arXiv:2302.01875v2 [math.CO] 7 Mar 2023

最小度较大且没有短奇圈的图可3着色

¨ ´JULIA BOTTCHER、NORA FRANKL、DOMENICO MERGONI CECCHELLI、OLAF PARCZYK 和 JOZEFSKOKAN

ABSTRACT. 针对 Letzter 和 Snyder 提出的问题，我们证明：当k 足够大时，任何 n顶点图 G 若最小度至少为 $\frac{1}{2k-1}n$ ，且不含长度小于 $2k+1$ 的奇圈，则可3着色。事实上，我们证明了一个更强的结果，该结果所需的最小度略低。

1. INTRODUCTION

确定一个图的色数是一项困难的问题。这也解释了为什么图论中大量研究转而致力于确定这一数量的有意义的上界；这些上界也可视为对所研究图的结构复杂性所允许范围的限制。由此自然产生的一个问题是：对于有限的非平凡 $\mathcal{H}$， $\mathcal{H}$-自由图这一类图的色数是否有界？这里，若一个图 G不含集合 $\mathcal{H}$ 中的任何图作为子图，则称它为 $\mathcal{H}$-自由图；若集合 $\mathcal{H}$ 中的图都不是森林，则称 $\mathcal{H}$ 为非平凡。Erd˝os [5]在早期运用著名概率方法的研究中，对这个问题给出了否定答案：对于每个有限的非平凡 $\mathcal{H}$ 和每个正整数 c，都存在色数至少为 c的 $\mathcal{H}$-自由图。

在另一篇颇具影响力的论文中，Erd˝os 和 Simonovits [6] 询问了如果同时引入最小度条件会发生什么。更准确地说，他们开启了对所谓的 $\mathcal{H}$ 色数剖面的研究。为定义这一概念，引入一些记号会很方便。我们用 $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ 表示所有 $\mathcal{H}$-free 图所组成的族，并用 $\mathcal{G}(\mathcal{H},\alpha)$ 表示 $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ 中最小度至少为 $\alpha|V(G)|$ 的图的集合。对于 $c \geq 2$ 正整数， $\mathcal{H}$ 的色数剖面作为 c中的函数为

$$\delta_\chi(\mathcal{H}, c) = \inf\{\alpha \in [0,1] : \forall G \in \mathcal{G}(\mathcal{H},\alpha),\ \chi(G) \leq c\}.$$

该函数衡量了为保证一个 $\mathcal{H}$-free 图的色数至多为 c，其最小度需要达到多大。Erd˝os 和 Simonovits [6] 认为，在完全一般的情形下，这个量似乎“过于复杂”而难以研究。尽管过去几十年来已经取得了相当大的进展，这一判断至今仍然成立。本文旨在增进对长度不超过某个特定值的奇圈族的色数剖面的理解。

但我们先来总结一下已有的结论。Erd˝os 和 Simonovits 发表论文后不久，Andr´asfai、Erd˝os 和 S´os [2] 证明，对于最小度严格大于 $\frac{3r-7}{3r-4}|V(G)|$ 的 $\{K_r\}$-自由图，其色数至多为 $r-1$。此外，他们在同一篇论文中给出了最小度为 $\frac{3r-7}{3r-4}|V(G)|$ 、其

日期：2023年3月8日。NF 在本研究的早期阶段获得了 LMS青年学者奖学金资助，并部分获得 ERC高级资助“GeoScape”的资助。OP 获得德国研究基金会（DFG）资助，资助项目属于德国卓越战略——柏林数学研究中心 MATH+ （EXC-2046/1，项目编号：390685689）。

色数恰好为 r 的 $\delta_\chi(\{K_r\}, r-1) = \frac{3r-7}{3r-4}$。其他已知结果包括 Haggkvist [8] 和 Jin [9], 得到的 $\delta_\chi(\{K_3\}, 3) = \frac{10}{29}$，以及 Brandt 和 Thomass´e [3] 对每个 $c \geq 4$ 得到的 $\delta_\chi(\{K_3\}, c) = \frac{1}{3}$。另一方面，Thomassen [15] 证明了 $\delta_\chi(\{C_5\}, c) \leq \frac{6}{c}$，并且更一般地，给出了 $\delta_\chi(\{C_k\}, c)$ 的一个上界；结合 Ma [12] 的一个结果，这意味着对每个固定的 k，

$$\Omega\Big((k+1)^{-4(c+1)}\Big) = \delta_\chi\big(\{C_k\}, c\big) = O\Big(\frac{k}{c}\Big).$$

接下来的研究进展涉及两个与色数剖面相关的量：色数阈值和同态阈值。$\mathcal{H}$ 的色数阈值为

$$\delta_\chi(\mathcal{H}) = \inf\{\alpha \in [0,1] : \exists K \text{ s.t. } \forall G \in \mathcal{G}(\mathcal{H}, \alpha),\ \chi(G) \leq K\},$$

它衡量的是，要保证不含 δ_χ的图的色数有某个常数上界，最小度需要达到多大。例如，上文提到的 Brandt 和 Thomass´e [3] 的结果表明，$\delta_\chi(\{C_3\}) = \frac{1}{3}$。如今，色数阈值比色数剖面得到了深入得多的理解。在 Luczak 和 Thomass´e [17], 的工作基础上，并推广了此前的若干结果后，Allen、B¨ottcher、Griffiths、Kohayakawa 和 Morris [1] 确定了每个有限族 $\mathcal{H}$的色数阈值。关于色数阈值研究历史的更多详情，请参阅这篇论文及其中的参考文献。

为了获得更完整的图景，可以考虑一个限制更严格的概念：族 $\mathcal{H}$的同态阈值 $\delta_{\hom}(\mathcal{H})$。它衡量的是，保证不含 $\mathcal{H}$的图同态映射到一个小的不含 $\mathcal{H}$的图所需的最小度。也就是说，

$$\delta_{\hom}(\mathcal{H}) = \inf\{\alpha \in [0,1] : \exists F \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \text{ s.t. } \forall G \in \mathcal{G}(\mathcal{H}, \alpha),\ G \text{ is hom. to } F\}.$$

注意，$\delta_{\hom}(\mathcal{H}) \geq \delta_\chi(\mathcal{H})$。确定同态阈值要比确定色数阈值困难得多。Luczak [11] 证明了，对于 K_3，同态阈值等于色数阈值；如上文所述，该阈值为$_{1\ 3}$。Goddard 和 Lyle [7] 以及 Nikiforov [13] 将这一结果推广到了所有团，证明了$\delta_{\hom}(\{K_k\}) = \delta_\chi(\{K_k\}) = \frac{2k-5}{2k-3}$。Letzter 和 Snyder [10] 则考虑了针对更长奇圈的推广。他们证明了 $\delta_{\hom}(\{C_5\}) \leq \frac{1}{5}$ 以及 $\delta_{\hom}(\mathcal{C}_5) = \frac{1}{5}$，其中$\mathcal{C}_{2k-1} = \{C_3, \ldots, C_{2k-1}\}$ 表示长度不超过 $2k-1$的奇圈族。在此基础上，Ebsen 和 Schacht [4] 证明了 $\delta_{\hom}(\{C_{2k-1}\}) \leq \frac{1}{2k-1}$ 以及 $\delta_{\hom}(\mathcal{C}_{2k-1}) = \frac{1}{2k-1}$，对所有 $k \geq 2$均成立。作为对上述第一个结果的补充，Sankar [14] 最近证明了 $\delta_{\hom}(\{C_{2k-1}\}) > 0$，对所有 $k \geq 2$均成立。这表明，与团不同，奇圈的同态阈值表现得不同于色数阈值，因为对于$k > 2$，$\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}) = 0$。

回到色数剖面，关于奇圈族，我们能说些什么？Andr´asfai、Erd¨os 和 S´os 的方法早已给出 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 2) = \frac{2}{2k+1}$，其中下界来自 C_{2k+1} 的膨胀图。接下来谈 3-可着色性：在确定 $\mathcal{C}_5$ 的同态阈值时，Letzter 和 Snyder [10]证明，$\mathcal{G}(\mathcal{C}_5, \frac{1}{5} + \varepsilon)$ 中的图实际上同态于色数为 3 的图，这意味着 $\delta_\chi(\mathcal{C}_5, 3) \leq \frac{1}{5}$。另一方面，目前已知的最佳下界是 $\delta_\chi(\mathcal{C}_5, 3) \geq_{14\ 73}$，它由一个有 22 个顶点的 $\mathcal{C}_5$-自由图的非对称膨胀图给出（参见 Van Ngoc 和 Tuza [16] 中的图 $G_{3,\ 3}$）。然而，Ebsen 和 Schacht [4] 推广中构造的同态并非映射到可3着色图。因此，他们的结果无法给出 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3)$ 的上界。

给出这样的上界是本文的主要贡献。我们证明，当 k 足够大时，同态阈值 $\frac{1}{2k-1}$ 是色数剖面 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3)$ 的一个上界。这回答了 Letzter 和 Snyder [10] 提出的问题。事实上，我们还能证明一个稍强的上界，表明当 k 足够大时，$\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3)$ 严格小于 $\delta_{\hom}(\mathcal{C}_{2k-1})$。

定理 1.1. 对任意 $t \in \mathbb{N}$ 和任意整数 $k \geq k(t)$，$= 5490 + 45t$ 以下结论成立。任意最小度至少为 $\frac{1}{2k+t}|V(G)|$ 的 $\mathcal{C}_{2k-1}$-自由图 G 都是可3着色的。换言之，对于 $k \geq k(t)$，有 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3) \leq \frac{1}{2k+t}$。

由于 $k(t)$ 关于 t 是线性的，我们得出，对于足够大的 k，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon)k}$。关于 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3)$ 的下界，我们所知的界都小得多。例如，可以通过以下方式得到这样的界。取一般化的 $\mathcal{C}_{2k-1}$-自由 Mycielski 图，其最小度为 3、色数为 4，例如 Van Ngoc 和 Tuz [16] 中所述；对这些构造进行平衡膨胀，可得到色数为 4 的 $\mathcal{C}_{2k-1}$-自由图，其最小度为 $\frac{3}{2k^2+k+1}|V(G)|$。由于这个下界与我们的上界之间存在相当大的差距，我们在此不再进一步尝试优化其中任何一个的常数因子。

值得探究的是，对于 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3)$，我们的上界还是这个下界给出了正确的数量级。

问题 1.2。$\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3)$ 是否为 $\geq f(k)$，其中 c 为常数且 $f(k)$ 关于 k 呈线性增长？还是说 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, 3)$ 为 $\leq f(k)$，其中 c 为常数且 $f(k)$ 关于 k 呈二次增长？

类似地，我们没有尝试优化 $k(t)$，因为采用我们的证明方法，当 $t = 0$ 时，可能无法将其降至个位数。不过，探究较小 k 时会出现什么情况仍然很有意思。特别是，我们的结果引出了以下问题。

问题 1.3。$\delta_\chi(\mathcal{C}_5, 3)$ 是否为 $< \frac{1}{5} = \delta_{\hom}(\mathcal{C}_5)$？

最后，我们指出，利用我们的论证，很容易推出一个更一般的上界 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, c) \leq \frac{1}{2k\lfloor c/3 \rfloor}$，适用于 $c \geq 3$ 且 k 充分大时。注意，$\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, c) \leq \delta_\chi(\{C_{2k-1}\}, c)$，因此这个上界与前面提到的界 $\delta_\chi(\{C_k\}, c) = O\left(\frac{k}{c}\right)$ 互为补充：它适用于 c 固定且 k 较大的情形，而后者则适用于 k 固定且 c 较大的情形。我们将在第 3 节末尾简要说明如何得到这个一般性上界。

