arXiv:2302.01869v1 [math-ph] 3 Feb 2023

周期场中量子游走的指数衰减速度界

¨HOUSSAM ABDUL-RAHMAN 和 GUNTER STOLZ

Abstract. 我们研究一类存在局域场时、与 CMV酉矩阵相关联的离散时间一维量子游走。这类量子游走由透射参数 $t \in [0,1]$参数化。我们证明，对于 t 的某个取值范围，通过引入周期长度足够大的周期局域场，可以使相应的渐近速度任意小。特别地，我们证明了 n-周期量子游走的速度上界，该上界随周期长度 n呈指数衰减。因此，当 n 较大时，即使经过大量量子游走步数，仍会观察到类局域化效应。

Contents

1. 引言 12. 一般设置 33. 主要结果 63.1. 无场速度界 63.2. 周期局域场存在时的速度界 74. 平均速度子序列的一个上界 114.1. 由以下对象生成的量子游走 n 酉算子 124.2. 算子的初等对称多项式 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 134.3. 按以下对象展开 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 多项式的一些性质 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 14 ℓ 和 m 的证明 3.1 25参考文献 25 5. 定理的证明 4.3 175.1. 对称 175.2. 关于以下对象的归纳论证 21附录 A. 辅助引理 23附录 B. 引理

1. Introduction

受经典随机游走在科学各领域广泛应用的启发——从搜索算法到股票市场研究——作为随机游走量子类比的量子行走，受到不同学科的广泛关注。在许多情形下，量子行走已被证明优于其经典对应方法。例如，研究表明，量子行走相较于许多经典算法可实现指数级加速，参见 [50, 46, 41]。如今，量子行走已成为量子计算、信息、模拟和通信中的关键操作。已有研究将其建模为量子计算机的通用量子门 [10, 37],以及量子模拟 [48, 52]。量子行走也是研究和理解量子动力学的相对简单的模型，参见物理学文献中的例子 [1, 7, 38, 47] ，以及数学分析方面的例子 [4, 6, 45, 21]。此外，近期高度可控的实验实现

日期：2023年2月6日。

光子量子行走正逐渐兴起，有望推动动力学量子行走模拟和多种量子技术的发展，例如，[49, 17, 28, 44, 34]。近来，量子行走还被用于探测凝聚态物理中的拓扑序 [29, 54, 30, 55]。

在已于不同背景下提出并研究的多种量子行走中，本文考虑存在局域场时在 $\mathbb{Z}$ 上的一类离散时间量子行走。设一名具有两个内部自由度（例如自旋态）的量子行走者位于 $\mathbb{Z}$ 上。单位时间步动力学由依次施行的三个酉变换过程构成：首先更新内部自由度，接着根据内部状态在 $\mathbb{Z}$ 上平移一步，随后行走者获得某个相位。前两个步骤，即内部自由度的更新和条件平移，对应于一个带有参数 $t \in [0,1]$ 的酉算子 U_t，我们将该参数称为透射参数。它决定行走者的速度，范围从 $t = 0$ 时无输运，到 $t = 1$ 时平凡的弹道输运。量子行走的最后一步是施加相位，一般对应于幺正对角算子 $\mathcal{D} = \mathrm{diag}(e^{i\omega_j})$，$j \in \mathbb{Z}$, $\omega_j \in \mathbb{R}$，可视为一种“局域场”；在我们的主要结果中，该局域场取为周期性的。因此，通常而言，我们的模型具有如下形式

$$U_{t,\mathcal{D}} = \mathcal{D}U_t. \tag{1}$$

在本工作中，无场量子行走 U_t 具有与所谓的 CMV 矩阵相同的五对角结构（参见例如 [8, 51]），见下文（8），这类矩阵在单位圆上的正交多项式理论中引起了广泛关注，因为它们是雅可比矩阵的酉算子类比。过去十年间，人们研究了不同 CMV 矩阵的谱性质，参见例如 [18, 12, 36]。形式为（1）的模型最初见于物理学文献，例如 [7], 其数学研究则始于 [6]。

众所周知，$\mathbb{Z}$ 上量子行走的平移不变性通常会带来显著的输运，参见例如 [32], [3, 定理 4], 或 [13, 定理 9.1]。我们的无场量子行走 U_t 在$t \in$ $(0,1]$, 的情形下即是如此（见第 2 节）。在无序情形中，当局域场 $\mathcal{D}$所确定的相位取为独立同分布随机变量 θ_k^ω时，形式为 (1) 的模型被视为安德森模型的类比，其中 U_t 和 $\mathcal{D}_\omega = \mathrm{diag}\{\theta_k^\omega\}$ 分别起到离散拉普拉斯算子和随机势的作用。因此，这类模型被称为幺正安德森模型；在不同参数区域中，已证明其具有局域化结果，参见例如 [25, 26, 22, 23, 21, 27, 20, 2]。光子在光子晶格中的实现 [33, 40]，使量子行走的安德森局域化现象开始受到物理学界越来越多的关注。这是因为光子的生成和操控具有可控性；并且与许多其他量子技术不同，许多光子系统可以在室温条件下理想运行。因此，局域量子行走如今有望用于量子信息的安全传输 [35]以及安全量子存储器 [9]。

物理学文献中最近对量子行走的实现强调，量子行走的类局域化效应也可以在无无序区域中观察到，例如，[15, 43, 16, 11, 42]。例如，有研究提出利用准周期阵列波导实现局域化量子行走，见 [42], ；最近，人们还在一种具有芯环的光纤中实现了这一点，这些芯环由准周期斐波那契序列构成，见 [43]。

在周期情形下，人们通常认为（某些情况下也已有严格证明），周期量子系统会表现出非平凡的弹道量子输运 [5, 14]。例如， [14]证明了如下结论：若 J 是一个周期分块雅可比矩阵，且 X 是位置算子，那么$\frac{1}{t}e^{iJt}Xe^{-iJt}\psi \to Q\psi$ 当 $t \to \infty$ 时， $\psi \in D(X)$，并且 Q 是一个有界自伴算子，且其核为 $\ker(Q) = 0$，可解释为速度算符。在 [5]中，证明了连续周期薛定谔算子在任意维数下也有类似结果。这里，我们要探讨能否选择一种周期局域场（即周期势的对应物），使得量子行走（1）具有

任意小的速度。直观上不难看出，参见引理 3.1：若将透射参数 t（非对角元素）在 U_t 中选得任意小，就会出现这种情况。若以周期方式改变局域场 $\mathcal{D}$，同时保持透射参数 t 固定，结果则不那么显而易见，这正是本文关注的重点。

我们的主要结果定理 3.3 表明，对于任意固定的透射参数 $t \in (0, 1/4)$，通过选择 n-周期场为 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n = \mathrm{diag}(e^{2\pi i j/n})\ j \in \mathbb{Z}$，并使 n 充分大，可以让量子行走 $U_{t,\mathcal{D}}$ 的速度任意小。具体而言，当透射参数处于范围 $t \in (0, 1/4)$ 时，我们证明了量子速度的上界会随局域场 $\mathcal{D}_n$ 的周期 n 呈指数衰减。也就是说，即使经过很长时间，在周期较大的周期场中仍能观察到类局域化效应。此外，我们对该量子行走在周期局域场 $\mathcal{D}_n$ 中的动力学进行模拟后，提出了猜想 3.4：对于范围 $t \in (0, 1)$ 内的任意固定透射参数 t，即使存在周期局域场，也可以使速度任意小。

在第 2 节中，我们介绍存在局域场时这一类量子行走的一般设定，并突出说明模型在有无局域场时的一些基本性质和行为。在第 3 节中，我们证明，在任意局域场中，渐近量子速度都不可能超过 t，见引理 3.1；随后，我们定义并讨论一类周期局域场，在这类场中，量子行走的速度可以任意小，见定理 3.3。定理 3.3 的证明分为两步：我们先证明平均速度的一个子序列满足该结论，然后利用引理 3.1 中的线性界进行插值论证。第一步是关键，其证明将在后续各节中展开，具体如下：行走者经过 N 次量子行走后的期望位置由 $(U_{t,\mathcal{D}})^N$刻画，这是我们研究渐近速度的核心对象。第 4 节说明，$(U_{t,\mathcal{D}})^N$ 可以写成若干带宽递增的带状算子之和，这些算子用所谓的非交换算子的初等对称多项式表示（例如见 [39, 53]）。它们由两个参数 $0 \le m \le \ell \le n$刻画，其中 $\ell + m$ 是相应算子的初等对称多项式可能达到的最大带宽。定理 4.3 给出了证明中的关键部分，并表明，如果将局域场取为下文 (27) 中定义的周期场 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n$，那么所有与带宽 $< n$ 相关的算子的初等对称多项式都会退化为恒等算子的常数倍。这是 n-周期场 $\mathcal{D}_n$产生相消干涉的结果。第 5 节通过对 ℓ 和 m进行归纳，证明定理 4.3。

2. General setup

我们考虑在 $\mathbb{Z}$ 上存在局域场时，具有两个内部自由度（例如自旋-1/2）的行走者的一类量子行走。因此，希尔伯特空间为

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}) \cong \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2), \tag{2}$$

其中 $\mathbb{C}^2$ =张成 $\{|\uparrow\rangle,\ |\downarrow\rangle\}$ 称为硬币（或自旋）空间。这里我们使用以下记号

$$|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } |\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

并用 $\{|n\rangle;\ \ n \in \mathbb{Z}\}$ 表示 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的标准基。我们通过如下定义来排列 $\mathcal{H}$ 的基

$$\delta_{2j} := |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle \text{ and } \delta_{2j+1} := |\downarrow\rangle \otimes |j\rangle, \text{ for all } j \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

单步运动由以下连续操作构成。首先，通过一种称为硬币算子的酉变换来更新内部自旋。接着，使用酉条件平移（或简称平移）算子，根据行走者的内部自由度状态对 $\mathbb{Z}$进行平移。然后，通过对角酉变换施加局域场

。更确切地说，我们考虑由$t \in [0,1]$参数化、定义在 $\mathcal{H}$上的量子行走族，其单步运动由以下酉算子给出

$$U_{t,\mathcal{D}} = \mathcal{D}U_t, \text{ where } U_t = V_t W_t. \tag{5}$$

这里，对于固定的 $t \in [0,1]$，硬币算子 W_t 和平移算子 V_t 定义如下

$$W_t := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} r & t \\ -t & r \end{pmatrix}_{2j,2j+1} \text{ and } V_t := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} r & t \\ -t & r \end{pmatrix}_{2j-1,2j}, \tag{6}$$

其中$r = \sqrt{1-t^2}$。在 W_t和 V_t中的（6）里的下标 $2j$，$2j+1$，$2j-1$，$2j$分别对应 $\bigoplus_j \operatorname{span}\{\delta_{2j}, \delta_{2j+1}\}$和 $\bigoplus_j \operatorname{span}\{\delta_{2j-1}, \delta_{2j}\}$对 $\mathcal{H}$的分解。也就是说， W_t是由从偶数下标开始的相同 2×2正交矩阵构成的直和，而 V_t是一个分块对角算子，其相同的块从奇数下标开始。

$\mathcal{D}$ 在（5）中表示一个一般的局域场，它是一个对角酉算子

$$\mathcal{D}\delta_j = e^{i\theta_j}\delta_j, \tag{7}$$

其相位为 $\theta_j \in \mathbb{T} = \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$，其中 $j \in \mathbb{Z}$。我们的主要结果——定理 3.3 假设周期局域场属于（7）所示的特定类别，其定义见下文（27）。该模型源自物理学文献，例如参见 [7], ；随后它在数学上得到了研究，例如参见 [21, 27, 19, 20, 24]，研究主要旨在回答关于（动力学）局域化的问题，其中 θ_j（7）中的相位取为独立同分布随机变量。

我们的模型对应于依次应用以下酉算子$U_{t,\ \mathcal{D}}$，见式（5）。这里有以下几点说明:

- 式（ U_t 5）中的无场单步量子行走具有五对角结构。它是 CMV 型二周期酉算子，是雅可比矩阵的酉类比，参见例如 [6, 8, 51]。

$$U_t = V_t W_t = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & r^2 & rt & t^2 & & & & \\ & -rt & r^2 & rt & & & & \\ & & -rt & r^2 & rt & t^2 & & \\ & & t^2 & -rt & r^2 & rt & & \\ & & & & -rt & r^2 & rt & \\ & & & & t^2 & -rt & r^2 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{8}$$

- 式（ W_t 6）中的硬币算子可写为

$$W_t = \begin{pmatrix} r & t \\ -t & r \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}. \tag{9}$$

