arXiv:2302.01899v1 [math.CA] 3 Feb 2023

线性泛函与 Δ-第二类相干对

Diego Dominici *† Francisco Marcell´an ‡

2023年2月6日

摘要

我们对实数轴上所有第二类测度 Δ-相干对进行了分类。我们得到5种情形，分别对应于级为 $s \leq 1$.的所有离散半经典正交多项式族。

关键词：离散正交多项式、离散半经典泛函、离散索博列夫内积、离散测度相干对、离散测度的第二类相干对。

2020年数学主题分类：42C05（主要），33C45、46E39（次要）。

1 引言

本文旨在刻画所有支撑在实数轴上的离散测度对 $\{\rho_0, \rho_1\}$，使得相应的首一正交多项式序列（简称多正交多项式，MOPs） $\{P_n(\rho_0; x)\}_{n\geq 0}$和 $\{P_n(\rho_1; x)\}_{n\geq 0}$ 满足

$$P_n(\rho_1; x) - \tau_n P_{n-1}(\rho_1; x) = \frac{1}{n+1}\Delta P_{n+1}(\rho_0; x), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

*符号计算研究所，林茨约翰内斯·开普勒大学，Altenberger Straße 69，4040 林茨，奥地利。电子邮箱：ddominic@risc.uni-linz.ac.at

†纽约州立大学新帕尔茨分校数学系，Hawk Dr. 1号，纽约州新帕尔茨，邮编12561-2443，美国。

‡马德里卡洛斯三世大学数学系，高等理工学院，Av. Universidad 30，28911 莱加内斯，西班牙。电子邮箱：pacomarc@ing.uc3m.es

其中 $\tau_n \neq 0$，对于 $n \geq 1$。我们将通过处理一个更一般的问题来解决这一问题，即刻画所有准定线性泛函对（具有复矩），使得相应的多正交多项式序列满足式（1）。

正如本文所示，我们得到了一些特殊的线性泛函对（尤其是与支撑在实数轴无限子集上的正测度相关联的正定线性泛函），以及相应的正交多项式序列，它们具有有趣的性质。这些泛函对是级数至多为 $s = 1$ 的离散半经典线性泛函；基于层级结构的分类问题框架下，文献 [8] 和 [9] 已对其进行了研究。

另一方面，这些正交多项式序列与逼近论中的一些问题相关。更确切地说，关于以相对于索伯列夫内积正交的多项式序列为基的傅里叶展开的分析

$$\langle f, g\rangle_{\mathfrak{S}} = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)g(x)\rho_0(x) + \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \Delta f(x)\Delta g(x)\rho_1(x), \tag{2}$$

由级 $s \geq 1$ 的离散测度对 $\{\rho_0, \rho_1\}$ 定义。结果表明，相对于内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}}$，首一索伯列夫正交多项式 $S_n(\rho_0, \rho_1; x)$ 满足连接公式

$$\begin{aligned} &S_{n+1}(\rho_0, \rho_1; x) - \gamma_n S_n(\rho_0, \rho_1; x) = P_{n+1}(\rho_0; x), \\ &\Delta S_{n+1}(\rho_0, \rho_1; x) - \gamma_n \Delta S_n(\rho_0, \rho_1; x) = (n+1)\left[P_n(\rho_1; x) - \tau_n P_{n-1}(\rho_1; x)\right], \end{aligned} \quad n \geq 1, \tag{3}$$

其中 $S_1(\rho_0, \rho_1; x) = P_1(\rho_0; x)$。上述关于 $\{S_n(\rho_0, \rho_1; x)\}_{n\geq 0}$与多正交多项式序列 $\{P_n(\rho_0; x)\}_{n\geq 0}$ 和 $\{P_n(\rho_1; x)\}_{n\geq 0}$ 之间的连接公式，为研究多项式$S_n(\rho_0, \rho_1; x)$的代数性质和解析性质提供了一种简洁的方法。

