半群论构造中主右理想的升链条件

CRAIG MILLER

约克大学数学系，YO10 5DD，英国 craig.miller@york.ac.uk

arXiv:2302.01847v2 [math.GR] 6 Jul 2023

Abstract. 若一个半群满足主右理想的升链条件，或者等价地，满足 $\mathcal{R}$类的升链条件，我们称其为 $\mathcal{R}$-Noetherian。我们研究以下标准半群论构造对 $\mathcal{R}$-Noetherian这一性质的影响：半直积、Sch¨utzenberger 乘积、自由积、Rees 矩阵半群、布兰特扩张、Bruck-Reilly 扩张以及半群的半格。

关键词：半群、主右理想、升链条件。2010年数学主题分类：20M10, 20M12。

1. 引言 Introduction

对于一类泛代数而言，有限性条件是指至少该类中的所有有限对象都满足的一种性质。20 世纪初，Noether 在研究环上的升链条件时开创了对有限性性质的研究 [14], ，此后这一主题已成为许多代数学科中的成熟研究方向。其主要动机是更深入地理解研究对象的结构，尤其是了解它们与有限对象有何不同。

本文关注半群这一类对象，以及满足主右理想升链条件这一有限性条件。我们将满足该条件的半群称为 $\mathcal{R}$-诺特半群[1], ，因为该条件等价于满足 $\mathcal{R}$-类的升链条件（$\mathcal{R}$ 是半群的五种 Green 关系之一）。

具有 $\mathcal{R}$-诺特性质在环论中有一个自然的类比：环的主右理想满足升链条件。事实上，对 $\mathcal{R}$-诺特半群的研究始于一篇论文 [8] ，该论文考察了广义幂级数环的主理想升链条件。文章 [10] 在此基础上，刻画了更一般的一类斜广义幂级数环 $R[[S, \omega]]$ （其系数取自环 R ，指数取自严格全序幺半群 S）的主右理想（及左理想）的升链条件；在此， S 具有$\mathcal{R}$-诺特性质同样至关重要 [10, 定理 3.3]。这项工作促成了论文 [18], ，该文研究了半群半直积的主右理想和主左理想的升链条件，并将其与斜广义幂级数环的相应性质联系起来。

2020 年数学主题分类：20M12，20M10。[1]$\mathcal{R}$-诺特半群在文献中也称为“ACCPR半群”或“满足 ACCPR 的半群”。

比具有 $\mathcal{R}$-诺特性质更强的条件，是满足所有右理想的升链条件；我们称满足这一条件的半群为弱右诺特半群[2]。这类半群受到广泛关注；例如参见 [1, 5, 7, 11]。弱右诺特性质可以用主右理想来刻画：半群 S 是弱右诺特的，当且仅当它是 $\mathcal{R}$-诺特的，且不含主右理想的无限反链（或者等价地， S 不含 $\mathcal{R}$类的无限严格上升链或无限反链）[11, 定理 3.2]。作者近期的文章 [12], 研究了 $\mathcal{R}$-诺特性质和弱右诺特性质，其主要目的是考察半群及其单侧理想在这两种性质下的关系。

本文旨在研究在各种半群理论构造下，具有$\mathcal{R}$-Noether 性质的行为。（当然，我们的结果对具有 $\mathcal{L}$-Noether 性质也有左右对偶形式。）在第 2 节介绍必要的预备知识后，我们将在第 3 节考察半直积，第 4 节考察 Sch¨utzenberger 乘积，第 5 节考察自由积，第 6 节考察 Rees 矩阵半群和布兰特扩张，第 7 节考察 Bruck-Reilly 扩张，并在第 8 节考察半群的半格。

2. 预备知识

在本节中， S 表示一个半群。我们用 S^1 表示通过在 S 中添加单位元（若有必要）而得到的幺半群（如果 S 已经是幺半群，则$S^1 = S$），并用 S^0 表示通过在其中添加零元（若有必要）而得到的带零元半群。

若子集 $I \subseteq S$ 满足 $IS \subseteq I.$，则称其为 S 的右理想。左理想的定义对偶可得，而 S 的理想是同时为右理想和左理想的子集。

I 的右（分别为左）理想 S 若满足 $I = XS^1$ （分别为 $I = S^1X$），则称其由 $X \subseteq I$ 生成。若一个右（分别为左）理想可由有限集生成，则称其为有限生成；若可由单个元素生成，则称其为主理想。

主（单侧）理想决定了半群上的五种 Green 关系： $\mathcal{R}$、 $\mathcal{L}$、$\mathcal{H}$、 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{J}.$。本文只关注关系 $\mathcal{R}.$。半群 S 上的 Green 预序 $\leq_{\mathcal{R}}$ 定义如下：

$$a \leq_{\mathcal{R}} b \Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1,$$

由此得到关系 $\mathcal{R}$:

$$a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow [a \leq_{\mathcal{R}} b \text{ and } b \leq_{\mathcal{R}} a] \Leftrightarrow aS^1 = bS^1.$$

当需要区分不同半群上的 Green 关系 $\mathcal{R}$ 时，我们会将半群写成下标，即 $S.$ 上的 $\mathcal{R}$ 记作 $\mathcal{R}_S$。为方便起见，我们写作 $\leq_S$而不写 $\leq_{\mathcal{R}_S}$；若 $a \leq_S b$，则写作 $a <_S b$，但 $(a, b) \notin \mathcal{R}_S.$

Green 预序 $\leq_{\mathcal{R}}$ 在 $S.$ 的 $\mathcal{R}$类集合上诱导出一个偏序。我们注意到， S 的 $\mathcal{R}$类所成的偏序集与 S 的主右理想偏序集（按包含关系排序）同构。

如果偏序集 P 中的每条升链

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots$$

[2]在文献中，“右诺特”是满足右同余升链条件的半群的标准名称。不过，弱右诺特半群有时也被称为“右诺特”，而右诺特半群则被称为“强右诺特”。

最终都会稳定下来，我们就说 P 满足升链条件。若其主右理想构成的偏序集满足升链条件，则称 S 为 $\mathcal{R}$-诺特的。以下结果给出了半群满足 $\mathcal{R}$-诺特条件的若干等价表述。

命题 题 2.1. [12, 命题 2.3] 对于半群 S，以下条件等价: :

(1) S 是 $\mathcal{R}$-Noether；(2) S 的任意非空主右理想集合都含有一个极大元；(3) S 的 $\mathcal{R}$-等价类偏序集满足升链条件；(4) S 的任意非空 $\mathcal{R}$-等价类集合都含有一个极大元；(5) S 在 $\mathcal{R}$-预序下不含元素的无限严格上升链。

推论 2.2. [12, 推论 2.10] 任何由（0-）极小右理想并成的半群 S （带零元）都是 $\mathcal{R}$-Noether。特别地，所有完全（0-）单半群和所有零半群都是 $\mathcal{R}$-Noether。

对于任意非空集合 X，回忆一下，以 X 为字母表的自由半群记作 X^+，它是由 X 上所有字构成的集合；以 X 为字母表的自由幺半群记作 X^*，它是 X^+ 添加一个单位元后得到的集合。显然，对于任意 u、$v \in X^+$，有 $uX^* \subseteq vX^*$ 当且仅当 v 是 u.的子字。由此可得:

命题 2.3. 对任意非空集合 X， X^+ 和 X^* 都是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

由于每个半群都是自由半群的商，并且显然存在不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的半群，因此 $\mathcal{R}$-Noetherian 这一性质对商不封闭。不过，事实证明，这一性质对 Rees 商封闭:

引理 2.4. [12,推论 3.4] 设 S 是一个半群，且 I 是 $S.$ 的一个理想。如果 S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，那么 $S/I.$ 也是。

$\mathcal{R}$-Noetherian 这一性质也能遗传到单侧理想:

命题 2.5. [12, 推论3.2] 设 S 是一个半群，且 I 是 $S.$ 的一个右/左/双侧理想。如果 S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，那么 $I.$ 也是。

设 T 是 $S.$ 的一个子半群。若 $\mathcal{R}_T$-预序是 $\mathcal{R}_S$-预序在 T 上的限制，则称 T 是 $\mathcal{R}$-保留的（在 S 中）；也就是说,

$$\leq_T = \leq_S \cap (T \times T).$$

$\mathcal{R}$-诺特性质可由 $\mathcal{R}$-保持子半群继承:

命题 2.6. 设 S 是一个半群，且 T 是$S.$ 的一个 $\mathcal{R}$-保持子半群。若 S 是 $\mathcal{R}$-诺特的，则 sois $T.$

证明. 考虑一个升链

$$a_1 \leq_T a_2 \leq_T \cdots$$

在 $T.$ 中。显然，我们有一个升链

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots$$

在 $S.$ 中。由于 S 是 $\mathcal{R}$-诺特的，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N.$，都有 $a_n \mathcal{R}_S a_N$。于是，由于 T 在 S中是 $\mathcal{R}$-保持的，对所有 $n \geq N.$，都有 $a_n \mathcal{R}_T a_N$。因此， T 是 $\mathcal{R}$-诺特的。□

若对于每个 $a \in T$ 都存在 $b \in T$ 使得 $aba = a.$，则称半群 T 为正则半群。众所周知，正则子半群保持 $\mathcal{R}$；证明见推论 4.7]之前的 [11, 段。因此我们有:

推论 2.7. 设 S 为具有正则子半群 $T.$ 的半群。若 S 是 $\mathcal{R}$-Noether，则 $T.$也是如此。

T 是 S 的子半群，若满足以下条件，则称其为（在 S中）右幺：对于所有的 $a \in T$ 和 $b \in S$，若 $ab \in T$，则 $b \in T.$

显然，右幺子半群是 $\mathcal{R}$-保持的，因此由命题 2.6 可得：

推论 2.8. 设 S 是一个半群，且 T 是 $S.$ 的右幺子半群。若S 是 $\mathcal{R}$-Noether，则 $T.$也是

若子半群的补集是一个左理想，则该子半群是右幺的，因此我们有：

推论 2.9. 设 S 是一个半群，其中有一个子半群 T，且 $S\backslash T$ 是 $S.$ 的左理想。若 S 是 $\mathcal{R}$-Noether，则 $T.$也是

现在我们引入本文的一个关键概念。

定义 2.10. 设 S 是一个半群，并设 $a \in S.$。我们称 $b \in S$ 是 a 的局部右单位元，如果 $a = ab.$

显然，在幺半群或正则半群中，每个元素都有一个局部右单位元。另一方面，任何左消去的无幂等元半群（例如自由半群）都没有元素拥有局部右单位元。注意，不含任何拥有局部右单位元的元素的半群是 $\mathcal{R}$-平凡的，即 $\mathcal{R}$ 是恒等关系。

命题 2.11. 设 S 和 T 是半群，且存在映射 $\theta : S \to T$，使得对每个 $a \in S.$，都有 $(aS)\theta \subseteq (a\theta)T$。如果 T 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，且没有元素拥有局部右单位元，那么 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，且没有元素拥有局部右单位元。

证明. 显然，如果 S 有元素拥有局部右单位元，那么 T 也有，因此 S 没有元素拥有局部右单位元。根据命题 2.1，要证明 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，只需证明它不包含在 $\mathcal{R}$-预序下严格上升的无限元素链。因此，考虑一个升链