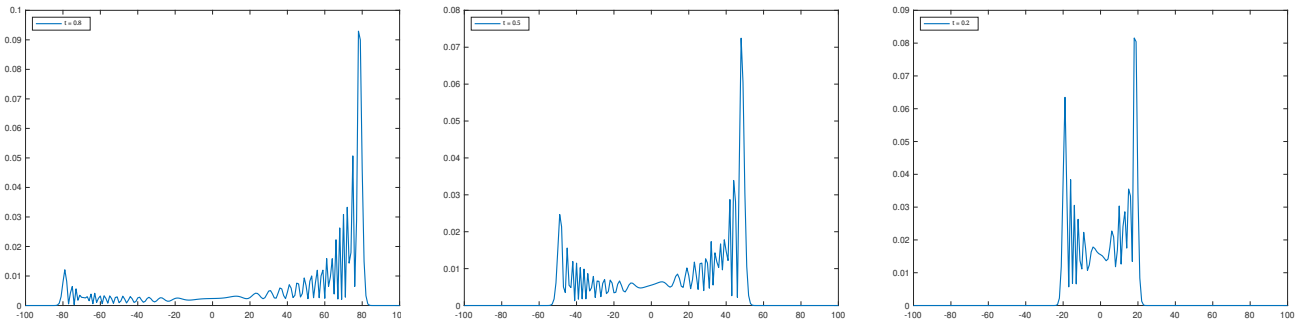
它仅对 $\mathcal{H}$ 的自旋分量产生非平凡作用，如下所示

$$\begin{aligned} W_t \ : \ & |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle \mapsto (r|\uparrow\rangle - t|\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle \\ & |\downarrow\rangle \otimes |j\rangle \mapsto (r|\downarrow\rangle + t|\uparrow\rangle) \otimes |j\rangle, \end{aligned} \tag{10}$$

对任意 $j \in \mathbb{Z}$均成立。也就是说，应用 W_t 后进行测量，会以（量子）概率 t^2 使内部自由度发生翻转，且不产生位移。

平移算子 V_t 在（6）中定义，可写为

$$V_t = r\mathbb{1}_{\mathcal{H}} + t|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes T_{-1} - t|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes T_1 \text{ where } T_{\pm 1} := \sum_{j\in\mathbb{Z}} |j\pm 1\rangle\langle j|. \tag{11}$$



(A) $t = 0.8$ (B) $t = 0.5$ (C) $t = 0.2$

FIGURE 1. 由 U_t 生成的量子行走在（5）中经过 100 步后的概率分布，起始于 $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ 透射参数 t取不同值时。

注意， $T_{\pm 1}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的右移/左移算子，即 $T_{\pm 1}|j\rangle = |j \pm 1\rangle$。 V_t 会根据行走者的内部自由度将其向左或向右平移（延伸）。特别地

$$\begin{aligned} V_t \ : \ & |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle \mapsto r|\uparrow\rangle \otimes |j\rangle + t|\downarrow\rangle \otimes |j-1\rangle \\ & |\downarrow\rangle \otimes |j\rangle \mapsto r|\downarrow\rangle \otimes |j\rangle - t|\uparrow\rangle \otimes |j+1\rangle \end{aligned} \tag{12}$$

对于任意 $j \in \mathbb{Z}$。即， V_t 以概率 t^2 有条件地将行走者移动一步（并翻转其内部自由度）。因此， （10）和（12）例如给出

$$U_t \ : \ |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle \ \mapsto \ rt|\downarrow\rangle \otimes |j-1\rangle + \left(r^2|\uparrow\rangle - rt|\downarrow\rangle\right) \otimes |j\rangle + t^2|\uparrow\rangle \otimes |j+1\rangle. \tag{13}$$

- $t \in [0,1]$ 的边界值给出了两个极端情形： $t = 0$ 对应于平凡的无输运情形 $U_{t=0} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$，而 $t = 1$ 则对应于朴素的弹道输运，其速度为每一步量子行走在 $\mathbb{Z}$ 上前进一个单位。

$$\begin{aligned} U_{t=1} \ : \ & |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle \mapsto |\uparrow\rangle \otimes |j+1\rangle \\ & |\downarrow\rangle \otimes |j\rangle \mapsto |\downarrow\rangle \otimes |j-1\rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

众所周知，当硬币算子沿量子行走保持固定时，由于平移不变性，相应的输运通常是弹道输运，参见例如 [32], [3, 定理 4], 或 [13,定理 9。1]对于我们的模型，在不存在局域场时就是这种情形；事实上，当 $t \in (0,1)$时，我们预期会出现较强的输运，并证明量子行走的渐近速度至多为 t，参见引理3.1。为此，我们将 t 称为透射参数。

图 1展示了由以下操作生成的无场量子行走的概率分布：U_t 对 $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ 连续作用 100 次（量子游走步数），并取透射参数 $t = 0.8$、 $t = 0.5$和 $t = 0.2$这三个值。执行更多量子游走步数时，也会观察到类似的行为。注意， $U_t^N(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle)$ 的支集位于 $[-2N, 2N]$，因此行走者无法逃出 $[-N, N]$在 $\mathbb{Z}$上的窗口。图 1 以及更多量子游走步数下的类似数值结果表明，行走者与起点的距离基本不超过 Nt 步。还可以观察到，最高概率对应的位置约为 Nt。因此，速度似乎是 t量级，这一点在下文的引理 3.1 中得到了部分证明。由于平移不变性，如果将起点选为$|\uparrow\rangle \otimes |j\rangle$，则会得到相同的概率分布，其中 $j \in \mathbb{Z}$。

3. Main Results

给定第 $t \in [0,1]$ 节中描述的参数为 2的量子行走，并假设系统初始处于单位向量

$$\Psi_0 := \varphi \otimes |0\rangle \text{ where } \varphi \in \mathbb{C}^2 \text{ and } \|\varphi\| = 1. \tag{15}$$

我们有兴趣研究由量子行走 Ψ_0 产生的渐近输运，其方式如下

$$U_{t,\mathcal{D}} = \mathcal{D} V_t W_t \tag{16}$$

其中 W_t 和 V_t 分别是式（6）、（10）和（12）中给出的 coin 算子和平移算子。虽然我们起初将 $\mathcal{D}$ 视为一般的局域场（对角且为酉算子），但我们的主要结果假设局域场属于某一特定的周期局域场类别，见下文式（27）。

关于渐近速度，我们将特别关注位置算子的离散时间演化

$$\tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X) := (U_{t,\mathcal{D}}^*)^N X U_{t,\mathcal{D}}^N, \quad N \in \mathbb{Z}, \tag{17}$$

其中 X 是 $\mathcal{H}$ 上的无界位置算子

$$X := \mathbb{1}_2 \otimes \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j| \, |j\rangle\langle j| \text{ on } \mathcal{H}. \tag{18}$$

X 与行走者的位置有关，而与其内部自由度无关。容易看出，$\tau^{U_t}{}_N{}^{\mathcal{D}}$（对任意 N）的定义域包含所有满足以下条件的状态：$\phi \otimes \psi \in \mathcal{H}$ 其中 $\phi \in \mathbb{C}^2$ 且 ψ 具有有限支集。

注意，预 期位置 Ψ_0 在经过 N 个量子游走步数后的值由 $U_{t,\mathcal{D}}$ i s

$$\langle X \rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0} := \langle U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0, X U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0, \tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X) \Psi_0 \rangle. \tag{19}$$

因此，渐近量子速度（或简称速度）定义为

$$v_{U_{t,\mathcal{D}}} = \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \langle X \rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0}. \tag{20}$$

注意，由于 $U_t^N{}_{,\mathcal{D}} \Psi_0 \in \mathcal{H}$ 的支集是紧的，因此我们显然有 $v_{U_{t,\mathcal{D}}}$ 的一个先验界。更准确地说，式（13）表明

$$U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0 = (\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_{[-N,N]}) U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0, \tag{21}$$

其中 $\mathbb{1}_{[-N,N]}$ 是作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的 $[-N,N] \cap \mathbb{Z}$ 限制算子。因此，定义 $X_{[-N,N]} := (\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_{[-N,N]}) X$，并注意到 $X_{[-N,N]}/N \leq \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$，我们得到

$$\frac{1}{N} \langle X \rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0} = \frac{1}{N} \langle X_{[-N,N]} \rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0} \leq \langle \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N \Psi_0} = 1, \tag{22}$$

这意味着，对于任意 $t \in [0,1]$ 和任意局域场 $\mathcal{D}$，$v_{U_{t,\mathcal{D}}}$ 在每个量子步中的变化幅度不可能超过一个单位。事实上，从（14）可以看出，$v_{t=1,\mathcal{D}=\mathbb{1}} = 1$（下文引理3.1 将对此作进一步解释）。$t = 0$ 对应于 $U_{0,\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ 时的平凡局域化，因此，对于任意局域场 $\mathcal{D}$，都有 $v_{U_{0,\mathcal{D}}} = 0$。

3.1. **无场速度界**。无论局域场产生何种影响，直观上都很清楚，速度取决于透射参数（它“生成”了 U_t的非对角元）。回想一下，简单的论证（22）给出了速度先验上界 $\mathbf{1} v_{U_t,\, \mathcal{D}}$。稍加努力，我们便可证明一个依赖于 t 的界，适用于 $v_{U_t,\, \mathcal{D}}$。下述引理给出了量子行走速度的一个上界，该上界与局域场无关 $\mathcal{D}$。具体而言，引理 3.1表明，在任意局域场的作用下，量子速度至少随透射参数 t 线性衰减。

引理 3.1。 对于由酉算子 $U_{t,\mathcal{D}}=\mathcal{D}V_tW_t$ 生成的量子行走，我们有

$$\frac{1}{N}\langle X\rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N\Psi_0}\le\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X)-X\|\le t \tag{23}$$

对于任意 $t\in[0,1]$，$N\in\mathbb{Z}^+$，以及任意局域场 $\mathcal{D}$。此外，在极端情形 $t=0$ 和 $t=1$下，*(23)* 中的两个不等式都成为等式。

证明很简单，见附录B。注意，(23) 中的第一个不等式直接源于以下事实：$X\Psi_0=0$,

$$\langle X\rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N\Psi_0}=\left\langle\tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X)-X\right\rangle_{\Psi_0}\le\|\tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X)-X\|. \tag{24}$$

值得一提的是，$\|\tau^{U_{t,\mathcal{D}}}(X)-X\|$ 是本文在界定速度时关注的核心对象。

引理 3.1 表明，在存在任意局域场的情况下，由 $U_{t,\mathcal{D}}$ 描述的量子行走的速度不会超过 t。即,

$$\sup_{\mathcal{D}}v_{U_{t,\mathcal{D}}}\le t, \tag{25}$$

其中，上确界取遍所有形如 (7) 的局域场 $\mathcal{D}$。这里说明，(23) 中 t 的线性界显然适用于高阶矩：对于任意 $p\in\mathbb{Z}^+$,

$$\frac{1}{N^p}\langle X^p\rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N\Psi_0}=\frac{1}{N^p}\left\langle X_{[-N,N]}^p\right\rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N\Psi_0}\le\frac{1}{N}\langle X\rangle_{U_{t,\mathcal{D}}^N\Psi_0}\le t \tag{26}$$

其中 $X_{[-N,N]}$ 定义于 (21) 中，且我们用到了以下事实：$X_{[-N,N]}^{p-1}/N^{p-1}\le\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$。

引理 3.1 适用于任意局域场 $\mathcal{D}$。我们的主要结果定理 3.3表明，当局域场取某种周期形式时，对于一定范围内任意固定的 t，量子速度都可以任意小。下面我们定义相应的局域场。

3.2. 存在周期局域场时的速度界。 对于固定的 $n\in\mathbb{Z}^+$，我们要求局域场（对角的且为酉算子）$\mathcal{D}_n$ 具有以下性质：

(a) 周期为（基本）周期 n。**(b)** $\exists c\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$；$\forall j\in\mathbb{Z}$ 我们有 $\langle\delta_{j+1},\mathcal{D}_n\delta_{j+1}\rangle=c\langle\delta_j,\mathcal{D}_n\delta_j\rangle$。

事实上，性质 上述 (a) 和 (b) 表明，$\mathcal{D}_n$ 的最一般形式为 s

$$\mathcal{D}_n=\beta\left(\mathrm{diag}\{1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}\}\right)^{\oplus\mathbb{Z}}, \tag{27}$$

其中 β，$\alpha\in\mathbb{C}$ 满足 $|\beta|=|\alpha|=1$，且 $\alpha\ne1$ 是单位根的 n 次根（不一定是标准的本原 n 次单位根）。因此，1，α，α^2，…，α^{n-1} 互不相同，也就是说，

$$\alpha=e^{2\pi ki/n}\text{ for some }k\in\mathbb{Z}^+\text{ such that }\gcd(k,n)=1. \tag{28}$$

β 在（27）中只是一个平凡相位，不失一般性地，我们假设 $\beta=1$。式（27）中的直和对应于 $\mathcal{D}_n$ 的分块对角矩阵表示，其中每个块都是对角矩阵 $\mathrm{diag}\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{n-1}\}$，相对于基 $\{\delta_{j+k},\,k=0,1,2,\ldots,n-1\}$，对任意固定的起始指标 $j\in\mathbb{Z}$。不同的此类 j仅产生平凡相位。因此，我们假设 $\mathcal{D}_n$ 表示为

$$\mathcal{D}_n\delta_j=\alpha^j\delta_j,\ j\in\mathbb{Z}. \tag{29}$$

注意，$\mathcal{D}_n^*=\overline{\mathcal{D}_n}=\mathcal{D}_n^{-1}$，$\mathcal{D}_n^n=\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$，且对所有 $j\ne k$，$\mathcal{D}_n^j\ne\mathcal{D}_n^k$ 都在 $\{1,\ldots,n\}$ 中。此外，请注意，$\mathcal{D}_n$ 对张量积的两个分量都有非平凡作用：自旋和

