arXiv:2302.01879v1 [math.AP] 3 Feb 2023

Hamilton–雅可比方程的慢速周期均匀化

WILLIAM COOPERMAN

Abstract. Capuzzo-Dolcetta–Ishii 证明，强制性 Hamilton–雅可比方程的周期均匀化收敛速率为 $O(\varepsilon^{1/3})$。我们通过构造一类强制性非凸哈密顿量的实例补充了这一结果，其周期均匀化收敛速率为 $\Omega(\varepsilon^{1/2})$。

1. Introduction

自 Lions–Papanicolaou–Varadhan [8] 证明强制性 Hamilton–雅可比方程的周期均匀化以来，如何量化收敛速率一直是周期和随机情形中广为人知的开放问题。在周期环境中，若不对哈密顿量作额外的结构性假设，目前已知的最佳结果是 $O(\varepsilon^{1/3})$ 的收敛速率；该结果由 Capuzzo-Dolcetta–Ishii [2], 证明，也是首个定量界。另一方面，当哈密顿量关于动量变量为凸时，利用最优控制表述以及 Burago [1], 的论证，可以推出周期均匀化的最优收敛速率 $O(\varepsilon)$；Burago 证明了在 $\mathbb{R}^d$ 上对 $\mathbb{Z}^d$-周期度量进行均匀化时存在相应的收敛速率。因此，自然会问：在缺乏凸性的情况下， $O(\varepsilon)$ 的收敛速率是否仍然成立？事实上，Ziliotto 的 [9] 随机非均匀化实例（另见 Feldman–Souganidis [4]）表明，哈密顿量的鞍点可能在减缓周期均匀化方面发挥关键作用。

在本文中，我们通过构造以 $\Theta(\varepsilon^{1/2})$ 的速率实现均匀化的例子，对这个问题给出了否定的回答。在维数为 $d \geq 3$ 时，我们构造了一个例子，使得有效哈密顿量恰好也是凸的。

设哈密顿量 $H\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 在局部 Lipschitz 连续，在第一个变量上具有 $\mathbb{Z}^d$-周期性，$x \in \mathbb{R}^d$，并且关于第二个变量 $p \in \mathbb{R}^d$ 一致强制；也就是说，

$$\liminf_{|p|\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}^d} H(x,p) = +\infty.$$

尺度为 $\varepsilon > 0$ 时的微观问题是初值问题

$$\begin{cases} D_t u^\varepsilon(t,x) + H(\varepsilon^{-1}x, D_x u^\varepsilon(t,x)) = 0 & \text{for } t>0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^d, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1}$$

其中，初始数据 u_0 是 Lipschitz 连续的。

Lions–Papanicolaou–Varadhan [8] 证明了，存在一个由 H 唯一确定的有效哈密顿量 $\overline{H}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，使得 $u^\varepsilon \to \overline{u}$ 在紧集上一致收敛，其中 $\overline{u}$ 满足有效问题

$$\begin{cases} D_t \overline{u}(t,x) + \overline{H}(D_x \overline{u}(t,x)) = 0 & \text{for } t>0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^d, \\ \overline{u}(0,x) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2}$$

在这些一般假设下，关于均匀化速率，目前已知的唯一一个定量上界是由 Capuzzo-Dolcetta–Ishii [2], 给出的；他们证明了 $\|u^\varepsilon - \bar{u}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{1/3})$，其中 $T > 0$。

定理 1. 存在一个局部利普希茨连续的哈密顿量 H：关于第一变量为 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^d$-周期，并且关于第二变量一致强制，同时存在初始数据 $u_0 \in C^{0,\,1}(\mathbb{R}^d)$，使得对于充分小的 ε,

$$c\varepsilon^{1/2} \leq u^\varepsilon(1,0) \leq C\varepsilon^{1/2}$$

其中 u^ε 是微观问题 (1) 的解。如果 $d \geq 3$，那么此外，可以选取 H 使得 $\overline{H}$ 为凸函数。

2. Examples of slow homogenization

为了构造这些例子，我们首先回顾微分博弈理论中的一些事实。关于更全面的论述，请参阅 Isaacs [6] 和 Evans–Souganidis [3]。

设 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是紧集。我们考虑两个参与者 I 和 II 之间的微分博弈。博弈有一个得分，I 试图使其最小化，而 II 试图使其最大化。