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots$$

在 $S.$ 于是，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $a_i \in a_{i+1}S^1$。因此，根据假设，有$a_i\theta \in (a_{i+1}S^1)\theta \subseteq (a_{i+1}\theta)T^1$。故我们得到一个升链

$$a_1\theta \leq_T a_2\theta \leq_T \cdots$$

在 $T.$ 由于 T是 $\mathcal{R}$-Noether 且 $\mathcal{R}$-平凡的，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N.$，都有 $a_n\theta = a_N\theta$。对于每个 $n \geq N$，不可能有 $a_N \in a_nS$，否则我们就会得到

$$a_N\theta \in (a_nS)\theta \subseteq (a_n\theta)T = (a_N\theta)T,$$

这与 T 没有具有局部右单位元的元素这一事实矛盾。因此，对于所有 $n \geq N.$，都有 $a_n = a_N$。于是 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的。□

推论 2.12. 设 S 和 T 是半群，且存在同态 $\theta : S \to T.$。如果 T 是$\mathcal{R}$-Noether 的，且没有具有局部右单位元的元素，那么 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，且没有具有局部右单位元的元素。

命题 2.13. [12, 命题3.9] 设 S 是一个半群，I 是 S 的一个理想，并假设 I 的每个元素在 $I.$ 中都有一个局部右单位元。那么，S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当 I 和 S/I 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

3. Semidirect Products

设 S 和 T 是半群，且 $\varphi: T \to \mathrm{End}(S)$ 是一个同态，其中 $\mathrm{End}(S)$ 表示 $S.$ 的所有自同态构成的幺半群。元素 $t \in T$ 在 φ 下的像记作 φ_t。我们将 φ_t 写在其参数左侧；即 $\varphi_t(s)$ 表示 $s \in S.$。关于 φ， S 与 T 的半直积记作 $S \rtimes_\varphi T$，它是底集为 $S \times T$、乘法定义如下的半群：

$$(s,t)(s',t') = (s\varphi_t(s'), tt').$$

注意，直积 $S \times T$ 是半直积 $S \rtimes_\varphi T$，其中 $\varphi_t = id_S$ 对所有 $t \in T.$ 均成立。

文献 [18] 研究了半直积具有 $\mathcal{R}$-Noether 性质的情形，并得出了半直积 $S \rtimes_\varphi T$ 具有 $\mathcal{R}$-Noether 性质的一些部分刻画。例如，如果 S 和 T 都至少含有一个幂等元，并且对于每个 $t \in T$， φ_t 都是满射，那么 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的充要条件是 S 和 T 均为 $\mathcal{R}$-Noether 性质 [18,定理 3.13]。

本节旨在给出半直积具有 $\mathcal{R}$-Noether 性质的充要条件。为此，我们先证明几个引理。

引理 3.1. 如果 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，那么 S 和 T 中至少有一个是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明。反设 S 和 T 都不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。那么存在无限严格上升链

$$a_1 <_S a_2 <_S \cdots \quad \text{and} \quad b_1 <_T b_2 <_T \cdots$$

分别位于 S 和 T 中。于是，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在 $s_i \in S$ 和 $t_i \in T$，使得 $a_i = a_{i+1}s_i$ 和 $b_i = b_{i+1}t_i$。注意，对每个 $i \in \mathbb{N}.$，都有 $b_1 = b_{i+1}t_i \dots t_1$。我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{b_1}(a_i) &= \varphi_{b_1}(a_{i+1}s_i) = \varphi_{b_1}(a_{i+1})\varphi_{b_1}(s_i) = \varphi_{b_1}(a_{i+1})\varphi_{b_{i+1}t_i\dots t_1}(s_i)\\ &= \varphi_{b_1}(a_{i+1})\varphi_{b_{i+1}}(\varphi_{t_i\dots t_1}(s_i)).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$(\varphi_{b_1}(a_i), b_i) = (\varphi_{b_1}(a_{i+1}), b_{i+1})(\varphi_{t_i\dots t_1}(s_i), t_i).$$

于是，令 $U = S \rtimes_\varphi T$，我们得到一个升链

$$(\varphi_{b_1}(a_1), b_1) \leq_U (\varphi_{b_1}(a_2), b_2) \leq_U \cdots$$

位于 $U.$ 中。由于 U 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N.$，$(\varphi_{b_1}(a_n)\ b_n)\ \mathcal{R}_U\ (\varphi_{b_1}(a_N)\ b_N)$。特别地，存在 $(s,t) \in U$，使得 $(\varphi_{b_1}(a_{N+1})\ b_{N+1}) = (\varphi_{b_1}(a_N)\ b_N)(s,t)$。但这意味着 $b_{N+1} = b_N t$，与 $b_N <_T b_{N+1}$ 矛盾。□

引理 3.2. 假设 S 含有一个局部右单位元。若 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether，那么 T 是 $\mathcal{R}$-Noether。

证明。反设 T 不是 $\mathcal{R}$-Noether。于是存在一个无限严格升链

$$b_1 <_T b_2 <_T \cdots$$

在 $T.$ 中。于是，对每个 $i \in \mathbb{N}$，存在 $t_i \in T$ 使得 $b_i = b_{i+1}t_i$。设 $a \in S$ 有一个局部右单位元 $s \in S$，于是 $a = as.$。我们有

$$\varphi_{b_1}(a) = \varphi_{b_1}(as) = \varphi_{b_1}(a)\varphi_{b_1}(s) = \varphi_{b_1}(a)\varphi_{b_{i+1}}(\varphi_{t_i\dots t_1}(s)),$$

因此

$$(\varphi_{b_1}(a), b_i) = (\varphi_{b_1}(a), b_{i+1})(\varphi_{t_i\dots t_1}(s), t_i).$$

证明的最后部分与引理 3.1 的证明基本相同。 □

引理 3.3. 如果 S 或 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，且没有元素具有局部右单位元，那么 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

证明。我们断言，投影映射 $\pi_S\colon S \rtimes_\varphi T \to S$ 满足命题 2.11 的条件。事实上，对于任意的 (a,b)、$(s,t) \in S \rtimes_\varphi T$，我们有

$$\big((a,b)(s,t)\big)\pi_S = (a\varphi_b(s), bt)\pi_S = a\varphi_b(s) = \big((a,b)\pi_S\big)\varphi_b(s) \in \big((a,b)\pi_S\big)S,$$

如所需。显然，投影映射 $\pi_T\colon S \rtimes_\varphi T \to T$ 是一个同态。因此，结论由命题 2.11 和推论 2.12 得出。□

引理 3.4. 若 $a, a' \in S$ 且 $b, b' \in T$，其中 $b \in b'T$，则 $a\big(\varphi_b(S)\big)^1 \subseteq a'\big(\varphi_{b'}(S)\big)^1$ 当且仅当 $a \in a'\big(\varphi_{b'}(S)\big)^1$。此外，若 $b\,\mathcal{R}_T\,b'$，则 $\varphi_b(S) = \varphi_{b'}(S)$。

证明。若 $a\big(\varphi_b(S)\big)^1 \subseteq a'\big(\varphi_{b'}(S)\big)^1$，则显然 $a \in a'\big(\varphi_{b'}(S)\big)^1$。反之，假设$a \in a'\big(\varphi_{b'}(S)\big)^1$。存在 $t \in T$ 使得 $b = b't$. 因此，我们有

$$\varphi_b(S) = \varphi_{b't}(S) \subseteq \varphi_{b'}(\varphi_t(S)) \subseteq \varphi_{b'}(S),$$

因此 $a(\varphi_b(S))^1 \subseteq a'(\varphi_{b'}(S))^1$。

现在，若 $b\,\mathcal{R}_T\,b'$，通过与上述类似的论证可得 $\varphi_{b'}(S) \subseteq \varphi_b(S)$，因此$\varphi_b(S) = \varphi_{b'}(S)$. □

在陈述本节的主要结果之前，我们先引入以下定义。

定义 3.5。设 S 和 T 是半群，且设 $\varphi\colon T \to$End(S) 是一个同态。 φ中的一个链是形如以下形式的升链

$$a_1\big(\varphi_{b_1}(S)\big)^1 \subseteq a_2\big(\varphi_{b_2}(S)\big)^1 \subseteq a_3\big(\varphi_{b_3}(S)\big)^1 \subseteq \cdots$$

其中 $a_i \in S$、 $b_i \in T$ 和 $b_i \in b_{i+1}T$ 对所有 $i \geq 1$.

定理 3.6. 设 S 和 T 是半群，并设 $\varphi\colon T \to$ End(S) 是一个同态。那么 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，当且仅当满足以下条件之一：

(1) S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，且没有元素具有局部右单位元；或 (2) S 中的每条 φ-链最终都稳定，且 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

证明. 设 $U = S \rtimes_\varphi T$.

(⇒) 假设 (1) 不成立。那么，要么 S 不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，要么 S 有一个元素具有局部右单位元。在前一种情况下，根据引理 3.1， T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的；在后一种情况下，根据引理 3.2， T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

现在反设存在一条无限的 φ-链

$$a_1\big(\varphi_{b_1}(S)\big)^1 \subsetneq a_2\big(\varphi_{b_2}(S)\big)^1 \subsetneq \cdots$$

在 S. 于是，对每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在 $t_i \in T$ 使得 $b_i = b_{i+1}t_i$。因此，我们得到一个升链

$$b_1 \leq_T b_2 \leq_T \cdots$$

在 T. 由于 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，因此存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n \geq N$.，都有 $b_n\,\mathcal{R}_T\,b_N$。接着，根据引理 3.4，对于所有 $n \geq N.$，我们有 $\varphi_{b_n}(S) = \varphi_{b_N}(S)$。因此，我们得到一个无限的 φ-链

$$a_N\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1 \subsetneq a_{N+1}\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1 \subsetneq \cdots.$$

由此可知，对每个 $n \geq N$，都存在 $s_n \in S$，使得 $a_n = a_{n+1}\varphi_{b_N}(s_n)$。此外，由于 $b_N\,\mathcal{R}_T\,b_{N+1}$ 且 $b_N \in b_{N+1}T$，存在 $t \in T$，使得 $b_N = b_N t.$。因此，对每个 $n \geq N.$，我们有 $(a_n, b_N) = (a_{n+1}, b_N)(s_n, t)$。于是，我们得到一个升链

$$(a_N, b_N) \leq_U (a_{N+1}, b_N) \leq_U \cdots$$

在 $U.$ 中。由于 U 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，存在 $N' \geq N$，使得对所有 $n \geq N'.$，都有 (a_n, b_N) $\mathcal{R}_U(a_{N'}, b_N)$。特别地，存在 $(s, t') \in U$，使得 $(a_{N'+1}, b_N) = (a_{N'}, b_N)(s, t')$。于是 $a_{N'+1} = a_{N'}\varphi_{b_N}(s)$。然而

$$a_{N'}\big(\varphi_{b_{N'}}(S)\big)^1 = a_{N'}\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1 = a_{N'+1}\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1 = a_{N'+1}\big(\varphi_{b_{N'+1}}(S)\big)^1,$$