行走者的位置，即，

$$\mathcal{D}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha^{2j} |j\rangle\langle j| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \otimes \left(\mathrm{diag}\{1, \alpha^2, \dots, \alpha^{2(n-1)}\}\right)^{\oplus\mathbb{Z}}. \tag{30}$$

特别地，对于任意 $j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n \ : \ |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle &\mapsto \alpha^{2j} |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle \\ |\downarrow\rangle \otimes |j\rangle &\mapsto \alpha^{2j+1} |\downarrow\rangle \otimes |j\rangle. \end{aligned} \tag{31}$$

我们的主要结果研究由酉算子生成的量子行走

$$U_{t,n} := U_{t,\mathcal{D}_n} = \mathcal{D}_n V_t W_t \tag{32}$$

，其具有 n-周期局域场 $\mathcal{D}_n$，定义见（27），硬币酉算子 W_t，以及平移算子 V_t，定义见（6），或由它们在 $\mathcal{H}$ 的基上的作用给出，见（10）和（12）。

注 3.2。请注意，将 $\mathcal{D}_n$ 作用于硬币算子和平移算子 W_t与 V_t 的乘积，可以视为一种量子行走：在 $\mathbb{Z}$的每个位置上使用相同的平移算子，而硬币算子则取决于行走者的位置。更确切地说，直接验证可得

$$U_{t,n} = \mathcal{D}_n V_t W_t = V_t^{(\alpha)} W_t^{(\alpha)} \tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned} V_t^{(\alpha)} &= r\mathbb{1}_{\mathcal{H}} + \alpha^{-1} t |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes T_{-1} - \alpha t |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes T_1 \\ W_t^{(\alpha)} &= \begin{pmatrix} r & t \\ -\alpha t & \alpha r \end{pmatrix} \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha^{2j} |j\rangle\langle j|. \end{aligned} \tag{34}$$

这意味着， $W_t^{(\alpha)}$ 是一个硬币算子，它会根据行走者在 $\mathbb{Z}$ 中的位置为其分配相位，例如

$$W_t^{(\alpha)} : |\uparrow\rangle \otimes |j\rangle \mapsto \alpha^{2j} \left(r|\uparrow\rangle - \alpha t |\downarrow\rangle\right) \otimes |j\rangle. \tag{35}$$

我们认为， $W_t^{(\alpha)}$ 对位置的依赖性使得定理3.3中的速度结果得以简化。值得一提的是，[27, 31]中考虑了一些非相同的随机硬币算子。在 [27]，中，硬币算子被选为满足某些一般要求的一族独立同分布随机算子，其随机性由硬币算子的所有矩阵元所携带的相位决定。对于几乎所有硬币算子的实现，这些非相同的随机硬币算子都会在整个谱上导致动力学局域化。相比之下， [31] 表明，某种特定选择的随机硬币算子不会导致局域化。 [31]中的随机硬币算子由一个仅在对角线上带有随机相位的酉矩阵给出。在这种无序情形下缺乏局域化，是因为存在规范变换，可以完全消除模型中的随机性。

注意，此处的 $W_t^{(\alpha)}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上是周期性的，因为

$$\left\langle s, j+n \left| W_t^{(\alpha)} \right| s, j+n \right\rangle = \left\langle s, j \left| W_t^{(\alpha)} \right| s, j \right\rangle, \ \textit{for all } j \in \mathbb{Z}, \ \textit{and } s \in \{\uparrow, \downarrow\}. \tag{36}$$

此处 $|s,\ j\rangle := |s\rangle \otimes |j\rangle$。只有当周期长度 n趋于无穷时，我们才能由下文的定理3.3 保证渐近速度为零。看来，硬币算子在 36 上的这种周期性 $\mathbb{Z}$使得量子行走在任何有限周期 n下都无法达到零渐近速度，参见下文的猜想3.4 。

我们将具有周期局域场 $\mathcal{D}_n$ 的量子行走的离散时间演化记为

$$\tau_N^{U_{t,n}}(X) := (U_{t,n}^*)^N X U_{t,n}^N, \quad N \in \mathbb{N} \tag{37}$$

及其对应的量子行走速度（20）由 $v_{U_{t,\ n}}$,

$$v_{U_{t,n}} := v_{U_{t,\mathcal{D}_n}} = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \langle X \rangle_{U_{t,\mathcal{D}_n}^N \Psi_0}, \tag{38}$$

其中 Ψ_0 定义于（15）。下述定理表明，当透射参数 t 足够小时，周期局域场 $\mathcal{D}_n$ 会使量子速度随周期 n 呈指数级减缓。

定理 3.3。对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，以及相应的、n-周期局域场 $\mathcal{D}_n$（定义于（27）），由 $U_{t,\ n} = \mathcal{D}_n V_t W_t$（见（6））生成的量子行走速度满足以下界:

$$v_{U_{t,n}} \le \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \le (4t)^n, \tag{39}$$

其中 $t \in [0,1]$ 是透射参数。

也就是说，对于任意 $v_0 > 0$，存在一个 n-周期场 $\mathcal{D}_n$，使得对于任意 $t \in (0,\ 1/4)$，量子速度 $v_{U_{t,\ n}}$ 满足以下界：$v_{U_{t,\ n}} \le v_0$。

情形 $n = 1$ 对应于 $\mathcal{D}_n = 1\!\!1_{\mathcal{H}}$，而定理 3.3 得出的线性界与引理 3.1一致。当 39）中的界并不相关；我们认为定理 3.3 的有效性可推广至所有 $t \in (0,$**1**$)$，见下文的猜想 3.4 。

引理 3.1 保证，通过选择相应的小透射参数，可以使量子速度任意小 t。它还表明，速度界至少随 t线性衰减。另一方面，定理 3.3 表明，对于固定的透射参数$t \in (0, 1/4)$，可以启用一个特定的 n-周期场，从而保证量子行走的速度在周期 n内呈指数衰减。

定理 3.3 的证明分为以下两个主要步骤:

步骤 *1*：（平均速度子序列的上界）我们证明，对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}, t \in$ **(0，1)**，以及相应的局部 n周期场 $\mathcal{D}_n$，有

$$\frac{1}{nk} \|\tau_{nk}^{U_{t,n}}(X) - X\| \le \frac{3}{4}(4t)^n \tag{40}$$

对于每个 $k \in \mathbb{Z}^+$。这一步是主要难点，其证明贯穿以下所有章节。步骤 *2*：（利用线性界进行插值）我们在引理 3.1 中，在（40）与线性界（23）之间进行插值，以证明

$$\frac{1}{N} \|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \le (4t)^n \quad \text{for all} \quad N \ge N_0 \tag{41}$$

对于某个 $N_0 = N_0(n,\ t) \in \mathbb{Z}^+$。

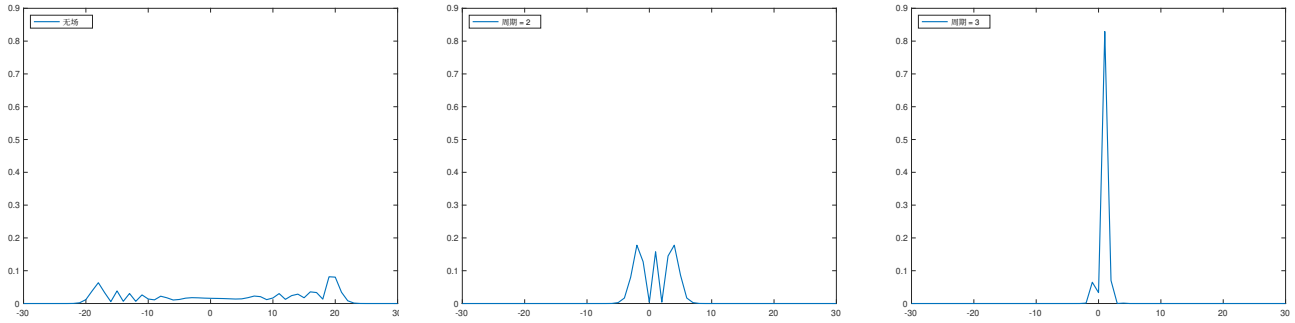
我们稍后将在本节给出步骤 *2* 的证明，现在先讨论其主要结果（41）。注意，（41）意味着，对于任意给定的 $t \in [0,1]$ 和周期场 $\mathcal{D}_n$（27），其周期为 n，存在 $N_0(t,\ n) \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\frac{1}{N} \langle X \rangle_{U_{t,n}^N \Psi_0} \le (4t)^n, \text{ for all } N \ge N_0. \tag{42}$$

也就是说，当我们考察高阶矩时，式（26）中的论证直接给出相同的界，即对于任意 $p \in \mathbb{Z}^+$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^p} \langle X^p \rangle_{U_{t,n}^N \Psi_0} \le (4t)^n. \tag{43}$$

图 2 展示了定理3.3 的结果，并说明当27中不同周期的周期场使量子行走的输运速度减慢，且减慢程度随周期 $t = 0.2 < 1/4$呈指数级变化 n。



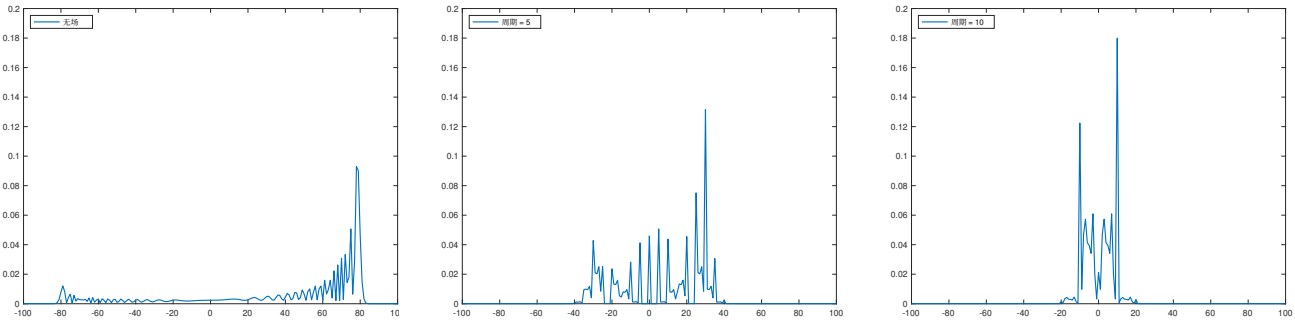
(A) 无场， $t = 0.2$ (B) $n = 2$， $t = 0.2$ (C) $n = 3$， $t = 0.2$

FIGURE 2. 在不同周期 n下，从 $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ 出发经过 100 步后，由$U_{t=0.2,\ n}$生成的量子行走的概率分布。图中仅显示位置窗口 $[-30, 30]$。

一个自然的问题是，条件 $t \in (0, 1/4)$ in 定理 3.3 能否放宽或去除。数值结果表明，形如 (27) 的周期场确实会减慢量子速度，当 $t \in [1/4, 1)$，例如见图 3 ，图中展示了量子行走从 $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ 出发经过 100 步后的三种概率分布，其中透射参数固定为 $t = 0.8$ ，局域场的周期依次增大为 $n = 1$， $n = 5$和 $n = 10$。有趣的是，三种情况下概率最高的位置分别约为 80、30 和 10，与 $.8^n$ 在 $n = 1$， 5， 10 时对应的 100(0 完全吻合。由此引出以下猜想。

猜想 3.4。 对于任意 $t \in (0,1)$、 $n \in \mathbb{N}$以及在（27）中定义的相应局部 n-周期性场 $\mathcal{D}_n$， 量子行走的速度 $U_{t,\ n}$ 按 t^n 的阶缩放，即

$$v_{U_{t,n}} = \mathcal{O}(t^n). \tag{44}$$



(A) 无场， $t = 0.8$ (B) $n = 5$， $t = 0.8$ (C) $n = 10$， $t = 0.8$

FIGURE 3. 从 $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ 出发，经过 100 步后，由 $U_{t=0.8,\ n}$ 生成的、具有不同周期 n 的量子行走的概率分布。

现在我们在假设步骤 *1*的结论成立的前提下，给出插值论证（步骤 *2*）；其证明将在本文余下部 (40) 分展开。

下面我们证明，对于任意固定的 $t \in$ （0，1）和任意整数 $n > 1$，都存在一个n-周期场 $\mathcal{D}_n$，使得

$$\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \le (4t)^n \quad \text{for all } N > N_0(t,n) := \max\left\{\frac{n}{(4t)^{n-1}}, n\right\}. \tag{45}$$

ˆ 注意，对于任意整数 $N > N_0(t,\ n)$，存在唯一的 $k \in \mathbb{N}$和 $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，使得

$$N = n\hat{k} + r. \tag{46}$$

将 $\tau^{U_{t,\ r}\ n}(X)$ 加上或减去 $\tau^{U_{t,\ N}\ n}(X)\ - X$，得到

$$\|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \ \le \ \|\tau_{n\hat{k}}^{U_{t,n}}(X) - X\| + \|\tau_r^{U_{t,n}}(X) - X\|. \tag{47}$$

第一项使用界 (40)，第二项使用线性界 (25)

$$\|\tau_r^{U_{t,n}}(X) - X\| = \|[X, U_{t,n}^r]\| \le rt \tag{48}$$

应用于 (47) 的第二项，从而得到

$$\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \le \frac{3}{4N} n\hat{k}\ (4t)^n + \frac{r}{N}t. \tag{49}$$