定义 1. I（分别地，II）的控制是一个可测函数 $a\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to A$（分别地，$b\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to B$）。我们用 $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B$ 分别表示 I 和 II 的控制集合。

定义 2. I 的策略是一个满足非预见性条件的函数 $\alpha\colon \mathcal{C}_B \to \mathcal{C}_A$：若 $t > 0$ 和 b_1，且 $b_2 \in \mathcal{C}_B$ 满足 $b_1(s) = b_2(s)$ 对几乎所有 $s \in [0,t]$ 成立，则 $\alpha(b_1)(s) = \alpha(b_2)(s)$ 对几乎所有 $s \in [0,t]$ 也成立。我们用 $\mathcal{S}_A$ 表示 I 的策略集合，并相应地定义 II 的策略集合 $\mathcal{S}_B$。

一个微分博弈由集合 A、B、某些 Lipschitz初始数据 $u_0 \in C^{0,\,1}(\mathbb{R}^d)$、运行成本$R \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times A \times B)$ 以及转移函数 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times A \times B;\, \mathbb{R}^d)$ 指定，其中转移函数是 Carath´eodory 函数，即对于固定的 x，$f(x,a,b)$ 关于 a,b 连续；对于固定的 a,b，关于 x 可测。该博弈基于状态 σ 的演化：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d$。给定策略 α、控制 b 和初始状态 x 后，状态的演化满足常微分方程

$$\begin{cases} \dot\sigma(t) = f(\sigma(t), \alpha(b)(t), b(t)) & \text{for } t > 0, \\ \sigma(0) = x & \text{at } t = 0. \end{cases} \tag{3}$$

有时，我们将写成 $\sigma(t) = \sigma(t, \alpha, b)$，以强调其对 α 和 b 的依赖关系。

给定 $t \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，从时刻 t 后以 x 为初始状态开始的博弈的上值定义为

$$u^+(t,x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{S}_A} \sup_{b \in \mathcal{C}_B} \int_0^t R(\sigma(s), \alpha(b)(s), b(s))\, ds + u_0(\sigma(t)). \tag{4}$$

该博弈的上值（见 Evans–Souganidis [[3], 定理 4.1] 和 Lions [7]）是以下初值问题的粘性解

$$\begin{cases} D_t u^+(t,x) + H^+(x, D_x u^+(t,x)) = 0 & \text{for } t > 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^d, \\ u^+(0,x) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{5}$$

其中，上哈密顿量 $H\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$H^+(x,p) := -\min_{a \in A} \max_{b \in B} R(x,a,b) + p \cdot f(x,a,b). \tag{6}$$

值得注意的是，通过交换参与者的顺序，我们可以类似地定义博弈的下值：

$$u^-(t,x) := \sup_{\beta \in \mathcal{S}_B} \inf_{a \in \mathcal{C}_A} \int_0^t R(\sigma(s), a(s), \beta(a)(s))\, ds + u_0(\sigma(t)), \tag{7}$$

它满足与下哈密顿量相对应的类似初值问题

$$H^-(x,p) := -\max_{b \in B} \min_{a \in A} R(x,a,b) + p \cdot f(x,a,b). \tag{8}$$

