arXiv:2302.01865v1 [math.NT] 3 Feb 2023

# 赫尔维茨ζ函数的一个加权级数

MATTHEW FOX 和 CHAITANYA KARAMCHEDU

Abstract. 本文证明，对于所有满足 $\Re(s) > a+2$ 的 $a \in \mathbb{N}$、 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ 和 $s \in \mathbb{C}$，赫尔维茨ζ函数的（交错）加权级数

$$\sum_{k\geq 1} (\pm 1)^k (k+x)^a \zeta(s, k+x),$$

可化为赫尔维茨（勒奇）ζ函数的有限线性组合。这一结果适用于 Marichal 和 Zena¨ıdi 关于高阶凸函数中博尔-莫勒鲁普定理类似定理的理论。

## 1. Introduction

博尔-莫勒鲁普定理证明，满足 $f(x+1) = xf(x)$ 的对数凸函数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 只有伽马函数的正倍常数函数，$\Gamma(x)$。该定理等价但采用加法形式的表述如下，其中我们用 $\Delta$ 表示单位步长前向差分算子 $\Delta : f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$。

定理 1（博尔-莫勒鲁普定理 [3, 4]）。差分方程$\Delta f(x) = \ln x$的所有凸解 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 均具有如下形式： $f(x) = c + \ln \Gamma(x)$，其中 $c \in \mathbb{R}$为某个常数。

自然会想到，对于不同的差分方程以及其他函数性质 $\mathfrak{p}$（如单调性或高阶凸性），也可以考虑该定理的类似结论。事实上，给定函数性质 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 以及满足 $\mathfrak{p}$的函数 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，显然，按照博尔-莫勒鲁普定理的思路，可以提出这样的问题：是否存在函数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，满足 $\mathfrak{q}$和差分方程 $\Delta f(x) = g(x)$，对所有 $x \in \mathbb{R}_+$均成立？若存在，则它是否在相差一个加性常数的意义下唯一？若是， $g$ 是否完全确定 $f$？

Krull 最先研究了这类关于最终凸（凹）函数的问题；所谓最终凸（凹）函数，是指在无穷远邻域内凸（凹）的函数。事实上，Krull 证明，对于任意满足下列条件的最终凸（凹）函数 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，对所有整数 $p > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \Delta^p g(x) = 0, \tag{1}$$

存在一个唯一的、最终为凹（凸）的解 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 满足差分方程$\Delta f(x) = g(x)$，模去一个加性常数 [8, 9]。此外，Krull 还证明了$g$ 完全决定了 $f$，甚至给出了精确的函数关系。后来，Webster 独立地确立了 Krull 结果的乘法版本 [13, 14]。

尽管 Krull 和 Webster 的工作将博尔-莫勒鲁普定理推广到了更广泛的一类函数，但渐近条件 (1) 极其严格，甚至连简单函数 $g(x) = x \ln x$，或类似的函数 $g(x) = \ln \Gamma(x)$ 都不满足（见定理 1）。因此，人们自然会寻求放宽这一条件。

在他们的专著中， [11], Marichal 和 Zena¨ıdi 正是这样做的，因此将博尔-莫勒鲁普定理推广到了更广泛的一类函数。具体而言，他们的结果涵盖了对每个 $p \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ 都最终为实值 $p$-凸（$p$-凹）的函数，其中 $\mathbb{N}$ 包括 0。这类“高阶”凸函数和凹函数自然出现在牛顿插值理论 [5] 中；其定义如下。

定义 1. 固定 $p \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$，并设 $I \subseteq \mathbb{R}_+$ 为开凸集。函数 $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 在 $I$ 上为 $p$-凸（$p$-凹），当且仅当对于 $I$ 中任意由 $p+2$ 个点组成的系统 $x_0 < x_1 < \cdots < x_{p+1}$，$f$ 在 $x_0$、$x_1$、……、$x_{p+1}$ 处的差商为非负（非正）[10, 11]。因此，1-凸（1-凹）函数就是通常意义上的凸（凹）函数，0-凸（0-凹）函数是弱单调递增（递减）函数，而 $-1$-凸（$-1$-凹）函数是非负（非正）函数。此外，我们称 $f$ 最终为 $p$-凸（最终为 $p$-凹），当且仅当存在一个无穷远凸邻域 $I \subseteq \mathbb{R}_+$，使得 $f$ 在其上为 $p$-凸（$p$-凹）。