接下来，我们考虑 $N_0(t,\ n)$ 的两种情况。若 $N_0(t,\ n)\ = n$，即若 $t \in [1/4, 1)$，则只需使用 $1 \le t \le (4t)^n$，而 (49) 可写为

$$\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \le \frac{1}{N}\left(\frac{3}{4}n\hat{k} + r\right)\ (4t)^n \le (4t)^n. \tag{50}$$

对于另一种情形 $N_0 = n(4t)^{1-n}$，即 $t \in (0, 1/4)$，我们在式 ($N > n(4t)^{1-n}$ 49) 的第二项中使用，得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \ &\le \ \frac{1}{N}\left(\frac{3}{4}n\hat{k} + \frac{rN}{4n}\right)(4t)^n \le \frac{1}{N}\left(\frac{3}{2}n\hat{k} + \frac{N}{4}\right)(4t)^n \\ &\le \ (4t)^n \end{aligned} \tag{51}$$

这里我们用到了 $r < n$这一事实，见式 (46)。

4. An upper bound for a subsequence of average velocities

本节介绍证明式 (40) 中关于平均速度子序列的界所需的主要步骤和工具。首先，我们说明式 (40) 左侧的平均速度如何由$\frac{1}{n}\|[X, U_{t,n}^n]\|$界定；这里回顾一下，$U_{t,n} = \mathcal{D}_n U_t$。在第 4.1 节中，我们将 U_t写成三个算子的和，每个算子分别对应透射参数 t的 0、1、2 次幂。接着，在第 4.2 节和第 4.3 节中，我们将 $(\mathcal{D}_n U_t)^n$ 展开为（不对易）算子 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 的所谓初等对称多项式；这些多项式将是我们要理解的主要对象。关键事实——定理 4.3——指出，带宽小于 n 的算子对称多项式会退化为恒等算子的常数倍。这使我们得以完成对平均速度子序列 (40) 上界的证明。定理 4.3 的证明将在下一节，即第 5 节中给出。

考虑周期场 $\mathcal{D}_n$ 的一个固定周期 $n \in \mathbb{Z}^+$。对于作为 n 的倍数序列的 N，即当 $k \in \mathbb{Z}^+$ 时 $N = nk$，我们展开

$$\frac{1}{N}(\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X) = \frac{1}{nk}\sum_{m=1}^{k}((U_{t,n}^n)^*)^m[X, U_{t,n}^n](U_{t,n}^n)^{m-1}, \tag{52}$$

可见

$$\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,n}}(X)-X\| \le \frac{1}{n}\|[X,U_{t,n}^n]\| = \frac{1}{n}\|\tau_n^{U_{t,n}}(X)-X\|. \tag{53}$$

前 $N=nk$ 个量子游走步数中的平均速度，其中 $k\in\mathbb{Z}^+$，由仅考虑前 n 步时的平均速度的一个界所界定。因此，我们的主要工作将集中于分析经过 n 步后表示局域场存在时量子行走的 $U_{t,\,n}^n=(\mathcal{D}_nU_t)^n\ \mathcal{D}_n$。

4.1. **由 n 酉算子生成的量子行走**。注意到 $U_t=V_tW_t$ 在（5）和（8）中可写为三个算子之和，它们分别对应于 t的常数项、一次项和二次项，

$$U_t = r^2\mathbb{1}_{\mathcal{H}} + rBt + Ct^2, \tag{54}$$

其中

$$B := T_{-1}^{\mathcal{H}} - T_1^{\mathcal{H}}, \quad C := |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes T_{-1} + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes T_1. \tag{55}$$

这里，$T_{\pm k}^{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$上的平移 k 的平移算子，定义为

$$T_{\pm k}^{\mathcal{H}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\delta_{j\pm k}\rangle\langle\delta_j|,\ k\in\mathbb{Z}^+. \tag{56}$$

对于 $j\in\mathbb{Z}$，定义 $\mathcal{H}$上的广义 $U_t^{(j)}$ 算子

$$U_t^{(j)} := \mathcal{D}_n^j U_t (\mathcal{D}_n^j)^* = r^2\mathbb{1}_{\mathcal{H}} + rtB^{(j)} + t^2C^{(j)}, \tag{57}$$

其中 $B^{(j)}$ 和 $C^{(j)}$ 算子由以下公式给出（直接利用（55）、（27）和（30）计算可得）

$$\begin{aligned} B^{(j)} &:= \mathcal{D}_n^j B(\mathcal{D}_n^j)^* = \alpha^{-j}T_{-1}^{\mathcal{H}} - \alpha^j T_1^{\mathcal{H}} \\ C^{(j)} &:= \mathcal{D}_n^j C(\mathcal{D}_n^j)^* = \alpha^{-2j}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes T_{-1} + \alpha^{2j}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes T_1. \end{aligned} \tag{58}$$

这里我们稍微滥用一下记号，省略算子 $U_t^{(j)}$ 对 n、$B^{(j)}$和$C^{(j)}$的依赖关系。这种依赖关系隐含在 α 中，它是单位根的 n次根（28）。注意

$$A^{(0)} = A, \text{ and } A^{(n+k)} = A^{(k)}, \text{ for all } k\in\mathbb{Z}, \text{ where } A\in\{B,C,U_t\}. \tag{59}$$

利用（58）直接计算可得以下关键事实

$$[B^{(j)},B^{(k)}] = [C^{(j)},C^{(k)}] = 0, \text{ and } B^{(j)}C^{(k)} = (C^{(k)})^*B^{(j)} \text{ for all } j,k\in\mathbb{Z}. \tag{60}$$

注 4.1。 *(59)* 和 *(60)* 是我们的主要结果证明成立所必需的关系。特别地，下面的推论 *5.5* 是这些关系的推论。这里需要强调，局域场（酉算子且为对角的） $\mathcal{D}=$ 对角$\{e^{i\theta_j}\}$，$j\in\mathbb{Z}$ 满足

$$[B,\mathcal{D}^kB(\mathcal{D}^k)^*] = [C,\mathcal{D}^kC(\mathcal{D}^k)^*] = 0 \text{ for any } k\in\mathbb{Z}, \text{ and } \mathcal{D}^n = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \tag{61}$$

当且仅当 $\mathcal{D}_n$ 的每个对角元都是 n次单位根，且它们按$e^{i(\theta_{j+1}-\theta_j)} = c$ 对于某个 $c\in\mathbb{C}$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$而言排序（与 $\mathcal{D}_n$定义中的性质 ***(b)*** 相比）。这可以通过直接计算来验证。要求 $c=1$ 对应于无场的平凡情形（$\mathcal{D}_n=\beta\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$，其中 $|\beta|=1$）。 $c\neq 1$ 表示 n 的任意连续 $\mathcal{D}_n$ 个对角元互不相同；这对于引理*A.1*的有效性至关重要。

接下来，利用 (57) 得到 $\mathcal{D}_n^\ell$ （其中 $\ell \in \mathbb{Z}^+$）满足交织关系，并按如下方式迭代 $\mathcal{D}_n^\ell U_t = U_t^{(\ell)} \mathcal{D}_n^\ell$，以求得

$$\begin{aligned} U_{t,n}^n &= (\mathcal{D}_n U_t)(\mathcal{D}_n U_t)\dots(\mathcal{D}_n U_t) \quad (n \text{ times}) \\ &= \mathcal{D}_n U_t U_t^{(1)} \mathcal{D}_n^2 U_{t,n} \dots \mathcal{D}_n U_{t,n} \\ &= \mathcal{D}_n \left(\prod_{k=0}^{n-1} U_t^{(k)} \right) \mathcal{D}_n^{n-1}, \end{aligned} \tag{62}$$

这里以及下文中，我们采用如下约定

$$\prod_{m=a}^{b} K_m = \begin{cases} K_a K_{a+1} \dots K_b & \text{when } b \geq a \\ \mathbb{1}_{\mathcal{H}} & \text{when } b < a \end{cases}. \tag{63}$$

(62) 也可读作

$$U_{t,n}^n = U_t^{(1)} U_t^{(2)} \dots U_t^{(n)}, \tag{64}$$

注意，对于所有 $j \neq \ell \in \{1, \dots, n\}$，$U_t^{(j)} \neq U_{(\ell)t}$。也就是说，由 $U_{t,n}$ 生成的第 N 步量子行走（其中$N = nk$）——单步酉算子见（5）——被理解为将算子块 $U_{(1)t}$ $U_{t}^{(2)} \dots U_t^{(n)}$ $^{k)}$应用 $U_{(1)t}$ $U_{t}^{(2)} \dots U_t^{(n)}$ $^{k)}$ 次，即

$$U_{t,n}^N = \left(U_t^{(1)} U_t^{(2)} \dots U_t^{(n)} \right)^k. \tag{65}$$

这意味着，$U_{t,\ n}^{n}$ 可被视为我们量子行走的基本构件。将（62）代入（53），得到

$$\| [X, U_{t,n}^n] \| = \left\| \left[X, \mathcal{D}_n \left(\prod_{k=0}^{n-1} U_t^{(k)} \right) \mathcal{D}_n^{n-1} \right] \right\| = \left\| \left[X, \prod_{k=0}^{n-1} U_t^{(k)} \right] \right\|. \tag{66}$$

在（66）中，我们使用了莱布尼茨法则以及以下事实：X 与酉乘法算子 $\mathcal{D}_n$ 和 $\mathcal{D}_n^{n-1}$对易。

回忆一下，$\prod_{j=0}^{n-1} U_t^{(k)}$ 是乘积

$$\prod_{j=0}^{n-1} U_t^{(k)} = \left(r^2 \mathbb{1}_{\mathcal{H}} + r B^{(0)} t + C^{(0)} t^2 \right) \dots \left(r^2 \mathbb{1}_{\mathcal{H}} + r B^{(n-1)} t + C^{(n-1)} t^2 \right) \tag{67}$$

它可以看作是关于 t 的一个“多项式”，次数为 $2n$，其系数是作用于 $\mathcal{H}$ 的算子。完整展开式有 3^n 项，我们将按照对应的 t 次幂分组，如下所示。

首先注意，在乘积（67）中，由若干个 m_1 算子 $C^{(j)}$ 与若干个 m_2 算子 $B^{(k)}$（其不同上标按从 0 到 $n-1$ 的递增顺序排列）构成的乘积，对 $t^{2m_1+m_2}$ 的系数有贡献。为了区分与 t 的特定次幂相关的这些项，我们引入作用于 $\mathcal{H}$ 上的算子 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$，其定义见下一小节。

4.2. 算子的初等对称多项式 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$。我们将算子$\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的定义为与 t的 $m+\ell$ 次幂相对应的乘积（对称）和。特别地，$\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 中的每一项都是按上标排序的乘积，共含有 ℓ 个算子，其中m 个是 $C^{(j)}$，$\ell - m$ 个是 $B^{(k)}$，其中

$$j, k \in [0, n-1] := \{0, 1, \dots, n-1\}. \tag{68}$$

一般而言， $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 其中 $0 \le m \le \ell \le n$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个算子，由以下公式给出

$$\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} = \sum_{\substack{0 \le j_1 < \ldots < j_\ell \le n-1 \\ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\ell) \in \{0,1\}^\ell; \\ |\eta| = m}} \prod_{k=1}^{\ell} A^{(j_k)}_{\eta_k}, \tag{69}$$

其中 $|\eta| = \eta_1 + \ldots + \eta_\ell$和 A或者是 C，或者是 B算子，即，

$$A_\eta := C^\eta B^{1-\eta},\ \eta \in \{0,1\} \text{ with the definition } C^0 = B^0 := \mathbb{1}_{\mathcal{H}}, \tag{70}$$

并且令 $\mathcal{S}^{0,\ 0}_{[0,n-1]} := \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$，并注意到 $\mathcal{S}^{1,\ 1}_{\{j\}} = C^{(j)}$ 和 $\mathcal{S}^{1,\ 0}_{\{j\}} = B^{(j)}$。也就是说，(69) 可写为

$$\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} = \sum_{\substack{\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\ell) \in \{0,1\}^\ell; \\ |\eta| = m}} \quad \sum_{0 \le j_1 < \ldots < j_\ell \le n-1} \prod_{k=1}^{\ell} \mathcal{S}^{1,\eta_k}_{\{j_k\}}. \tag{71}$$

这里我们指出，对象 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 具有所谓算子的初等对称多项式之和的形式（例如参见 [39, 53]）。这里的变量是非交换算子 $B^{(j)}$ 和 $C^{(k)}$。

例 4.2。 边界情形 $\mathcal{S}^{\ell,\ \ell}_{[0,n-1]}$ 表示为

$$\mathcal{S}^{\ell,\ell}_{[0,n-1]} = \sum_{0 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n-1} C^{(j_1)} C^{(j_2)} \ldots C^{(j_\ell)}. \tag{72}$$

我们还有

$$\mathcal{S}^{2,1}_{[1,3]} = C^{(1)}B^{(2)} + C^{(1)}B^{(3)} + C^{(2)}B^{(3)} + B^{(1)}C^{(2)} + B^{(1)}C^{(3)} + B^{(2)}C^{(3)}, \tag{73}$$