在我们的所有示例中，Isaacs 条件 $H^+ = H^-$ 都成立，因此博弈的上值与下值相等。为简洁起见，我们记 $H := H^- = H^+$。

2.1. 二维中的一个例子。设 $\varphi\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [0,1]$ 光滑，满足 $\varphi(0) = 1$，且当 $|x| \geq \frac{1}{100}$ 时 $\varphi(x) = 0$。取 $d = 2$ 和 $A = B_1(0)$，即以原点为中心的闭单位球，以及 $B = [0,1] \times \{0\}$。将运行成本定义为

$$R(x,a,b) := 100\left(1 - \varphi(x_2) - \varphi\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)\right) + 100|a|^2, \tag{9}$$

将转移函数定义为

$$f(x,a,b) := 2a + b\left(\varphi(x_2) - \varphi\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)\right), \tag{10}$$

以及初始数据为

$$u_0(x) := \min\{|x_1|, 1\}.$$

尽管证明中并不需要这一点，但我们注意到 Isaacs 条件

$$H(x,p) = -\min_{a\in A}\max_{b\in B} R(x,a,b) + p\cdot f(x,a,b) = -\max_{b\in B}\min_{a\in A} R(x,a,b) + p\cdot f(x,a,b)$$

成立，因此该博弈的上值与下值相等。

直观地说，微观环境由 $\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{Z}$ 中每个高度处的水平“高速通道”组成。在高速通道之外，运行成本极高，因此 I 被迫将大部分时间花在高速通道内。在高速通道之外，II 的控制不会影响状态。在高度为 $\varepsilon\mathbb{Z}$ 的高速通道内，II 可以选择将状态推向 $+e_1$ 方向；在高度为 $\varepsilon\left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right)$ 的高速通道内，II 可以选择将状态推向 $-e_1$ 方向。II 的控制不会影响运行成本，而 I 若将状态推向任何方向，都会受到严厉惩罚。如果 I 想待在原点附近（终端代价在原点处最低），一种策略是进入一条高速通道，等待 II 将状态推离原点 $\varepsilon^{1/2}$ 的距离。然后，I 可以切换到一条通向原点的高速通道，并重复这一过程。根据同样的道理，II 可以迫使 I 至少切换 $\varepsilon^{-1/2}$ 次高速通道，否则 I 就可能要支付至少为 $\varepsilon^{1/2}$ 的终端代价。每次切换高速通道都会使总运行成本增加与 ε 成正比的量，因此误差项彼此平衡。

现在，我们证明定理 1 的 $d = 2$ 情形。

证明。我们使用 u^ε 的微分博弈刻画 (4)。对于上界，我们构造一个策略α： $\mathcal{C}_B \to \mathcal{C}_A$ 按如下方式分段定义 I。

(1) 在此步骤开始时，假设策略已构造至时刻$t_i \geq 0$，且 $\sigma(t_i,\alpha,b) \in [-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4}]\times\{0\}$。给定 $b\in\mathcal{C}_B$，令

$$t_{i+1} := \min\{t > 0 \mid u_0(\sigma(t,\widehat{\alpha}_{t_i},b)) \geq \varepsilon^{1/2}\},$$

其中

$$\widehat{\alpha}_s(t) := \begin{cases}\alpha(t) & \text{for } t < s,\\ 0 & \text{for } t \geq s.\end{cases}$$

由 f 和 u_0 的结构可推出， $\sigma(t_{i+1},\widehat{\alpha}_{t_i},b) = (\varepsilon^{1/2},0)$。令 $\alpha(b)(t) := \widehat{\alpha}_{t_i}(b)(t)$，其中 $t < t_{i+1}$。

(2) 记 $t_{i+2} := t_{i+1} + \frac{\varepsilon}{4}$，并令 $\alpha(b)(t) := (0,1)$，其中 $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$。

(3) 我们推出 $\sigma(t_{i+2},\alpha,b) \in \left[\varepsilon^{1/2} - \frac{\varepsilon}{4}, \varepsilon^{1/2} + \frac{\varepsilon}{4}\right] \times \left\{\frac{\varepsilon}{2}\right\}$。现在，令

$$t_{i+3} := \min\{t > 0 \mid u_0(\sigma(t,\widehat{\alpha}_{t_{i+2}},b)) \leq 0\}$$