组织结构。本文余下部分安排如下。我们首先在第 2 节介绍一些基本记号，说明定理 1.1 的证明策略，给出证明所需的设置以及主要引理，并概述证明这些引理还需要哪些内容。接着，我们在第 3 节证明定理 1.1。主要技术引理（引理 2.3）的证明见第 6 节。为此，我们将在第4节开发用于在加权图中寻找二部子图的工具，并在第 5 节开发用于给某些圈和路径的邻域大小建立下界的工具。我们将在第 2 节中说明如何使用这些工具。

2. Notation and overview of the proof

在解释主定理的证明思路之前，我们先回顾一些（大多是）标准记号，并以一种自然的方式将其推广到边带有权重的图。

记号。设 G 是一个图，$B \subseteq V(G)$是一个顶点集。我们用$G[B]$ 表示由 B诱导的 G 的子图。如果 $G[B]$ 是连通的，我们也简称 B 是连通的。我们将图 $G[V(G) \setminus B]$记作 $G \setminus B$。通常，$N(v)$表示 G中顶点 v 的（开）邻域。对于顶点集 B，我们用 $\mathrm{int}(B) = \{v \in B : N(v) \subseteq B\}$ 表示 B的内部。我们将 B在 G中的补图 $V(G) \setminus B$记作 B^c。对于图 G，G 中两个顶点 x、y之间的距离 $d_G(x, y)$，是 G 中以 x和 y为端点的路径所含边数的最小值。对于两个顶点集 A、$B \subseteq V(G)$，距离 $d_G(A, B)$是对所有$x \in A$ 和 $y \in B$取 $d_G(x, y)$的最小值。对于整数 $i \geq 0$，B 在 G 中的第 i个（闭）邻域定义为

$$N^i_G[B] = \{x \in V(D) : \exists v \in B \text{ s.t. } d_D(x, v) \leq i\}.$$

通常，当上下文已明确我们是在哪个图中取邻域时，我们也会省略下标 G。我们指出，如果 D 是 G 的一个顶点集较小的子图，也将 $N^i[D]$ 写作 $N^i\big[V(D)\big]$。

我们还将使用以下这类边带权重的辅助图。对于一个图 H，权函数是形如 $\omega : E(H) \to \mathbb{N}$ 的函数，而赋予这种函数的图称为加权图。上文为无权图定义的所有概念同样适用于加权图。H 的子图 H' 的权重为 $\omega(H') = \sum_{e \in E(H')} \omega(e)$。我们称 H 为加权二部的，如果 H 中不存在奇权圈。我们也称 $B \subseteq V(H)$ 为加权二部的，当 $H[B]$ 是加权二部的且上下文已明确所指的图时。

除了上述定义的无权距离外，对于加权图，我们还将使用如下定义的加权版本。加权图 H 中两个顶点 x, y 之间的加权距离 $d_{\omega,H}(x, y)$，是从 x 到 y的路径的最小权重。此外，对于任意顶点 v 和整数 $i \geq 0$，我们将 i阶闭加权邻域定义为以 v 为中心的

$$N^i_\omega[v] = \{x \in V(H) : d_\omega(x, v) \leq i\}.$$

证明概述。我们证明定理 1.1 的出发点受到 Thomassen 建立 C_5的色数阈值的方法 [15] 的启发。与该方法一样，我们首先固定一个由不相邻顶点 $v_1, \ldots, v_h$ 组成的极大集合，使其邻域 $N(v_1) \ldots, N(v_h)$两两不相交。这样会留下剩余顶点集合 $X = V(G) \setminus \bigcup_{i=1}^h N^1[v_i]$，随后我们根据由此得到的顶点划分来分析图的结构。不过，由于我们采用了不同的设定，我们的分析使用了不同且全新的思路，也复杂得多。

事实证明，给定上述任意两个顶点，例如 v_i、v_j，在这项分析中我们需要的关键信息，是 $N(v_i)$ 与 $N(v_j)$ 之间一条最短路径的长度，且该路径的内部顶点都属于 X。此外，我们只关心长度至多为 3 的这条路径。这样一条长度至多为 3 的路径会给出一条长度属于 $\{3, 4, 5\}$ 的 v_i, v_j-路径。因此，我们证明中的一个主要思路是引入顶点集为 $[h]$ 的辅助加权图 H，以表示原图的结构。在 H 中，只要存在这样一条长度属于 $\{3, 4, 5\}$ 的 v_i, v_j-路径，我们就加入一条边 ij；此外，我们将 v_i 与 v_j 之间路径的长度赋作边 ij 的权重。由于原图没有长度小于 $2k + 1$ 的奇圈，因此很容易看出，这个辅助图没有奇权重小于 $2k + 1$ 的圈。此外，假设 G 连通，并仔细选择顶点 v_1、.....、v_h，我们就能保证 H 有一棵边权重均为 3 的生成树。这便是下面定义的图族的由来。

定义 2.1. 对于 $k \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathcal{H}(k)$ 表示满足以下两个性质的图 H 组成的图族：

- 存在一个权函数 $\omega: E(H) \to \{3,4,5\}$，定义在 H 的边上，使得在H 中不存在满足以下条件的圈：C 且 $\omega(C)$为奇数并小于 $2k+1$。
- 存在一棵树 T 生成 H，使得 T 的所有边的权重均为 3。

此外，我们用 $\mathcal{H}(k,s)$ 表示 $\mathcal{H}(k)$ 中顶点数至多为 s 的图。

这个辅助图 H 包含了 G的大量结构信息，这对我们证明 G的 3-可着色性至关重要。我们通过获得 G的顶点集的一个划分来实现这一点，该划分满足以下引理的要求。

引理 2.2. 设 G 是一个顶点集为 V的图。若存在一个顶点集合 $A \subseteq V$，使得 $G[A]$连通、$G[V \setminus A]$是二部的，并且对所有 $v \in V \setminus A$，$G[A \cup \{v\}]$都是二部的，则 $\chi(G) \leq 3$。

证明。首先为 A 选择一种使用颜色 $\{1,2\}$ 的着色，并为 $V \setminus A$ 选择一种使用颜色 $\{3,4\}$ 的着色。注意，由于 A 是连通的，A 中顶点 $v \in V \setminus A$ 的每个邻点颜色都相同。现在按如下方式重新着色颜色为 4 的顶点：如果颜色为 4 的顶点 $v \in V \setminus A$ 与一个颜色为 1 的顶点相连，就将其重新着色为 2；否则，将其重新着色为 1。□

这一保证 3-可着色性的判据启发了我们对辅助图 H 进行如下分解引理的研究，而该引理是定理 1.1 的证明的核心。

引理 2.3（主要技术引理）。对于任意 $t \in \mathbb{N}$ 和任意整数 $k \geq k(t)$，$=5490+45t$，以下结论成立。对于任意 $H \in \mathcal{H}(k,\ 2k+t)$，存在 $V(H)$ 的一个子集 B，使得 $H[B]$ 连通，$H \setminus B$ 是加权二部的，并且对于所有 $v \in V(H)$，$H[B \cup \{v\}]$ 都是加权二部的 $\setminus B$。

有了这个引理，证明定理 1.1 的主要任务就是将辅助图 H 的这一划分“转换”为 G 的一个具有基本相同性质的划分。该引理的证明依赖于对奇权圈C 的邻域 $N^1[C]$ 进行细致入微的分析，并谨慎组合路径以构造 B。在转向主定理的证明之前，我们将在下一小节中介绍这一论证的关键思想以及其他引理。

处理引理 2.3 的策略。这里我们简要讨论证明引理 2.3 背后的主要思想；详细证明见第 4、5 和 6 节。首先，我们注意到，我们证明的命题略强于引理 2.3。事实上，在构造连通集 B 时，我们确保 $N[B]$ 和 $H \setminus B$ 都是加权二部的。

在第4节中，我们研究如何保证第一个性质。具体而言，我们将证明，诸如顶点周围的球和最轻路径的邻域这样的简单构造都是加权二部的。此外，我们证明，当我们谨慎地选择集合时，加权二部这一性质会以一种非常精确的方式传递到并集上。这使我们能够构造更大的加权二部集。

然而，仅凭这些结果还不足以实现我们的目标。事实上，一旦得到这样的候选集 B，我们还需要证明 $H \setminus B$ 也是加权二部的。下面的引理表明，只要 B 的内部足够大，就足以得出这一结论。

引理 2.4. 设 $k \geq 8$ 和 t 为自然数，且 $H \in \mathcal{H}(k, 2k+t)$。设 $B \subseteq V(H)$ 是良好的，并且 $|\mathrm{int}(B)| \geq \frac{4}{3}k + t$。则 $H \setminus B$ 是加权二部的。

如果 B 的内部大小至少为 $\frac{4}{3}k+t$，则其补图的大小至多为 $|V(H)|-|\text{int}(B)| \leq \frac{2k}{3}$，我们将证明这不足以容纳一个奇权重环。例如，它不可能容纳一个仅含权重为 3 的边的奇权重环，因为这个圈至少有 $\frac{2k+1}{3}$ 个顶点，无法全部放入 B 的补图中。一般而言，这个圈可能含有其他权重的边，但此时权重为 3 的生成树保证我们能在圈的邻域中找到额外的顶点。事实证明，即使在一般情况下，我们得到的界也与上述例子中的完全相同。

引理 2.5. 设 $k \geq 8$ 和 $H \in \mathcal{H}(k)$。若 C 是奇权的非生成圈，则$|N^1[C]| \geq \frac{2k+1}{3}$。

我们想强调，正是这一点说明了为什么我们要求权重为 3 的生成树。下面简要说明如何由引理 2.5 得到引理 2.4。

引理 2.4 的证明。根据关于内部的假设，B 不为空。假设 $H \setminus B$不是加权二部的，并令 $S \subseteq B^c = V(H) \setminus B$ 为 $H \setminus B$中的一个奇权圈。由于 B 不为空，该圈不是 H中的生成圈。因此，我们可以应用引理 2.5，得出 $|N^1[S]| \geq \frac{2k+1}{3}$。由于 $S \subseteq B^c$ 中没有顶点能与 int(B)中的顶点相邻，我们有 $N^1[S] \subseteq$int$(B)^c$，因此 $|\text{int}(B)^c| \geq |N^1[S]| \geq \frac{2k+1}{3}$。然而，我们还有 $|V(H)| = 2k+t$和 $|\text{int}(B)| \geq \frac{4}{3}k+t$，由此得到 $|\text{int}(B)^c| \leq 2k - \frac{4}{3}k < \frac{2k+1}{3}$，矛盾。□

在第 5 节中，我们证明引理 2.5 及一个有用的推论。最后，在第 6 节中，我们结合第 4 节和第 5 节中给出的结果，证明存在一个内部较大的加权二部集 B，从而证明引理 2.3。正如所承诺的那样，下面我们开始证明主定理。

3. Proof of the main result

定理 1.1 的证明。设 $t \in \mathbb{N}$，并令 $k \geq k(t) = 5490 + 45t$ 为一个整数。令$G = (V, E)$ 为一个具有最小度 $\delta(G) \geq n/(2k+t)$ 的 n 阶图，该图不包含长度小于 $2k+1$ 的奇数长度的环。由于我们希望证明 G 的色数至多为 3，因此不妨设 G 是连通的。

首先，我们在 $h \leq 2k+t$ 个顶点上构造一个带权函数 w 的辅助图 H： $E(H) \to \{3,4,5\}$，具体如下。令 $v_1 \in V$ 为任意一个顶点，令 $V_1 = \{v_1\} \cup N(v_1)$，并将指标 i 设为 $i = 2$。如果可能，我们选取一个顶点 $v_i \in V \setminus V_{i-1}$，使得 $\{v_i\} \cup N(v_i)$ 与 V_{i-1} 不相交，并且对于某个 j、$1 \leq j \leq i-1$，$N(v_i)$ 与 $N(v_j)$ 之间存在一条边。令 $V_i = \{v_i\} \cup N(v_i) \cup V_{i-1}$，将指标 i 增加 1，然后重复上述步骤。当我们无法再选取顶点 v_i 时，停止这一过程。令 $h \geq 1$ 为过程停止前最后选取的顶点的指标。注意，由于 G 的最小度，$h \leq 2k+t$，因为 $n \geq |V_h| > hn/(2k+t)$。此外，令 $X = V \setminus V_h$。