现在我们陈述 Marichal 和 Zenaïdi 关于高阶凸函数与凹函数的 Bohr-Mollerup 定理类比定理。

定理2（Marichal-Zenaïdi [11]）。固定 $p \in \mathbb{N}$，并假设函数 $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 最终是 $p$-凸（$p$-凹）的，且具有如下渐近性质：数列 $n \mapsto \Delta^p g(n)$ 收敛于零。那么，差分方程 $\Delta f(x) = g(x)$ 存在唯一一个最终为 $p$-凹（$p$-凸）的解 $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，其中解按加性常数 $c \in \mathbb{R}$ 取模。此外，$g$ 通过方程唯一确定 $f$

$$f(x) = c - g(x) + \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \big(g(k) - g(k+x)\big) + \sum_{j=1}^{p} \binom{x}{j} \Delta^{j-1} g(n) \right]. \tag{2}$$

在阐述其理论时，Marichal 和 Zenaïdi 汇编了多种重要函数的定理 1 类比定理，包括伽马函数的衍生函数，如多伽马函数、$q$-伽马函数和 Barnes $G$ 函数；此外，还有一些颇为不同的函数，如卡塔兰数函数、广义斯蒂尔切斯常数和赫尔维茨ζ函数。所有这些类比定理均由定理2推出。

特别地，对于赫尔维茨ζ函数

$$\zeta(s,x) \coloneqq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+x)^s}$$

当 $s > 1$ 为实数时，他们证明了以下唯一性结果。

命题1（Marichal-Zenaïdi [11]）。对于所有实数 $s > 1$，满足差分方程 $\Delta f_s(x) = -x^{-s}$ 的所有最终单调（即 0-凸或 0-凹）解 $f_s\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，均具有如下形式：$f_s(x) = c_s + \zeta(s,x)$，其中 $c_s \in \mathbb{R}$ 为某个常数。

结合函数的最终单调性这一性质，他们还证明了一个互反结果：他们不再将 $\zeta(s,x)$ 刻画为某个特定差分方程的唯一最终单调解，而是刻画满足该差分方程且最终单调的唯一解 $f_s$，该方程的取值为 $\zeta(s,x)$，即 $\Delta f_s(x) = \zeta(s,x)$。

命题2（Marichal-Zenaïdi [11]）。对于所有实数 $s > 2$，满足差分方程 $\Delta f_s(x) = \zeta(s,x)$ 的所有最终单调解 $f_s\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 均具有如下形式：

$$f_s(x) = c_s + \zeta(s-1) - \sum_{k\geq 0} \zeta(s, k+x) \tag{3}$$

其中 $c_s \in \mathbb{R}$ 为某个常数。

顺便一提，由于对每个实数 $s > 1$，赫尔维茨ζ函数 $\zeta(s,x)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上关于 $x$ 是凸函数，因此不难证明命题2的以下推广。

命题3. 对于所有实数 $s > 2$ 和 $p \in \{0, 1\}$，差分方程 $\Delta f_s(x) = \zeta(s,x)$ 的所有最终为 $p$-凹的解 $f_s\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 均具有形式 (3)。

作为命题1和命题2的推论，Marichal 和 Zenaïdi 推导出大量涉及 Hurwitz ζ 函数的有趣恒等式，包括

$$\sum_{k\geq 1}\zeta(s,k)=\zeta(s-1). \tag{4}$$

我们注意到，尽管 Marichal 和 Zenaïdi 在假设 $s>2$ 为实数的情况下得到公式（4），但他们的恒等式很容易推广到连通开集 $\Omega_\epsilon:=\{s\in\mathbb{C}:\ \Re(s)>2+\epsilon\}$ 上的复数 $s$，其中任意固定的 $\epsilon>0$ 均适用。事实上，由于 $\zeta(s-1)$ 和部分和 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\zeta(s,k):\ n\in\mathbb{N}\right\}$ 对任意固定的 $\epsilon>0$ 都在 $\Omega_\epsilon$ 上全纯，并且

$$\sup_{s\in\Omega_\epsilon}\left|\sum_{k=1}^{n}\zeta(s,k)\right|<\sum_{k=1}^{n}\zeta(2+\epsilon,k) \tag{5}$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$，由公式（4）和魏尔斯特拉斯M判别法可知，$\sum_{k\geq 1}\zeta(s,k)$ 在 $\Omega_\epsilon$ 上一致收敛。因此，$\sum_{k\geq 1}\zeta(s,k)$ 在 $\Omega_\epsilon$ 上全纯，故根据恒等定理，对于任意固定的 $\epsilon>0$，公式（4）对所有 $s\in\Omega_\epsilon$ 均成立。