因此我们得出矛盾。

($\Leftarrow$) 若 (1) 成立，则根据引理 3.3，U 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。现假设 (2) 成立。考虑升链

$$(a_1, b_1) \leq_U (a_2, b_2) \leq_U \cdots$$

在 $U.$ 中。不失一般性，我们可以假设对于每个 $i \in \mathbb{N}.$，$(a_i, b_i) \in (a_{i+1}, b_{i+1})U$。于是，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，存在 $(s_i, t_i) \in U$，使得 $(a_i, b_i) = (a_{i+1}, b_{i+1})(s_i, t_i)$。接着$a_i = a_{i+1}\varphi_{b_{i+1}}(s_i)$ 且 $b_i = b_{i+1}t_i$。因此，我们有一个 φ-链

$$a_1\big(\varphi_{b_1}(S)\big)^1 \subseteq a_2\big(\varphi_{b_2}(S)\big)^1 \subseteq \cdots$$

在 S中，以及一个升链

$$b_1 \leq_T b_2 \leq_T \cdots$$

在 $T.$ 中。由于每个 φ-链最终都会稳定，且 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N.$，$a_n\big(\varphi_{b_n}(S)\big)^1 = a_N\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1$ 且 $b_n \mathcal{R}_T b_N$。因此，根据引理 3.4，对于每个 $n \geq N$，我们有$a_n \in a_N\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1$ 且 $\varphi_{b_n}(S) = \varphi_{b_N}(S)$。由于 $a_N = a_{N+1}\varphi_{b_{N+1}}(s_N)$，我们有

$$a_n \in a_{N+1}\varphi_{b_{N+1}}(S)\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1 = a_{N+1}\varphi_{b_{N+1}}(S)\big(\varphi_{b_{N+1}}(S)\big)^1 = a_{N+1}\varphi_{b_{N+1}}(S).$$

因此，对于每个 $n \geq N+1$，都存在 $u_n \in S$ 和 $v_n \in T$，使得 $a_n = a_{N+1}\varphi_{b_{N+1}}(u_n)$ 且 $b_n = b_{N+1}v_n.$。由此可得 $(a_n, b_n) = (a_{N+1}, b_{N+1})(u_n, v_n)$，进而有 (a_n, b_n) $\mathcal{R}_U(a_{N+1}, b_{N+1})$。证明完毕。□

推论 3.7. 设 S 是一个 $\mathcal{R}$-Noetherian 半群，其 $\mathcal{R}$-类均为有限集；设T 是一个半群，且设 $\varphi\colon T \to \mathrm{End}(S)$ 是一个同态。那么，当且仅当 S 中不存在具有局部右单位元的元素，或者 T 是$\mathcal{R}$-Noetherian 时，$S \rtimes_\varphi T$ 才是$\mathcal{R}$-Noetherian。

证明。根据定理 3.6，只需证明：若 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，则 S 中的每条 φ-链最终都会稳定。因此，设 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，并反设存在一条无限的 φ-链

$$a_1\big(\varphi_{b_1}(S)\big)^1 \subsetneq a_2\big(\varphi_{b_2}(S)\big)^1 \subsetneq \cdots$$

在 $S.$ 那么我们得到升链

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots \quad \text{and} \quad b_1 \leq_T b_2 \leq_T \cdots$$

在 S 和 T中，分别如此。由于 S 和 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得$a_n \mathcal{R}_S a_N$和 $b_n \mathcal{R}_T b_N$对所有 $n \geq N.$均成立。于是，由引理 3.4 可得 $\varphi_{b_n}(S) = \varphi_{b_N}(S)$ 对所有 $n \geq N.$ 均成立。因此，我们得到一个无限的 φ-链

$$a_N\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1 \subsetneq a_{N+1}\big(\varphi_{b_N}(S)\big)^1 \subsetneq \cdots.$$

但这样一来，对所有 m，$n \geq N$ 且满足 $m \neq n$ 的 $a_m \neq a_n$ 都成立，这与 a_N 的 $\mathcal{R}_S$-类是有限的这一事实矛盾。□

显然，每个有限半群都含有一个具有局部右单位元的元素，因此我们推得：

推论 3.8。设 S 是一个有限半群，T是一个半群，且 $\varphi\colon T \to \mathrm{End}(S)$ 是一个同态。那么，$S \rtimes_\varphi T$是 $\mathcal{R}$-Noetherian 当且仅当 T是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

以下示例表明，要使半直积 $S \rtimes_\varphi T$ 成为$\mathcal{R}$-Noetherian，半群 S 不必是 $\mathcal{R}$-Noetherian，即使在 T 是平凡的情况下也是如此。

例 3.9. 设 S 是任意带有单位元 1 的幺半群，$T = \{e\}$ 是平凡半群，并定义 $\varphi : T \to \mathrm{End}(S)$，令 φ_e 为在 1 上取值的常值映射 c_1。于是，对于所有 $a, a' \in S$，都有 $(a, e)(a', e) = (a, e)$，因此 $S \rtimes_\varphi T$ 是左零半群，故由推论 2.2 可知它是 $\mathcal{R}$-Noetherian。（或者，对于任意 $a, a' \in S$，显然 $a \in a'\big(\varphi_e(S)\big)^1$ 当且仅当 $a = a'$，因此 S 中的每条 φ-链最终都会稳定。由于 T 显然是 $\mathcal{R}$-Noetherian，故由定理 3.6 可知 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian。）

现在我们证明，即使一个半直积的两个半直积因子都是 $\mathcal{R}$-Noetherian，它本身也未必是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

例 3.10. 令 S 为（一个副本的）自由单生成幺半群 $\{x\}^*$ 与集合 $\{a_i$ 的不交并：$i \in \mathbb{Z}\}$. 在 S 上定义乘法，使其扩展 $\{x\}^*$ 上的乘法：

$$a_i x^n = a_{i-n} \quad \text{and} \quad x^n a_j = a_i a_j = a_j$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 i，$j \in \mathbb{Z}$。不难验证，在此乘法下，S 是一个幺半群。显然，$I = \{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 是 S 的一个理想，且是一个右零半群；特别地，I 中的每个元素在 I. 中都有一个局部右单位元。由于 I 和 $S/I \cong \mathbb{N}^0$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，根据命题 2.13，S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的。因此，S^0 是 $\mathcal{R}$-Noether 的。现在令 $T = \{e\}$ 为平凡半群，并令 $\varphi : T \to \mathrm{End}(S^0)$ 定义如下：

$$\varphi_e(s) = \begin{cases} s & \text{if } s \in \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}, \\ 0 & \text{if } s \in \{a_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}. \end{cases}$$

对于每个 $i \geq 0$，我们有 $a_i = a_{i+1}x = a_{i+1}\varphi_e(x)$，因此 $a_i\big(\varphi_e(S)\big)^1 \subseteq a_{i+1}\big(\varphi_e(S)\big)^1$。对于任意 $s \in S^0$，我们有

$$a_i\varphi_e(s) \in a_i(\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}) \subseteq \{a_k : k \leq i\} \cup \{0\}.$$

因此，我们得到一条无限的 φ链

$$a_1\big(\varphi_e(S)\big)^1 \subsetneq a_2\big(\varphi_e(S)\big)^1 \subsetneq \cdots.$$

因此，由定理 3.6，$S^0 \rtimes_\varphi T$ 不是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

对于半群 S，我们用 $\mathrm{SEnd}(S)$ 表示 S. 的所有满射自同态构成的幺半群。我们将利用定理 3.6，在 $\varphi_t \in$ 对每个 $t \in T$. 都满足 $\mathrm{SEnd}(S)$ 的情形下，推导出 $S \rtimes_\varphi T$为 $\mathcal{R}$-Noether 的充要条件。首先，我们证明另一个引理。

引理 3.11. 假设存在一个元素 $b \in T$，使得 b 有一个局部右单位元，且 $\varphi_b \in$ 属于 $\mathrm{SEnd}(S)$。如果 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，那么 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明。反设 S 不是 $\mathcal{R}$-Noether 的。那么存在一条无限严格升链

$$a_1 <_S a_2 <_S \cdots$$

在 S. 然后，对每个 $i \in \mathbb{N}$，存在 $s_i \in S$ 使得 $a_i = a_{i+1}s_i$。由于 φ_b 是满射，对每个 $i \in \mathbb{N}$，存在 $s'_i \in S$ 使得 $\varphi_b(s'_i) = s_i$。令 t' 为 b的一个局部右单位元，于是 $b = bt'$. 因此，$(a_i, b) = (a_{i+1}, b)(s'_i, t')$。于是，令 $U = S \rtimes_\varphi T$，我们得到一个升链

$$(a_1, b) \leq_U (a_2, b) \leq_U \cdots$$

在 U. 由于 U 是 $\mathcal{R}$-Noether-诺特的，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有$n \geq N.$，(a_n, b) $\mathcal{R}_U(a_N, b)$。特别地，存在 $(s,t) \in U$ 使得 $(a_{N+1}, b) = (a_N, b)(s,t)$。但这样一来$a_{N+1} = a_N\varphi_b(s)$，这与 $a_N <_T a_{N+1}$矛盾。□

定理 3.12. 设 S 和 T 是半群，且 φ: $T \to \mathrm{SEnd}(S)$ 是一个同态。那么，当且仅当下列条件之一成立时，$S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群:

(1) S 和 T 都是 $\mathcal{R}$-Noether 半群；(2) S 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群，且没有元素具有局部右单位元；(3) T 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群，且没有元素具有局部右单位元。

证明. ($\Rightarrow$) 假设 (2) 和 (3) 均不成立。于是 T 有一个元素（记为 b）具有局部右单位元。由于 $\varphi_b \in \mathrm{SEnd}(S)$, 由引理 3.11 可知 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群。此外，由定理 3.6 可得 T 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群。因此 (1) 成立。

($\Leftarrow$) 若 (2) 或 (3) 成立，则由引理 3.3 可知 $S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群。现在假设 (1) 成立。由于对所有 $b \in T$，$\varphi_b(S) = S$，S 中的每条 φ-链都是 S 的主右理想升链，因此最终必定稳定，因为 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群。因此，由于 T 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群，根据定理 3.6，$S \rtimes_\varphi T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群。□

推论 3.13。 [18, 定理 3.13] 设 S 和 T 是带幂等元的半群，且设 $\varphi: T \to \mathrm{SEnd}(S)$ 是一个同态。那么，当且仅当 S 和 T 是 $\mathcal{R}$-Noether 时，$S \rtimes_\varphi T$ 才是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

推论 3.14。设 S 和 T 是半群。那么，直积 $S \times T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当以下条件之一成立:

(1) S 和 T 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的；(2) S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，且没有元素具有局部右单位元；(3) T 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，且没有元素具有局部右单位元。

4. Schützenberger Products

半群的 Sch¨utzenberger 乘积由 Sch¨utzenberger 于 [17] 引入，用于研究有限非周期幺半群。此后，它在半群理论中又找到了许多其他有用的应用；例如参见 [9, 15] 。

对于任意集合 X，令 $\mathcal{P}_f(X)$ 表示 X. 的所有有限子集构成的集合。设 S 和 T 是半群。对于 $s \in S$、$t \in T$ 和 $P \in \mathcal{P}_f(S \times T)$，我们定义

$$sP = \{(sp, q) : (p, q) \in P\} \quad \text{and} \quad Pt = \{(p, qt) : (p, q) \in P\}.$$