并令 $\alpha(b)(t) := \widehat{\alpha}_{t_{i+2}}(b)(t)$，其中 $t_{i+2} \leq t < t_{i+3}$。与第一步一样，我们推得 $\sigma(t_{i+3},\alpha,b) = \left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$。

(4) 写出 $t_{i+4} := t_{i+3} + \frac{\varepsilon}{4}$ 并令 $\alpha(b)(t) := (0,-1)$，其中 $t_{i+3} \leq t < t_{i+4}$。(5) 我们推得 $\sigma(t_{i+4},\alpha,b)$ $\in \left[-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4}\right]\times\{0\}$。现在回到步骤 1 并重复操作，但从时间 t_{i+4} 开始，而不是从时间 t_i开始。

该构造保持了不变量 $\sigma(t,\alpha,b) \in \left[0,\frac{\varepsilon}{4}\right] \times \left[-\frac{\varepsilon}{4}, \varepsilon^{1/2} + \frac{\varepsilon}{4}\right]$，因此我们确保终端代价至多为 $u_0(\sigma(1))$ $\leq \varepsilon^{1/2} + \frac{\varepsilon}{4} \leq 2\varepsilon^{1/2}$。

还需证明，由 α 给出的运行成本至多为 $C\varepsilon^{1/2}$。对于任意 $i = 0$，1、2、.....，我们断言

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} R(\varepsilon^{-1}\sigma(t),\alpha(b)(t),b(t))\,\mathrm{d}t \leq 50\varepsilon.$$

事实上，上述第 2 步或第 4 步中创建的区间满足这一界限，因为 $t_{i+1} - t_i = \frac{\varepsilon}{4}$ 和 $R \leq 200$处处成立。另一方面，上述第 1 步或第 3 步中创建的区间的运行成本为 0，因为对于区间内所有 t，$\sigma(t) \in \mathbb{R}\times\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{Z}$。

我们已经证明，每一步增加的运行成本至多为 50ε 。另一方面，第 1 步或第 3 步创建的每个区间的持续时间至少为 $\varepsilon^{1/2}$，因此在 $[0,1]$中此类区间至多有 $\varepsilon^{-1/2}$ 个。由此可知，总运行成本至多为 $50\varepsilon^{1/2}$，所以 $C=50$ 满足所述结论。

接下来，我们讨论下界 $u^{\varepsilon}(1,0) \geq c\varepsilon^{1/2}$。给定一个策略 $\alpha\colon \mathcal{C}_B \to \mathcal{C}_A$，我们为 II 构造如下控制。

$$b(t) := \begin{cases} (1,0) & \text{if } u_0(\sigma(t,\alpha,b)) \leq 2\varepsilon^{1/2} \text{ or } \sigma(t,\alpha,b)\cdot f(\varepsilon^{-1}\sigma(t,\alpha,b),0,b) > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们声称，该控制所得的值至少为 $c\varepsilon^{1/2}$。事实上，考虑如下时间集合

$$E := \{t \in [0,1] \mid R(\varepsilon^{-1}\sigma(t,\alpha,b),0,0) \geq 1\}.$$

首先，注意到

$$\int_0^1 R(\varepsilon^{-1}\sigma(t,\alpha,b),\alpha(b)(t),b(t))\,\mathrm{d}t \geq |E|, \tag{11}$$

其中 $|E|$ 表示勒贝格测度。另一方面，令 $U_+ := \{t \in [0,1]\setminus E \mid \varphi(\varepsilon^{-1}\sigma(t,\alpha,b)_2) > 0\}$and $U_- := [0,1]\setminus(E\cup U_+)$。在时间集合 U_+（分别为 U_-）中，II 可以控制状态，使其沿 $+e_1$（分别为 $-e_1$）方向以至少 0.99 的幅度推动。