现在令 H 为顶点集 $[h]$ 的图，其边集为所有满足 $d(N(v_i)\ N(v_j)) \leq 3$ 的边 $ij \in \binom{[h]}{2}$。对每条边 $ij \in E(H)$，赋予权重

$$\omega(e) = d(N(v_i), N(v_j)) + 2 \in \{3,4,5\},$$

它是 v_i 与 v_j 在 G 中距离的上界。因此，我们得到一个有 $h \leq 2k+t$ 个顶点、权函数为 w 的图 H： $E(H) \to \{3,4,5\}$。我们注意到 H 和 V_i 具有以下简单性质。

命题 3.1。

(P1) C 中不存在权重为奇数且小于 $2k+1$ 的圈。**(P2)** 每个顶点 $x \in X$ 在 $N(v_i)$ 中都有一个邻点，其中某个 $i \in [h]$。**(P3)** 对于每个 $i \in [h]$，若 $k \geq 2$，则邻域 $N(v_i)$ 是独立的。**(P4)** 对于每个 $i \in [h]$，若 $k \geq 3$，则集合 $\{u \in V(H) : d(u, v_i) = 2\}$ 是独立的。**(P5)** 若对于某个 $i, j \in [h]$，在 G 中存在一条从 $N(v_i)$ 到 $N(v_j)$ 的长度为 2 的路径，则只要 $k \geq 4$，$\omega(ij) = 4$ 就在 H 中。**(P6)** 若对于某个 $i, j \in [h]$，在 G 中存在一条从 $N(v_i)$ 到 $N(v_j)$ 的长度为 3 的路径，则只要 $k \geq 5$，$\omega(ij) \in \{3, 5\}$ 就在 H 中。

证明。性质（P1）直接由我们的假设推出，因为 H 中任何权重小于 $2k+1$ 的圈都会直接在 G 中产生一个长度小于 $2k+1$ 的奇圈。事实上，根据我们的构造，H 中一个权重小于 $2k+1$ 的圈 C 对应于 G 中一条边数少于 $2k+1$ 的闭奇游走，而后者又包含一个短于 $2k+1$ 的奇圈。

为证明（P2），注意如果情况并非如此，那么 $\{x\} \cup N(x)$ 将与 V_h 不相交。因此，从 x 到 V_h 的最短路径（由于 G 是连通的，该路径确实存在）的长度至少为 2。但这条路径上的倒数第二个顶点可以选作 v_{h+1}，这与我们的选择过程已经停止的假设相矛盾。

由于 $N(v_i)$ 中的一条边 pq 会在 G 中形成一个三角形 v_i、p、q，因此得到（P3）。对于（P4），假设 $k \geq 3$，且 $\{u \in V(H)$ 中存在一条边 $pq : d(u, v_i) = 2\}$。令 p' 为 $N(v_i)$ 中 p 的一个邻点，令 q' 为 $N(v_i)$ 中 q 的一个邻点。那么 p、p'、v_i、q'、q 是一条长度为 5 的闭游走，矛盾。

接下来证明 (P5)。设 p, x, q 是从 $N(v_i)$ 到 $N(v_j)$ 的一条长度为 2 的路径。假设 $\omega(ij) \neq 4$。那么 $\omega(ij)$ 必须为 3，因此 $N(v_i)$ 与 $N(v_j)$ 之间有一条边 $p'q'$。但这样一来，$p, x, q, v_j, q', p', v_i$ 就构成了一条长度为 7 的闭游走；若 $k \geq 4$，便会产生矛盾。

剩下要证明 (P6)。设 p, x, y, q 是从 $N(v_i)$ 到 $N(v_j)$ 的一条长度为 3 的路径，并假设 $\omega(ij) \notin \{3, 5\}$。那么 $\omega(ij)$ 必须为 4，因此 $N(v_i)$ 与 $N(v_j)$ 之间存在一条长度为 2 的路径 p', z, q'。但这样一来，$p, x, y, q, v_j, q', z, p', v_i$ 就构成了一条长度为 9 的闭游走；若 $k \geq 5$，便会产生矛盾。□

由 H 的构造可知，在 H 中存在一棵生成树 T，使得对所有 $e \in E(T)$，$\omega(e) = 3$。由于性质（P1）也成立，因此 $H \in \mathcal{H}(k, 2k+t)$。又因 $k \geq k(t)$，根据引理 2.3，存在一个集合 $B \subseteq [h]$，使得 $H[B]$ 连通，$H\big[[h] \setminus B\big]$ 是加权二部的，并且对所有 $u \in [h]$，$H\big[B \cup \{u\}\big]$ 都是加权二部的。

我们的目标是利用这个集合 B 构造一个集合 $A \subseteq V$，使得 G 和 A 满足引理 2.2 的假设，从而得出 G 可3着色。当且仅当 A 满足以下性质时，这一结论成立。

(A1) $G[A]$ 连通；**(A2)** $G[V \setminus A]$ 是二部的；**(A3)** 对所有 $v \in V$，$G[A \cup \{v\}]$ 都是二部的。

我们按如下方式构造 A。记 A_0 为所有$b \in B$对应的集合 $\{v_b\} \cup N(v_b)$的并集，令 $X_0 \subseteq X = V \setminus V_h$ 为在 A_0中有邻点的顶点所构成的集合，并令$A = A_0 \cup X_0$。接下来只需验证 A 满足条件 (A1)–(A3)。

由于 $H[B]$ 是连通的，我们立即得到 (A1)：事实上，很容易验证，如果 $H[B]$ 是连通的，并且对于 $H[B]$ 中的任意一条边 bb'，在 $G[A]$ 中都存在一条从 v_b 到 $v_{b'}$ 的路径，那么 $G[A]$ 就是连通的。然而，后一条件确实成立，因为根据 H 的定义，我们有 $d\big(N(v_b), N(v_{b'})\big) \leq 3$，而这只有在 G 中的 $N(v_b)$ 与 $N(v_{b'})$ 之间存在一条边时才成立。

为证明 (A2) 也成立，我们将使用以下断言。

命题 3.2. $X \setminus X_0$ 中的每个顶点在某个满足 $i \in [h] \setminus B$ 的 $N(v_i)$ 中都有一个邻点。

证明. 根据命题 3.1 的 (P2)， X 中的任意顶点在某个满足 $i \in [h]$ 的 $N(v_i)$ 中都有一个邻点。此外， $X_0 \subseteq X$ 包含所有在某个满足$i \in B$ 的 $N(v_i)$ 中有邻点的顶点。结论得证。□

由此我们可以证明 (A2)。

引理 3.3. $G[V \setminus A]$ 是二部的。

证明. 假设 $G[V \setminus A]$ 不是二部的，并固定一个长度最短的奇圈 C。回顾一下，集合 $V \setminus A$ 由 $\{v_i\} \cup N(v_i)$ 中满足 $i \in [h] \setminus B$ 的顶点以及 $X \setminus X_0$中的顶点组成。

我们先进行以下操作。从 C中删去 $C \cap \{v_1, \ldots, v_h\}$里的所有顶点，得到一组两两顶点不相交的路径 Q'_1、……、$Q'_{\ell'}$；除非处于退化情形，即 $C \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$，此时我们只需令 $Q'_1 = C$。注意，根据 A 的定义，每个被删去的顶点 v_j 都满足 $j \in [h] \setminus B$。现在，在每个 Q'_i 中，我们进一步将$\bigcup_{j \in [h] \setminus B} N(v_j)$ 中的所有顶点视为同一顶点，并沿这些顶点将 Q'_i拆分为若干（子）路径。更具体地说，对于固定的 i，令 $Q'_i = q'_1$、……、$q'_{s'}$，并令 $j_1 \leq \cdots \leq j_\ell$ 为所有满足 $q'_j \in \bigcup_{j \in [h] \setminus B} N(v_j)$ 的指标 j。那么， Q'_i被拆分为路径 q'_1、……、q'_{j_1} 以及 q'_{j_1}、……、q'_{j_2}，依此类推，直到 q'_{j_ℓ}、……、$q'_{s'}$。对所有 Q'_i 执行这种拆分后，我们总共得到一组两两内部顶点不相交的路径 Q_1、……、Q_ℓ。根据 A 的定义和命题 3.2，对于每个 $i = 1$、……、ℓ，这组路径都具有以下性质：Q_i 的所有内部顶点都包含在 $X \setminus X_0$中；并且存在 $j \in [h] \setminus B$，使得 Q_i 的第一个顶点和 Q_{i-1}的最后一个顶点（两者可能相同）都包含在 $N(v_j)$ 中，其中 $Q_0 = Q_\ell$。同样，我们允许出现退化情形，即仅有 $Q_1 = C$，且其中所有顶点都是内部顶点。

接下来，对每个固定的 $i \in [\ell]$，我们构造一条游走 R_i，位于 H 中，对应于路径 $Q_i = q_1, \ldots, q_s$，其权重的奇偶性与 Q_i 的长度 $s-1$ 相同。为此，在非退化情形下，设 $r_1, r_s \in [h] \setminus B$ 满足 $q_1 \in N(v_{r_1})$ 且 $q_s \in N(v_{r_s})$。在退化情形下，我们稍后选择 r_1 和 r_s。我们的游走 R_i 的端点为 r_1 和 r_s。回忆一下， $q_2, \ldots, q_{s-1} \in X \setminus X_0$。我们区分四种情形。

非退化情形 $s = 2$: 在此情形下，由命题 3.1 的 (P3) 可得 $r_1 \neq r_2$。
否则 $q_1 q_2 v_{r_1}$ 会在 G 中构成一个三角形。在此情形下，对于 R_i，我们取边 $e = r_1 r_2$，其权重为 $\omega(e) = 3$，因为 $q_1 q_2$ 是连接 $N(v_{r_1})$ 与 $N(v_{r_2})$ 的一条边。

非退化情形 $s = 3$: 若 $r_1 = r_3$，我们只需取长度为一的顶点路径 $R_i = r_1$。否则，若 $r_1 \neq r_3$，令 $r_2 \in [h] \setminus B$满足： q_2在 $N(v_{r_2})$ 中有一个邻点 x；根据命题 3.2，这样的顶点存在。由命题 3.1 的 (P5)，若 $r_2 \neq r_1$，则边 $r_1 r_2$ 的权重为 4。特别地，我们可以选取 $r_2 = r_3$，使得 $r_2 \neq r_1$；对于 R_i，我们取权重为 4 的边 $r_1 r_2 = r_1 r_3$。

非退化情形 $s > 3$: 对于 $j = 3, \ldots, s-2$，我们利用命题 3.2 得出，存在 $r_j \in [h] \setminus B$使得 q_j 在 $N(v_{r_j})$ 中有一个邻点 y_j。我们令 $r_2 = r_1$, $r_{s-1} = r_s$，并令 $y_2 = q_1$, $y_{s-1} = q_s$。注意，这样一来，对于 $j = 2$和 $j = s-1$， q_j在 $N(v_{r_j})$ 中也有一个邻点 y_j。最后，我们将 R_i定义为 $r_2, r_3, \ldots r_{s-1}$。

现在我们证明，即使在这种情况下， R_i 也是一条从 r_1 到 r_s 的游走，其权重与 Q_i 的长度具有相同的奇偶性。首先，我们注意到 R_i 始于 $r_2 = r_1$，止于$r_{s-1} = r_s$。接着，根据命题 3.1 的 (P4)，我们注意到，对于 $j = 2$、……、$s-2$， $r_j \neq r_{j+1}$。最后，命题 3.1 的 (P6) 表明 $r_j r_{j+1}$ 的权重为 3 或 5，因为根据构造， $N(v_{r_j})$ 与 $N(v_{r_{j+1}})$ 之间存在一条长度为 3 的路径（即 y_j、q_j、q_{j+1}、y_{j+1}）。由于 R_i 中每条边的权重都是奇数， R_i 的权重与 $s-3$ （……的数量）具有相同的奇偶性

