $\beta = 5 \times 10^6$时，可获得良好的动态性能，这对应于等效弦刚度为 $\tilde{T} = 6.4 \times 10^6$ N。

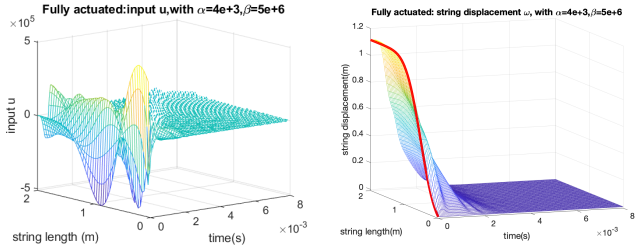
阻尼注入和能量整形情况下，分布式输入和弦变形随时间的演变分别如图 7(a) 和 (b) 所示。从图 7(a) 可以看出，控制保持平滑。图 7(b) 显示，闭环稳定时间



(a) (b)

图 6. 全驱动情形下的闭环哈密顿函数和端点位置：(a) 纯阻尼注入；(b) 能量整形与阻尼注入。

约为 $3 \times 10^{-3}s$，这比纯阻尼注入情况下的 $8 \times 10^{-3}s$ 快得多。



(a) (b)

图 7. 全驱动下能量整形与阻尼注入情形中的 (a) 闭环输入信号演变和 (b) 变形， $\alpha = 4 \times 10^3$, $\beta = 5 \times 10^6$。

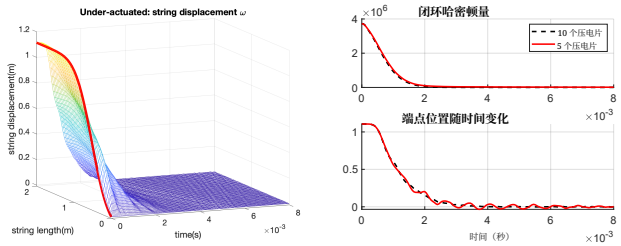
4.2 欠驱动情形

现在考虑如图 3 所示，使用 m压电片实现控制。控制设计的目标是尽可能改变弦的内部弹性˜ T，以获得与全驱动情形相似的性能。我们选择控制器矩阵 $B_c = J_m$，其中 $J_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 源自对 $\frac{\partial}{\partial \zeta}$的离散化。根据命题3中的 (36)，$Q_c = J_m^{-T} V \Sigma_0^{-1} U_1^T Q_m U_1 \Sigma_0^{-1} V^T J_m^{-1}$。

D_c 根据注 2 进行选择，使式（27）中哈密顿量的期望时间导数对应于全驱动情形，即为了满足 $\min_{D_c \in \mathbb{R}^{m \times m}} \left\| M D_c M^T - \text{diag}\left(\alpha L_{ab}\right) \right\|_F$。因此，最优的 D_c为ˆ $D_c = \text{diag}\left(\frac{\alpha L_{ab}}{k}\right)$。

我们首先考虑有 10 个压电片的情形，即 $p = 50$, $m = 10$ 和 $k = 5$。如图 8(a) 所示，弦变形的演变与图 7(b) 中全驱动情形下的结果非常相似。这表明，如果适当选择控制器矩阵 B_c, Q_c 和 D_c，则可实现的性能

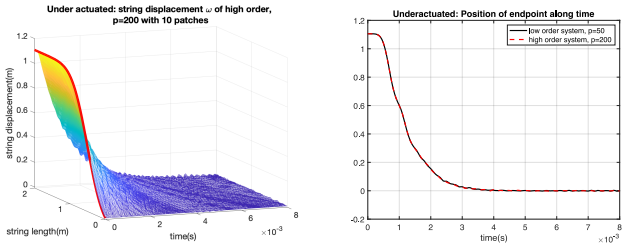
欠驱动情形下的性能可以优化，使其接近全驱动情形下的性能。当压电片数量减少到 5 个时，如图 8(b) 所示，这些性能在高频段略有下降。



(a) (b)