有两种情况。

(1) 假设存在 $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 1$，使得 $|[t_0,t_1]\cap U_-| \geq 6\varepsilon^{1/2}$ 且 $|[t_0,t_1]\cap U_+| = 0$。那么

$$\int_{t_0}^{t_1} R(\sigma(t,\alpha,b),\alpha(b)(t),b(t))\,\mathrm{d}t \geq \varepsilon^{1/2},$$

在这种情况下，我们便得出结论；或者，由于 I 对区间 $[t_0,t_1]$ 内状态的总影响小于$\frac{\varepsilon^{1/2}}{100}$，因此有 $u_0(\sigma(t_1,\alpha,b)) \geq 3\varepsilon^{1/2}$。如果 t 满足 $u_0(\sigma(t,\alpha,b)) \geq 2\varepsilon^{1/2}$，那么根据 b 的定义，我们有 $\sigma(t,\alpha,b)\cdot f(\varepsilon^{-1}\sigma(t,\alpha,b)\,0,b) \geq 0$，因此 II 的控制绝不会推动状态朝 u_0 的较小值方向变化。所以，要么 $u(\sigma(1,\alpha,b)) \geq 2\varepsilon^{1/2}$，要么 II 花费

$$\int_{t_l}^{1} R(\sigma(t,\alpha,b),\alpha(b)(t),b(t))\,\mathrm{d}t \geq \varepsilon^{1/2},$$

而在这两种情况下，我们都能得出结论。注意，若 $|[t_0,t_1]\cap U_+| \geq 6\varepsilon^{1/2}$ 和 $|[t_0,t_1]\cap U_-| = 0$，则用同样的论证即可得出结论。

(2) 否则，根据 (11)，我们可以假设 $|E| \leq \varepsilon^{1/2}$，因此 $|U_1\cup U_2| \geq 1-\varepsilon^{1/2}$。取 $t_-\in U_-$ 和$t_+ \in U_+$。由于 $|\sigma(t_-,\alpha,b)_2 - \sigma(t_+,\alpha,b)_2| \geq \varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{50}\right)$（利用了 φ的支集包含于$(-\frac{1}{100},\frac{1}{100})$这一事实），我们得出 $|[t_-,t_+]\cap E| \geq \frac{\varepsilon}{5}$，因此

$$\int_{t_-}^{t_+} R(\sigma(t,\alpha,b),\alpha(b)(t),b(t))\,\mathrm{d}t \geq \frac{\varepsilon}{5}.$$

另一方面，由于前一种情形的假设不成立，当 $t_1-t_0 \geq 6\varepsilon^{1/2}$时，我们有 $[t_0,t_1]\cap U_- \neq \emptyset$和 $[t_0,t_1]\cap U_+ \neq \emptyset$。因此，在 $[0,1]$, 中至少有 $\frac{\varepsilon^{-1/2}}{6}-1$ 个这样的互不相交的区间，从而我们得出

$$|E| \geq \frac{\varepsilon}{5}\cdot\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{6}-1\right) \geq \frac{\varepsilon^{1/2}}{35}$$

只要 $\varepsilon \leq \frac{1}{42^2}$，因此

$$\int_0^1 R(\sigma(t,\alpha,b),\alpha(b)(t),b(t))\,\mathrm{d}t \geq \frac{\varepsilon^{1/2}}{35}.$$

在上述任一情形下，$c=\frac{1}{35}$ 满足该结论。 □

2.2. 三维及更高维中的一个例子。接下来，我们证明，若 $d \geq 3$，则可以构造一个有效哈密顿量 $\overline{H}$ 为凸的例子。不失一般性，令 $d = 3$。受 Hedlund 的例子 [5],启发，令

$$\mathcal{L} := \bigcup_{i=1}^{3} \ell_i + \mathbb{Z}^3,$$

其中 $\ell_1 := \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, $\ell_2 := \{0\} \times \mathbb{R} \times \{\frac{1}{4}\}$，且 $\ell_3 := \{\frac{1}{4}\} \times \{\frac{1}{4}\} \times \mathbb{R}$；对于 $i \in \{1,2,3\}$，令φ_i：$\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to [0,1]$ 为光滑函数，使得 $\varphi_i(x) = 1$（对 $x \in \ell_i$ 成立），且当 $\operatorname{dist}(x, \ell_i) \geq \frac{1}{100}$时， $\varphi_i(x) = 0$。记φ：$= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ 以及 $\widetilde{\varphi} := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$。