且 $\mathcal{S}^{3,\ 1}_{[0,n-1]}$ 是由三个算子的乘积之和组成的，其中一个是 C，另外两个是 B's，

$$\mathcal{S}^{3,1}_{[0,n-1]} = \sum_{0 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n-1} C^{(j_1)}B^{(j_2)}B^{(j_3)} + B^{(j_1)}C^{(j_2)}B^{(j_3)} + B^{(j_1)}B^{(j_2)}C^{(j_3)}. \tag{74}$$

注意， $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 恰好有

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{\ell-m} = \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{m} \tag{75}$$

项（乘积）。例如，可以从式（69）中的求和看出这一点：需要将 ℓ个 j_k's 的值放入 n个位置 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$，然后将 m个 **1** 放入 ℓ个位置（η_1，.....， η_ℓ）。

4.3. **按 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 展开。** 直接从乘积（67）可以看出，常数项（关于 t）为 $(r^2)^n \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$，线性项为

$$(r^2)^{n-1} r \mathcal{S}^{1,0}_{[0,n-1]} t = r^{2n-1} \mathcal{S}^{1,0}_{[0,n-1]} t. \tag{76}$$

一般而言，乘积（67）可写为（回忆一下 $\mathcal{S}^{0,\ 0}_{[0,n-1]} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$）

$$\prod_{j=0}^{n-1} U^{(j)}_t = \sum_{k=0}^{2n} r^{2n-k} t^k \sum_{\substack{0 \le m \le \ell \le n \\ \ell + m = k}} \mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}. \tag{77}$$

接着，我们将交换子 $[X, U_{t,n}^n]$ 写成以下各项之和

$$[X, U_{t,n}^n] = \sum_{k=0}^{2n} r^{2n-k} t^k \sum_{\substack{0 \le m \le \ell \le n \\ \ell + m = k}} \left[X, \mathcal{S}_{[0,n-1]}^{\ell,m}\right]. \tag{78}$$

下面的主定理表明，求和式（ n 从 $k=0$ 到 $k=n-1$）中的前 n 项（来自 $k=0$ 至 $k=n-1$）是零。事实上，我们只需证明 $\mathcal{S}_{[0,n-1]}^{m}$ 是一个对角算子（乘法算子），只要 $\ell+m<n$成立。下面的主要技术定理在第 5.2 节中证明，它表明 $\mathcal{S}^{\ell}{}_{[0,n-1]}^{m}$ 不仅是对角的，而且是恒等算子的常数倍。

定理 4.3. 对于任意满足 $\ell + m < n$ 的 $0 \le m \le \ell \le n$，和式 $\mathcal{S}^{\ell}{}_{[0,n-1]}^{m}$ 是恒等算子的常数倍。（注意，$\mathcal{S}^{0}{}_{[0,n-1]}^{0} = 1\!\!1_{\mathcal{H}}$。）

定理 4.3 意味着 $[X, \mathcal{S}_{[0,n-1]}^{\ell,m}] = 0$ 对所有 $0 \le m \le \ell \le n$ 满足 $\ell + m \in [0, n-1]$的情况。因此，从式（53）和（78）可得

$$\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \le \frac{1}{n}\|[X, U_{t,n}^n]\| = \frac{1}{n}\, t^n \, \|L_n\| \tag{79}$$

其中

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} r^{n-k} t^k \sum_{\substack{0 \le m \le \ell \le n \\ \ell + m = n + k}} \left[X, \mathcal{S}_{[0,n-1]}^{\ell,m}\right]. \tag{80}$$

注4.4。 下面我们给出一个论证，说明 $\|L_n\| \le 3n\, 4^{n-1}$，这就是速度界 $(4t)^n$ 在定理3.3中的“四”。我们认为这个界并非最优，并且 $\|L_n\| = \mathcal{O}(n)$。这将导出上文猜想 3.4 的结论，但我们无法证明一个更好的界。

首先，注意到

$$\|L_n\| \le \sum_{\substack{\ell, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} \le \ell \le n \\ n - \ell \le m \le \ell}} \left\| \left[X, \mathcal{S}_{[0,n-1]}^{\ell,m}\right] \right\| \tag{81}$$

其中我们观察到

$$\{(\ell, m) |\ 0 \le m \le \ell \le n,\ \ell + m \in [n, 2n]\} = \{(\ell, m) |\ \frac{n}{2} \le \ell \le n,\ n - \ell \le m \le \ell\}, \tag{82}$$

这从图 4 中显然可见，参见阴影区域。

接下来，我们使用以下引理，该引理将在本节末尾证明。

引理 4.5. 对于任意 $0 \le m \le \ell \le n$，我们有如下界

$$\left\| \left[X, \mathcal{S}_{[0,n-1]}^{\ell,m}\right] \right\| \le 2^{\ell-m}\, \ell \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{m}. \tag{83}$$

使用界（83）于（81）求得

$$\begin{aligned} \|L_n\| &\le \sum_{\ell=0}^{n} \ell 2^{\ell} \binom{n}{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} 2^{-m} \\ &= 3n\, 4^{n-1} \end{aligned} \tag{84}$$

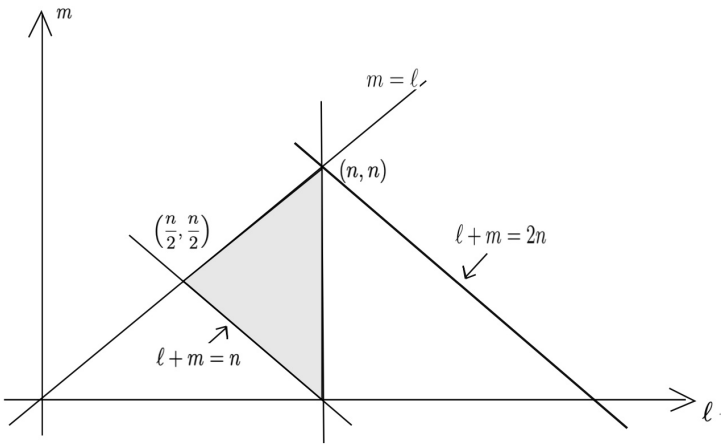


FIGURE 4. 阴影区域对应于（78）中的非零项以及（81）中的和

其中我们使用了二项式求和恒等式以及一个基本事实

$$\sum_{\ell=0}^{n} \ell \binom{n}{\ell} x^{\ell-1} = \frac{d}{dx} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{\ell} = n(x+1)^{n-1}. \tag{85}$$

这就完成了步骤 *1*的证明，并表明

$$\frac{1}{N} \|\tau_N^{U_{t,n}}(X) - X\| \leq \frac{1}{n} \|[X, U_{t,n}^n]\| = \frac{3}{4} (4t)^n, \tag{86}$$

对于任意一个 N，只要它是周期 n 的倍数。

还需证明引理 4.5。

引理 *4.5* 的证明。 首先回忆，对于任意 $0 \leq m \leq \ell \leq n$,

$$[X, \mathcal{S}_{[0,n-1]}^{\ell,m}] = \sum_{\substack{0 \leq j_1 < \ldots < j_\ell \leq n-1 \\ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\ell) \in \{0,1\}^\ell \\ |\eta| = m}} \left[X, \prod_{k=1}^{\ell} A_{\eta_k}^{(j_k)} \right], \quad \text{where } A_\eta = C^\eta B^{1-\eta},\ \eta \in \{0,1\}. \tag{87}$$

注意，对于任意 $j \in \mathbb{Z}$、 $C^{(j)} = \mathcal{D}_n^j C (\mathcal{D}_n^j)^*$ 都是酉算子（回忆一下， C 是正交算子，即置换）。因此， $\|C^{(j)}\| = 1$。显然，对于任意 $j \in \mathbb{Z}$， $\|B^{(j)}\| = \|B\| \leq 2$ 。也就是说

$$\|A_{\eta_k}^{(j_k)}\| = \|A_{\eta_k}\| \begin{cases} = 1 & \text{if } \eta_k = 1 \\ \leq 2 & \text{if } \eta_k = 0 \end{cases}. \tag{88}$$

下面我们利用引理 A.2 中的事实（136 ），即 $\|[X, B]\| = \|[X, C]\| = 1$，可以看出

$$\|[X, A_{\eta_k}^{(j_k)}]\| = \|[X, \mathcal{D}_n^{j_k} A_{\eta_k} (\mathcal{D}_n^*)^{j_k}]\| = \|[X, A_{\eta_k}]\| = 1. \tag{89}$$

现在，我们利用莱布尼茨法则展开（87）中的交换子

$$\left[X, \prod_{k=1}^{\ell} A_{\eta_k}^{(j_k)} \right] = \sum_{r=0}^{\ell-1} \left(\prod_{k=1}^{r} A_{\eta_k}^{(j_k)} \right) [X, A_{\eta_{r+1}}^{(j_{r+1})}] \left(\prod_{k=r+2}^{\ell} A_{\eta_k}^{(j_k)} \right), \tag{90}$$

这里回顾一下我们对算子乘积的约定（63）。

取范数，并选择 $\eta = (\eta_1, \ldots\ldots, \eta_\ell) \in \{0,1\}^\ell$，其中 $|\eta| = m$，得到

$$\begin{aligned} \left\| \left[X, \prod_{k=1}^{\ell} A_{\eta_k}^{(j_k)} \right] \right\| &\leq \sum_{r=0}^{\ell-1} \| [X, A_{\eta_{r+1}}^{(j_{r+1})}] \| \prod_{k,\ k\neq r+1} \| A_{\eta_k}^{(j_k)} \| \\ &\leq \sum_{r=0}^{\ell-1} \prod_{k=1}^{\ell} \| A_{\eta_k} \| \\ &\leq \ell \cdot 2^{\ell-m} \end{aligned} \tag{91}$$

其中最后一步用到了（88），以及乘积中共有（$\ell - m$个 B这一事实。因此我们有

$$\begin{aligned} \left\| \left[X, \mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} \right] \right\| &\leq \ell\ 2^{\ell-m} \sum_{\substack{0 \leq j_1 < \ldots < j_\ell \leq n-1 \\ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\ell) \in \{0,1\}^\ell \\ |\eta| = m}} 1 \\ &= 2^{\ell-m}\ \ell \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{m}, \end{aligned} \tag{92}$$

参见（75）。 □

5. A proof of Theorem 4.3

本节给出主要技术结果——定理 4.3 的证明。证明分为以下两个小节。第 5.1 节介绍一些预备结果，这些结果对于第 5.2 节中的归纳证明至关重要。简言之，下面的引理 5.1 补充了引理 A.1，并证明若 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[1,n-1]}$ 与由（ n）定义的周期 $\mathcal{D}_n$ 局域场对易，其中27）中的参数取某些值 ℓ 和 m，那么 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[1,n-1]}$ 不仅是对角的（这是引理 A.1 的结论），而且还是恒等算子的常数倍。引理 5.4 和推论 5.5 给出了一些递归公式，这些公式对于第 5.2 节中的归纳假设至关重要。

5.1. **对称多项式 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 的性质**。

本节介绍一些性质，这些性质将用于证明定理 4.3。

定理 4.3 证明中的关键步骤是证明 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 与 $\mathcal{D}_n$对易；由于$\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 的带宽在 $\ell + m < n$时为 $< n$，这意味着它是一个对角矩阵，参见引理 A.1。事实上，以下引理表明，如果 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 与$\mathcal{D}_n$对易，则可以得到更强的结论。定义

$$\Xi_n := \{(\ell, m) \in \mathbb{Z}^2;\ 0 \leq m \leq \ell \leq n \text{ such that } \ell + m < n\}. \tag{93}$$

这是与带宽为 $< n$的 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 相对应的集合。

引理 5.1。 如果 $[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 和 $(\ell, m) \in \Xi_n$，那么 $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 是恒等算子的常数倍，也就是说， $\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 与 $\mathcal{H}$ 上的任意算子对易。

虽然只需证明 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 在 $(\ell, m) \in \Xi_n$ 时是一个对角算子即可得出主要结果，但在归纳证明中（归纳假设中），我们需要引理 5.1的更强结论，以证明对于定理 4.3中的所有 $(\ell, m) \in \Xi_n$，$[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$，。

证明。显然，$\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 是一个带宽至多为 $2m+(\ell-m)=\ell+m$ 的带状算子。若 $[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=0$ 且 $\ell+m<n$，则引理 A.1 直接表明所有非对角元素 $\langle\delta_j,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\delta_k\rangle$, $j\neq k$ 均为零。

这证明，只要（ℓ, m）$\in\Xi_n$（且已知 $[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=0$），$\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 就是对角的。在下文中，我们证明

$$\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}=\begin{cases}\gamma\mathbb{1}_{\mathcal{H}} & \text{if } \ell-m \text{ is even}\\ 0 & \text{if } \ell-m \text{ is odd}\end{cases},\ \text{where } \gamma\in\mathbb{C}. \tag{94}$$

情形 1：$\ell-m$ 是奇数。

定义 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2\otimes\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的对角算子

$$a^{\uparrow}:=|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\otimes\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\ \text{and}\ a^{\downarrow}:=|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\otimes\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \tag{95}$$

并注意到 $a^{\uparrow}a^{\downarrow}=0$ 和 $a^{\uparrow}+a^{\downarrow}=\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$。直接检查可得，$a^{\uparrow}$ 和 $a^{\downarrow}$ 与 $C^{(j)}$ 对易，即

$$[a^{\uparrow},C^{(j)}]=[a^{\downarrow},C^{(j)}]=0, \tag{96}$$

并且它们满足交织关系

$$a^{\uparrow}B^{(j)}=B^{(j)}a^{\downarrow},\ \text{and}\ a^{\downarrow}B^{(j)}=B^{(j)}a^{\uparrow}. \tag{97}$$