S 和 T 的 Sch ¨utzenberger 乘积，记作 $S\Diamond T$，是一个以 $S \times \mathcal{P}_f(S \times T) \times T$ 为底集、乘法定义如下的半群

$$(s_1, P_1, t_1)(s_2, P_2, t_2) = (s_1s_2, s_1P_2 \cup P_1t_2, t_1t_2).$$

注意，直积 $S \times T$ 通过映射 $(s,t) \mapsto (s, \emptyset, t)$ 嵌入到 $S\Diamond T$ 中。与 $S \times T$ 不同，$S\Diamond T$ 中的乘法是非对称的，因此一般而言，$S\Diamond T$ 与 $T\Diamond S$ 不同构。本节的主题是 Sch¨utzenberger 乘积与直积在 $\mathcal{R}$-Noether 性方面的关系。我们从以下引理开始。

引理 4.1. 设 S 和 T 是半群。若 $S\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，则直积 $S \times T$. 也是如此。

证明。注意到 $S \times \{\emptyset\} \times T \cong S \times T$，且 $S \times \{\emptyset\} \times T$是 $S\Diamond T$的子半群，并且 $(S\Diamond T)\backslash(S \times \{\emptyset\} \times T)$ 是 $S\Diamond T$. 的一个理想。因此，根据推论 2.9，如果 $S\Diamond T$是 $\mathcal{R}$-Noetherian，那么就是 $S \times T$. □

令 $\{1\}$ 表示平凡群，显然 $\{1\}\Diamond T$ 同构于半群 $\mathcal{P}_f(T) \times T$，其乘法定义如下：

$$(P_1, t_1)(P_2, t_2) = (P_1 t_2 \cup P_2, t_1 t_2),$$

其中 $Pt = \{pt : p \in P\}$，对于 $P \in \mathcal{P}_f(T)$ 和 $t \in T$.

引理 4.2. 设 S 和 T 是半群，并假设存在元素 $a \in S$，它在 S. 中有一个局部右单位元。如果 $S\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群，则 $\{1\}\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 半群。

证明. 我们证明其逆否命题。设 $U = \mathcal{P}_f(T) \times T \cong \{1\}\Diamond T$，并设 $V = S\Diamond T$。假设 U 不是 $\mathcal{R}$-Noether 半群。那么存在一条无限严格上升链

$$(P_1, b_1) <_U (P_2, b_2) <_U \cdots$$

在 U. 中。于是，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，存在 $(Q_i, t_i) \in U$，使得 $(P_i, b_i) = (P_{i+1}, b_{i+1})(Q_i, t_i)$。设 s 是 a 的一个局部右单位元（因此 $as = a$），并对每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $P'_i = \{a\} \times P_i$ 和 $Q'_i = \{s\} \times Q_i$。于是我们有

$$(a, P'_i, b_i) = (a, P'_{i+1}, b_{i+1})(s, Q'_i, t_i).$$

反设存在 $i \in \mathbb{N}$，使得 $(a, P'_{i+1}, b_{i+1}) \in (a, P'_i, b_i)V^1$.那么，要么 $(a, P'_{i+1}, b_{i+1}) = (a, P'_i, b_i)$，要么存在 $(s', Q, t') \in V$，使得

$$(a, P'_{i+1}, b_{i+1}) = (a, P'_i, b_i)(s', Q, t') = (as', P'_i t' \cup aQ, b_i t').$$

但这样一来，要么 $(P_{i+1}, b_{i+1}) = (P_i, b_i)$，要么令 π_T 表示投影映射 $S \times T \to T$，我们有

$$(P_{i+1}, b_{i+1}) = (P_i, b_i)(Q\pi_T, t')$$

于是 $(P_{i+1}, b_{i+1}) \in (P_i, b_i)U^1$，这就产生了矛盾。因此，我们得到一个无限严格递增链

$$(a, P'_1, b_1) <_V (a, P'_2, b_2) <_V \cdots$$

在 V. 中。因此，V 不是 $\mathcal{R}$-Noetherian。 □

现在我们给出一个 $\mathcal{R}$-Noetherian 半群 T 的例子，使得 $\{1\}\Diamond T$ 不是 $\mathcal{R}$-Noetherian。特别地，引理 4.1 的逆命题不成立（因为 $\{1\} \times T \cong T$）。

例 4.3. 令 T 为例 3.10 中的幺半群 S；也就是说，

$$T = \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\} \sqcup \{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$$

其乘积定义如下

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad a_i x^n = a_{i-n} \quad \text{and} \quad x^n a_j = a_i a_j = a_j.$$

如例 3.10 所示，T 是 $\mathcal{R}$-Noether 的。我们证明 $U = \mathcal{P}_f(T) \times T \cong \{1\}\Diamond T$ 不是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

考虑 $i \in \mathbb{N}$. 。我们有 $(\{a_i\}, a_{i+1}) = (\{a_{i+1}\}, a_{i+2})(\emptyset, x)$。反设对于某个 $(P, t) \in U.$，有 $(\{a_{i+1}\}, a_{i+2}) = (\{a_i\}, a_{i+1})(P, t)$。那么 $a_{i+1} = a_i t$ 且 $a_{i+2} = a_{i+1} t.$ 。不可能有 $t \in \{x\}^*$，否则便有 $a_i t \in \{a_j : j \leq i\}$；同样，不可能有 $t \in \{a_j : j \in \mathbb{Z}\}$，否则便有 $a_i t = a_{i+1} t = t.$ 。因此，不存在这样的 t，这就得到了所需的矛盾。由此可知，我们有一个无限升链

$$(\{a_1\}, a_2) <_U (\{a_2\}, a_3) <_U \cdots$$

在 U 中，因此 U 不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

在本节的其余部分，我们将探讨这样的情形：$S\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，当且仅当 $S \times T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。当 T 是有限的或可消去的时，事实证明情况正是如此。

由于 S 和 T 是 $S\Diamond T$的同态像，由命题 2.11 可得：

引理 4.4. 设 S 和 T 是半群。若 S 和 T 中任意一个是 $\mathcal{R}$-Noetherian，且没有元素具有局部右单位元，则 $S\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

由引理 4.1 和 4.4 以及推论 3.14 可得：

命题 4.5. 设 S 和 T 是半群，其中 S （分别地，T）不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。那么以下条件等价：

(1) $S\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的；(2) $S\times T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的；(3) T （分别地，S）是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，并且没有任何元素具有局部右单位元。

定理 4.6. 设 S 和 T 是半群，其中 T 是有限的。那么以下条件等价：

(1) $S\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的；
(2) $S\times T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的；
(3) S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

证明. (1)⇒(2) 是引理 4.1，而 (2)⇒(3) 可由推论 3.14 得出。

(3)⇒(1). 设 $U=S\Diamond T$，并反设 U 不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。于是存在一个无限严格上升链

$$(a_1,P_1,b_1)<_U(a_2,P_2,b_2)<_U\cdots$$

在 U. 中，对每个 $i\in\mathbb{N}$，存在 $(s_i,Q_i,t_i)\in U$，使得

$$(a_i,P_i,b_i)=(a_{i+1},P_{i+1},b_{i+1})(s_i,Q_i,t_i)=(a_{i+1}s_i,P_{i+1}t_i\cup a_{i+1}Q_i,b_{i+1}t_i),$$

因此 $a_i=a_{i+1}s_i$、$P_i=P_{i+1}t_i\cup a_{i+1}Q_i$ 和 $b_i=b_{i+1}t_i$。因此，我们得到一个升链

$$a_1\leq_S a_2\leq_S\cdots$$

在 S. 中，注意到对每个 $i\in\mathbb{N}$，都有

$$P_i\pi_S=P_{i+1}\pi_S\cup a_{i+1}Q_i\pi_S.$$

由此可得

$$P_1\pi_S\supseteq P_2\pi_S\supseteq\cdots.$$

由于 S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，且不存在由 S的有限子集构成的无限严格递降链，因此存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a_n\,\mathcal{R}_S\,a_N$ 且对所有$n\geq N$. 都有 $P_n\pi_S=P_N\pi_S$。于是，对于每个 $n\geq N$，我们都有 $P_n\subseteq P_N\pi_S\times T$.。由于 P_N 和 T 都是有限的（因此 $P_N\pi_S\times T$也是有限的），可知存在 m、$n\geq N$，满足 $m\leq n-2$，使得 $P_m=P_n$ 且 $b_m=b_n$。由于 $a_m\,\mathcal{R}_S\,a_n$ 且 $a_m\in a_nS$，存在 $s'\in S$ 使得$a_n=a_ms'$. 。于是我们有

$$\begin{aligned}(a_{m+1},P_{m+1},b_{m+1})(s_ms',Q_m,t_m)&=(a_{m+1}s_ms',P_{m+1}t_m\cup a_{m+1}Q_m,b_{m+1}t_m)\\&=(a_ms',P_m,b_m)\\&=(a_n,P_n,b_n).\end{aligned}$$

但这与 $(a_{m+1},P_{m+1},b_{m+1})<_U(a_n,P_n,b_n)$ 矛盾。因此 U 是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

□

定理 4.7. 设 S 和 T 是半群，其中 T 是可消去的。那么 $S\Diamond T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 当且仅当 $S\times T$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

证明.（⇒）。这可由引理 4.1 立即推出。

(⇐) 令 $U = S\Diamond T$，并反设 U 不是 $\mathcal{R}$-Noetherian。于是，根据引理 4.4 和推论 3.14，S 和 T 都是 $\mathcal{R}$-Noetherian，且都含有具有局部右单位元的元素。容易证明，一个消去半群含有具有局部右单位元的元素，当且仅当它是幺半群；因此 T 是幺半群。

现在，存在一条无限严格上升链

$$(a_1, P_1, b_1) <_U (a_2, P_2, b_2) <_U \cdots$$

在 U. 中。对每个 $i \in \mathbb{N}$，存在 $(s_i, Q_i, t_i) \in U$，使得

$$(a_i, P_i, b_i) = (a_{i+1}, P_{i+1}, b_{i+1})(s_i, Q_i, t_i) = (a_{i+1}s_i, P_{i+1}t_i \cup a_{i+1}Q_i, b_{i+1}t_i),$$

因此，$a_i = a_{i+1}s_i$、$P_i = P_{i+1}t_i \cup a_{i+1}Q_i$ 和 $b_i = b_{i+1}t_i$。于是，我们得到上升链

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots \quad \text{and} \quad b_1 \leq_T b_2 \leq_T \cdots$$

分别位于 S 和 T 中。由于 S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N.$，都有 $a_n \mathcal{R}_S a_N$