令 $A = \overline{B_2(0)}$ 和 $B = [0,1]^3$。将运行成本定义为

$$R(x,a,b) := 100\left(1 - \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + 100|a|, \tag{12}$$

将转移函数定义为

$$f(x,a,b) := 2\left(1 + 99\left(\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)\right)a + b \odot \left(\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right), \tag{13}$$

其中，我们用 $_{1\,2}$表示向量 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，用 $\odot$表示逐点乘积，即 $x \odot y = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3)$。

与前面一样，Isaacs 条件成立，因此博弈的上值与下值相等。这个环境与前一个例子非常相似，不同之处在于，现在高速通道沿每个坐标方向 $\pm e_i$延伸。我们利用了这样一个事实：在三维空间中，这种设置是可行的，同时还能确保每条高速通道都远离其他高速通道。运行成本与前一个例子几乎完全相同，不同之处在于，对 I 的惩罚是 $100|a|$ ，而不是 $100|a|^2$。转移函数略有不同；II 的控制方式与之前类似，但 I 现在可以在高速通道内移动得更快，在通道外移动得更慢。

现在，我们证明定理 1 的 $d \geq 3$ 情形。

证明。使用相同的初始数据 $u_0(x) := \min\{|x_1|, 1\}$，关于 $\varepsilon^{1/2}$ 速率的论证与前一个例子完全相同，因此略去。为了证明 $\overline{H}$ 是凸的，我们对每个 $p \in \mathbb{R}^d$ 和 $\lambda > 0$，求出长时间校正函数 v^p的界；该函数定义为以下初值问题的解

$$\begin{cases} D_t v^p(t,x) + H(x, D_x v^p(t,x)) = 0 & \text{for } t > 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^2, \\ v^p(0,x) = p \cdot x & \text{for } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{14}$$

然后，利用 $\overline{H}(p) = -\lim_{t\to\infty} t^{-1} v^p(t,0)$ 这一事实，我们得到 $\overline{H}$ 的一个公式。

首先，对于 $\gamma \in \mathbb{R}$ ，我们断言

$$\overline{H}(\gamma e_i) = h(\gamma) := \max\{0, 400|\gamma| - 200\}.$$

事实上，我们立即得到下界

$$v^{\gamma e_i}(t,x) \geq \min_{a \in A} t(100|a| + 200\gamma a \cdot e_i) = t h(\gamma),$$

这是通过考虑玩家 II 采用恒定的 0 控制，并忽略运行成本中依赖于空间的部分得出的。

另一方面，为了得到上界，我可以采用以下策略：立即将状态（在恒定时间内）移至 $\ell_i + \mathbb{Z}^3$（若 $\gamma < 0$），否则移至 $\ell_i + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}^3$ 。在剩余时间内，采用恒定策略 $\alpha = -(\operatorname{sgn}\gamma)\min(2, |\gamma|)\, e_i$。计算采用此策略时的博弈结果可得

$$v^{\gamma e_i}(t,x) \leq C + \min_{a \in A} t(100|a| + 200\gamma a \cdot e_i) = C + t h(\gamma).$$

我们已经证明 $\overline{H}(\gamma e_i) = h(\gamma)$，且 $h(\gamma)$ 是凸的。最后，我们将证明，对于每个 $p \in \mathbb{R}^d$,

$$\overline{H}(p) = \max_{i=1}^{3} \overline{H}(p_i e_i).$$

不等式 $\overline{H}(p) \geq \overline{H}(p_i e_i)$ 可直接由对 $i \in \{1,2,3\}$ 使用上述策略得出。