接下来注意到，由于 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 具有奇数 $\ell-m$ 对应于奇数个 B，因此很容易看出

$$a^{\uparrow}\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}=\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}a^{\downarrow}=a^{\downarrow}\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} \tag{98}$$

其中，最后一个等式来自我们的假设：$\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 是对角的（对于 $(\ell,m)\in\Xi_n$）。这直接表明 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}=0$。

情形 2：$\ell-m$ 为偶数。

注 *5.2.* 注意，$T^{\mathcal{H}}_{-2}=\mathbb{1}_2\otimes T_{-1}$ 与 $B^{(j)}$ 和 $C^{(k)}$ 算子均对易（$T^{\mathcal{H}}_{-2}$ 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的平移算子，见 *(56)*），即，对于任意 j, $k\in\mathbb{Z}$.。因此我们得出 $[T^{\mathcal{H}}_{-2},\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}]=0$，也就是说，对所有 $j\in\mathbb{Z}$，都有 $\langle\delta_j,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\delta_j\rangle=\langle\delta_{j+2},\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\delta_{j+2}\rangle$，这表明 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}=\gamma_1a^{\uparrow}+\gamma_2a^{\downarrow}$，其中某些 γ_1, $\gamma_2\in\mathbb{C}$，这里 $a^{\uparrow}$ 和 $a^{\downarrow}$ 是 *(95)* 中定义的对角算子。这个简短的论证并不能证明定理；相反，我们需要证明 $[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]},T^{\mathcal{H}}_{-1}]=0$，这要复杂得多。

我们的主要目标是证明 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 对易于 $T^{\mathcal{H}}_{-1}$，注意到

$$[T^{\mathcal{H}}_{-1},B^{(j)}]=0,\ \text{but}\ T^{\mathcal{H}}_{-1}C^{(k)}=(C^{(k)})^{*}T^{\mathcal{H}}_{-1}. \tag{99}$$

$[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]},T^{\mathcal{H}}_{-1}]=0$ 这意味着，对于所有 $j\in\mathbb{Z}$，都有 $\langle\delta_j,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\delta_j\rangle=\langle\delta_{j+1},\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\delta_{j+1}\rangle$，这正是所需的结果。

回顾一下，$\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 可以写成

$$\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}=\sum_{\substack{0\le j_1<\ldots<j_\ell\le n-1\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^\ell;\\ |\eta|=m}}\ \prod_{k=1}^{\ell}A^{(j_k)}_{\eta_k},\ \text{where}\ A_{\eta_k}:=C^{\eta_k}B^{1-\eta_k}. \tag{100}$$

那么，在 B 的数量为偶数的情况下

$$T_{-1}\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}=\hat{\mathcal{S}}^{\ell,m}_{[0,n-1]}T_{-1}, \tag{101}$$

其中

$$\hat{\mathcal{S}}^{\ell,m}_{[0,n-1]} := \sum_{\substack{0\le j_1<\ldots<j_\ell\le n-1\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^\ell;\\ |\eta|=m}} \prod_{k=1}^{\ell}(A^{(j_k)}_{\eta_k})^*. \tag{102}$$

在（102）中，我们用到了这样一个事实：对于所有 $j\in\mathbb{Z}$，$(B^{(j)})^*=-B^{(j)}$。注意，由于 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 被给定（假设）为一个对角算子，因此

$$T_{-1}\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} = (\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]})^{(\uparrow)}T_{-1} \tag{103}$$

其中 $(\cdot)^{(\uparrow)}$ 表示向上平移一个单位，即

$$(\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]})^{(\uparrow)} := \sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle\delta_j,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\delta_j\rangle|\delta_{j-1}\rangle\langle\delta_{j-1}|. \tag{104}$$

因此，（101）和（103）表明 $\hat{}\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}=(\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]})^{(\uparrow)}$，因此 $\hat{}\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 也是对角的。因此，只需证明 $\hat{}\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 和 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 的对角元相等。这可由以下断言推出，再利用关于 $\eta\in\{0,1\}^\ell$ 的对称性即可。

断言 5.3。对于每个固定的 $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_\ell)\in\{0,1\}^\ell$ 和 $k\in\mathbb{Z}$，

$$\sum_{0\le j_1<\ldots<j_\ell\le n-1}\left\langle\delta_k,A^{(j_1)}_{\eta_1}A^{(j_2)}_{\eta_2}\ldots A^{(j_\ell)}_{\eta_\ell}\delta_k\right\rangle = \sum_{0\le j_1<\ldots<j_\ell\le n-1}\left\langle\delta_k,(A^{(j_1)}_{\eta_\ell})^*(A^{(j_2)}_{\eta_{\ell-1}})^*\ldots(A^{(j_\ell)}_{\eta_1})^*\delta_k\right\rangle. \tag{105}$$

下面给出该断言的证明。首先注意，式（105）中的对角元素在 j 平移下保持不变，也就是说，对任意 $c\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\left\langle\delta_k,A^{(j_1+c)}_{\eta_1}A^{(j_2+c)}_{\eta_2}\ldots A^{(j_\ell+c)}_{\eta_\ell}\delta_k\right\rangle &= \left\langle\delta_k,\mathcal{D}_n^cA^{(j_1)}_{\eta_1}A^{(j_2)}_{\eta_2}\ldots A^{(j_\ell)}_{\eta_\ell}(\mathcal{D}_n^c)^*\delta_k\right\rangle\\ &= \left\langle\delta_k,A^{(j_1)}_{\eta_1}A^{(j_2)}_{\eta_2}\ldots A^{(j_\ell)}_{\eta_\ell}\delta_k\right\rangle\end{aligned} \tag{106}$$

这里我们利用了如下事实：$A^{(j+c)}=\mathcal{D}_n^cA^{(j)}(\mathcal{D}_n^c)^*$，且 $\mathcal{D}_n$ 是 n-周期场（酉算子且为对角的），见式（58）。

接下来，在式（105）的左侧，作变量代换

$$(j_1,j_2,\ldots,j_\ell)\mapsto(-j_\ell,\ldots,-j_2,-j_1),$$

然后利用事实 $A^{(-j)}=A^{(j)*}$，

$$\begin{aligned}\sum_{0\le j_1<\ldots<j_\ell\le n-1}\left\langle\delta_k,\prod_{k=1}^{\ell}A^{(j_k)}_{\eta_k}\delta_k\right\rangle &= \sum_{-(n-1)\le j_1<\ldots<j_\ell\le 0}\left\langle\delta_k,A^{(-j_\ell)}_{\eta_1}A^{(-j_{\ell-1})}_{\eta_2}\ldots A^{(-j_1)}_{\eta_\ell}\delta_k\right\rangle\\ &= \sum_{-(n-1)\le j_1<\ldots<j_\ell\le 0}\overline{\left\langle\delta_k,A^{(j_\ell)}_{\eta_1}A^{(j_{\ell-1})}_{\eta_2}\ldots A^{(j_1)}_{\eta_\ell}\delta_k\right\rangle}\\ &= \sum_{0\le j_1<\ldots<j_\ell\le n-1}\overline{\left\langle\delta_k,A^{(j_\ell)}_{\eta_1}A^{(j_{\ell-1})}_{\eta_2}\ldots A^{(j_1)}_{\eta_\ell}\delta_k\right\rangle}\\ &= \sum_{0\le j_1<\ldots<j_\ell\le n-1}\left\langle\delta_k,(A^{(j_1)}_{\eta_\ell})^*(A^{(j_2)}_{\eta_{\ell-1}})^*\ldots(A^{(j_\ell)}_{\eta_1})^*\delta_k\right\rangle.\end{aligned} \tag{107}$$

在第二步到第三步中，我们利用了在 j 平移下的不变性（106）。至此，该断言的证明完成，且引理 5.1 中的情形 2（当 $\ell-m$ 为偶数时）也证毕。□

我们需要强调 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 的一些重要递归性质。

引理 5.4。 对于所有 $0 \le m \le \ell \le n$，我们有以下递归公式

$$\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} = \begin{cases} B\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]} + \mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n} & \text{if } m=0 \\ C\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]} + B\mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]} + \mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n} & \text{if } 1\le m<\ell \\ C\mathcal{S}^{\ell-1,\ell-1}_{[1,n-1]} + \mathcal{S}^{\ell,\ell}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n} & \text{if } m=\ell\in[1,n] \end{cases} \tag{108}$$

and

$$\mathcal{D}_n\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}(\mathcal{D}_n)^* = \begin{cases} \mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}B + \mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n} & \text{if } m=0 \\ \mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}C + \mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]}B + \mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n} & \text{if } 1\le m<\ell \\ \mathcal{S}^{\ell-1,\ell-1}_{[1,n-1]}C + \mathcal{S}^{\ell,\ell}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n} & \text{if } m=\ell\in[1,n] \end{cases} \tag{109}$$

其中 $\chi_{\ell\neq n}=1$ 若 $\ell\neq n$，否则为零。

注意到 $\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}$ 和 $\mathcal{S}^{\ell-1,\ell-1}_{[1,n-1]}$ 分别仅由 B和仅由 C 算子的乘积之和构成。由于 $[B,B^{(j)}]=[C,C^{(j)}]=0$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$均成立，我们注意到 $[B,\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}]=[C,\mathcal{S}^{\ell-1,\ell-1}_{[1,n-1]}]=0$。比较（108）和（109），即可得出以下推论。

推论 5.5。对于任意 $0\le\ell\le n$,

$$[\mathcal{S}^{\ell,0}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=0 \text{ and } [\mathcal{S}^{\ell,\ell}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=0 \tag{110}$$

以及一般的 $1\le m\le\ell\le n$

$$[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=0 \iff [C,\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]}]=0. \tag{111}$$

证明（108）的思路是，我们可以将 $\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}$ 写成三个大和式之和：第一个和式包含所有以 $C^{(0)}$ 开头的项（假设 $m\ge1$），第二个和式包含以 $B^{(0)}$开头的项，最后一个和式则包含其余的乘积。对（109）也可以作类似论证。具体如下。

引理*5.4*的证明。我们先证明 $m=0$时的简单情形，然后 $m\ge1$ 的情形可直接推广得到。

回忆一下,

$$\mathcal{S}^{\ell,0}_{[0,n-1]} = \sum_{0\le j_1<j_2<\ldots<j_\ell\le n-1} B^{(j_1)}B^{(j_2)}\ldots B^{(j_\ell)}. \tag{112}$$

那么，我们可以将以 B 开头的项区分如下

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\ell,0}_{[0,n-1]} &= \sum_{1\le j_2<j_3<\ldots<j_\ell\le n-1} B^{(0)}\prod_{k=2}^{\ell}B^{(j_k)} + \chi_{\ell\neq n}\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_\ell\le n-1}\prod_{k=1}^{\ell}B^{(j_k)} \\ &= B\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]} + \mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n} \end{aligned} \tag{113}$$

这证明了（108）的第一种情况。要在 $m=0$ 时证明（109），将 $\mathcal{S}^{\ell,0}_{[0,n-1]}$ 中的（112）从左侧乘以 $\mathcal{D}_n$，并应用（58），得 $\mathcal{D}_nB^{(j)}=B^{(j+1)}\mathcal{D}_n$，从而得到

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n\mathcal{S}^{\ell,0}_{[0,n-1]} &= \sum_{0\le j_1<j_2<\ldots<j_\ell\le n-1}\prod_{k=1}^{\ell}B^{(j_k+1)}\mathcal{D}_n \\ &= \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_{\ell-1}\le n-1}\left(\prod_{k=1}^{\ell-1}B^{(j_k)}\right)B\mathcal{D}_n + \chi_{\ell\neq n}\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_\ell\le n-1}\prod_{k=1}^{\ell}B^{(j_k)}\mathcal{D}_n \end{aligned}$$

$$= (\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]} B + \chi_{\ell\neq n}\, \mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]})\mathcal{D}_n \tag{114}$$

这里用到了这一事实： $B^{(n)} = B^{(0)}$。

对于一般的 $m \geq 1$，我们注意到 $\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 可通过考察 $j_1 = 0$ 和 $j_1 \neq 0$ 的情形，写成以下各项之和。

$$\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} = \sum_{\substack{j_1=0,\ 1\leq j_2<\ldots<j_\ell\leq n-1\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^\ell\\ |\eta|=m}} A^{(0)}_{\eta_1}\prod_{k=2}^{\ell} A^{(j_k)}_{\eta_k} + \chi_{\ell\neq n}\,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]} \tag{115}$$

并且，关于 $\eta_1 \in \{0,1\}$，第一个和也可以拆分如下

$$1^{\text{st}} \text{ term in } (115) = \sum_{\substack{j_1=0,\ 1\leq j_2<\ldots<j_\ell\leq n-1\\ \eta_1=1,\ \eta=(\eta_2,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^{\ell-1}\\ |\eta|=m-1}} \ldots + \sum_{\substack{j_1=0,\ 1\leq j_2<\ldots<j_\ell\leq n-1\\ \eta_1=0,\ \eta=(\eta_2,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^{\ell-1}\\ |\eta|=m}} \ldots$$

$$= C\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]} + B\mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]}. \tag{116}$$