当然，我们自然会想知道这一论证能否涵盖 $\epsilon=0$。然而，若公式（5）中没有更强的界，$\sum_{k\geq 1}\zeta(s,k)$ 的全纯性便难以直接推广。不过，在 [12],中，Paris 通过利用 $\zeta(s,x)$ 的积分表示，明确计算公式（4）左端，从而绕过了这一问题。最终，他证明公式（4）对所有 $\epsilon\geq 0$ 在 $\Omega_\epsilon$ 上均成立，正如所期望的那样。在同一篇论文中

[12]，Paris 还研究了更g一般的级数 g一般级数

$$\sum_{k\geq 1}(\pm 1)^k k^a\zeta(s,k+x) \tag{6}$$

对于 $a\in\mathbb{N}$、$x\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ 和 $s\in\mathbb{C}$，在非交错（+）情形下，$\Re(s)>a+2$；在交错（−）情形下，$\Re(s)>a+1$。

在非交错情形下，取 $a=0$ 时，Paris 的求和（6）出现在公式（3）中，尤其决定了命题2和命题3中解 $f_s(x)$ 对 $x$ 的函数依赖关系。沿用通过积分表示明确计算求和的同一方法，Paris 利用 $\zeta(s,x)$，对非交错情形下的 $x=0$ 和 $a\in\{0,1,2,3\}$，以及交错情形下的 $x=0$ 和 $a\in\{0,1,2\}$，精确求解了公式（6）。在每种计算中，他都发现该级数等于若干赫尔维茨 ζ 函数的有限线性组合。这不禁让人想知道，对于所有 $a\in\mathbb{N}$ 和 $x\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}$，这种规律是否普遍成立。

为了解决这个问题，我们考虑 Paris 求和的以下推广，

$$\mathcal{Z}_\pm(s,a,x):=\sum_{k\geq 1}(\pm 1)^k(k+x)^a\zeta(s,k+x), \tag{7}$$

其中 $a\in\mathbb{N}$、$x\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ 和 $s\in\mathbb{C}$ 满足 $\Re(s)>a+2$。请注意，只要我们的求和绝对收敛，它就涵盖了 Paris 求和 (6)，因为在这种情况下，表达式 $(k+x)^a$ 可以展开为 Paris 求和的有限组合，而这些求和又可以递归地化简。因此，若能得到 $\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)$ 的闭式表达式，就能得到式 (6) 的闭式表达式。

本文旨在对所有 $a\in\mathbb{N}$、$x\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ 和 $s\in\mathbb{C}$，在非交错和交错两种情形下，精确求解 $\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)$，其中 $\Re(s)>a+2$。特别地，遵循 Paris 针对 (6) 所观察到的规律，我们证明，根据是否交错，$\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)$ 总能表示为有限个 Hurwitz ζ 函数或 Lerch ζ 函数的组合。记 $B_a$ 为第 $a$ 个伯努利数（采用约定 $B_1=+\frac{1}{2}$），$B_a(x)$ 为第 $a$ 个伯努利多项式，$E_a$ 为第 $a$ 个欧拉数，$E_a(x)$ 为第 $a$ 个欧拉多项式，$L(\lambda,s,x)$ 为 Lerch ζ 函数，

$$L(\lambda,s,x):=\sum_{n\geq 0}\frac{\exp(2\pi i\lambda n)}{(n+x)^s}, \tag{8}$$

我们的主要结果如下。

定理 3. 若 $a \in \mathbb{N}$ 且 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(s) > a+2$，则对所有 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$，

$$\mathcal{Z}_+(s,a,x) = -\frac{1}{a+1}B_{a+1}(x+1)\zeta(s,x+1) + \frac{1}{a+1}\sum_{j=0}^{a+1}\binom{a+1}{j}B_j\zeta(s-a+j-1,x+1).$$

定理 4. 若 $a \in \mathbb{N}$ 且 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(s) > a+2$，则对所有 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$，

$$\mathcal{Z}_-(s,a,x) = -\frac{1}{2}E_a(x+1)\zeta(s,x+1) - \sum_{j=0}^{a}\sum_{\ell=0}^{a-j}\frac{E_j}{2^{a-\ell+1}}\binom{a}{j}\binom{a-j}{\ell}L(-1,s-\ell,x+1).$$