对于另一个不等式，设 $\alpha\colon \mathcal{C}_B \to \mathcal{C}_A$ 是适用于初始数据 $p\cdot x$ 和初始状态 $\mathbf{0}$ 的策略。反设对于所有足够大的 $t>0$，都有

$$\sup_{b\in\mathcal{C}_B}\int_0^t R(\sigma(s,\alpha,b),\alpha(b)(s),b(s))\,\mathrm{d}s + p\cdot\sigma(t,\alpha,b) \le -t\max_{i=1}^{3} h(p_i) - ct,$$

对于某个较小的 $c>0$。我们声称，即使采用恒定控制 $b=0$，这也不可能成立。首先，我们注意到，终端代价可以被解释为一种运行成本，因为

$$p\cdot\sigma(t,\alpha,b) = \int_0^t p\cdot f(\sigma(s,\alpha,b),\alpha(b)(s),b(s))\,\mathrm{d}s,$$

由于初始状态为 $\sigma(\mathbf{0})=0$。令 $E := \{t>0 \mid R(\sigma(t,\alpha,\mathbf{0}),\mathbf{0},\mathbf{0}) \ge 99\}$。那么，如果 $t\in E$，

$$\begin{aligned}
J(s) &:= R(\sigma(s,\alpha,b),\alpha(b)(s),b(s)) + p\cdot f(\sigma(s,\alpha,b),\alpha(b)(s),b(s))\\
&\ge 99 + \min_{a\in A}\left[100|a| + 4a\cdot p\right]\\
&\ge 99 - \frac{1}{50}h(|p|)\\
&\ge 99 - \frac{\sqrt{3}}{50}\max_{i=1}^{3} h(p_i) - 4(\sqrt{3}-1)\\
&\ge 95 - \frac{\sqrt{3}}{50}\max_{i=1}^{3} h(p_i),
\end{aligned}$$

这里我们利用了这样一个事实：我离开高速通道后只能以慢得多的速度移动。

另一方面，如果存在一条直线 ℓ，属于 $\mathcal{L}$，使得对于每个 $s\in[t_0,t_1]$，直线 ℓ 都是 $\mathcal{L}$ 中距离 $\sigma(s,\alpha,b)$ 最近的直线，我们就称区间 $[t_0,t_1]$ 与某条高速通道保持接近。在任何这样的区间 $[t_0,t_1]$ 中，我们有

$$\int_{t_0}^{t_1} J(s)\,\mathrm{d}s \ge -|p| - (t_1-t_0)\max_{i=1}^{3} h(p_i),$$

其中，第一项表示沿垂直于 ℓ 的方向移动（其距离为常数级）所产生的代价，第二项表示沿平行于 ℓ 的方向移动所产生的代价。

记作 $U := [0,t]\setminus E$。给定 $t_0,t_1\in U$，若 $[t_0,t_1]$ 始终靠近一条高速通道，我们记作 $t_0\sim t_1$。令 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ 表示 $U/\sim$ 的等价类，并按照 $\mathbb{R}$ 上的通常顺序排列。我们断言 $n\le 40t$。事实上，$[\max I_i, \min I_{i+1}]\subseteq E$，且 $\min I_{i+1} - \max I_i \ge \frac{1}{40}$，因为高速通道的 $1\,100$ 邻域之间至少相距 $1\,5$，而 $\overline{E}$ 中的速度限制至多为 8。