现在，由 T 的消去性可知，映射

$$P_{i+1} \to P_{i+1}t_i, (x, y) \mapsto (x, yt_i) \ (i \in \mathbb{N})$$

是双射。利用 $P_{i+1}t_i \subseteq P_i$ 这一事实，我们推得有一个链

$$|P_1| \geq |P_2| \geq \cdots$$

由非负整数组成。此链最终必定稳定；不失一般性，我们可假设对所有 $n \geq N.$，都有 $|P_n| = |P_N|$。于是，对所有 $n \geq N.$，都有 $P_n = P_{n+1}t_n$。特别地，我们有

$$P_N\pi_S = P_{N+1}\pi_S = \cdots.$$

令 $|P_N| = m$，并对所有 $n \geq N$，令

$$P_n = \{(u_1, v_{n,1}), \ldots, (u_m, v_{n,m})\}$$

使得 $v_{n,\ j} = v_{n+1,\ j}t_n$ 对每个 $j \in \{1, \ldots, m\}.$ 都成立。于是我们得到升链

$$\begin{array}{ccccc} b_N & \leq_T & b_{N+1} & \leq_T & \cdots \\ v_{N,1} & \leq_T & v_{N+1,1} & \leq_T & \cdots \\ v_{N,2} & \leq_T & v_{N+1,2} & \leq_T & \cdots \\ & & \vdots & & \\ v_{N,m} & \leq_T & v_{N+1,m} & \leq_T & \cdots \end{array}$$

由于 T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，上述链最终都必须稳定。因此，存在 $N' \geq N$，使得对所有 $n \geq N'$，都有 $b_n \mathcal{R}_T b_{N'}$ 且 $v_{n,j} \mathcal{R}_T v_{N',j}$ 对每个 $j \in$ 都成立。$\{1, \ldots, m\}.$ 考虑 $n \geq N'.$。存在 $s'_n \in S$ 使得 $a_{n+1} = a_n s'_n.$。此外，存在 $x_n \in T$ 使得 $b_{n+1} = b_n x_n$，并且对每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$，都存在 $x_{n,j} \in T$，使得 $v_{n+1,j} = v_{n,j}x_{n,j}$。于是 $b_n = b_n x_n t_n$，并且对每个 $j \in \{1, \ldots, m\}.$，都有 $v_{n,j} = v_{n,j}x_{n,j}t_n$。由于 T 是可消去的，因此可得 $x_n t_n = 1$，并且对每个 $j \in \{1, \ldots, m\}.$，都有 $x_{n,j}t_n = 1$。再次利用消去性，我们有

$$x_n = x_{n,1} = \cdots = x_{n,m}.$$

由此可得，对于每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$，$(u_{n,j}, v_{n+1,j}) = (u_{n,j}, v_{n,j}x_n)$，因此 $P_{n+1} = P_n x_n$。于是，我们有

$$(a_{n+1}, P_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, P_n, b_n)(s'_n, \emptyset, x_n).$$

但这与假设 $(a_n, P_n, b_n) <_U (a_{n+1}, P_{n+1}, b_{n+1})$ 矛盾。因此，U 是$\mathcal{R}$-Noetherian。□

由定理 4.7 和推论 3.14 可得:

推论 4.8. 设 S 是一个半群, G 是一个群。那么以下条件等价:

(1) $S\Diamond G$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian;
(2) $S \times G$ 是 $\mathcal{R}$-Noetherian;
(3) S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

5. Free Products

设 S_i $(i \in I)$ 是一族两两不相交的半群。设 S 为所有有限非空序列 $(a_1, \ldots, a_m)$ 的集合, 其中 $a_j \in \bigcup_{i\in I} S_i (1 \leq j \leq m)$, 且每个 a_k 都属于与 a_{k+1} $(1 \leq k \leq m-1)$ 所属半群不同的一个 S_i。在 S 上定义如下乘法:

$$(a_1, \ldots, a_m)(b_1, \ldots, b_n) = \begin{cases} (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) & \text{if } a_m \in S_i, b_1 \in S_j \text{ where } i \neq j, \\ (a_1, \ldots, a_m b_1, \ldots, b_n) & \text{if } a_m, b_1 \in S_i \text{ for some } i \in I. \end{cases}$$

容易验证, 这种乘法满足结合律。在此乘法下的半群 S 称为 S_i $(i \in I)$ 的半群自由积, 记作 $\prod^*\{S_i : i \in I\}$.

现在假设半群 S_i $(i \in I)$ 分别是幺元为 1_i 的幺半群。设 ρ 是 $\prod^*\{S_i : i \in I\}$ 上由下列元素生成的同余

$$\{(1_i, 1_j) : i, j \in I, i \neq j\},$$

并将 ρ 等价类 $\{1_i : i \in I\}$ 记为 1。S_i $(i \in I)$ 的幺半群自由积记为 $\prod_1^*\{S_i : i \in I\}$, 它是一个单位元为 1 的幺半群 $\prod^*\{S_i : i \in I\}/\rho$。

注意, 群的幺半群自由积与群自由积[6,p. 266]一致。

以下结果给出了半群自由积为 $\mathcal{R}$-Noether 的充要条件。

定理 5.1. 设 S_i $(i \in I)$ 是一族两两不相交的半群。那么, 半群自由积 $\prod^*\{S_i : i \in I\}$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的, 当且仅当每个 S_i $(i \in I)$ 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明。令 $S = \prod^*\{S_i : i \in I\}$。注意, 每个 S_i 都通过 $a \mapsto (a)$ 嵌入到 S 中; 我们将 S_i 与其在此映射下的像等同。我们用 $|u|$ 表示 $u \in S$ 的"长度", 即若 $u = (a_1, \ldots, a_m)$, 则 $|u| = m.$。注意, 对于任意 u、$v \in S$, 我们有$|uv| \in \{|u| + |v| - 1, |u| + |v|\}$.

$(\Rightarrow)$ 我们声称, 每个 S_i 都是 S 的 $\mathcal{R}$ 保持子半群, 因此根据命题 2.6, 它是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。事实上, 设 $a \leq_S b$, 其中 a、$b \in S_i$。要么 $a = b$, 要么对于某个 $s \in S.$, $a = bs$。在后一种情况下, 必有 $s \in S_i$, 否则$|bs| = |b| + |s| > 1 = |a|.$。因此, $a \leq_{S_i} b$, 如所需。

$(\Leftarrow)$ 考虑一个升链

$$u_1 \leq_S u_2 \leq_S \cdots$$

在 $S.$ 中。那么, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 都存在 $v_n \in S^1$ 使得 $u_n = u_{n+1}v_n$。 n

$$|u_1| \geq |u_2| \geq \cdots .$$

因此, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于所有 $n \geq N.$, 都有 $|u_n| = |u_N|$。令 $m = |U_N|.$。根据 S 中乘法的定义, u_n $(n \geq N)$ 的前$m-1$项相同, 并且存在 $i \in I$, 使得每个 u_n 的第 m 项都属于 S_i

且 $v_n \in S_i^1 (n \geq N)$。因此，对于每个 $n \geq N$，令 $u_n = (a_1 \ldots, a_{m-1}, b_n)$，其中 $b_n \in S_i$。于是 $b_n = b_{n+1}v_n \in b_{n+1}S_i^1$。因此，我们得到一个升链

$$b_N \leq_{S_i} b_{N+1} \leq_{S_i} \cdots$$

在 S_i 中。由于 S_i 是 $\mathcal{R}$-Noether 幺半群，因此存在 $N' \geq N$，使得对于所有 $n \geq N'.$，都有 $b_n \mathcal{R}_{S_i} b_{N'}$。因此，对于每个 $n \geq N$，存在 $s_n \in S_i^1$，使得 $b_n = b_{N'}s_n$。如果 $s_n = 1$，那么 $b_n = b_{N'}$，从而 $u_n = u_{N'}$。否则，如果 $s_n \in S_i$，我们有

$$u_n = (a_1 \ldots, a_{m-1}, b_{N'}s_n) = (a_1 \ldots, a_{m-1}, b_{N'})(s_n) = u_{N'}(s_n).$$

因此，对于所有 $n \geq N'.$，都有 $u_n \mathcal{R}_S u_{N'}$。于是 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 幺半群。 □

现在我们转而讨论幺半群自由积。首先，我们对这一构造作一些观察。

考虑一个幺半群自由积 $S = \prod_1^* \{S_i : \ i \in I\}.$。我们可以将 $\prod_1^* \{S_i : \ i \in I\}$ 的非单位元视为序列（a_1，.....，a_n）$\in \prod^* \{S_i : \ i \in I\}$，其中每个 a_i 都属于某个 $S_i \backslash \{1_i\}$ [6, p。 266]。更准确地说，取上文给出的 ρ，在每个非单位元 ρ-类中，都存在唯一一个不含来自 $\{1_i : \ i \in I\}$ 的元素的序列；我们称该序列为约化序列。因此，我们将 S 的非单位元与相应的约化序列对应起来。

现在，考虑一个约化序列 $u = (a_1, \cdots, a_n) \in S.$ 令 $a_n \in S_i$，注意到，如果a_n 在 S_i中不是右可逆的，那么对于任意 $v \in S \backslash \{1\}$，我们都有 $|uv| \in \{|u|+|v|-1, |u|+|v|\}$.由此可知，如果 a_n 在 S_i中不是右可逆的，则 u 在其 $\mathcal{R}$-类中具有最小长度（即$|u| = \min\{|w| : \ u \mathcal{R} w\}$）。事实上，逆命题也成立。确实，如果 a_n是右可逆的，则存在 $s \in S_i$使得 $a_n s = 1_i$。于是 $us = (a_1, \ldots, a_{n-1})$，当然，$(a_1, \ldots, a_{n-1})(a_n) = u$，因此 $a_n \mathcal{R} (a_1, \ldots, a_{n-1})$。所以， u在其$\mathcal{R}$-类中不具有最小长度。

定理 5.2. 设 S_i $(i \in I)$ 是一族两两不交的幺半群。那么，幺半群自由积 $\prod_1^* \{S_i : \ i \in I\}$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当每个 S_i $(i \in I)$ 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明. 证明与定理 5.1 的证明基本相同。唯一的区别是，在 $(\Leftarrow)$ 中，我们规定每个 u_i 在其 $\mathcal{R}$-类中具有最小长度，由此可得 $|u_1| \geq |u_2| \geq \cdots$. □

6. Rees Matrix Semigroups

设 S 是一个半群，设 I 和 J 是非空指标集，并设 $P = (p_{ji})$ 是一个 $J \times I$ 矩阵，其元素取自 $S.$。集合 $I \times S \times J$ 在如下定义的乘法下成为一个半群:

$$(i, s, j)(k, t, l) = (i, sp_{jk}t, l),$$

该半群称为关于 P 的、以 S 为底的 Rees 矩阵半群。我们将这个半群记作 $\mathcal{M}(S; I, J; P)$。

我们注意到，群上的 Rees 矩阵半群恰好就是完全单半群（即没有真理想且存在极小左理想和右理想的半群） [6,定理 3.3。1]