R_i中的边数）。由于 Q_i 的长度为 $s-1$，因此 R_i 的权重与 Q_i 的长度具有相同的奇偶性，正如所需。

退化情形：在此情形下，$\ell = 1$ 和 Q_1 是一个奇数长度为 s的圈 $q_1, q_2, \ldots, q_s, q_{s+1} = q_1$。对于 $j = 1, \ldots, s$，我们令 $r_j \in [h] \setminus B$满足：q_j在 $N(v_{r_j})$ 中有一个邻点。与前一种情形一样，我们得出 $r_1, \ldots, r_s, r_1$ 是一条由权重为 3 或 5 的边组成的游走，因此是一条闭奇游走。

至此，在 H中构造游走 R_i 的过程便完成了。由于 C 是 G中的一个奇圈，Q_i 的长度之和为奇数。此外，根据构造，我们要么处于退化情形，此时得到一条闭奇游走；要么处于非退化情形，且每条游走 R_i 的终点都与 R_{i+1} 的起点相同（下标按模 ℓ计算）。无论哪种情形，游走 R_i 的并因此都是 $H[[h] \setminus B]$ 中的一条奇权闭游走，其中包含一个奇权重环。这就得到了所需的矛盾，因此 $G[V \setminus A]$ 是二部的。□

我们的最后一个断言表明 (A3) 成立。

断言 3.4. 对每个 $v \in V \setminus A$，$G[A \cup \{v\}]$ 都是二部的。

证明。假设对于某个 $v \in V \setminus A$，$G[A \cup \{v\}]$ 中存在一个奇圈 C。共有三种情形：要么 $v = v_w$，且 $w \in [h] \setminus B$；要么 $v \in N(v_w)$，且 $w \in [h] \setminus B$；要么 $v \in X \setminus X_0$。我们先排除第一种情形。事实上，若 $v = v_w$ 且 $w \in [h] \setminus B$，则 v 不可能包含在 C 中，因为 $N(v_w) \subseteq V \setminus A$，因此 $C \subseteq A$。由此可知，在这种情形下，我们只需选取某个新的 $v \in N(v_w)$，并用这个 v 继续下面的论证。

对于另外两种情形，我们按如下方式处理。若 $v \in X \setminus X_0$，根据命题 3.2，我们可以固定一个 $w \in [h] \setminus B$，使得 v 在 $N(v_w)$ 中有一个邻点。否则，我们固定 $w \in [h] \setminus B$，使得 $v \in N(v_w)$。根据假设，$H[B \cup \{w\}]$ 是加权二部的。

回顾一下，A由带有 $i \in B$的 $\{v_i\} \cup N(v_i)$以及 X_0中的顶点组成，并且 X_0 中的每个顶点都在某个带有 $i \in B$的 $N(v_i)$中拥有一个邻点。我们希望在 $H[B \cup \{w\}]$ 中构造一个奇权重环，从而得到矛盾。我们的论证几乎完全遵循引理 3.3，这里不再重复细节，只说明其中的差异：首先，现在相关的指标取自 $B \cup \{w\}$，而不是 $[h] \setminus B$；路径 Q_1、.....、Q_t的内部顶点来自 X_0，而不是 $X \setminus X_0$。此外，如果$v \in N(v_w)$且 v 作为路径 Q_i 的一个端点出现，那么我们需要将 w 作为路径 R_i的对应端点。类似地，当 $v \in X \setminus X_0$ 和 v作为路径 Q_i中的内部顶点出现时，我们将 w 作为路径 R_i中的对应顶点。在这两种情况下，其余论证也和之前一样。□

由此定理 1.1 的证明得以完成。□

对于一般的上界 $\delta_\chi(\mathcal{C}_{2k-1}, c) \leq \frac{1}{2k\lfloor c/3 \rfloor}$，我们令 G 为一个最小度至少为 $\frac{1}{2k\lfloor c/3 \rfloor}|V(G)|$ 的 $\mathcal{C}_{2k-1}$-自由图，并以相同方式得到一个辅助图 $H \in \mathcal{H}(k, 2k\lfloor c/3 \rfloor)$。然后，我们可以将 H 划分为 $\lfloor c/3 \rfloor$ 个部分，每个部分的大小至多为 $2k$，并对每个部分应用引理 2.3。几乎完全按照上文的方法，我们随后可以将每个部分的划分转化回 G 对应部分的 3-着色，同时处理 X 中剩余的顶点，从而得到 G 的 $3\lfloor c/3 \rfloor$-着色。

4. Finding and combining weighted bipartite sets

本节中，我们着重寻找使集合成为加权二部图的充分条件。我们从下面的引理开始，该引理指出，顶点周围的某些球是加权二部的。

引理 4.1. 设 $k \geq 5$ 为一个整数， H 为一个边权为ω: $E(H) \to \{3,4,5\}$的加权图。如果 H不包含权重小于 $2k+1$的奇权重环，那么对于任意 $u \in V(H)$，有 $N_\omega^{k-3}[u]$ 是加权二部的。

引理 4.1 的证明。为证明此引理，回到无权情形更为方便。因此，令 G 为由 H 得到的（无权）图：将每条权重为 s 的边替换为一条含有 s 条边的路径。根据构造， H 的所有顶点也是 G的顶点。还需注意， G 中的任意奇圈 C 都对应于 H 中的一个圈，其权重恰好等于 C 的长度，反之亦然。

现在，假设存在某个 $u \in V$（H），其中有一个奇权圈 C_H，以导出矛盾，并将对应的 G中的奇圈记为 C。对于所有非负整数 j，我们定义层集 $L_j = \{x \in V$（G）： d_G（u， x） $= j\} \subseteq V$（G），它们由 G 中与 u的距离恰好为 j 的所有顶点以及集合 $B = \bigcup_{j=0}^{k-1} L_j$组成。我们声称 $C \subseteq B$。事实上，对于 $x \in V$（C） $\cap V$（H） $\subseteq V$（G），有d_G（u， x）$= d_{\omega、H}$（u， x） $\leq k-3$，因此，对于任意 $y \in V$（C），存在 $x \in V$（C） $\cap V$（H），使得 d_G（u， y） $\leq d_G$（u， x） $+2 \leq k-1$。

由于 C 是一个奇圈，因此 C 中必定存在一条边 xy，使得 x 和 y 位于同一个层集 L_j 中。事实上，否则我们就可以根据奇圈C 中各顶点所在层的奇偶性，对其顶点进行恰当的二染色。由此可知，存在一条 u,x-路径和一条u,y-路径，且两者都恰有 $j \leq k-1$ 条边。由这两条路径和边 xy 构成的奇闭游走中，包含一个长度至多为 $2j+1 \leq 2k-1$ 的奇圈。但这对应于 H 中一个权重为奇数且小于 $2k+1$ 的圈，这与我们的假设矛盾。□

引理 4.1 为我们提供了一个由大量加权二部集组成的集合。这使我们能够为集合 B 找到许多可能的候选项。引理 4.1 的另一个优点是，其中涉及的集合非常简单，因此更容易理解我们稍后给出的构造。接下来的引理给出了一个同样有用的构造，使我们能够从一条最小权重路径出发构造加权二部集。

引理 4.2. 设 $i \geq 1$ 是一个整数，且 $k \geq 10i+15$。设 H 是一个边权为 ω 的加权图： $E(H) \to \{3,4,5\}$，其中不含权重为奇数且小于 $2k+1$ 的圈。若 P 是端点之间权重最小的路径，则 $N^i[P]$ 是加权二部的。

证明. 假设存在一条路径 P，它是端点之间权重最小的路径，且 $N^i[P]$ 不是加权二部的。进一步，假设 P 在此性质下是最小的，即对于从 P 中移除一个端点后得到的任意路径 P'，都有 $N^i[P']$ 是二部的。设 P' 是这些缩短后的路径之一，并设 z 是从 P 中移除以得到 P' 的端点。我们将 $N^i[P] \setminus N^i[P']$ 中的顶点标记为 $w_1, \ldots, w_m$，并取满足 $L_h = N^i[P'] \cup \{w_1, \ldots, w_h\}$ 不是二部图的最小指标 h。这意味着 L_h 中存在一个奇权圈。设 Q 是这些圈中权重最小的一个。注意， Q 必须经过 w_h，因此我们用 x 和 y 表示 w_h 在 Q中的两个邻点。设 x' 和 y' 分别是 P' 中最接近 x 和 y 的顶点。

注意到 $d_{L_{h-1}}(x', x) \leq i+1$和 $d_{L_h}(x, z) \leq d_{L_h}(w_h, z) + 1 \leq i+1$。其中，第二个不等式源于以下事实：根据定义， $w_h \in N^i[P] \setminus N^{i+1}[P \setminus \{z\}]$。由于 P是其端点之间权重最小的路径，因此在x' 和 z之间的子路径也具有同样的性质。因此，

$$d_{\omega,P}(x', z) \leq d_{\omega,L_{h-1}}(x', x) + d_{\omega,L_h}(x, z) \leq 5(2i+2)$$

类似的论证得到 $d_{\omega,P}(y',z) \le 5(2i+2)$。这给出 $d_{\omega,P}(x',y') \le 5(2i+2)$，因为 x'、y' 和 z 位于同一路径上，而 z 是两个端点之一。这也意味着 $d_{\omega,L_{h-1}}(x,y) \le 10(2i+2)$。令 $Q' \subseteq Q$ 为 L_{h-1} 中端点为 x和 y的路径。$\omega(Q')$ 与 $d_{\omega,L_{h-1}}(x,y)$ 的奇偶性必须相同，否则 L_{h-1}中将存在一个奇权重环。但是，由于 $\omega(xw_h)+\omega(yw_h)$ 和 $\omega(Q')$ 的奇偶性不同，$d_{\omega,L_{h-1}}(x,y)$ 的奇偶性也不同于 $\omega(xw_h)+\omega(yw_h)$ 的奇偶性。因此，利用 Q 是最轻的奇权重环，可得 $\omega(Q) \le d_{\omega,L_{h-1}}(x,y) + 10 \le 10(2i+2)+10$。这小于我们对 k 的选择所得到的 $2k+1$，从而产生所需的矛盾。□

既然我们已经证明，最基本的集合（路径和球）具有我们所需的性质，现在就可以开始构造更复杂的集合了。特别是，下一个引理将说明如何组合两个加权二部集。需要指出的是，这种组合并非总是可行。或许更好的理解方式是：下一个结果给出了在什么条件下，加权二部这一性质在并运算下得以保持。

引理 4.3。设 $i \ge 1$ 是一个整数，H 是一个加权图。设 B_1、B_2 和 P 是 H 中的三个顶点集，使得 $d(B_1, B_2) \ge 2i+2$ 且 P 连通。如果 $N^i[B_1 \cup P]$ 和 $N^i[B_2 \cup P]$ 都是加权二部的，那么 $N^i[B_1 \cup B_2 \cup P]$ 也是加权二部的。

证明。设 $K = B_1 \cup B_2 \cup P$。我们要证明 $N^i[B_1 \cup B_2 \cup P]$ 是加权二部的，因此反设它包含一个奇权圈 C。记 B_1' 为集合 $N^i[B_1] \setminus N^i[P]$，记 B_2' 为集合 $N^i[B_2] \setminus N^i[P]$。由于 $N^i[B_1 \cup P]$和 $N^i[B_2 \cup P]$ 都是加权二部的，C 必须同时与 B_1' 和 B_2' 相交。令 $y(C)$ 为 H 中由 $C \cap (B_1' \cup B_2')$ 诱导的 C 的连通分量数。换言之，$y(C)$ 是 C 离开 B_1' 或 B_2' 的次数。C 可能离开 B_1'，继续沿着 $N^i[P]$ 前进，但之后又返回 B_1'（或者 B_2' 也会发生相同情况），所以 $y(C)$ 不一定是偶数，但至少为 2。假设 C 使得 $y(C)$ 最小。