注意，尽管当 $\Re(s) > a+1$ 时，$\mathcal{Z}_-(s,a,x)$ 收敛，但我们的工作尚未解决如何在 $s \in \mathbb{C}$ 且满足 $\Re(s) \in (a+1, a+2]$ 的情况下简化 $\mathcal{Z}_-(s,a,x)$。

有趣的是，若 $x = 0$，则 $\mathcal{Z}_+(s,a,x)$ 的形式会大大简化；具体而言，它可以化为黎曼ζ函数的有限线性组合：

$$\mathcal{Z}_+(s,a,0) = \sum_{k\geq 1}k^a\zeta(s,k) = \frac{1}{a+1}\sum_{j=0}^{a}\binom{a+1}{j}B_j\zeta(s-a+j-1).$$

值得注意的是，这个恒等式以及更一般的非交错和 $\mathcal{Z}_+(s,a,x)$ 与 Marichal 和 Zenaïdi 关于博尔-莫勒鲁普定理类似物的理论有关，下一条命题将对此予以说明。

命题 4. 设 $Q(x) = \omega_0 + \omega_1 x + \cdots + \omega_\ell x^\ell$ 是一个具有 $\omega_\ell \neq 0$ 的实系数、$\ell$ 次多项式。如果 $\omega_\ell > 0$ ($\omega_\ell < 0$)，那么对于所有实数 $s > \ell + 2$ 和 $p \in \{0,1\}$，所有最终为 $p$-凹（$p$-凸）的解 $f_{s,\,Q} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 到差分方程 $\Delta f_{s,\,Q}(x) = Q(x)\zeta(s,x)$ 都具有如下形式

$$f_{s,Q}(x) = c_{s,Q} - \sum_{a=0}^{\ell}\omega_a x^a\zeta(s,x) + \sum_{a=0}^{\ell}\omega_a\mathcal{Z}_+(s,a,0) - \sum_{a=0}^{\ell}\omega_a\mathcal{Z}_+(s,a,x)$$

对于某个常数 $c_{s,\,Q} \in \mathbb{R}$。

当然，Paris 求和还有许多更一般的推广，其中尤其包括

$$\sum_{k\geq 1}f(k,x)\zeta(s,g(k,x)) \tag{9}$$

对于函数 $f, g : \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。正如 Paris 所指出的，[12], 这类求和在离散意义上类似于如下积分：$\int_\Omega f(\alpha)\zeta(s,g(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha$；这些积分在 [6, 7] 中针对 $\Omega = (0,1)$ 以及各种 $f$ 和 $g$进行了广泛研究。虽然我们的结果在 $f$ 为一个 $k+x$ 且 $g(k,x) = k+x$ 时解决了（9），但对于更一般的 $f$和 $g$，至少无法明显得到结论。

## 2. Proofs of Results

本节将证明命题 3 和 4，以及定理 3 和 4。这些结果依赖于若干中间引理。请注意，引理 1、4 和 5 都显而易见，因此我们有意略去它们的证明。

引理1. 对于所有满足 $\Re(s) > 1$ 的 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \mathbb{C}$，赫尔维茨ζ函数满足移位性质

$$\zeta(s,k+x) \coloneqq \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+k+x)^s} = \sum_{n\geq k}\frac{1}{(n+x)^s}.$$

以下是命题2和命题3的推广。特别地，取 $a = 0$ 和 $\omega = 1$即可得到命题3。

引理2. 固定 $\omega \in \mathbb{R}$，使得 $\omega \neq 0$。若 $\omega > 0$ （$\omega < 0$），则对所有实数 $s > \ell + 2$ 和$p \in \{0,1\}$，差分方程$\Delta f_{s,\ a}$（$x$）$= \omega x^a \zeta$（$s,x$）的所有最终为 $p$-凹（$p$-凸）的解$f_{s,\ a}$：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 均具有以下形式

$$f_{s,a}(x) = c_{s,a} - \omega x^a \zeta(s,x) + \omega \mathcal{Z}_+(s,a,0) - \omega \mathcal{Z}_+(s,a,x) \tag{10}$$