现在我们陈述本节的主要结果，给出 Rees 矩阵半群满足 $\mathcal{R}$-Noether 条件的充要条件。

定理 6.1. 设 $T = \mathcal{M}(S; I, J; P)$ 是一个 Rees 矩阵半群。令 U 表示 $S.$ 的右理想 $\{p_{j,i} : j \in J, i \in I\}S$ 。那么，当且仅当每个升链

$$a_1U^1 \subseteq a_2U^1 \subseteq \cdots,$$

其中 $a_i \in S$ 最终稳定。

证明。我们分别证明两个方向的逆否命题。

(⇒) 假设存在一条无限严格上升链

$$a_1U^1 \subsetneq a_2U^1 \subsetneq \cdots,$$

其中 $a_i \in S.$ 。固定 $i \in I$ 和 $j_1 \in J.$ 。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $i_{n+1} \in I$、$j_{n+1} \in J$ 和 $s_n \in S$，使得 $a_n = a_{n+1}p_{j_{n+1},i_{n+1}}s_n$. 。于是

$$(i, a_n, j_n) = (i, a_{n+1}, j_{n+1})(i_{n+1}, s_n, j_n),$$

因此 $(i, a_n, j_n) \leq_T (i, a_{n+1}, j_{n+1})$。反设 $(i, a_n, j_n) \mathcal{R}_T (i, a_{n+1}, j_{n+1})$。不可能有 $(i, a_n, j_n) = (i, a_{n+1}, j_{n+1})$，否则 $a_n = a_{n+1}$。因此，存在某个 $k \in I$ 和 $s \in S$，使得 $(i, a_{n+1}, j_{n+1}) = (i, a_n, j_n)(k, s, j_{n+1})$。但这样一来，$a_{n+1} = a_n(p_{j_n,k}s) \in a_nU$，从而 $a_nU^1 = a_{n+1}U^1$，矛盾。因此，我们得到一条无限严格上升链

$$(i, a_1, j_1) <_T (i, a_2, j_2) <_T \cdots$$

在 T 中，因此 T 不是 $\mathcal{R}$-Noether。

(⇐) 假设 T 不是 $\mathcal{R}$-Noether。那么存在一条无限严格上升链

$$(i_1, a_1, j_1) <_T (i_2, a_2, j_2) <_T \cdots$$

在 $T.$ 中，令 $i = i_1$，我们有

$$i = i_1 = i_2 = \cdots.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $k_n \in I$ 和 $s_n \in S$，使得

$$(i, a_n, j_n) = (i, a_{n+1}, j_{n+1})(k_n, s_n, j_n).$$

因此 $a_n = a_{n+1}p_{j_{n+1},k_n}s_n \in a_{n+1}U$，所以 $a_nU^1 \subseteq a_{n+1}U^1.$。我们不可能有 $a_nU^1 = a_{n+2}U^1$。事实上，若确实如此，则存在 $u \in U^1$ 使得 $a_{n+2} = a_nu$，从而$a_{n+2} = a_{n+1}(p_{j_{n+1},k_n}s_nu)$。但是

$$(i, a_{n+2}, j_{n+2}) = (i, a_{n+1}, j_{n+1})(k_n, s_nu, j_{n+2}) \in (i, a_{n+1}, j_{n+1})T,$$

这与 $(i, a_{n+1}, j_{n+1}) <_T (i, a_{n+2}, j_{n+2})$ 矛盾。因此，我们得到一条无限严格上升链

$$a_1U^1 \subsetneq a_3U^1 \subsetneq a_5U^1 \subsetneq \cdots,$$

如所需。 □

推论 6.2. 设 $T = \mathcal{M}(S; I, J; P)$ 是一个 Rees 矩阵半群。若 S是 $\mathcal{R}$-Noetherian，则 $T.$也是如此

证明. 设 U 如定理 6.1 的陈述所述。反设存在一条无限严格上升链

$$a_1U^1 \subsetneq a_2U^1 \subsetneq \cdots$$

其中 $a_i \in S.$ 那么显然我们有一个升链

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots.$$

由于 S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，因此存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n S^1 = a_N S^1$ 对所有 $n \geq N$. 但此时

$$a_{N+2} \in a_N S \subseteq a_{N+1} U S \subseteq a_{N+1} U,$$

这与 $a_{N+1} U^1 \subsetneq a_{N+2} U^1$ 这一事实矛盾。因此，由定理 6.1，T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。□

推论的逆命题不成立，以下例子对此作了说明 e.

例 6.3. 设 S 是一个非 $\mathcal{R}$-Noetherian 的带零元半群。设 P 为其元素均为 0 的 1×1 矩阵，并令 $T = \mathcal{M}(S; \{1\}, \{1\}; P)$。对任意 $s, s' \in S$，都有 (1, s, 1)(1, s', 1) = (1, $s0s'$, 1) = (1, 0, 1)，显然 (1, 0, 1) 是 T 中的零元，因此 T 是一个零乘半群。因此，由推论 2.2，T 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

推论 6.4. 设 $T = \mathcal{M}(S; I, J; P)$ 是一个 Rees 矩阵半群，且 S 的每个元素在 $U = \{p_{j,i}$ 中都有局部右单位元：$j \in J, i \in I\} S$. 那么 T 是 $\mathcal{R}$-Noether 有限的，当且仅当 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 有限的。

证明. 任取 $a \in S.$。根据假设，我们有 $a \in aU$，因此 $aS^1 \subseteq aUS^1 \subseteq aU^1$.。显然，$aU^1 \subseteq aS^1$，因此 $aS^1 = aU^1$。由定理 6.1 可直接得到结论。□

推论 6.5. 设 $T = \mathcal{M}(S; I, J; P)$ 是一个 Rees 矩阵半群，其中 S 是一个幺半群，并假设存在 $i \in I$ 和 $j \in J$，使得 $p_{j,\ i}$ 是右可逆的。那么 T 是 $\mathcal{R}$-Noether 有限的，当且仅当 S 是 $\mathcal{R}$-Noether 有限的。

证明。我们有 $1_S \in p_{j,\ i} S$，并且 1_S 显然是$S.$ 中每个元素的局部右单位元。因此，根据推论 6.4，S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。□

现在我们考虑 Rees 矩阵构造的一种变体。设 S 是一个带零元 0 的半群，设 I 和 J 是非空指标集，并设 $P = (p_{ji})$ 是一个元素取自 $S.$ 的 $J \times I$ 矩阵。令 $T' = \mathcal{M}(S; I, J; P)$，并令 T 表示 Rees 商 T'/Q，其中 Q 是 T' 的理想 $I \times \{0\} \times J$。半群 T 称为关于 P、以 S 为底的带零元的 Rees 矩阵半群，记作 $\mathcal{M}^0(S; I, J; P)$。

群上的带零元的 Rees 矩阵半群恰好就是完全零单半群 [6, 定理 3.2.3]。

推论 6.6. 设 $T = \mathcal{M}^0(S; I, J; P)$ 是一个带零元的 Rees 矩阵半群。令 U 表示 $\{p_{j,i} : j \in J, i \in I\} S$ 在 $S.$ 中的右理想。那么以下条件等价：

(1) T 是 $\mathcal{R}$-Noether；(2) $\mathcal{M}(S; I, J; P)$ 是 $\mathcal{R}$-Noether；(3) 每条升链

$$a_1 U^1 \subseteq a_2 U^1 \subseteq \cdots,$$

其中 $a_i \in S$ 最终稳定。

证明. (1)⇔(2). 设 $T' = \mathcal{M}(S; I, J; P)$ 和 $Q = I \times \{0\} \times J$，使得 $T = T'/Q.$。由于 Q 是 $\mathcal{R}$-Noether，且 Q 的每个元素在 Q 中都有局部右单位元，由命题 2.13 可知，T 是 $\mathcal{R}$-Noether，当且仅当 T' 是 $\mathcal{R}$-Noether。

由定理 6.1，(2) 与 (3) 等价。 □

与带零元构造的里斯矩阵相关的是布兰特扩张，其定义如下。设 S 是一个半群，I 是一个非空集合。S 关于 I 的布兰特扩张记为 $\mathcal{B}(S, I)$，它是以 $(I \times S \times I) \cup \{0\}$ 为宇宙、乘法定义为

$$(i, s, j)(k, t, l) = \begin{cases} (i, st, l) & \text{if } j = k \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且对于所有 $x \in (I \times S \times I) \cup \{0\}$. 都有 $0x = x0 = 0$。注意，如果 S 是一个幺半群，那么 $\mathcal{B}(S, I)$ 同构于 $\mathcal{M}^0(S;\ I, I;\ P)$，其中 P 是 $I \times I$ 单位矩阵。群的布兰特扩张恰好是完全 0- 单逆半群 [6, 定理 5.1。8]

定理6.7. 设 S 是一个半群， I 是一个非空集合。那么，当且仅当 S 是 $\mathcal{R}$-诺特的， $\mathcal{B}(S, I)$ 是 $\mathcal{R}$-诺特的。

证明. ($\Rightarrow$) 容易证明，对于任意 $i \in I$， S 同构于 $\mathcal{B}(S, I)$ 的子半群 $S_i = \{i\} \times S \times \{i\}$，且 S_i 是 $\mathcal{B}(S, I)$ 中的右幺。因此，由推论 2.8， S 是 $\mathcal{R}$-诺特的。

($\Leftarrow$) 令 $T = \mathcal{B}(S^1, I)$，则有 $T \cong \mathcal{M}^0(S^1;\ I, I;\ P)$，其中 P 是 $I \times I$ 单位矩阵。由于 S 是 $\mathcal{R}$-诺特的，由推论 6.2 可知， $\mathcal{M}(S^1;\ I, I;\ P)$ 是 $\mathcal{R}$-诺特的。因此，由推论 6.6， T 是 $\mathcal{R}$- 诺特的。由于 $\mathcal{B}(S, I)$ 是 T 的一个理想，由命题 2.5 可知，它也是 $\mathcal{R}$- 诺特的。□

7. Bruck-Reilly扩张

设 M 为一个幺半群，其单位元为 1_M，且 $\theta :\ M \to M$ 为一个自同态。我们在集合 $\mathbb{N}_0 \times M \times \mathbb{N}_0$ 上定义二元运算如下:

$$(i, a, j)(p, b, q) = (i - j + t, (a\theta^{t-j})(b\theta^{t-p}), q - p + t),$$

其中 $t =$ 为 max(j, p)， θ^0 表示 M. 上的恒等映射。在此运算下，集合$\mathbb{N}_0 \times M \times \mathbb{N}_0$是一个幺半群，其单位元为 $(0, 1_M, 0)$。记作 $BR(M, \theta)$，称为由 θ确定的 M 的 Bruck-Reilly扩张。

这一构造的特殊情形由 Bruck [2] 和 Reilly [16],提出，因而得名；其一般形式由 Munn 于 [13]给出。

定理 7.1. 设 M 为一个幺半群，且 $\theta : M \to M$ 为一个幺半群同态。那么， $BR(M, \theta)$ 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当 M 是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明。($\Rightarrow$) 令 $N = BR(M, \theta)$。不难证明， M 同构于 N 的子幺半群 $\{0\} \times M \times \{0\}$，且该子幺半群在 N. 中是右幺的。因此， M 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，这是推论 2.8 的结论。