综上，我们写作

$$\begin{aligned}
&\int_0^t R(\sigma(s,\alpha,b),\alpha(b)(s),b(s)) + p\cdot f(\sigma(s,\alpha,b),\alpha(b)(s),b(s))\,\mathrm{d}s\\
&\quad= \int_0^{\min I_1} J(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\int_{\min I_j}^{\max I_j} J(s)\,\mathrm{d}s + \int_{\max I_j}^{\min I_{j+1}} J(s)\,\mathrm{d}s\right)\\
&\qquad + \int_{\min I_n}^{\max I_n} J(s)\,\mathrm{d}s + \int_{\max I_n}^{t} J(s)\,\mathrm{d}s\\
&\quad\ge -\frac{\sqrt{3}\min I_1}{50}\max_{i=1}^{3} h(p_i) + 95(\min I_1)\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-1} -|p| - |I_j|\max_{i=1}^{3} h(p_i) - \frac{\sqrt{3}(\min I_{j+1} - \max I_j)}{50}\max_{i=1}^{3} h(p_i) + 95(\min I_{j+1} - \max I_j)\\
&\qquad - |p| - |I_n|\max_{i=1}^{3} h(p_i) - \frac{\sqrt{3}(t - \max I_n)}{50}\max_{i=1}^{3} h(p_i)\\
&\quad\ge -t\max_{i=1}^{3} h(p_i),
\end{aligned}$$

其中求和项构成望远镜和，并且我们利用了这一事实：

$$2|p| \leq \frac{1}{40}\left(95 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{50}\right) \max_{i=1}^{3} h(p_i)\right).$$

□

Acknowledgement

我想感谢 Charles Smart 和 Ahmed Bou-Rabee，感谢他们进行的许多有益讨论并提出宝贵意见 .

References

[1] D. Yu. Burago. “周期度量”。载于：《苏联数学进展》9（1992），第 205–210 页。[2] I. Capuzzo-Dolcetta 和 H. Ishii. “ 哈密顿 - 雅可比方程均匀化中的收敛速率 ”。载于：《印第安纳大学数学杂志》 50.3 （ 2001 ），第 1113–1129 页。 ISSN：0022-2518。URL：https://www.jstor.org/stable/24901629（访问于 11/04/2021）。[3] L. C. Evans 和 P. E. Souganidis. “哈密顿-雅可比-艾萨克斯方程解的微分博弈与表示公式”。载于：《印第安纳大学数学杂志》33.5（1984），第 773–797 页。 ISSN：0022-2518。 URL：https://www.jstor.org/stable/45010271（访问于 01/09/2023）。[4] William M. Feldman 和 Panagiotis E. Souganidis. “某些非凸哈密顿–雅可比方程的均匀化与非均匀化”。英文。载于：《纯粹与应用数学杂志》108.5（2017 年 11 月），第 751–782 页。 ISSN：0021-7824。（访问于 11/04/2021）。[5] Gustav A. Hedlund. “具有周期系数的二维黎曼流形上的测地线”。载于：《数学年刊》33.4（1932 年 10 月），第 719 页。 ISSN：0003486X。 DOI：10.2307/1968215。URL：https://www.jstor.org/stable/1968215?origin=crossref（访问于 01/11/2023）。[6] Rufus Isaacs. “微分博弈”。载于：《计算数学》。第 19 卷。1965 年 10 月，第 700 页。 DOI：10.2307/2003985。 URL：https://www.jstor.org/stable/2003985?origin=crossref（访问于 01/11/2023） .
[7] P. L. Lions。《哈密顿-雅可比方程的广义解》/ P.L. Lions。英文。数学研究札记 69。波士顿：Pitman，1982。 ISBN: 978-0-273-08556-0。[8] G. Papanicolaou、P.-L. Lions 和 S.R.S. Varadhan。《哈密顿-雅可比方程的均匀化》。发表于：（1987）。[9] Bruno Ziliotto。《非凸哈密顿-雅可比方程的随机均匀化：一个反例》。英文。发表于：《纯粹与应用数学通讯》70.9（2017），第 1798–1809 页。 ISSN: 1097- 0312。 DOI: 10.1002/cpa.21674。 URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.21674（访问于 11/04/2021）。