令 w 为 $C \cap B_1'$ 中任意一个顶点。令 q_1 和 q_2 为 $C \cap N^{i+1}[B_1]$ 中包含 w 的极大路径的端点。也就是说，从 w 沿着 C 朝两个可能的方向移动，再取第一个位于 $N^{i+1}[B_1]$之外的顶点，便得到 q_1 和 q_2。因为 $q_1, q_2 \in N^{i+1}[B_1] \setminus N^i[B_1]$ $d(B_1, B_2) \ge 2i+2$，且 $C \cap B_2' \ne \emptyset$，所以$q_1 \ne q_2$和 $q_1, q_2 \in N^i[P]$。

由于 P 是连通的，$N^i[P]$ 中存在一条连接 q_1 和 q_2 的路径。由于这条路径不同于 C 中连接 q_1 和 q_2 的两条路径（因为它不可能与 B_1' 和B_2' 重叠），由 C 可知，$N^i[K]$ 中至少有两个圈，其中至少一个圈（记作 C'）具有奇权。我们有 $y(C') < y(C)$，因为我们用 $N^i[P]$ 中的一条路径替换了 C 中的一条路径，而后者包含 $C \cap B_1'$ 的至少一个连通分量（因此至少会使 $y(C)$ 增加一）。这与 C 的选取相矛盾，因为它的选取使 $y(C)$ 的值最小。□

我们以引理 4.2 和 4.3 的一个推论结束本节，该推论将这两个结果结合起来，使其更易于应用。

推论 4.4。设 $i \ge 1$ 是一个整数，且 $k \ge 10i+35$。设 H 是一个边权为 ω 的加权图：$E(H) \to \{3,4,5\}$，其中不含权重小于 $2k+1$ 的奇权重环。设 B_1、B_2 是 H 中的顶点集，使得 $d(B_1, B_2) \ge 2i+2$，并设 P 是 B_1 与 B_2 之间权重最小的路径。若 $N^{3i+1}[B_1]$ 和 $N^{3i+1}[B_2]$ 是加权二部的，则 $N^i[B_1 \cup B_2 \cup P]$ 是加权二部的。

证明。我们首先证明，对于 $j = 1$，2， $N^i[B_j \cup P]$ 是加权二部的。设 P_j 是从 B_j 开始的 P 上前 $2i + 2$ 个顶点构成的路径。注意，由于 $d(B_1, B_2) \geq 2i + 2$， P_j 与 B_{3-j} 不相交。设 P'_j 是一条路径，从 P_j 的最后一个顶点开始，到 B_{3-j} 结束。于是 P'_j 非空；又由于 P_j 含有 $2i + 2$ 个顶点，我们有$d(B_j, P'_j) \geq 2i + 2$。

接下来注意到 $N^i[B_j \cup P_j] \subseteq N^{3i+1}[B_j]$ 是加权二部的。此外，根据引理 4.2， $N^i[P_j \cup P'_j] = N^i[P]$ 是加权二部的，因为 P是其端点与 $k \geq 10i + 15$之间的一条最短路径。于是我们可以将引理 4.3 应用于 $B_j \cup P_j$、 $P_j \cup P'_j$和 P_j，从而推得 $N^i[B_j \cup P_j \cup P'_j] = N^i[B_j \cup P]$ 是加权二部的。再将引理 4.3 应用于 B_1、 B_2和 P，即可立即得出 $N^i[B_1 \cup B_2 \cup P]$ 是加权二部的。□

5. Cycles of odd weight have large neighbourhoods

本节专门用于证明引理 2.5，现将其重述如下。

引理 2.5. 设 $k \geq 8$ 和 $H \in \mathcal{H}(k)$。若 C 是一个非生成奇权重环，则$|N^1[C]| \geq \frac{2k+1}{3}$。

注意，如果环上的所有边权重均为 3，那么该环本身至少有 $\frac{2k+1}{3}$ 个顶点；但如果边的权重各不相同，顶点数可能会更少。为了解决这个问题，我们使用权重为 3 的边构成的生成树。事实上，环上每条由权重为 3 的边组成的极大路径都有一个位于环外的邻点。仔细分析这一情形即可得到所需的界。

在研究圈之前，我们先证明一个关于路径的类似结果，并用它来证明前面的结论。在继续之前，我们还要指出，本节中的引理并未以 $\mathcal{H}(k)$ 的形式陈述，因为我们希望将它们应用于更一般的情形。

引理 5.1. 设 F是一个边权为 ω 的加权图： $E(F) \to \{3, 4, 5\}$。假设 $F = T \cup P$，其中 T是一棵所有边权均为 3 的生成树， P是一条权重为 ℓ 的非生成路径，其端点为 x 和 y。若 F 不含权重为 11 的圈，并且 P在 $N^1_F[P]$ 中所有 x, y-路径中具有最小权重，则 $|N^1_F[P]| \geq \frac{\ell}{3} + \frac{5}{3}$。

证明。我们将 $P = Q_1, \ldots, Q_s$写成若干（可能平凡的）子路径 Q_i的串接，使得每个 Q_i 中的所有边的权重均为 3，且 Q_i 与 Q_{i+1}之间的边 e_i 的权重为 $\omega(e_i) > 3$。

若 $s = 1$，则 P的每条边的权重均为 3，结论成立，因为 $|N^1[P]| > |P| = \frac{\ell}{3}+1$；这里的严格不等式源于 F 是连通的，因此 P 在 $V(F) \setminus V(P)$ 中有一个邻点（该集合非空，因为 P不是生成的）。

现在假设 s 至少为 2。由于 T 是 F中的一棵生成树，对于每个 Q_i，我们可以固定一个顶点 $z_i \in N^1[Q_i] \setminus P$以及 Q_i 中的一个顶点 x_i，使得 $z_i x_i$的权重为 3。

对于 $i < j$，我们有 $z_i \neq z_j$，除非 $j = i + 1$且 $e_i = x_i x_{i+1}$，因为否则 P就不是其邻域中权重最小的 x, y-路径。若 $z_i = z_{i+1}$，我们称 $(i, i + 1)$ 有一个帽子。在这种情况下，我们还知道 $e_i = x_i x_{i+1}$的权重为 4，否则 x_i, x_{i+1}, z_i会构成一个权重为 11 的圈。此外，($i - 1, i$) 和 $(i + 1, i + 2)$ 都没有帽子（否则不失一般性地可设 $z_{i-1} = z_{i+1}$，于是我们可以用权重为六的 $x_{i-1}, z_{i+1}, x_{i+1}$ 替换权重为八的子路径 x_{i-1}, x_i, x_{i+1}）。

现在，如果 $(i, i + 1)$ 有一个帽子，我们就“合并” Q_i和 Q_{i+1}：我们重写 $P = Q'_1, \ldots, Q'_{s'}$，使得每个 Q'_j要么是 Q_i, Q_{i+1} 的串接，其中某个 i 满足 $(i, i + 1)$ 有一个帽子；要么是 Q_i，其中某个 i 满足 $(i - 1, i)$ 和 $(i, i + 1)$ 都没有帽子。在前一种情况下，我们称 Q'_j 是由一个帽子形成的。在这两种情况下，我们令 $z'_j = z_i$。注意，由

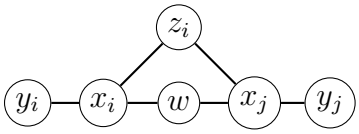

FIGURE 1. 在 $d(C) = 2$的情形下使用捷径，其中 x_iz_i 和 x_jz_i 是权重为 3 的边，且 x_iw 和 x_jw 的权重之和至少为 7。

构造 $z'_j \neq z'_{j'}$ 对于 $j \neq j'$。因此我们得出

$$|N^1[P]| \geq \sum_{j\in[s']} (|Q'_j| + 1) = s' + |P| \,.$$

此外，由于 Q'_j 和 Q'_{j+1} 由一条权重至多为 5 的边连接，因此有

$$\omega(P) \leq 5(s' - 1) + \sum_{j\in[s']} \omega(Q'_j) \,.$$

若 Q'_j 由一个帽子构成，则 $\omega(Q'_j) = 3(|Q'_j| - 2) + 4 = 3|Q'_j| - 2$；否则$\omega(Q'_j) = 3(|Q'_j| - 1) \leq 3|Q'_j| - 2$。因此，

$$\omega(P) \leq 5(s' - 1) + \sum_{j\in[s']} (3|Q'_j| - 2) = 3s' - 5 + 3|P| \,,$$

因此，$|N^1[P]| \geq |P| + s' \geq \frac{\omega(P)}{3} + \frac{5}{3}$，如所需。 □

现在我们可以给出引理 2.5 的证明。该引理为图$H \in \mathcal{H}(k)$中奇权非生成圈的邻域大小提供了类似的下界。

引理 2.5 的证明。设 T 是与 H 相关联的权重为 3 的边所构成的一棵生成树。设 C 是一个奇权重环（注意，权重至少为 $2k + 1$，因为 $H \in \mathcal{H}(k)$）。我们将 $C = Q_1, \ldots, Q_s$ 写成若干子路径 Q_i 的连接，使得每个 Q_i 内的所有边权重均为 3，而连接 Q_i 与 Q_{i+1} 的边 e_i 的权重为 $\omega(e_i) > 3$。我们也将这些子路径 Q_i 称为该环的线段。

由于 T 是 H 中的一棵生成树，对于每个线段 Q_i，我们可以在 Q_i 中选定一个顶点 x_i，以及一个顶点 $z_i \in N^1[Q_i] \setminus C$，使得 x_iz_i 属于 T（因此其权重为 3）。令 $I(C) = C \cup \{z_i : i \in [s]\}$，并注意，只需证明 $|I(C)| \geq \frac{2k+1}{3}$ 即可。我们还要指出，$I(C)$ 可能取决于所选的 x_i 和 z_i。由于移除 H 中的边不会增加 $N^1[C]$ 的大小，只需考虑顶点集为 $I(C)$、边集为 $E(C) \cup \{x_iz_i : i \in [s]\}$ 的图 $H(C)$。我们现在可能会想立即对 C 中的某条生成路径 P 应用引理 5.1。然而，这行不通，因为 P 在 $N^1_{H(C)}[P]$ 中可能并非具有最小权重。因此，我们的目标是“移动”到一个（可能）不同的环 C'，从而避免遇到这个问题。

断言 5.2。在 H 中存在一个非生成圈 C'，其权重为奇数，并且 C' 在 H 中所有奇权重圈里权重最小（C' 的定义与上文类似），且 $|I(C)| \geq |I(C')|$。

证明。我们将沿着序列 $C_1, C_2, \ldots$ 移动，依次考察圈，直到得到具有所需性质的圈 $C_{\tilde{\ell}} = C'$。从一个圈 C_ℓ 移动到下一个圈 $C_{\ell+1}$ 时，我们不会增加权重，而是减少线段的数量，并且有 $|I(C_\ell)| \geq |I(C_{\ell+1})|$。如果这一过程成功，它就会终止，因为我们总是使 s 的值减少；而如果对于某个圈 C_ℓ 有 $s = 1$，那么 C_ℓ 就是 $I(C_\ell)$ 中唯一的圈。令 $C_1 = C$，现在假设我们当前有一个含 s 条线段的圈 C_ℓ，我们要么希望

证明它在 $H(C_\ell)$ 的所有奇数权重圈中具有最小权重，要么转而考察具有上述性质的新圈 $C_{\ell+1}$。

令 $d(C_\ell)$ 为 C_ℓ 上 x_i 与 x_j 之间的最大（无权）距离，使得$z_i = z_j$ 对所有 $i, j \in [s]$ 的选择均成立。若 $d(C_\ell) \leq 1$，则 C_ℓ 在 $H(C_\ell)$ 中具有最小权重（路径 $x_i z_i x_j$ 的权重大于边 $x_i x_j$的权重），于是结论成立。