($\Leftarrow$) 考虑一个升链

$$u_1 \leq_N u_2 \leq_N \cdots$$

在 N 中，其中 $u_k = (i_k, a_k, j_k)$。于是，对每个 $k \in \mathbb{N}$，存在 (p_k, m_k, q_k)，使得 $u_k = u_{k+1}(p_k, m_k, q_k)$。令 $t_k =$ max(j_{k+1}, p_k)，则有

$$i_k = i_{k+1} - j_{k+1} + t_k.$$

由于 $t_k \geq j_{k+1}$，可得 $i_k \geq i_{k+1}$. 因此有

$$i_1 \geq i_2 \geq \cdots,$$

从而存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $i_N = i_{N+1} = \cdots$.。令 $i = i_N$.。则对于 $k \geq N$，有 $i = i - j_{k+1} + t_k$，所以 $t_k = j_{k+1}$.。因此，对于每个 $k \geq N$，有

$$a_k = a_{k+1}(m_k\theta^{j_{k+1}-p_k}) \in a_{k+1}M.$$

因此，我们得到一个升链

$$a_N \leq_M a_{N+1} \leq_M \cdots$$

在 M. 中，由于 M 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，因此存在 $N' \geq N$，使得对所有 $p \geq N'$. 都有 $a_p \mathcal{R}_M a_{N'}$。因此，对于每个 $p \geq n$，都存在 $m'_p \in M$，使得 $a_p = a_{N'}m'_p$.。接着

$$u_p = (i, a_p, j_p) = (i, a_{N'}, j_{N'})(j_{N'}, m'_p, j_p) = u_{N'}(j_{N'}, m'_p, j_p) \in u_{N'}N.$$

我们得出结论，对所有 $p \geq N'$. 都有 $u_p \mathcal{R}_N u_{N'}$。证明至此完成。 □

推论 7.2. 每个满足 $\mathcal{R}$-Noether 条件的半群 S 都嵌入到一个满足 $\mathcal{R}$-Noether 条件的单半群中。

证明. 令 $\theta: S^1 \to S^1$ 为如下自同态：对所有 $s \in S^1$, $s\theta = 1$；并令 $M = BR(S^1, \theta)$。根据命题 5.6.6(1), M 是单半群。幺半群 S^1 满足$\mathcal{R}$-Noether 条件，因为 S 满足该条件，因此根据定理 7.1, M 满足 $\mathcal{R}$-Noether 条件。我们已经注意到, S^1 与 $\{0\} \times S^1 \times \{0\} \subseteq M$同构；显然, S嵌入到 S^1中，因此可得, S 嵌入到 M. □

8. Semilattices of Semigroups

设 Y 是一个半格，且 $(S_\alpha)_{\alpha \in Y}$ 是由Y. 索引的一族两两不交的半群。若 $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ 是一个半群，并且对所有 α, $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$，则称 S 为半群半格，记作 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$。此外，若每个 S_α都是幺半群，则称 S 为幺半群半格。

现在令 $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$，并假设对每个满足 $\alpha \geq \beta$ 的 α、$\beta \in Y$，存在一个同态 $\phi_{\alpha,\ \beta}: S_\alpha \to S_\beta$. 此外，假设:

- 对每个 $\alpha \in Y$，同态 $\phi_{\alpha,\ \alpha}$ 是 S_α 上的恒等映射;
- 对每个 α, β, $\gamma \in Y$满足 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$，有 $\phi_{\alpha,\beta}\, \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$.

对于 $a \in S_\alpha$ 和 $b \in S_\beta$，我们定义

$$ab = (a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta}).$$

在此乘法下, S 是一个半群的半格。在这种情况下，我们称 S 为半群的强半格，并记作 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha, \phi_{\alpha,\ \beta})$。

我们首先在半群的半格这一一般情形下，考察具有 $\mathcal{R}$-Noether 性质的行为。注意，半格是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当它在偏序下满足元素的升链条件。

定义 8.1. 设 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$。称一条链

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$$

in Y是（相对于 S）由 $\mathcal{R}$见证的，若存在 $a_i \in S_{\alpha_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ 使得

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots.$$

注意，若 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$ 且 Y是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，那么显然，每条相对于 S 由 $\mathcal{R}$见证的 Y 中的链最终都会稳定。然而，逆命题一般并不成立。

引理 8.2. 设 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$。若 S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的，那么 Y 中每条由 $\mathcal{R}$见证的链最终都会稳定，并且每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

证明. 考虑一条由 $\mathcal{R}$见证的链

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$$

在 Y. 中，存在 $a_i \in S_{\alpha_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ 使得

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots.$$

由于 S 是 $\mathcal{R}$-Noether，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$. 都有 $a_n \mathcal{R}_S a_N$。这意味着对于所有 $n \geq N$，都有 $\alpha_n = \alpha_N$，如所要求。

现在令 $\alpha \in Y$，并令 $I = \bigcup_{\beta \leq \alpha} S_\beta$.。于是 I 是 S 的理想，因此由命题 2.5 可知它是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。由于 $I \setminus S_\alpha$ 是 I 的理想，由推论 2.9 可得 S_α 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。□

下面的例子表明，即使 Y 是有限的且每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的， $\mathcal{S}(Y, S_\alpha)$ 也未必是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。特别地，引理 8.2 的逆命题不成立。

例 8.3. 令 S 为（一个）自由单生成半群 $\{x\}^+$ 与集合 $N = \{a_i$ 的不交并：$i \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. 在 S 上定义乘法，将 $\{x\}^+$ 上的乘法扩展为

$$x^i a_j = a_j x^i = a_{j-i} \text{ and } x^i 0 = 0x^i = uv = 0 \ (i \in \mathbb{N}, j \in Z, u, v \in N).$$

该乘法使 N 成为一个零乘半群。容易证明，在此乘法下， S 是一个以结构半格 $Y = \{1 > 0\}$ 为结构、相应分量为 $\{x\}^+$ 和 N. 的半群半格。显然， S 和 N 都是 $\mathcal{R}$-诺特的。另一方面，很容易看出我们有一个无限严格上升链

$$a_0 <_S a_1 <_S \cdots$$

在 S 中，因此 S 不是 $\mathcal{R}$-诺特的。

下面的结果给出了一个条件，在该条件下，引理 8.2 的逆命题成立。为此，回忆一下，如果一个半群满足关于右理想的升链条件，则称其为弱右诺特的。

命题 8.4. 设 $S = \mathcal{S}$（Y、 S_α），并假设对于每个 $\alpha \in Y$，半群 S_α 不包含 $\mathcal{R}_{S_\alpha}$-类的无限反链。则以下命题等价：

(1) S 是 $\mathcal{R}$-诺特的；(2) Y 中的每条由 $\mathcal{R}$见证的链最终都稳定，且每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-诺特的；(3) Y 中的每条由 $\mathcal{R}$见证的链最终都稳定，且每个 S_α 都是弱右诺特的。

证明。(1)⇒(2)由引理 8.2 得出。

(2)⇒(1)。假设 Y 中的每条由 $\mathcal{R}$见证的链最终都稳定，但 S不是 $\mathcal{R}$-诺特的。我们需要证明某个 S_α 不是 $\mathcal{R}$-诺特的。

由于 S 不是 $\mathcal{R}$-诺特的，因此存在一条无限严格上升链

$$a_1 <_S a_2 <_S \cdots$$

在 S.中。令 $a_i \in S_{\alpha_i}$，并且对于 $i < j$，令$b_{i,j} \in S_{\beta_{i,j}}$满足$a_i = a_j b_{i,j}$；那么$\alpha_i = \alpha_j \beta_{i,j}$。现在，我们有一条由 $\mathcal{R}$见证的链

$$\alpha_1 \leq_Y \alpha_2 \leq_Y \cdots$$

在 Y. 中。根据假设，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n \geq N$. 都有 $\alpha_n = \alpha_N$。然后，令$\alpha = \alpha_N$，我们有$\alpha\beta_{i,j} = \alpha$，对于所有 i、满足 $N \leq i < j$.的 $j \in \mathbb{N}$ 均成立

考虑集合 $\{a_n : n \geq N\}$ S_α 中的元素。根据假设，该集合在 S_α 上的 $\mathcal{R}$ 预序下不可能形成无限反链。此外，对于任意 $N \leq i < j$，我们也不可能有 $a_j \leq_{S_\alpha} a_i$，因为这将与 $a_i <_S a_j$ 的事实相矛盾。由此可知，存在 i_1、 $j_1 \geq N$，满足 $i_1 < j_1$，使得 $a_{i_1} <_{S_\alpha} a_{j_1}$。现在，要么 $i_1 = N$，要么

$$a_N = a_{i_1} b_{N,i_1} \in a_{j_1}(S_\alpha b_{N,i_1}) \subseteq a_{j_1} S_\alpha,$$

因此 $a_N <_{S_\alpha} a_{j_1}$. 现在考虑无限集合 $\{a_n : n \geq j_1\}$. 通过与上述相同的论证，存在 $j_2 > j_1$ 使得 $a_{j_1} <_{S_\alpha} a_{j_2}$。如此继续，我们得到一个无限严格上升链

$$a_N <_{S_\alpha} a_{j_1} <_{S_\alpha} a_{j_2} <_{S_\alpha} \cdots$$

在 S_α 中，如所要求。

(2)⇔(3)由以下事实得出：半群是弱右诺特的，当且仅当它是 $\mathcal{R}$-诺特的，且不包含 $\mathcal{R}$类的无限反链 [11, 定理 3.2]。□

该　　引理 8.2 的逆命题在每个 S_α 在 $S.$中均为 $\mathcal{R}$-保持的情况下也成立

定理 8.5. 设 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$，其中每个 S_α 在 $S.$ 中都是 $\mathcal{R}$-保持的。那么，当且仅当 Y 中每条由 $\mathcal{R}$ 见证的链最终稳定，且每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的，S 才是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明. 正向蕴含由引理 8.2 立即得到。对于逆命题，考虑一条升链

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots$$

在 $S.$ 中。设 $a_i \in S_{\alpha_i}.$。那么

$$\alpha_1 \leq_Y \alpha_2 \leq_Y \cdots$$

是 $Y.$ 中一条由 $\mathcal{R}$ 见证的链。根据假设，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N.$，都有 $\alpha_n = \alpha_N$。设 $\alpha = \alpha_N.$。那么对所有 $n \geq N.$，都有 $a_n \in S_\alpha$。由于 S_α 在 S 中是 $\mathcal{R}$-保持的，因此我们有

$$a_N \leq_{S_\alpha} a_{N+1} \leq_{S_\alpha} \cdots.$$

由于 S_α 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，存在 $N' \geq N$，使得对所有 $n \geq N'$，都有 $a_n \mathcal{R}_{S_\alpha} a_{N'}$。那么对所有 $n \geq N'$，都有 $a_n \mathcal{R}_S a_{N'}$。证明完毕。□

接下来我们考察一些情形，其中有 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$，且所有 S_α 都在 $S.$ 中保持 $\mathcal{R}$。第一种情形是每个 S_α 都具有这样的性质：每个元素都有一个局部右单位元（在 S_α 中）。回顾一下，如果每个 S_α 都是幺半群或正则半群，那么这一条件成立。

命题 8.6. 设 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$，其中对于每个 $\alpha \in Y$，S_α 的每个元素在 S_α 中都有一个局部右单位元。那么，当且仅当 Y 中每条由 $\mathcal{R}$ 见证的链最终稳定，且每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的，S 才是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明. 我们证明每个 S_α 都保持 $\mathcal{R}$，于是结论由定理 8.5 得出。设 $\alpha \in Y$，并设 $a, b \in S_\alpha$ 满足 $a \leq_S b.$。那么对于某个 $s \in S^1.$，有 $a = bs$。若 $s = 1$，则 $a = b.$。假设 $s \in S.$。那么对于某个 $\beta \in Y$，有 $s \in S_\beta$，并且我们有 $\alpha\beta = \alpha.$。设 $c \in S_\alpha$ 是 b 的一个局部右单位元，因此 $b = bc.$。于是我们有

$$a = bs = (bc)s = b(cs) \in bS_\alpha,$$

因此 $a \leq_{S_\alpha} b$，如所要求。 □

若一个半群是群的并，则称它为完全正则半群。一个半群完全正则，当且仅当它是完全单半群的半格 [6,定理 4.1.3]。根据推论 2.2，完全单半群显然是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。因此，由命题 8.6 可得：