图 8。（a） $k = 5$ 和 $k = 10$ 对应欠驱动情况下的变形闭环演化；（b）哈密顿函数和端点位置。

为了说明被忽略的动力学对可实现性能的影响，我们在采用 $p = 50$ 离散化的系统上实施了针对 10 个压电片设计的控制器，并将其应用于使用 $p = 200$ 推导出的更精确的弦模型。如图 9 所示，由于阻尼注入及其对应的闭环带宽，被忽略的动力学不会显著影响系统在所考虑初始条件下的闭环响应。 [14,12] 研究了基于Timoshenko梁模型的域内控制器设计实例。



(a) (b)

图 9. 高阶系统变形的闭环演变，以及使用同一控制器时低阶系统与高阶系统端点位置的比较。

5 闭环系统的频率分析

本节重点分析系统的频率特性。首先，我们考察图 6(a) 中仿真结果所对应的情形：仅在弦的每个离散单元上施加阻尼注入时，闭环系统的极点分布。图 10 展示了极点和零点图。阻尼注入使极点远离虚轴，移向图的左侧，并提高了剩余模态的稳定裕度。此外，注意到对于 $\alpha = 4000$，闭环系统的两个极点分别分布在纵轴两侧。其中一个位于 -232 的极点解释了图 6(a) 中讨论的过阻尼现象。

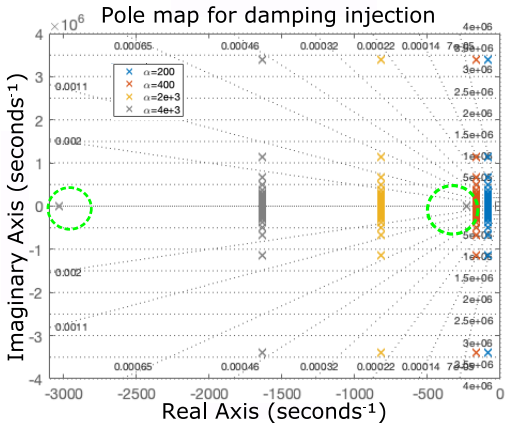


图 10. 注入阻尼时闭环系统的极点。

同样，图 6(b) 对应的同时采用能量整形和阻尼注入的闭环系统极点如图 11 所示。能量整形改变了系统的固有频率，并消除了前述过阻尼。同时，β 越大，出现的频率模态越高。不过，通过阻尼注入始终能够保证闭环系统的稳定性。

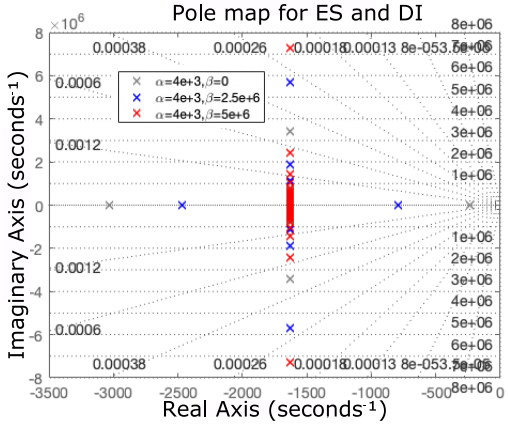
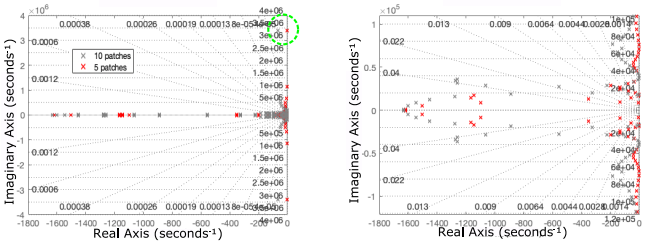


图 11. 采用能量整形和阻尼注入的闭环系统的极点。

对于图 8 所示的欠驱动情形，极点绘于图 12 (a) 中，低频模态的放大图见图 12 (b)。结果表明，为了近似全驱动情形下图 11 所示的极点分布，只能控制主导

响应的低频模态。对于带有 5 个压电片的闭环系统，其高频模态的稳定性（例如极点 $s = -0.4 \pm 3.4 \times 10^6 i$）在弦的内部耗散作用下得以保持。



(a) (b)