对于某个常数 $c_{s,\ a} \in \mathbb{R}$。

证明。固定 $a \in \mathbb{N}$、$s > a+2$ 和 $p \in \{0,1\}$，并假设 $\omega > 0$ ($\omega < 0$)。那么，函数$\omega x^a \zeta(s,x)$ 在 $x$ 上关于 $\mathbb{R}_+$ 是 $p$-凸（$p$-凹）的。此外，由引理1和界 $s > a+2$，数列 $n \mapsto \omega \Delta^p \big(n^a \zeta(s,n)\big)$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于零。因此，若 $g_{s,\ a}(x) := \omega x^a \zeta(s,x)$，则满足定理2的前提。故由方程（2）可知，方程（10）构成差分方程$\Delta f_{s,\ a}(x) = g_{s,\ a}(x)$ 的唯一最终 $p$-凹（$p$-凸）解 $f_{s,\ a}$，证毕。■

注意，对于一个实系数的、次数为$\ell$ 的多项式 $Q(x) = \omega_0 + \omega_1 x + \cdots + \omega_\ell x^\ell$，若满足 $\omega_\ell \neq 0$，且 $s > 1$和 $\omega_\ell > 0\,(\omega_\ell < 0)$，则对所有 $p \in \{0,1\}$，函数 $Q(x)\zeta(s,x)$ 关于 $x$ 在 $\mathbb{R}_+$上最终是 $p$-凸（$p$-凹）的。因此，对于固定的 $s > \ell + 2$ 及所有 $p \in \{0,1\}$，定理2和引理2表明，差分方程 $\Delta f_{s,Q}(x) = Q(x)\zeta(s,x)$ 的唯一最终 $p$-凹（$p$-凸）解 $f_{s,Q}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 具有如下形式：$f_{s,Q}(x) = \sum_{a=0}^{\ell} f_{s,a}(x)$。这就是命题 4。

引理3。若 $a \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(s) > a+2$，则对所有 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$，

$$\operatorname{abs}(\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)) := \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0}\left|\frac{(k+x)^a}{(n+k+x)^s}\right| < \infty.$$

证明。固定 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$。当 $a \geq 0$ 时，$\operatorname{abs}(\mathcal{Z}_\pm(s,a,x))$ 满足

$$\operatorname{abs}(\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)) \leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+k+x)^{\Re(s)-a}}.$$

此外，由于 $\Re(s) > a+2$，存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\Re(s) - a \geq 2 + \epsilon$。因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{abs}(\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)) &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+k+x)^{2+\epsilon}} \\ &= \sum_{k\geq 1}\zeta(2+\epsilon, k+x).\end{aligned}$$

由于对于每个 $k \geq 1$，$x \geq 0$, $\zeta(2+\epsilon, k+x) \leq \zeta(2+\epsilon, k)$。因此，

$$\operatorname{abs}(\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)) \leq \sum_{k\geq 1}\zeta(2+\epsilon,k) = \zeta(1+\epsilon),$$

其中等式由公式（4）得出。由于 $\epsilon > 0$，右端是有限的。 ■

因此，在引理3的条件下，我们可以任意交换 $\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)$ 中的各项，包括来自不同赫尔维茨 ζ 函数的项。特别地，引理 1 和引理 3 表明，$\mathcal{Z}_\pm(s,a,x)$ 满足

$$\mathcal{Z}_\pm(s,a,x) = \sum_{k\geq 1}(\pm 1)^k \sum_{n\geq k}\frac{(k+x)^a}{(n+x)^s} \tag{11}$$

当 $a \in \mathbb{N}$、$x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ 和 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(s) > a+2$时。

引理 4. 伯努利多项式满足 $B_a(x+1) = ax^{a-1} + B_a(x)$，对所有 $a \in \mathbb{N}$ 和$x \in \mathbb{R}$ [1, 2]均成立。因此，若 $k \in \mathbb{N}$，则

$$B_a(k+x+1) = B_a(x) + a\sum_{j=0}^{k}(j+x)^{a-1}.$$

引理 5. 欧拉多项式满足 $E_a(x+1) = 2x^a - E_a(x)$，对所有 $a \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathbb{R}$ [1] 均成立。因此，若 $k \in \mathbb{N}$，则

$$(-1)^k E_a(k+x+1) = E_a(x+1) + 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^j(j+x)^a.$$