我们得到

$$\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]} = C\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]} + B\mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]} + \chi_{\ell\neq n}\,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]}. \tag{117}$$

接下来，我们利用 $\mathcal{D}_n C^{(j)} = C^{(j+1)}\mathcal{D}_n$ 和 $\mathcal{D}_n B^{(j)} = B^{(j+1)}\mathcal{D}_n$ 求得 $\mathcal{D}_n\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$，然后从乘积的“尾部”提取公因子 B 和 C，如下所示。

$$\mathcal{D}_n\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\mathcal{D}^*_n = \sum_{\substack{0\leq j_1<\ldots<j_\ell\leq n-1\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^\ell;\\ |\eta|=m}} \prod_{k=1}^{\ell} A^{(j_k+1)}_{\eta_k} = \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_\ell\leq n\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^\ell;\\ |\eta|=m}} \prod_{k=1}^{\ell} A^{(j_k)}_{\eta_k}$$

$$= \chi_{\ell\neq n}\,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]} + \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_{\ell-1}\leq n-1,\ j_\ell=n\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_\ell)\in\{0,1\}^\ell;\\ |\eta|=m}} \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} A^{(j_k)}_{\eta_k}\right) A^{(0)}_{\eta_\ell}. \tag{118}$$

然后，我们将第二项（求和）拆分为

$$2^{\text{nd}} \text{ (1中的项 18)} = \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_{\ell-1}\leq n-1,\ j_\ell=n\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_{\ell-1})\in\{0,1\}^{\ell-1},\ \eta_\ell=0\\ |\eta|=m}} \ldots + \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_{\ell-1}\leq n-1,\ j_\ell=n\\ \eta=(\eta_1,\ldots\eta_{\ell-1})\in\{0,1\}^{\ell-1},\ \eta_\ell=1\\ |\eta|=m-1}} \ldots$$

$$= \mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]} B + \mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]} C. \tag{119}$$

因此，我们证明了

$$\mathcal{D}_n\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}\mathcal{D}^*_n = \mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]} C + \mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]} B + \mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]}\,\chi_{\ell\neq n}. \tag{120}$$

□

5.2. 对 ℓ 和 m进行归纳论证。现在我们可以给出定理4.3的证明了。也就是说，我们将证明，对于所有的$(\ell, m) \in \Xi_n$，$\mathcal{S}^{\ell,\ m}_{[0,n-1]}$ 是恒等算子的常数倍。这里我们提醒读者（为方便起见），

$$\Xi_n := \{(\ell,m)\in\mathbb{Z}^2;\ 0\leq m\leq \ell\leq n \text{ such that } \ell+m<n\}. \tag{121}$$

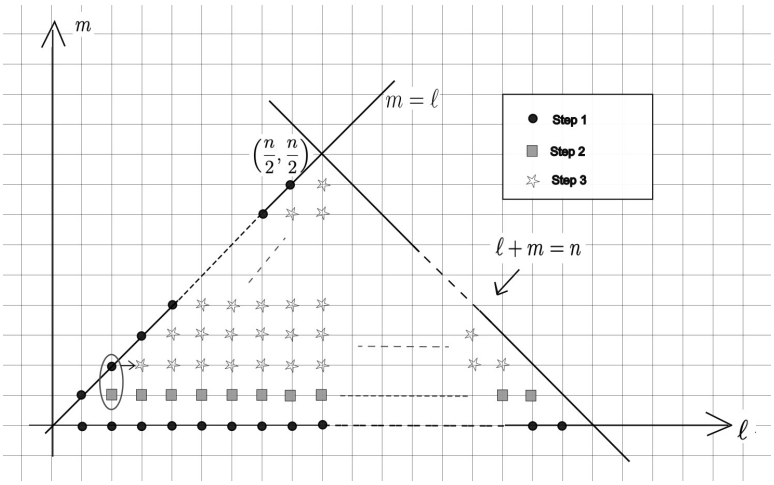


FIGURE 5. $\Xi_n \subset \mathbb{Z}^2$ 区域及关于 ℓ 和 m 的归纳证明步骤。

定理4.3的证明。我们对 m 和 ℓ 使用归纳法，以证明 $[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 对于所有的$(\ell, m) \in \Xi_n$，此时引理5.1 即可直接给出所需结果。

我们将针对 $(\ell, m) \in \Xi_n$ 采用归纳论证，分为三个步骤，见图 5，并证明以下结论

- 步骤 *1*： $[\mathcal{S}^{\ell,0}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 对所有 $1 \le \ell < n$ 均成立，且 $[\mathcal{S}^{\ell,\ell}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 对所有 $1 \le \ell < n/2$ 均成立。
- 步骤 *2*： $[\mathcal{S}^{\ell,1}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 对所有 $2 \le \ell < n-1$ 均成立。
- 步骤 *3*：这里我们使用归纳论证：若 $[\mathcal{S}^{\ell,k}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = [\mathcal{S}^{\ell,k-1}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$，则对所有满足 $\ell + k < n$ 的 $2 \le k \le \ell$，$[\mathcal{S}^{\ell+1,k}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 均成立。

步骤 1 的证明：这是推论 5.5 中的结果（110）。引理 5.1 蕴含，对于所有 $\ell < n$， $\mathcal{S}^{\ell}$、$\mathcal{S}^{0}_{[0,n-1]}$ 是恒等算子的常数倍；对于所有 $2 \le 2\ell < n$， $\mathcal{S}^{\ell}$、$\mathcal{S}^{\ell}_{[0,n-1]}$ 也是恒等算子的常数倍。

步骤 2 的证明：我们对 $1 \le \ell \le n-2$ 使用归纳法。初始步骤 $[\mathcal{S}^{1,1}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 已在步骤 1 中证明。对于归纳步骤，假设对于一个固定的 $1 \le \ell < n-2$， $[\mathcal{S}^{\ell,1}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$ 成立（因此它是恒等算子的常数倍，见引理 5.1）。也就是说，我们假设（见推论 5.5）

$$[C, \mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}] + [B, \mathcal{S}^{\ell-1,1}_{[1,n-1]}] = 0 \tag{122}$$

并且我们要证明$[\mathcal{S}^{\ell+1,1}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0$。令 $m = 1$ 代入推论111中的式5.5 ，即可得到

$$[\mathcal{S}^{\ell+1,1}_{[0,n-1]}, \mathcal{D}_n] = 0 \iff [C, \mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]}] + [B, \mathcal{S}^{\ell,1}_{[1,n-1]}] = 0. \tag{123}$$

因此，只需证明

$$[C, \mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]}] + [B, \mathcal{S}^{\ell,1}_{[1,n-1]}] = 0. \tag{124}$$

注意，引理 5.1 结合 步骤 *1* 和归纳假设，可知这两个算子$\mathcal{S}^{\ell,\,0}_{[0,n-1]}$ 和 $\mathcal{S}^{\ell,\,1}_{[0,n-1]}$ 都是恒等算子的常数倍，并回顾式（108）可得

$$\mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]} = \mathcal{S}^{\ell,0}_{[0,n-1]} - B\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]} \text{ and } \mathcal{S}^{\ell,1}_{[1,n-1]} = \mathcal{S}^{\ell,1}_{[0,n-1]} - C\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]} - B\mathcal{S}^{\ell-1,1}_{[1,n-1]}, \tag{125}$$

并且 $\mathcal{S}^{\ell,\ 0}_{[0,n-1]}$ 是恒等算子的常数倍，由此可知

$$[C,\mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]}]=-[C,B\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}]. \tag{126}$$

同样，由于 $\mathcal{S}^{\ell,\ 1}_{[0,n-1]}$ 是恒等算子的常数倍，因此（125）给出

$$[B,\mathcal{S}^{\ell,1}_{[1,n-1]}]=-[B,C\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}+B\mathcal{S}^{\ell-1,1}_{[1,n-1]}]. \tag{127}$$

然后将方程（126）和（127）相加，使用莱布尼茨法则 $[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$，以及 $\mathcal{S}^{\ell-1,\ 0}_{[1,n-1]}$ 仅是 $B^{(j)}$ 算子乘积之和这一事实，因此它与 B 对易，从而得到

$$\begin{aligned}[C,\mathcal{S}^{\ell,0}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell,1}_{[1,n-1]}] &= -B\left([C,\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell-1,1}_{[1,n-1]}]\right)-([C,B]+[B,C])\mathcal{S}^{\ell-1,0}_{[1,n-1]}\\ &= 0\end{aligned} \tag{128}$$

其中我们使用了归纳假设（122）。

步骤 *3* 的证明：假设对于任意固定的 ℓ 和 m，满足 $2\le m\le \ell$ 和 $\ell+m<n$ 时，我们有 $[\mathcal{S}^{\ell,m}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=[\mathcal{S}^{\ell,m-1}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=0$，即我们假设

$$\begin{aligned}[C,\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]}] &= 0\\ [C,\mathcal{S}^{\ell-1,m-2}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}] &= 0\end{aligned} \tag{129}$$

并且我们需要证明

$$[\mathcal{S}^{\ell+1,m}_{[0,n-1]},\mathcal{D}_n]=0,\ \text{that is}\ [C,\mathcal{S}^{\ell,m-1}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]}]=0. \tag{130}$$

我们按照前一步的做法进行。引理 5.1与 步骤 *1* 以及归纳假设表明，算子 $\mathcal{S}^{\ell}$、$^{\ m}_{[0,n-1]}$ 和 $\mathcal{S}^{\ell}$、$^{\ m-1}_{[0,n-1]}$ 都是恒等算子的常数倍。也就是说，根据（108），

$$[C,\mathcal{S}^{\ell,m-1}_{[1,n-1]}] = -[C,C\mathcal{S}^{\ell-1,m-2}_{[1,n-1]}+B\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}] \tag{131}$$

$$[B,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]}] = -[B,C\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}+B\mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]}]. \tag{132}$$

将这两个公式相加，可知 $[C,\mathcal{S}^{\ell,m-1}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell,m}_{[1,n-1]}]$ 可以写成

$$\begin{aligned}&= -C\left([C,\mathcal{S}^{\ell-1,m-2}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}]\right)-([C,B]+[B,C])\,\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}+\\ &\qquad -B\left([C,\mathcal{S}^{\ell-1,m-1}_{[1,n-1]}]+[B,\mathcal{S}^{\ell-1,m}_{[1,n-1]}]\right)\\ &= 0\end{aligned} \tag{133}$$

这里用到了归纳假设（129）。这就证明了（130），并完成了归纳论证。□

Appendix A. Auxiliary Lemmas

在此应用中 附录中，我们给出正文中用到的一些引理。 rk.

引理 A.1. 设 $D=$(对角$\{d_1,d_2,\dots,d_n\})^{\oplus\mathbb{Z}}$ 是作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的周期算子，其（基本）周期为 n，且 $\{d_j\in\mathbb{C},\ j=1,\dots,n\}$ 是由互不相同的复数组成的集合。若作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的带状算子K 的带宽小于 n，并且它与 D 对易，那么 K 是乘法算子，即 K 是对角的。

证明. 不失一般性，我们可以假设

$$D = \sum_{j\in\mathbb{Z}} d_j |j\rangle\langle j|, \text{ where } d_{j+n} = d_j \text{ for all } j \in \mathbb{Z}. \tag{134}$$

若 K 与 D 对易，则对于所有 $j,\ k \in \mathbb{Z}$，都有 $\langle j|KD|k\rangle = \langle j|DK|k\rangle$ 。因此

$$d_k\langle j|K|k\rangle = d_j\langle j|K|k\rangle. \tag{135}$$

根据 n-周期算子 D 的构造，我们有：当 $0 < |j-k| < n$ 时， $d_j \neq d_k$ 。因此，对于所有满足 $0 < |j-k| < n$ 的 $j,\ k \in \mathbb{Z}$，都有 $\langle j|K|k\rangle = 0$，即 K 是对角的。□

引理 A.2。 对于算子 B 和 C （由 55）定义的，以及（ X 18）中的位置算子，我们有如下结论

$$\|[X,B]\| = \|[X,C]\| = 1, \ \textit{and}\ \|[X, rBt + Ct^2]\| = t. \tag{136}$$

证明。 注意， $B = T_{-1}^{\mathcal{H}} - T_1^{\mathcal{H}}$可以写成

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes T_{-1} - |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes T_1 \tag{137}$$

并回忆

$$C = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes T_{-1} + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes T_1. \tag{138}$$

于是，直接计算可得

$$\begin{aligned} [X,B] &= |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta_j^- |j-1\rangle\langle j| - |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta_j^+ |j+1\rangle\langle j| \\ [X,C] &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta_j^+ |j+1\rangle\langle j| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta_j^- |j-1\rangle\langle j| \end{aligned} \tag{139}$$

其中

$$\eta_j^{\pm} := |j \pm 1| - |j| \leq |\eta_j^{\pm}| = 1 \text{ for all } j \in \mathbb{Z}. \tag{140}$$

注意到对所有 $j \in \mathbb{Z}$，$(\eta_j^{\pm})^2 = 1$ ，因此显然可得

$$[X,B]([X,B])^* = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\eta_{j+1}^-)^2 |j\rangle\langle j| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\eta_{j-1}^+)^2 |j\rangle\langle j| = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}. \tag{141}$$