图 12. 欠驱动情形下的极点图。

备注 3 为研究欠驱动情形下阻尼注入对高频模态的影响，我们改变矩阵 D_c 并绘制闭环极点。根据图 *13*，所得结论与图 *10* 中展示的全驱动情形类似。

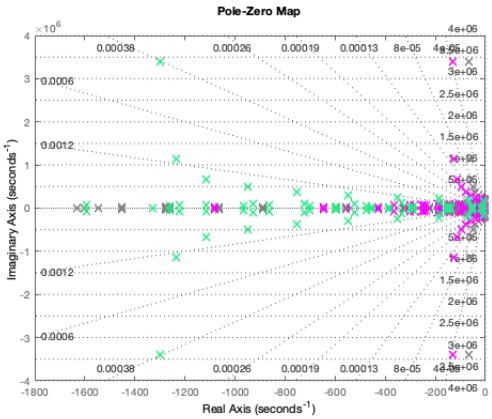
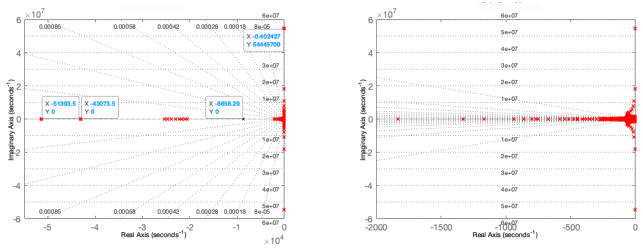


图 13. 随着 D_c变化，欠驱动情形下闭环系统的极点。

将采用 10 个压电片设计的低阶控制器应用于具有 200 个离散化单元的高阶系统时，其极点如图 14 所示。借助内部耗散，高频模态的稳定性始终能够得到保证。如果将低频模态下的极点（图 14(a)）与图 11 和图 12(a) 进行比较，可以注意到，高阶系统的这些极点距离虚轴更远，其中一些是实极点 $s = -51393.5$，-43073.5 和-8658.29。这些极点的响应非常快，因此可以忽略。图 14(b) 中高阶极点的局部放大图与图 12(a) 中采用 10 个执行器片区时的情况相似，这与图 9(b) 中的仿真结果一致。



(a) (b)

图 14. 使用低阶设计控制器的高阶闭环系统的极点。

6 结论与未来工作

本文采用早期集总方法，研究具有两条守恒律的无限维端口哈密顿系统的域内控制。出于控制设计的目的，我们将 CbI方法扩展到空间分布式控制器的应用。利用分布式结构不变量修改系统闭环能量的一部分。本文研究了两种不同情形：系统为全驱动的理想情形，以及通过分段齐次输入实现控制作用的欠驱动情形。在后一种情形中，控制器通过优化得到。全驱动和欠驱动情形的仿真表明，阻尼注入与能量整形相结合，能够改善闭环系统的动态性能，并使闭环系统保持渐近稳定。对这两种情形的比较还表明，通过适当选择控制器参数，可以使欠驱动和全驱动情形获得相近的性能。未来的工作将致力于将该方法扩展到观测器的应用，并将所提出的控制设计过程推广到非线性无限维端口哈密顿系统类。

参考文献

[1] S. Aoues、D. Eberard 和 W. Marquis-Favre。离散线性端口哈密顿系统的典范互联。载于 *2nd IEEE Conference on Decision and Control*，第 3166–3171 页，2013年。[2] B. Augner。*Stabilisation of Infinite-Dimensional Port-Hamiltonian Systems via Dissipative Boundary Feedback*。博士论文，伍珀塔尔大学，2016年。[3] Mark J. Balas。面向更实用的分布参数系统控制理论。载于 C.T. LEONDES（编），*Advances in Theory and Applications*，第 18 卷，属于 *Control and Dynamic Systems*，第 361–421 页。学术出版社，1982年。[4] R. Curtain 和 H. Zwart。*An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*，第 21 卷，属于 *Texts in Applied Mathematics*。施普林格出版社纽约分社，纽约州纽约市，1995年。