引理 6. 固定 $a \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \mathbb{C}$，使得 $\Re(s) > a+2$。那么，对所有 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$，伯努利多项式的狄利克雷-赫尔维茨级数满足

$$\sum_{k\geq 1}\frac{B_a(k+x)}{(k+x)^s} = -a\zeta(s-a+1, x+1) + \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}B_j\zeta(s-a+j, x+1).$$

证明. 固定 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$。当 $B_1 = +\frac{1}{2}$ 时，伯努利多项式满足 [1, 2]

$$B_a(x) = -ax^{a-1} + \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}B_j x^{a-j}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\frac{B_a(k+x)}{(k+x)^s} &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+x)^s}\left(-a(k+x)^{a-1} + \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}B_j(k+x)^{a-j}\right)\\ &= -a\zeta(s-a+1, x+1) + \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}B_j\zeta(s-a+j, x+1),\end{aligned}$$

其中，之所以可以进行重排，是因为 $\Re(s) > a+2$，所以关于伯努利多项式的级数绝对收敛。■

引理 7. 固定满足 $\Re(s) > a+2$ 的 $a \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \mathbb{C}$。那么，对于所有 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$，欧拉多项式的交错狄利克雷-赫尔维茨级数满足

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}E_a(k+x+1)}{(k+x)^s} = \sum_{j=0}^{a}\sum_{\ell=0}^{a-j}\frac{E_j}{2^{a-\ell}}\binom{a}{j}\binom{a-j}{\ell}L(-1, s-\ell, x+1).$$

证明。欧拉多项式满足 [1]

$$\begin{aligned}E_a(x+1) &= \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\frac{E_j}{2^j}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{a-j}\\ &= \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\frac{E_j}{2^j}\sum_{\ell=0}^{a-j}\binom{a-j}{\ell}\frac{x^\ell}{2^{a-j-\ell}},\end{aligned}$$

其中第二行的等式由二项式定理得出。因此，

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}E_a(k+x+1)}{(k+x)^s}=\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+x)^s}\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\frac{E_j}{2^j}\sum_{\ell=0}^{a-j}\binom{a-j}{\ell}\frac{(k+x)^\ell}{2^{a-j-\ell}}$$
$$=\sum_{j=0}^{a}\sum_{\ell=0}^{a-j}\frac{E_j}{2^{a-\ell}}\binom{a}{j}\binom{a-j}{\ell}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+x)^{s-\ell}},$$

由于 $\Re(s) > a+2$，第二行中的重排是合理的，因此关于欧拉多项式的级数绝对收敛。利用 Lerch ζ 函数的定义 (8)，不难证明关于 $k$ 的内部求和等于 $L(-1, s-\ell, x+1)$，正如所需。■

定理 3 的证明。固定 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$，并考虑量 $B_a(x+1)\zeta(s,x+1) + a\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)$，其中 $a-1 \in \mathbb{N}$ 且 $\Re(s) > a+1$。引理 3 的前提均满足，因此我们可以任意重排各项。特别地，由公式 (11)，

$$B_a(x+1)\zeta(s,x+1)+a\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)=\sum_{k\geq 1}\frac{B_a(x+1)}{(k+x)^s}+\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k}\frac{a(k+x)^{a-1}}{(n+x)^s}.$$

合并分母相同的项，得到

$$B_a(x+1)\zeta(s,x+1)+a\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)=\sum_{k\geq 1}\frac{B_a(x+1)+a\sum_{j=1}^{k}(j+x)^{a-1}}{(k+x)^s}.$$

于是，根据伯努利多项式递推关系 $B_a(x+1) = B_a(x) + ax^{a-1}$，

$$B_a(x+1)\zeta(s,x+1)+a\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)=\sum_{k\geq 1}\frac{B_a(x)+a\sum_{j=0}^{k}(j+x)^{a-1}}{(k+x)^s}.$$

根据引理 4，我们将分子识别为 $B_a(k+x+1)$。因此，

$$B_a(x+1)\zeta(s,x+1)+a\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)=\sum_{k\geq 1}\frac{B_a(k+x+1)}{(k+x)^s},$$

w经过进一步应用递推关系 $B_a(x+1) = B_a(x) + ax^{a-1}$，可得 s

$$B_a(x+1)\zeta(s,x+1)+a\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)=a\zeta(s-a+1,x+1)+\sum_{k\geq 1}\frac{B_a(k+x)}{(k+x)^s}.$$