类似地，我们有 $[X,C]([X,C])^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$，从而表明

$$\|X,B\| = \|[X,C]\| = 1. \tag{142}$$

利用公式 (139) 和 $(\eta_j^{\pm})^2 = 1$ 对所有 $j \in \mathbb{Z}$ 直接可得

$$[X, rtB + t^2C]([X, rtB + t^2C])^* = (r^2t^2 + t^4)\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \tag{143}$$

由此可得

$$\|[X, rtB + t^2C]\| = \sqrt{r^2t^2 + t^4} = t. \tag{144}$$

□

AppendixB. A Proof of Lemma 3.1

由于 $U_{t,\ \mathcal{D}}$ 是酉算子，我们简化

$$\|\tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X)-X\| = \|(U_{t,\mathcal{D}}^*)^N(XU_{t,\mathcal{D}}^N - U_{t,\mathcal{D}}^N X)\| = \|[X,U_{t,\mathcal{D}}^N]\|. \tag{145}$$

然后我们利用莱布尼茨法则展开交换子

$$[X,U_{t,\mathcal{D}}^N] = \sum_{k=0}^{N-1} U_{t,\mathcal{D}}^k [X,U_{t,\mathcal{D}}] U_{t,\mathcal{D}}^{N-k-1} \tag{146}$$

并得到

$$\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X)-X\| = \frac{1}{N}\|[X,U_{t,\mathcal{D}}^N]\| \le \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\|[X,U_{t,\mathcal{D}}]\| = \|[X,U_{t,\mathcal{D}}]\|. \tag{147}$$

回顾一下，局域场 $\mathcal{D}$ 是对角的且为酉算子，因此

$$\|[X,U_{t,\mathcal{D}}]\| = \|[X,U_t]\| = \|[X,r^2\mathbb{1}_{\mathcal{H}} + rBt + Ct^2]\| = \|[X,rBt+Ct^2]\| = t, \tag{148}$$

其中我们使用了引理A.2以及（54），即

$$U_t = r^2\mathbb{1}_{\mathcal{H}} + rBt + Ct^2 \tag{149}$$

其中 B 和 C 由（55）给出。这证明了不等式（25）。

为证明 $v_{U_{1,\ \mathcal{D}}} = 1$，我们首先注意到，对于任意局域场 $\mathcal{D}$，

$$U_{1,\mathcal{D}} = \mathcal{D}C = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_j \xi_{2j-2}|j-1\rangle\langle j| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_j \xi_{2j+1}|j+1\rangle\langle j|, \tag{150}$$

其中，对所有 $j\in\mathbb{Z}$，$\xi_j = \langle j|\mathcal{D}|j\rangle$ 成立，并回忆起对所有 j，$|\xi_j|=1$ 成立。由此可直接得到

$$\begin{aligned} U_{1,\mathcal{D}}^N \ = \ & |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_j \left(\prod_{k=1,k \text{ is even}}^{2N-1} \xi_{2j-k}\right)|j-N\rangle\langle j| + \\ & + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_j \left(\prod_{k=1,k \text{ is odd}}^{N} \xi_{2j+k}\right)|j+N\rangle\langle j|. \end{aligned} \tag{151}$$

利用初始状态 $\Psi_0 = \varphi\otimes|0\rangle$，其中 $\varphi\in\mathbb{C}^2$ 且 $\|\varphi\|=1$，我们得到（单位向量）

$$U_{1,\mathcal{D}}^N\Psi_0 = \langle\downarrow|\varphi\rangle\left(\prod_{k=1,k \text{ is even}}^{2N-1}\xi_{2j-k}\right)|\downarrow\rangle\otimes|-N\rangle + \langle\uparrow|\varphi\rangle\left(\prod_{k=1,k \text{ is odd}}^{N}\xi_{2j+k}\right)|\uparrow\rangle\otimes|N\rangle \tag{152}$$

于是 $XU_{1,\ \mathcal{D}}^N\Psi_0 = NU_{1,\ \mathcal{D}}^N\Psi_0$，这意味着 hat $\frac{1}{N}\langle X\rangle_{U_{1,\ \mathcal{D}}^N\Psi_0} = 1$。因此，对于任意场 $\mathcal{D}$，$v_{1,\ \mathcal{D}}=1$，并且

$$1 = v_{1,\mathcal{D}} \le \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\|\tau_N^{U_{t,\mathcal{D}}}(X)-X\| \le 1 \tag{153}$$

参见（25）。

References

[1] Y. Aharonov, L. Davidovich, N. Zagury, 量子随机游走, 《物理评论A辑》 **48**, 1687-1690 (1993).[2] A. Ahlbrecht, V. B. Scholz, A.H. Werner, 一维晶格中的无序量子游走, 《数学物理学杂志》 **52**, 102201 (2011).[3] A. Ahlbrecht, H. Vogts, A. H. Werner, R. F. Werner, 随机硬币量子游走的渐近演化, 《数学物理学杂志》 **52**,042201 (2011).[4] J. Asch, P. Duclos, P. Exner, 具有增长间隙的受驱动系统的稳定性、量子环与*Wannier*梯子, 《统计物理学杂志》 **92**,1053-1070 (1998).

[5] *J. Asch, A. Knauf*，《周期势中的运动》，《非线性》*11, 175 (1998)*。[6] *O. Bourget, J. Howland, A. Joye*，《酉带状矩阵的谱分析》，《数学物理通讯》*234, 191-227 (2003)*。[7] *G. Blatter, D. Browne*，《小型导电环中的齐纳隧穿与局域化》，《物理评论*B*辑》*37, 3856 (1988)*。[8] *M. J. Cantero, L. Moral, L. Vel´azquez*，《五对角矩阵与单位圆上的正交多项式的零点》，《线性代数及其应用》*362, 29-56 (2003)*。[9] *C. M. Chandrashekar, Th. Busch*，《局域量子行走作为安全量子存储器》，《欧洲物理快报》*110, 10005 (2015)*。[10] *A. M. Childs, D. Gosset, Z. Webb*，《通过多粒子量子行走实现通用计算》，《科学》*339, 791-794 (2013)*。[11] *Chou Chung-I, Ho Choon-Lin*，《直线上周期势中的量子行走的局域化与复归》，《中国物理*B*辑》*23, 110302 (2014)*[12] *D. Damanik, J. Erickson, J. Fillman, G. Hinkle, A. Vu*，《稀疏*CMV*矩阵的量子间歇性及其在半直线上的量子行走中的应用》，《近似理论杂志》*208, 59-84 (2016)*。[13] *D. Damanik, J. Fillman, D. C. Ong*，《通过传递矩阵的幂律界估计整数格点上量子行走的扩展》，《纯粹与应用数学杂志》*105, 293-341 (2016)*。[14] *D. Damanik, M. Lukic, W. Yessen*，《周期与极限周期雅可比矩阵及块雅可比矩阵的量子动力学及其在若干量子多体问题中的应用》，《数学物理通讯》*337,1535-1561 (2015)*。[15] *B. Danaci* 等，《量子行走中的无无序局域化》，《物理评论*A*辑》*103, 022416 (2021)*。[16] *C. Di Franco, M. Paternostro*，《周期性硬币操作下二维交替量子行走中的类局域化效应》，《物理评论*A*辑》*91, 012328 (2015)*。[17] *C. Esposito* 等，《二维合成晶格中两个关联光子的量子行走》，《*npj*量子信息》*8, 34 (2022)*。[18] *L. Fang, D. Damanik, S. Guo*，《动力学定义的*Verblunsky*系数对应的*CMV*矩阵的一般谱结果》，《函数分析杂志》*279, 108803 (2020)*。[19] *E. Hamza, A. Joye*，《关联马尔可夫量子游走》，《亨利·庞加莱年刊》*13, 1767-1805 (2012)*。[20] *E. Hamza, A. Joye*，《树上的随机量子行走的谱转变》，《数学物理通讯》*326, 415-439 (2014)*。[21] *E. Hamza, A. Joye, G. Stolz*，《幺正安德森模型的动力学局域化》，《数学物理分析与几何》*12, 381 (2009)*。[22] *E. Hamza, A. Joye, G. Stolz*，《随机酉算子的局域化》，《数学物理快报》*75, 255-272 (2006)*。[23] *E. Hamza, G. Stolz*，《幺正安德森模型的李雅普诺夫指数》，《数学物理学杂志》*48, 043301 (2007)*。[24] *A. Joye*，《随机酉模型及其局域化性质》，载于《熵与量子*II*》，当代数学，第*552*卷（美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，*2011*）第*117-134*页。[25] *A. Joye*，《随机酉带状矩阵的态密度与*Thouless*公式》，《亨利·庞加莱年刊》*5, 347-379 (2004)*。´*A. Joye*，《随机酉带状矩阵的分数阶矩估计》，《数学物理快报》*72, 51-64 (2005)*。[26] *A. Joye, M. Merkli*，《随机环境中量子行走的动力学局域化》，《统计物理学杂志》*140, 1025-1053 (2010)*。[27] *M. Karski* 等，《单个光学俘获原子的位置空间量子游走》，《科学》*325, 174-177 (2009)*。[28] *T. Kitagawa, E. Berg, M. Rudner, E. Demler*，《周期驱动量子系统的拓扑表征》，《物理评论*B*辑》*82, 235114 (2010)*。[29] *T. Kitagawa* 等，《对光子量子行走中拓扑保护束缚态的观测》，《自然通讯》*3, 882 (2012)*。[30] *N. Konno*，《随机环境中的一维离散时间量子游走》，《量子信息处理》*8, 387399 (2009)*。[31] *N. Konno*，《量子行走》，载于《量子势理论》，*Franz, Sch*[32] *ur mann* 编，《数学讲义》，*1954, 309-452, (2009)*。[33] *Y. Lahini* 等，《一维无序光子晶格中的安德森局域化与非线性》，《物理评论快报》*100, 013906 (2008)*。[34] *Y. Lahini, G. R. Steinbrecher, A. D. Bookatz, D. Englund*，《利用关联一维量子游走实现量子逻辑》，《*npj*量子信息》*4, 2 (2018)*。[35] *M. Leonetti* 等，《通过光的横向局域化实现安全信息传输》，《科学报告》*6, 29918 (2016)*。

[36] L. Li, D. Damanik, Q. Zhou, 几乎周期的Verblunsky系数对应的CMV矩阵的康托尔谱，《函数分析杂志》283, 109709 (2022).[37] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, V. Kendon, 使用离散时间量子行走实现通用量子计算，《物理评论A辑》81, 042330 (2010).[38] D. Lenstra, W. van Haeringen, 常态金属环中的弹性散射导致电阻性电子行为，《物理评论快报》57, 1623-1626 (1986).[39] I. G. Macdonald,《对称函数与霍尔多项式》（第2版）。牛津：克拉伦登出版社，1995年。[40] L. Martin et al., 非对角耦合无序光波导阵列中的安德森局域化，《光学快报》19, 13636-13646 (2011).[41] A. Montanaro, 量子算法：概述，《npj量子信息》2, 15023 (2016).[42] D. T. Nguyen, D. A. Nolan, N. F. Borrelli, 准周期斐波那契波导阵列中的局域量子行走，《光学快报》27, 886-898 (2019).[43] D. T. Nguyen et al.,《周期与准周期斐波那契光纤中的量子行走》，《科学报告》10, 7156 (2020).[44] C. Noh, D. G. Angelakis, 光与多体物理中的量子模拟，《物理学进展报告》80, 016401 (2017).[45] C. R. de Oliveira, M. S. Simsen, 具有纯点谱和能量不稳定性的Floquet算符，Ann. H. Poincar´e 7, 1255-1277 (2008).[46] R. Portugal, 量子行走与搜索算法，施普林格纽约，2013年。[47] J.W. Ryu, G. Hur, S. W. Kim, 开放混沌系统中的量子局域化，《物理评论E辑：统计、非线性与软物质物理》78, 037201 (2008).[48] L. Sansoni, F. Sciarrino, G. Vallone, P. Mataloni, A. Crespi, 通过集成光子学实现双粒子玻色子-费米子量子行走，《物理评论快报》108, 010502 (2012).[49] B. Sephton et al., 采用明亮经典光的多功能量子行走谐振腔，PLoS ONE 14, e0214891 (2019).[50] N. Shenvi, J. Kempe, K. B. Whaley, 一种量子随机行走搜索算法，《物理评论A辑》67, 052307 (2003).[51] B. Simon, CMV矩阵：五年之后，《计算与应用数学杂志》208, 120-154 (2006).[52] J. Spring et al., 光子芯片上的玻色子采样，《科学》339, 798-801 (2013).[53] R. P. Stanley, 计数组合学，第2卷。剑桥：剑桥大学出版社，1999年。[54] J. Wu, W.W. Zhang, B. C. Sanders, 拓扑量子行走：理论与实验，《物理学前沿》14, 61301 (2019).[55] L. Xiao et al., 宇称-时间对称量子行走中的拓扑边缘态观测，《自然·物理》13, 1117-1123 (2017).

Houssam Abdul-Rahman, Mathematics, Science Division, NYU Abu Dhabi.电子邮件地址：ha2271@nyu.edu

Günter Stolz, Department of Mathematics, University of Alabama at Birmingham, Birmingham,AL 35294 USA, Phone +1-205-934-2154电子邮件地址：stolz@uab.edu