[5] V. Duindam、A. Macchelli、S. Stramigioli 和 H. Bruyninckx。*Modeling and control of complex physical systems: the port-Hamiltonian approach* 。Springer Science & Business Media，2009年。[6] G. Golo、V. Talasila、A. van der Schaft 和 B. Maschke。边界控制系统的哈密顿离散化。*Automatica*，40(5):757–771，2004年。[7] N.J. Higham。计算最近的对称正定矩阵。*Linear Algebra and its Applications*，103:103–118，1988年。[8] B. Jacob 和 H. Zwart。*Linear Port-Hamiltonian Systems on Infinite-dimensional Spaces* 2012 。Springer Basel，巴塞尔，。[9] P. Kotyczka、B. Maschke 和 L. Lef`evre。斯托克斯–狄拉克结构的弱形式与端口哈密顿系统的几何离散化。*Journal of Computational Physics*，361 442 476，2018：–。[10] M. Krstic 和 A. Smyshlyaev。*Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs* 2008 。SIAM，。[11] Y. Le Gorrec、H. Zwart 和 B. Maschke。与斜对称微分算子相关的狄拉克结构和边界控制系统。*SIAM journal on control and optimization* 44 5 1864 1892, 2005 ，( )：–。[12] Yann Le Gorrec、Hector Ramirez、Yongxin Wu、Ning Liu 和 Alessandro Macchelli。*Energy Shaping Control of 1D Distributed Parameter Systems* 3 26 ，第 – 页。Springer International Publishing，查姆，2022年。[13]N. Liu、Y. Wu 和 Y. Le Gorrec。面向柔性结构控制的离子聚合物金属复合材料驱动器基于能量的建模。*Mechatronics* 1 *IEEE/ASME Transactions on* ，第 –1 页，2021年。[14] N. Liu、Y. Wu、Y. Le Gorrec、L. Lef`evre 和 H. Ramirez。通过能量整形对分布参数端口哈密顿系统进行行域内有限维控制。载于 2021*Applications* 70 77 *Proceedings of the Conference on Control and its* ，第 – 页。工业与应用数学学会，宾夕法尼亚州费城，2021年1月。[15] Z. Liu 和 S. Zheng。*Semigroups associated with dissipative systems* 398 1999 ，第 卷。CRC出版社。[16]Z.-H. Luo、B.-Z. Guo 和 O. Morgül。*Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications* 2012 。Springer Science & Business Media，。[17]A. Macchelli、Y. Le Gorrec、H. Ramírez 和 H. Zwart。分布式端口哈密顿系统边界控制律的综合。*IEEE Transactions on Automatic Control* 62 4 1700 1713, 2017 ，( )：–，4 月。[18] B Maschke 和 A van der Schaft。分布参数系统的端口控制哈密顿表示。*Proceedings Volumes* 33 2 27 37, 2000 *IFAC* ，( )：–。[19] B. Maschke、A. van der Schaft 和 P. Breedveld。网络动力学的内禀哈密顿表述：非标准泊松结构与回转器。*Journal of the Franklin institute* 329 5 923 ，( )：–966，1992年。[20]R. Moulla、L. Lefevre 和 B. Maschke。守恒律开放系统空间辛约化的伪谱方法。*Journal of computational Physics*，231 4 1272( )：–1292，2012年。[21]A.W. Naylor 和 G.R. Sell。*Linear Operator Theory in Engineering and Science* 。应用数学科学。Holt, Rinehart and Winston，1971年。[22]R. Ortega、A. van der Schaft、I. Mareels 和 B. Maschke。将能量重新引入控制。*IEEE Control Systems Magazine* 21 2 18 33, 2001 ，( )：–。[23] J. Schr¨ock、T. Meurer 和 A. Kugi。由宏纤维复合材料贴片驱动的柔性梁控制：I. 建模与前馈轨迹控制。*Smart Materials and Structures* 20 1 2010 , ( ):015015, dec .[24] T. Shores。*Applied linear algebra and matrix analysis*，第 2541 卷。Springer，2007 年。[25] V. Trenchant、T. Vu、H. Ramirez、L. Lef`evre 和 Y. Le Gorrec。关于结构不变量在无限维端口哈密顿系统分布式控制中的应用。载于*(CDC)* 47 52, 2017 *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control* ，第 – 页，Dec .[26]A. van der Schaft。*L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control* 。Springer Publishing Company, Incorporated，第 3 版，2016年。[27] J.A. Villegas。*A Port-Hamiltonian Approach to Distributed Parameter Systems* 2007 。博士论文，特文特大学，。