接下来，假设 $d(C_\ell) = 2$。令 x_i, x_j 为 C_ℓ 上距离为 2 的两个顶点，使得$z_i = z_j$。令 w 为 C_ℓ 中同时与 x_i 和 x_j 相邻的顶点，并令 y_i 和 y_j 分别为 C_ℓ 上 x_i 和 x_j的其他邻点，如图 1 所示。圈 $x_i z_i x_j w$是偶圈，因为其权重至多为 16，且 $k \geq 8$。因此，将 w 替换为 z_i，从 C_ℓ 得到的圈 $C_{\ell+1}$ 具有奇权。由于 x_i 和 x_j 位于不同线段中，且 $x_i z_i, x_j z_j$的权重为 3，因此 $C_{\ell+1}$的权重也小于 C_ℓ。此外，$C_{\ell+1}$划分为相同的线段 $Q_1, \ldots, Q_s$，但 Q_i和 Q_j被 $Q'_i = (Q_i \cup Q_j \cup \{z_i\}) \setminus \{w\}$ 替换，并且可能移除了一个单点线段 $\{w\}$。特别是，线段数量减少。同样，对于 $C_{\ell+1}$，可以选取相同的 $x_1, \ldots, x_s$和 $z_1, \ldots, z_s$，但移除 x_j 和 z_j，并将 z_i 替换为生成树 T 中 Q'_i 的一个邻点，该邻点位于 $C_{\ell+1}$ 之外（也可能是 w）。注意，我们得到 $|I(C_{\ell+1})| \leq |I(C_\ell)|$。

最后，假设 $d(C_\ell) \geq 3$。设 x_i、x_j是 C_ℓ 上的两个顶点，它们之间的距离为 $d(C_\ell)$，且满足 $z_i = z_j$。那么 x_i、z_i、x_j就是一条“捷径”，也就是说，它是一条权重小于 C_ℓ上 x_i、x_j路径 $P_\circlearrowleft$和 $P_\circlearrowleft$的路径。因此，x_i、z_i、x_j与 $P_\circlearrowleft$，或 x_i、z_i、x_j与 $P_\circlearrowleft$，可构成一个奇权为 $C_{\ell+1}$ 的圈，其权重小于 C_ℓ的权重。由于$|C_{\ell+1} \setminus C_\ell| = 1$，新圈 $C_{\ell+1}$可划分为 C_ℓ 的若干线段，以及一个额外的线段 Q'；后者包含 x_i、z_i、x_j，并可能包含 C_ℓ中包含 x_i 和 x_j的两个线段上的一些其他顶点。$C_{\ell+1}$ 的这一划分中的线段数少于 s（因为根据定义，x_i 和 x_j 位于不同的线段中）。此外，对于从 C_ℓ 保留下来的线段 Q_q，我们仍像之前一样保留顶点 x_q 和 z_q；对于新线段 Q'，则选取顶点 x' 和 z'，使得 x' 位于 Q' 中，且 z' 是 T 中 x' 在$C_{\ell+1}$之外的一个邻点；其中 z' 可能不包含在 $I(C_\ell)$中。作出这些选择后，我们得到

$$\begin{aligned} |I(C_{\ell+1})| &= |C_{\ell+1}| + |I(C_{\ell+1}) \setminus C_{\ell+1}| \leq |C_\ell| - 1 + |I(C_\ell) \setminus C_\ell| \\ &< |I(C_\ell) \setminus C_\ell| + |C_\ell| = |I(C_\ell)| \,, \end{aligned}$$

按要求完成，因此在这种情况下也成功构造了 $C_{\ell+1}$。 □

设 C' 是一个奇圈，例如该断言所保证存在的奇圈；设 s' 为其线段数，设 z'_1，……，$z'_{s'}$ 为这些线段的邻点。现在我们的目标是证明 $|I(C')| \geq \frac{2k+1}{3}$，这就证明了该引理，因为 $|I(C')| \leq |I(C)|$。若 $s' = 1$，则 C' 中至多有一条边的权重不是 3，因此 $|I(C')| \geq |C'| + 1 \geq \frac{2k+1-5}{3} + 2 \geq \frac{2k+1}{3}$。对于第一个不等式，我们用到了 $I(C') \setminus C'$ 中存在一个顶点；这是因为T 是连通的，而 C' 在 H 中不是生成的。因此，从现在起假设 $s' \geq 2$。

我们可以固定一条边 $e \in C'$，它不属于生成树 T。从 C'中移除 e 后，我们得到一条权重至少为 $(2k+1) - 5$ 的路径 P。令 T' 为由 $H(C')$ 中除 e 以外的所有权重为 3 的边，以及一个额外的辅助顶点 v 构成的图；该辅助顶点通过一条权重为 3 的边与 z'_1、……、$z'_{s'}$ 分别相连。注意，T'是一棵树。现在考虑图 $F = (T' \cup H(C')) \setminus \{e\}$。我们有 $V(F) \setminus V(P) \neq \emptyset$（因为 $v \in V(F) \setminus V(P)$），并且 P在 $N_F^1[P]$ 中连接其端点的所有路径中具有最小权重，因为 v不包含在 $N_F^1[P]$ 中，且根据 C'的最小性。此外，F不含权重为 11 的圈，因为任何这样的圈都必须包含辅助顶点，而该顶点仅与顶点 z'_1、……、$z'_{s'}$相连，这些顶点在 F中构成一个独立集，因此任何

经过辅助顶点的圈的权重至少为 12。由此可知，我们可以对 P和 T'应用引理 5.1，得到所需的 $I(C') \geq N_F^1[P] \geq \frac{2k-4}{3} + \frac{5}{3} \geq \frac{2k+1}{3}$。□

我们用引理 2.5 的一个有用推论来结束本节。

推论 5.3. 设 $\ell \geq 13$ 是一个奇整数。设 F 是一个边权为ω的加权图： $E(F) \to \{3,4,5\}$。假设 $F = T \cup P$，其中 T是一棵所有边的权重均为 3 的生成树，而 P 是一条端点为 x 和 y的非生成路径。若 F 没有权重小于 $\ell + 4$的奇权重圈，且 F中一条 x,y-路径的最小权重至少为 ℓ，则$|N_F^1[P]| \geq \frac{\ell}{3} + \frac{4}{3}$。

证明。我们将边 xy添加到 F中，并将其权重定义为 $s \in \{4,5\}$，使得 $\omega(P) + s$为奇数。设 C 是 F 中由 P和边 xy组成的那个奇权重圈。由于任意一条 x,y-路径的权重都至少为 ℓ，因此 F 中不存在权重为奇数且小于 $\ell+4$的圈。所以， $F \in \mathcal{H}(12(\ell+4-1))$。然后，我们可以应用引理 2.5，其中$k = \frac{1}{2}(\ell+4-1) \geq 8$是一个整数（因为 ℓ是奇数），从而得到 $|N_F^1[P]| = |N_F^1[C]| \geq \frac{\ell+4}{3}$。□

6. Proof of the main technical lemma

本节的主要目标是证明我们的主要技术引理（引理 2.3）。为此，我们还需要做一些准备。在前几节中，我们先展示了如何生成一个具有权二部邻域的候选集 B，然后通过分析 B 的大小，说明如何确保 $H \setminus B$ 是加权二部的。然而，我们尚未结合这两类结果。

注意，直接应用引理 4.1 取一个球，得到的集合可能很小；而即便巧妙地从奇权重环中删除几个顶点，也未必能使其成为加权二部的。因此，本节的第一个结果（也是证明引理 2.3 尚缺的最后一块拼图）是一个结合这两者的引理。事实上，我们将展示如何构造一个加权二部的候选集，并给出其大小的下界。

引理 6.1. 设 $i \geq 2$ 和 $k \geq 5i+16$ 为整数，且 $H \in \mathcal{H}(k)$。对于 H 中的任意 C 奇圈以及 $p \in V(C)$，以下结论成立。存在一条路径 P，使得 $E(P) \subseteq E(C)$，$p \in V(P)$， $N^i[P]$ 为加权二部的，且$|N^1[P]| \geq \frac{2}{3}k - \frac{10}{3}i - 5$。

此外，我们可以保证， p 要么位于 P 的无权中点（从 P 的端点到 p 的路径长度之差至多为 1），要么位于 P 的加权中点（从 P 的端点到 p 的路径权重之差至多为 5）。

证明。我们从$V(P) = \{p\}$开始，通过以下递归过程构造 P 作为输出。每一步中，我们用 u表示 $C \setminus P$中与P在 C中相邻的一个顶点。如果 $N^i[P \cup \{u\}]$是加权二部的，我们就将 P更新为这样一条路径：将P 延伸至顶点 u，所用的边是 C 中连接 u 与 P的边；然后重复这一步。否则，我们停止这一过程并输出 P。注意，这一过程定义良好，因为$N^i[\{p\}] \subseteq N_\omega^{5i}[\{p\}]$，且后者由引理 4.1 可知是加权二部的；而 $N^i[C]$不是。还要注意，根据定义， $N^i[P]$是加权二部的，因此只需证明$|N^1[P]| \geq \frac{2}{3}k - \frac{10}{3}i - 5$。

如果我们希望确保 p 位于 P 的无权中点，只需在选择 u 时交替延伸 P 的两端。对于加权中点，我们选择在 C 中与 p 的加权距离更短的 u。在这两种情况下，很容易看出，这都能保证 p 位于所需位置。

过程停止后，记 x,y 为 P 的两个端点，并记 u_x, u_y 为 $C \setminus P$ 中分别与 x 和 y 在 C 中相邻的两个顶点（不失一般性，假设我们无法扩展 P 使其包含 u_x）。为了得到下界

$|N^1[P]|$，我们想对输入 $\ell = 2k - 10i - 19 \geq 13$ 使用推论 5.3。然而，应该将哪个图用作宿主图 F 并不显而易见。由于 H 有一棵关联的生成树 T_H，其边的权重均为 3，最直接的选择是使用从 H 中删除所有不属于 P 或 T_H 的边后得到的图，但无法保证该图中 x 和 y 之间不存在短路径。

因此，我们要构造一个宿主图 F，使其具备将推论 5.3 应用于输入 ℓ 所需的性质。也就是说，我们希望图 F（除 P 外）只包含由权重为 3 的边组成的生成树 T 的边。此外，我们还希望 F 中不存在权重小于 $\ell + 4$ 的奇圈，并且 F 中连接 x 和 y 的最小权重路径的权重至少为 ℓ。

为此，我们将一片森林附加到 $F' = N^i[P] \cap (P \cup T_H)$ 上，使所得图 F 满足这些性质（x 与 y 之间不存在短路径，不存在短奇圈，并且边只来自一棵树或属于 P）。我们通过添加一些新顶点，再添加权重为 3 的边，从 F' 构造新图 F，使得 $F = T \cup P$（其中 T 是由权重为 3 的边组成的生成树），且 F 中不存在权重小于 $\ell + 4$ 的奇圈；最后，不存在使用 $N^i[P] \cap (P \cup T_H)$ 之外任何边的、连接 x 与 y 的最小权重路径。我们可以通过用由新顶点和权重为 3 的新边构成的长路径，以无圈的方式连接 $N^i[P] \cap (T_H \setminus P)$ 中森林的各个连通分量来实现这一点。

即使 F不包含在 H中，它的作用也在于我们有 $N_F^1[P] \subseteq N_H^1[P]$。实际上，只需证明 P 中存在一条子路径，使其在 F 中的邻域足够大即可。对于 x'，y' 在 P 中的顶点，我们用 $P_{x'y'}$ 表示这些顶点之间的 P 的子路径。采用上述记号并利用推论 5.3，只需在 P 中找到任意两个顶点 x'、y'，使得它们在 F中的加权距离至少为 ℓ。根据构造，这等价于在 P中找到 x'、y'，使得它们在 $L = N^i[P] \cap (P \cup T_H)$中的距离至少为 ℓ。