推论 8.7. 设 S 是一个完全正则半群，且 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$ 是它分解为完全单半群的半格后的表示。那么，S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，当且仅当 Y 中的每条 $\mathcal{R}$-见证链最终都会稳定。

非空集合 X上的自由半格（记作 F_X）定义为 X 的所有有限非空子集在并集运算下构成的集合。显然，对任意$U, V \in F_X$，$U \leq_{F_X} V$当且仅当 $V \subseteq U.$。由此可知，F_X是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。X 上的自由带和 X 上的自由完全正则半群都是半群的半格，其结构半格为 F_X；分别参见 [6, 第 120] 页和 [3, 推论 4.3],。因此，由推论 8.7 可得：

推论 8.8. 设 X 为非空集合。那么以下半群都是 $\mathcal{R}$-Noetherian：X 上的自由半格、X 上的自由带，以及 $X.$上的自由完全正则半群

推论 8.9. 设 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha)$ 是一个幺半群半格，并且对所有 α， $1_\alpha 1_\beta = 1_{\alpha\beta}$ $\beta \in Y$（其中 1_α 表示 S_α 的单位元）。那么， S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian，当且仅当 Y 和所有 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noetherian。

证明。根据命题 8.6，只需证明 Y 的每个升链都关于 $S.$ 是 $\mathcal{R}$-见证的。这可由以下事实得出：如果 $\alpha \leq \beta$ ，那么 $1_\alpha = 1_{\beta\alpha} = 1_\beta 1_\alpha$，因此 $1_\alpha \leq 1_\beta$。□

克利福德半群是逆完全正则半群，或者等价地说，是群的（强）半格。由推论 8.9 可得：

推论 8.10。设 S 是一个克利福德半群，且 $S = \mathcal{S}(Y, G_\alpha)$ 是它分解成群半格的形式。那么，S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当 Y 是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

现在我们转而讨论半群的强半格。

命题 8.11。设 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$。那么， S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当 Y 中每个 $\mathcal{R}$-见证链最终都稳定，且每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明。我们证明每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-保持的，结论便可由定理 8.5 得出。因此，设 $\alpha \in Y$，并设 $a, b \in S_\alpha$ 满足 $a \leq_S b.$。于是，对于某个 $s \in S^1.$，有 $a = bs$。如果 $s = 1$，那么 $a = b.$。假设 $s \in S.$。于是，对于某个 $\beta \in Y$，有 $s \in S_\beta$，并且我们有 $\alpha\beta = \alpha$。因此，我们有 $a = b(s\phi_{\beta,\alpha}) \in bS_\alpha$，从而 $a \leq_{S_\alpha} b$，如所需。□

推论 8.12。设 $S = \mathcal{S}(Y, S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$，其中，对每个 $\alpha \in Y$， S_α 都没有具有局部右单位元的元素。那么， S 是 $\mathcal{R}$-Noether 的，当且仅当每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的。

证明。由命题 8.11，只需证明：若每个 S_α 都是 $\mathcal{R}$-Noether 的，则 Y 中每条由 $\mathcal{R}$ 见证的链最终都会稳定。因此，考虑一条由 $\mathcal{R}$ 见证的链

$$\alpha_1 \leq_Y \alpha_2 \leq_Y \cdots .$$

那么存在 $a_i \in S_{\alpha_i}$ $(i \in \mathbb{N})$，使得

$$a_1 \leq_S a_2 \leq_S \cdots .$$

根据 S 中乘积的定义，对每个 $i \in \mathbb{N}$ ，我们有 $a_i = a_{i+1}$ 或者 $a_i = (a_{i+1}\phi_{\alpha_{i+1},\alpha_i})s_i$ ，其中某个 $s_i \in S_{\alpha_i}$。如果 $a_i = a_{i+1}$ ，那么 $a_i\phi_{\alpha_i,\alpha_1} = a_{i+1}\phi_{\alpha_{i+1},\alpha_1}$；如果 $a_i = (a_{i+1}\phi_{\alpha_{i+1},\alpha_i})s_i$ ，那么

$$a_i\phi_{\alpha_i,\alpha_1} = (a_{i+1}\phi_{\alpha_{i+1},\alpha_1})(s_i\phi_{\alpha_i,\alpha_1}).$$

因此，令 $T = S_{\alpha_1}$，我们得到一个升链

$$a_1 = a_1\phi_{\alpha_1,\alpha_1} \leq_T a_2\phi_{\alpha_2,\alpha_1} \leq_T \cdots$$

在 $T.$ 中。由于 T 是 $\mathcal{R}$-平凡的（因为它没有具有局部右单位元的元素），且是 $\mathcal{R}$-诺特的，因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $a_n\phi_{\alpha_n,\alpha_1} = a_N\phi_{\alpha_N,\alpha_1}$ 对所有 $n \geq N.$ 都成立。我们断言，对所有 $n \geq N.$，都有 $\alpha_n = \alpha_N$。事实上，假设并非如此。那么存在 $n \geq N$，使得 $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$，从而 $a_n \neq a_{n+1}.$。于是我们有

$$a_n\phi_{\alpha_n,\alpha_1} = (a_{n+1}\phi_{\alpha_{n+1},\alpha_1})(s_n\phi_{\alpha_n,\alpha_1}).$$

但是

$$a_N\phi_{\alpha_N,\alpha_1} = (a_N\phi_{\alpha_N,\alpha_1})(s_n\phi_{\alpha_n,\alpha_1}) \in (a_N\phi_{\alpha_N,\alpha_1})T,$$

这与 T 中没有局部右单位元的元素这一事实矛盾。证明至此完成。□

我们用一个半群的强半格的例子结束本节：该半群半格是$\mathcal{R}$-Noetherian 的，但其结构半格不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。

例 8.13. 令 Y为半格（$\mathbb{N}$, min）。那么 Y不是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。对每个$i \in \mathbb{N}$，令 S_i 为半格 $\{i\} \times \mathbb{N}$，其乘法为

$$(i, j)(i, k) = \big(i, \max(j, k)\big) \text{ for all } j, k \in \mathbb{N}.$$

那么，每个 S_i都同构于 (ℕ, max)，这显然是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。对于每个 i，若 $j \in \mathbb{N}$满足 $i \geq j$，定义一个映射

$$\phi_{i,j} : S_i \to S_j, (i, n) \mapsto (j, n + i - j).$$

对于任意 m、$n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}\big((i, m)(i, n)\big)\phi_{i,j} &= \big(i, \max(m, n)\big)\phi_{i,j} = \big(j, \max(m, n) + i - j\big)\\ &= \big(j, \max(m + i - j, n + i - j)\big) = (j, m + i - j)(j, n + i - j)\\ &= \big((j, m)\phi_{i,j}\big)\big((j, n)\phi_{i,j}\big),\end{aligned}$$

因此，$\phi_{i,\ j}$ 是一个同态。令 S 为半格 $\mathcal{S}(Y, S_i, \phi_{i,\ j})$ 的强半格。那么 $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，并且对于任意 (i, m)、(j, n)，$\in S$我们有

$$\begin{aligned}(i, m)(j, n) &= \big((i, m)\phi_{i,\min(i,j)}\big)\big((j, n)\phi_{j,\min(i,j)}\big)\\ &= \big(\min(i, j), m + i - \min(i, j)\big)\big(\min(i, j), n + j - \min(i, j)\big)\\ &= \big(\min(i, j), \max(m + i - \min(i, j), n + j - \min(i, j))\big).\end{aligned}$$

容易看出这个乘积是交换的。因此，由于 S 的每个元素都是幂等元，我们有 S 是一个半格。我们断言 S 是 $\mathcal{R}$-Noetherian 的。于是，考虑升链

$$(i_1, n_1) \leq_S (i_2, n_2) \leq_S \cdots$$

S.中。由于 S是一个半格，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有 (i_j, n_j) =$(i_{j+1}, n_{j+1})(i_j, n_j)$。因此，我们有 i_j =min(i_{j+1}, i_j) 和 n_j =max$(i_{j+1} + n_{j+1} - i_j, n_j)$。由此可得

$$i_1 \leq i_2 \leq \cdots \qquad \text{and} \qquad n_1 \geq n_2 \geq \cdots,$$

并且如果 $i_j < i_{j+1}$ 那么 $n_j > n_{j+1}$。由此可知，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $m \geq N$都有 $i_m = i_N$和 $n_m = n_N$，因此 (i_m, n_m) =(i_N, n_N) 对所有 $m \geq N$均成立，证毕。

Funding

本研究得到了工程与物理科学研究委员会[EP/V002953/1]的支持。

Acknowledgements

作者感谢审稿人认真审阅本文并提出许多有益的建议，尤其是那些促成定理 8.5和命题 8.6 的建议。

References

[1] K. Aubert. 关于交换半群的理想理论。《斯堪的纳维亚数学》，1:39-54，1953。[2] R. Bruck.《二元系统概论》，Springer，柏林，1958。[3] A. Clifford. 集合上的自由完全正则半群。《代数学杂志》，59:434-451，1979。[4] A. Clifford 和 G. Preston.《半群的代数理论：第2卷》。美国数学学会，1967。[5] Bijan Davvaz 和 Zahra Nazemian. 交换幺半群上的链条件。《半群论坛》，100:732-742。[6] J. Howie.《半群理论基础》。牛津大学出版社，1995。[7] E. Jespers 和 J. Okni´nski. 诺特半群代数。《代数学杂志》，218:543-564，1999。

[8] Z. Liu. 广义幂级数环的主理想升链条件。《通信代数》，32:3305-3314，2004。[9] S. Margolis 和 J. E. Pin. 扩张、自由逆半群与 Sch¨utzenberger 乘积。《代数学杂志》，110:298-305，1987。[10] R. Mazurek 和 M. Ziembowski. 斜广义幂级数环的主左理想或右理想升链条件。《代数学杂志》，322:983-994，2009。[11] C. Miller. 右理想有限生成的半群。《爱丁堡数学学会会刊》64:848-883，2021。[12] C. Miller. 半群右理想上的升链条件。《通信代数》，已接收。[13] W. Munn. 关于单逆半群。《半群论坛》，1:63-74，1970。[14] E. Noether.《环域中的理想理论》。《数学年刊》，83:24-66，1921。[15] J. E. Pin. 连接积的代数工具。《理论计算机科学》，292:317–342，2003。[16] N. Reilly. 双单 ω-半群。《格拉斯哥数学协会会刊》，7:160-167，1966。[17] M. Sch¨utzenberger. 关于仅含平凡子群的有限幺半群。《信息与控制》，8:190-194，1965。[18] N. Stopar. 半群半直积的主左理想和右理想升链条件。《半群论坛》，85:322-336，2012。