因此，$\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)$ 与伯努利多项式的狄利克雷-赫尔维茨级数有关。由此根据引理 6 可得

$$\mathcal{Z}_+(s,a-1,x)=-\frac{1}{a}B_a(x+1)\zeta(s,x+1)+\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}B_j\zeta(s-a+j,x+1).$$

取 $a \to a+1$ 即得定理 3。 ■

定理 4 的证明。固定 $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ 并考虑量 $E_a(x+1)\zeta(s,x+1) - 2\mathcal{Z}_-(s,a,x)$，其中 $a \in \mathbb{N}$ 且 $\Re(s) > a+2$。引理3的前提成立，因此我们可以任意调整各项的顺序。特别地，由等式 (11) 可得，

$$E_a(x+1)\zeta(s,x+1)-2\mathcal{Z}_-(s,a,x)=\sum_{k\geq 1}\frac{E_a(x+1)}{(k+x)^s}-\sum_{k\geq 1}(\pm 1)^k\sum_{n\geq k}\frac{2(k+x)^a}{(n+x)^s}.$$

合并分母相同的各项，得到

$$E_a(x+1)\zeta(s,x+1) - 2\mathcal{Z}_-(s,a,x) = \sum_{k\geq 1} \frac{E_a(x+1) + 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}(j+x)^a}{(k+x)^s}.$$

根据引理 5，分子中的各项与欧拉多项式有关。特别地，

$$E_a(x+1) + 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}(j+x)^a = (-1)^{k+1}E_a(k+x+1) + 2E_a(x+1).$$

因此，

$$E_a(x+1)\zeta(s,x+1) - 2\mathcal{Z}_-(s,a,x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}E_a(k+x+1)}{(k+x)^s} + 2E_a(x+1)\zeta(s,x+1).$$

因此， $\mathcal{Z}_-(s,a,x)$ 与欧拉多项式的交错狄利克雷-赫尔维茨级数有关。由引理 7 可得

$$\mathcal{Z}_-(s,a,x) = -\frac{1}{2}E_a(x+1)\zeta(s,x+1) - \sum_{j=0}^{a}\sum_{\ell=0}^{a-j}\frac{E_j}{2^{a-\ell+1}}\binom{a}{j}\binom{a-j}{\ell}L(-1,s-\ell,x+1),$$

如所要求。 ■

## References

1. M. Abramowitz 和 I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas graphs and mathematical tables*, , , , 1965 Dover, 纽约, 。2. T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer, 纽约, 1976年。3. E. Artin, *The gamma function*, Holt, Rinehart & Winston, 奥斯汀, 1964年。4. H. Bohr 和 J. Mollerup, *Lærebog i kompleks analyse*, 第 III 卷, Gjellerups Forlag, 哥本哈根, 1922年。5. C. de Boor, *A practical guide to splines*, 修订版, Springer-Verlag, 纽约, 2001年。6. O. Espinosa 和 V. H. Moll, *On some integrals involving the Hurwitz zeta function: Part 1*, 《Ramanujan 杂志》6（2002年）, 159–188。7., *On some integrals involving the Hurwitz zeta function: Part 2*, 《Ramanujan 杂志》6（2002年）, 449–468。8. W. Krull, *Bemerkungen zur differenzengleichung $g(x+1) - g(x) = \phi(x)$*, 《数学通讯》1（1948年）, 365–376。9., *Bemerkungen zur differenzengleichung $g(x+1) - g(x) = \phi(x)$. II.*, 《数学通讯》2（1949年）, 251–262。10. M. Kuczma, *An introdution to the theory of functional equations and inequalities*, 第二版, Birkh¨auser-Verlag, 柏林, 2009年。11. J. L. Marichal 和 N. Zena¨ıdi, *A generalization of Bohr-Mollerup's theorem for higher order convex functions*, Springer, Cham, 瑞士, 2022年。12. R. B. Paris, *A note on some infinite sums of Hurwitz zeta functions*, arXiv:2104.00957v2（2021年）, 1–9。13. R. Webster, *Log-convex solutions to the functional equation $f(x+1) = g(x)f(x)$: $\Gamma$-type functions*, 《数学分析及其应用杂志》209（1997年）, 605–623。14., *On the Bohr-Mollerup-Artin characterization of the gamma function*, 《数值分析、逼近理论评论》26（1997年）, 249–258。

Department of Physics, University of California, Santa Barbara
*Email address*: msfox@ucsb.edu

Department of Computer Science, University of Maryland
*Email address*: cdkaram@umd.edu