现在我们要寻找这样的 x'、y'。根据构造，$N^i[P]$中没有奇圈，但根据 u_x的选取，$N^i[P \cup \{u_x\}]$中确实存在一个奇圈。然而，由于 $N^i[\{u_x\}] \setminus N^i[P]$中可能有许多顶点，为了利用 H 中不存在短奇圈这一条件，我们谨慎地按以下方式进行。固定 $N^i[\{u_x\}] \setminus N^i[P] = \{z_1, \ldots, z_m\}$中顶点的任意顺序，令 h为使 $L_h = N^i[P] \cup \{z_1, \ldots, z_h\}$包含奇圈的最小下标，并令 Q为 L_h中权重最小的奇圈。我们关注这一顺序并非因为顺序本身，而是因为有了这个顺序以及 L_h的定义，我们知道 Q 经过 z_h，并且 L_{h-1}中不存在奇权重圈。

令 x'', y'' 为 Q 中 z_h 的两个邻点，并令 $x', y' \in P$ 分别为 P 中与 x'' 和 y'' 在 L_{h-1} 中距离最近的顶点。我们断言，$d_{\omega, L_{h-1}}(x'', y'') \geq 2k - 9$（$L_{h-1}$ 中 x'' 与 y'' 之间的加权距离）。事实上，假设此断言不成立，并令 P' 为 L_{h-1} 中连接 x'' 与 y'' 的最短路径，再令 P_Q 为 $Q \cap L_{h-1}$ 中端点为 x''和 y''的路径。$\omega(P')$ 与 $\omega(P_Q)$ 的奇偶性不能不同，否则 L_{h-1}中就会存在奇权重环。但 $\omega(x''z_h) + \omega(z_h y'') \leq 10$ 的奇偶性与 $\omega(P_Q)$ 不同，因此也与 $\omega(P')$ 的奇偶性不同。这意味着 P'（一条连接 x'' 与 y'' 的路径）与 z_h 构成一个权重至多为 $2k$ 的奇权重环。这就产生了矛盾，并证明了所声称的界。由于 $d_{\omega, L_{h-1}}(x', x') d_{\omega, L_{h-1}}(y'', y') \leq 5 \cdot (i+1)$，我们得知，在 L_{h-1} 中（因此也在 L 中）存在两点 $x', y' \in P$，它们之间的距离至少为 $2k - 9 - 2 \cdot 5 \cdot (i+1) = \ell$，如所需。□

现在我们可以开始证明本节的主要结果了。将这一切结合起来的策略是：当球之类较简单的构造不起作用时，利用第4节的结果，将引理 6.1 中的构造等结合起来。我们重新陈述并证明主要引理。

引理 2.3（主要技术引理）。对于任意 $t \in \mathbb{N}$ 和任意整数 $k \geq k(t) = 5490 + 45t$，下述结论成立。对于任意 $H \in \mathcal{H}(k, 2k+t)$，存在 $V(H)$ 的一个子集 B，使得 $H[B]$ 连通，$H \setminus B$ 是加权二部的，并且对于所有 $v \in V(H) \setminus B$，$H[B \cup \{v\}]$ 都是加权二部的。

引理 2.3 的证明。固定函数 $\ell_0 = \ell_0(t) = 610 + 5t$ 和 $k(t) = 9\ell_0$。令t 为一个自然数，并且 $k \geq k(t)$。特别要注意，由于 $k \geq 5490$，我们有 k 足够大，可以应用引理 6.1 和 $i = 16$，以及推论 4.4 和 $i = 3$。令$H \in \mathcal{H}(k, 2k + t)$，并区分两种情况。

情形 A。在此情形下，我们假设在 H 中有两个圈 C_1 和 C_2，其奇权，且它们之间的加权距离至少为 ℓ_0。设 P 是 C_1 与 C_2 之间一条权重最小的路径（特别地，我们有 $\omega(P) \geq \ell_0$）。设 p_1 和 p_2 分别是 P 在 C_1 和 C_2 中的端点。对于 $j = 1, 2$，令 B_j 为 C_j 中的路径（其中 p_j 位于 B_j 的无权中点），由引理 6.1 给出，且 $i = 15$；注意到$d(B_1, B_2) \geq 8$。图 2 展示了这一情形。我们用 B 表示集合$N^2[B_1 \cup B_2 \cup P]$。根据构造，对于 $j = 1, 2$，$N^{10}[B_j]$ 是加权二部的，因此由推论 4.4 应用 $i = 3$ 可得，$N^1[B]$ 是加权二部的。

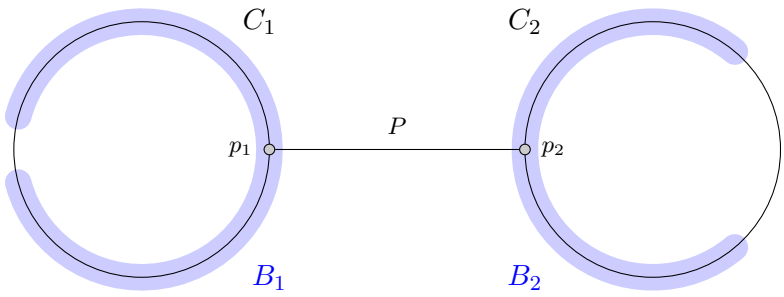

FIGURE 2. 两个圈 C_1 和 C_2 之间的加权距离至少为 ℓ_0，以及加权二部集的构造。

既然我们已经证明了 $N^1[B]$ 是加权二部的，剩下只需证明 $H \setminus B$ 是加权二部的。根据引理 2.4，只需证明 $|\mathrm{int}(B)| = |N^1[B_1 \cup B_2 \cup P]| \geq \frac{4}{3}k + t$。由于 B_j由引理 6.1 给出，且 $i = 16$，我们有 $|N^1[B_j]| \geq \frac{2k}{3} - 59$。因此，由于对于 $j = 1$，2，$N^1[B_1] \cap N^1[B_2] = \emptyset$且 $|P \cap N^1[B_j]| \leq 2$，可得

$$|N^1[B_1 \cup B_2 \cup P]| \geq |N^1[B_1]| + |N^1[B_2]| + |P| - 4 > \tfrac{4}{3}k - 118 + \tfrac{1}{5}\ell_0 - 4 \geq \tfrac{4}{3}k + t\,,$$

其中，最后一个不等式用到了下界 $\ell_0 = \ell_0(t) \geq 5 \cdot (122 + t) = 610 + 5t$。

情况 B. 我们假设第一种情况不适用，因此，任意两个奇圈之间都存在一条权重至多为 ℓ_0 的路径。

令 C_1 为最小奇数权环（注意，不失一般性，我们可以假设 $\omega(C_1) = 2k + 1$），并令 x_1 为 C_1 中的一个顶点。令 $T_1 = N_\omega^{k-8}[x_1]$，并注意到根据引理 4.1，$N[T_1]$ 是加权二部的。要么 T_1 的补图诱导出 H 的一个加权二部子图，此时我们已由 $B = T_1$ 得证；要么我们可以在 T_1 之外找到一个奇权为 C_2 的圈，使得 T_1 的补图中不存在奇权更小的圈。

假设我们处于第二种情形，并固定这样一个 C_2。设 x_2 为 $C_1 \setminus N[T_1]$中使距离 $d_\omega(x_2, C_2)$最小的顶点。我们有 $d_\omega(x_2, C_2) \leq 2\ell_0$。事实上，考虑 C_1 中的一个顶点 x_2'，满足 $d_\omega(x_2', C_2) \leq \ell_0$；我们有 $d_\omega(x_2', C_1 \setminus N[T_1]) \leq \ell_0$，因为

任何从 $N[T_1] \subseteq N_\omega^{k-3}[x_1]$ 之外出发、权重至多为 ℓ_0 的路径，其终点到 x_1 的加权距离都不小于 $k-3-\ell_0$。因此，我们可以在 $C_1 \setminus N[T_1]$ 中找到一个与 C_2 的距离至多为 $2\ell_0$ 的顶点。

令 $T_2 = N_\omega^{k-8}[x_2]$，并注意到根据引理 4.1，$N[T_2]$ 是加权二部的。为便于后续引用，我们注意到 $C_1 \setminus N[T_1]$ 和 $C_1 \setminus N[T_2]$ 中各自至多有两个顶点，并且 $k-2 \le d_\omega(x_1,x_2) \le k$，因为 $x_2 \in C_1 \setminus N[T_1]$ 且 $\omega(C_1) = 2k+1$。要么 T_2 的补图在 H 中诱导出一个加权二部子图，此时 $B = T_2$ 已得证；要么我们可以找到一个圈 C_3，它具有奇权且位于 T_2 之外，并且在 T_2 的补图中不存在奇权更小的圈。

假设我们处于第二种情形，并固定这样一个 C_3。图 3 展示了这种情况及接下来的论证。根据假设，在 C_1 与 C_3 之间，以及 C_2 与 C_3 之间，存在权重至多为 ℓ_0 的路径。因此，对于 $j=1$，存在 $s_j \in C_j$，使得 2 满足 $d_\omega(s_1,C_3)\ d_\omega(s_2,C_3) \le \ell_0$。令 P_1, P_2 为 C_1, C_2 中由引理 6.1 给出的路径，其中 $i=16$，而 x_1 和 s_2 分别位于加权中点。用 p,q 表示 P_1 的端点。我们断言 $d_\omega(x_1,p)\ d_\omega(x_1,q) \le k-43$。事实上，根据引理 6.1，我们知道 $|d_\omega(x_1,p) - d_\omega(x_1,q)| \le 5$；若例如 $d_\omega(x_1,p) > k-43$，我们也会得到 $d_\omega(x_2,q) \ge k-47$。但这意味着 $C_1 \subseteq N^{16}[P_1]$。事实上，从 p,q 各自沿 P_1 朝 x_2 前进 16 步，且每步权重至少为 3，结合 $k-47+16\cdot 3 \ge k+1$ 可知 $C_1 \subseteq N^{16}[P_1]$，因为 C_1 的权重为 $2k+1$。这与 $N^{16}[P_1]$ 是加权二部的这一事实相矛盾。这意味着 $N^7[P_1] \subseteq N_\omega^{35}[P_1] \subseteq N_\omega^{k-8}[x_1] = T_1$。这与 $T_1 \cap C_2 = \emptyset$ 一起意味着 $d(P_1,P_2) \ge 8$。

现在考虑整张图中连接 s_1 和 s_2 的最轻路径 P（分别是 C_1 和 C_2 中距 C_3 最近的固定顶点）。令 s_1'（和 s_2'）分别为 P 在 P_1（和 P_2）上的最后一个（和第一个）顶点，并将 P' 记为 P 中位于 s_1' 和 s_2' 之间的子路径。现在我们对集合 $B_1 = P_1$ 和 $B_2 = P_2$ 应用推论 4.4，其中取 $i=3$。由此可知 $N^3[P_1 \cup P_2 \cup P']$ 是加权二部的。

如果 P' 的权重至少为 ℓ_0，那么 P' 至少有 $\frac{1}{5}\ell_0 \ge 122+t$ 个顶点，根据引理 2.4，我们就能处理 $B = N^2[P_1 \cup P_2 \cup P']$，因为

$$|\mathrm{int}(B)| \ge |N^1[P_1 \cup P_2 \cup P']| \ge |N^1[P_1]| + |N^1[P_2]| + |P'| - 4 \ge 2(\tfrac{2}{3}k - 59) + |P'| - 4 \ge \tfrac{4}{3}k + t\,.$$

否则，P' 的权重小于 ℓ_0。以下论证的示意图见图 4。

我们考察从 s_1 到 s_2 的加权距离。首先证明 $d_\omega(x_1,s_1) \le \ell_0 + 5$。事实上，根据 s_1 的选取以及 $C_3 \cap T_2 = \emptyset$，$C_1 \setminus T_2$ 和 $d_\omega(s_1, C_1 \setminus T_2) \le \ell_0$ 中至多有两个顶点。此外，$d_\omega(x_1, s_2') \ge k-7$（因为 $s_2' \in C_2 \subseteq T_1^c$），由此可得 $d_\omega(s_1,s_2') \ge k-\ell_0-12$。由于 s_1' 位于从 s_1 到 s_2' 的一条最轻路径上，我们便得到

$$d_\omega(s_1,s_1') = d_\omega(s_1,s_2') - d_\omega(s_2',s_1') \ge k - \ell_0 - 12 - d_\omega(s_2',s_1')\,.$$

由于 $\omega(C_1) = 2k+1$ 且 $x_2 \notin T_1$，我们有 $d_\omega(x_1,s_1') + d_\omega(s_1',x_2) \le k+8$；此外，$d_\omega(x_1,s_1') + d_\omega(s_1',s_2') \ge d_\omega(x_1,s_2') \ge k-7$。将这两个不等式相减，可得 $d_\omega(x_2,s_1') \le 15 + d_\omega(s_2',s_1')$（代数运算）。

由于 $C_3 \cap T_2 = \emptyset$ 和 $d_\omega(s_2,C_3) \le \ell_0$，我们有 $d_\omega(s_2,x_2) \ge k-\ell_0$。再结合 s_2' 位于一条最短的 s_1', s_2-路径上这一事实，可得

$$\begin{aligned} d_\omega(s_2,s_2') &= d_\omega(s_2,s_1') - d_\omega(s_2',s_1') \\ &\ge d_\omega(s_2,x_2) - d_\omega(s_1',x_2) - d_\omega(s_2',s_1') \\ &\ge k - \ell_0 - 2d_\omega(s_2',s_1') - 15\,. \end{aligned}$$

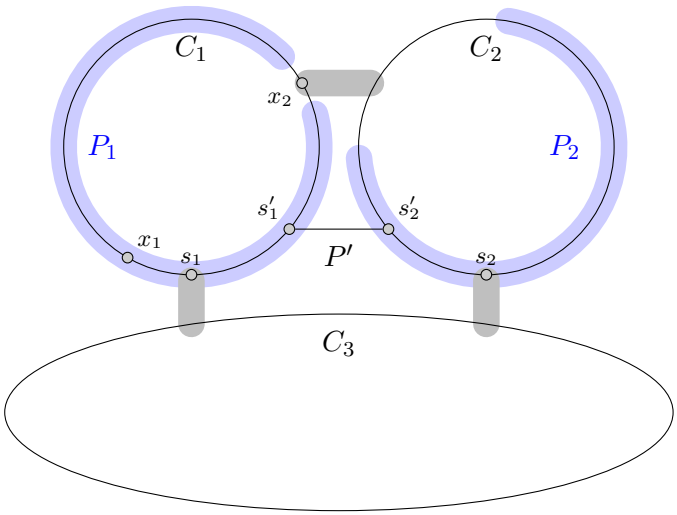

FIGURE 3. 三个圈 C_1、C_2 和 C_3 的加权距离至多为 ℓ_0，以及在 $d_\omega(s_1', s_2') \geq \ell_0$ 时加权二部集的构造。

综合以上各项，包括 $d_\omega(s_1', s_2') = \omega(P')$（我们现在假设其至多为 ℓ_0），可得

$$\begin{aligned}\omega(P) = d_\omega(s_1, s_2) &= d_\omega(s_1, s_1') + d_\omega(s_1', s_2') + d_\omega(s_2', s_2) \\ &\geq 2k - 2d_\omega(s_2', s_1') - 2\ell_0 - 27 \geq 2k - 4\ell_0 - 27\,.\end{aligned}$$

现在，在 C_3 中固定一个距 s_2 最近的顶点 s_3，并应用引理 6.1（取 $i = 16$），得到 C_3 中的一条路径 P_3，其中 s_3 位于其无权中点。无需失去一般性（取一条子路径，使 s_3 仍位于其无权中点），我们可以假设$|P_3| \leq \frac{2}{3}k - 59$。注意，$s_3$ 到 P_3 中任意其他顶点的距离至多为$_{12}(\frac{2}{3}k - 59) + 1$，因此，$s_3$到 P_3中任意其他顶点的加权距离至多为 $\frac{5}{3}k - \frac{5}{2}57$。由于 $d_\omega(s_2, s_3) \leq \ell_0$，我们推得

$$\begin{aligned}d_\omega(s_1, P_3) &\geq d_\omega(s_1, s_2) - d_\omega(s_2, s_3) - \max_{v \in P_3}\{d_\omega(v, s_3)\} \\ &\geq 2k - 4\ell_0 - 27 - \tfrac{5}{3}k + \tfrac{5}{2}57 - \ell_0 \geq \tfrac{2}{3}k - 5\ell_0 + 2\,.\end{aligned}$$

注意，由于 $P_3 \cap T_2 = \emptyset$，我们有 $d_\omega(x_2, P_3) \geq k - 7$，因此在 C_1 上有两个彼此「对跖」的点，它们都离 P_3「很远」，我们可以利用这一点证明 P_1 和 P_3 也「很远」。更确切地说，因为我们证明了 $d_\omega(x_1, s_1) \leq \ell_0 + 5$ 且 $k - 2 \leq d_\omega(x_1, x_2) \leq k$，又因为 C_1 是一个最小奇数权环（因此，给定环上的两点，它们之间沿环的自然子路径就是连接这两点的最小权重路径），所以对于 P_1 中的任意顶点 v，我们有

$$\begin{aligned}d_\omega(x_2, v) &\leq d_\omega(x_2, x_1) - d_\omega(x_1, v) \\ &\leq d_\omega(x_2, x_1) + d_\omega(x_1, s_1) - d_\omega(s_1, v) \\ &\leq k + \ell_0 + 5 - d_\omega(v, s_1)\end{aligned}$$

并且还

$$\begin{aligned}d_\omega(v, P_3) &\geq \max\{d_\omega(x_2, P_3) - d_\omega(x_2, v), d_\omega(s_1, P_3) - d_\omega(s_1, v)\} \\ &\geq \max\{k - 7 - (k - d_\omega(v, s_1) - \ell_0 - 5), \tfrac{2}{3}k - 5\ell_0 + 2 - d_\omega(v, s_1)\} \\ &\geq \tfrac{1}{3}k - 2\ell_0\,.\end{aligned}$$

由于我们对 k 的下界，有 $d(P_1, P_2) \geq \frac{1}{5}(\frac{1}{3}k - 2\ell_0) \geq 8$。此外，我们知道对于 $j = 1, 3$，$N^{10}[P_j]$ 是加权二部的。因此，我们可以将推论 4.4 应用于 $i = 3$ 以及 P_1 和 P_3 之间的一条最短路径 P''，从而得到 $N^3[P_1 \cup P_3 \cup P'']$ 是加权二部的。此外，

$$\begin{aligned} |N^1[P_1 \cup P'' \cup P_3]| &\geq |N^1[P_1]| + |N^1[P_3]| + |P''| - 4 \\ &\geq 2(\tfrac{2}{3}k - 59) + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}k - 2\ell_0) - 4 \\ &\geq \tfrac{4}{5}k + t\,. \end{aligned}$$

最后一个不等式由我们的下界 $k \geq 9\ell_0 = 5490 + 45t$ 得出。将引理 2.4 应用于 $B = N^2[P_1 \cup P'' \cup P_3]$，即完成了此情形的证明。

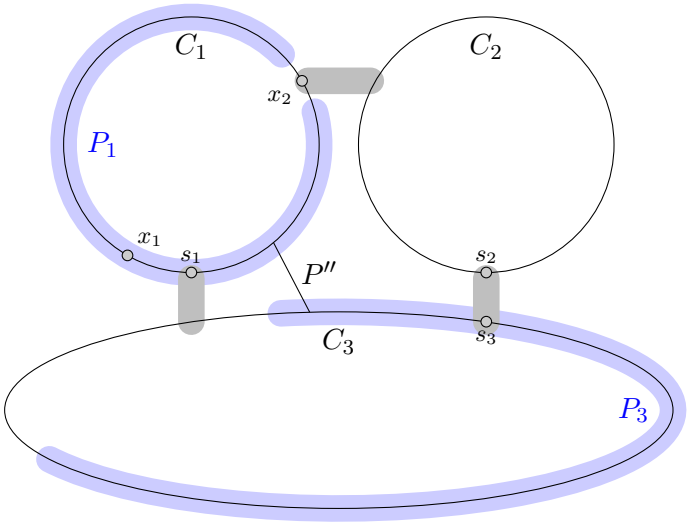

FIGURE 4. 三个圈 C_1、C_2 和 C_3 之间的加权距离至多为 ℓ_0，以及在 $d_\omega(s_1', s_2') \leq \ell_0$ 时加权二部集的构造。

□

REFERENCES

1. P. Allen, J. B¨ottcher, S. Griffiths, Y. Kohayakawa 和 R. Morris，《图的色数阈值》，Adv. Math. 235 (2013), 261–295。2. B. Andr´asfai, P. Erd˝os 和 V. T. S´os，《图的色数、极大团与最小度之间的联系》，Discrete Math. 8 (1974), 205–218。3. S. Brandt 和 S. Thomass´e，《稠密无三角形图是四可着色的：Erd˝os-Simonovits 问题的解答》，http://perso.ens-lyon.fr/stephan.thomasse/。4. O. Ebsen 和 M. Schacht，《奇圈的同态阈值》，Combinatorica 40 (2020), no. 1, 39–62。5. P. Erd˝os，《图论与概率》，Canadian J. Math. 11 (1959), 34–38。6. P. Erd˝os 和 M. Simonovits，《极值图论中的一个度数问题》，Discrete Math. 5 (1973), 323–334。7. W. Goddard 和 J. Lyle，《团数较小的稠密图》，J. Graph Theory 66 (2011), no. 4, 319–331。8. R. H¨aggkvist，《非二部图中指定长度的奇圈》，《图论》（剑桥，1981），North-Holland Math. Stud., vol. 62, North-Holland, 阿姆斯特丹-纽约, 1982, pp. 89–99。9. G. P. Jin，《无三角形的四色图》，Discrete Math. 145 (1995), no. 1-3, 151–170。10. S. Letzter 和 R. Snyder，《$\{C_3, C_5\}$-自由图的同态阈值》，J. Graph Theory 90 (2019), no. 1, 83–106。

11. T. Luczak, 《最小度较大的无三角形图的结构》, Combinatorica 26 (2006), 489–493。12. J. Ma, 《连续奇数长度的圈》, European J. Combin. 52 (2016), 74–78。13. V. Nikiforov, 《 K_r-自由图的色数与最小度》, arXiv:1001.2070。14. M. Sankar, 《奇圈的同伦与同态阈值》, arXiv:2206.07525。15. C. Thomassen, 《最小度较大的无五边形图的色数》, Combinatorica 27 (2007), no. 2, 241–243。16. N. Van Ngoc 和 Z. Tuza, 《奇围长较大的 4-色图》, Discrete Math. 138 (1995), no. 1-3, 387–392, 第14届英国组合数学会议（基尔, 1993）。17. T. Luczak 和 S. Thomass´e, 《通过 VC 维数为稠密图着色》, arXiv:1007.1670。
(JB) London School of Economics, Department of Mathematics, Houghton Street, London WC2A 2AE, UK电子邮箱：j.boettcher@lse.ac.uk
(NF) School of Mathematics and Statistics, The Open University, UK, and Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary电子邮箱：nora.frankl@open.ac.uk
(DMC) London School of Economics, Department of Mathematics, Houghton Street, London WC2A 2AE, UK电子邮箱：d.mergoni@lse.ac.uk(OP) Freie Universität Berlin, Department of Mathematics and Computer Science,Arnimallee 3, 14195 Berlin, Germany电子邮箱：parczyk@mi.fu-berlin.de(JS) London School of Economics, Department of Mathematics, Houghton Street,London WC2A 2AE, UK电子邮箱：j.skokan@lse.ac.uk