根据下文给出的历史信息，我们将满足性质 (1) 的测度对 $\{\rho_0, \rho_1\}$ 称为实数轴上的 Δ-第二类测度相干对。实数轴上支撑的概率测度对之间的相干性这一概念最早由[13]引入。事实上，如果实数轴上支撑的一对概率测度被称为

相干对，则相应的多正交多项式序列 $\{P_n(\nu_0;x)\}_{n\geq 0}$和 $\{P_n(\nu_1;x)\}_{n\geq 0}$满足

$$P_n(\nu_1;x)=\frac{1}{n+1}\left[P'_{n+1}(\nu_0;x)-\rho_n P'_n(\nu_0;x)\right],\quad \rho_n\neq 0,\quad n\geq 1. \tag{4}$$

已证明，在这种情况下，关于该内积的首一正交多项式序列

$$\langle f,g\rangle_S=\int f(x)g(x)d\nu_0+\lambda\int f'(x)g'(x)d\nu_1, \tag{5}$$

满足连接公式

$$\begin{aligned}&S_{n+1}(\nu_0,\nu_1;x)-\gamma_n S_n(\nu_0,\nu_1;x)=P_{n+1}(\nu_0;x)-\rho_n P_n(\nu_0;x),\\&S'_{n+1}(\nu_0,\nu_1;x)-\gamma_n S'_n(\nu_0,\nu_1;x)=(n+1)P_n(\nu_1;x),\end{aligned}\qquad n\geq 1. \tag{6}$$

这些公式对于研究相应 Sobolev 正交多项式的解析性质非常有用。关于相对于 Sobolev 内积正交的多项式的更多信息，请参阅更新后的综述 [19]。

[13] 中引入这类测度对的动机，是它们可用于函数关于索伯列夫内积的傅里叶展开框架 $\langle,\rangle_{\mathfrak{S}}$。基于勒让德-索博列夫正交多项式的这类傅里叶级数展开的一个特例，已在 [14], 中讨论，其中给出了一些数值测试，对比了这些勒让德-索博列夫傅里叶级数展开与普通的勒让德傅里叶级数展开。

具有相应多正交多项式序列满足 (4) 这一性质、且支撑在实数轴上的概率测度对，于 1997 年由 H. G. Meijer [20] 完全确定。他证明，若 (ν_0,ν_1) 是实数轴上的相干测度对，则其中一个测度必为经典测度（雅可比或拉盖尔），另一个则是它的有理扰动。值得注意的是，经典线性泛函属于相干对的条件已在 [17]中推导出。

因此， [20] 中证明的内容比上述陈述更为一般。 [20] 中的分类以 [16] 中针对一对准定线性泛函建立的某些泛函关系为出发点

使得相应的多正交多项式序列满足类似于（4）的关系。注意，如果相干性（4）成立，那么就可以得到（6）中的连接公式。根据 [20], ，当 $\{\nu_0, \nu_1\}$ 中的一个测度是经典测度时，（6）成立。

文献中称为 (1,1)-相干性的相干性概念扩展，可根据相应的多正交多项式定义如下（见 [7]）

$$P_n(\nu_1;x)-\tau_n P_{n-1}(\nu_1;x)=\frac{1}{n+1}\left[P'_{n+1}(\nu_0;x)-\xi_n P'_n(\nu_0;x)\right], \quad \xi_n,\tau_n\neq 0, \quad n\geq 1, \tag{7}$$

在这种情况下，与内积 $\langle , \rangle_{\mathfrak{S}}$ （见式 (5)）相关的 Sobolev 正交多项式满足以下连接公式

$$\begin{aligned} &S_{n+1}(\nu_0,\nu_1;x)-\gamma_n S_n(\nu_0,\nu_1;x)=P_{n+1}(\nu_0;x)-\xi_n P_n(\nu_0;x),\\ &S'_{n+1}(\nu_0,\nu_1;x)-\gamma_n S'_n(\nu_0,\nu_1;x)=(n+1)\left[P_n(\nu_1;x)-\tau_n P_{n-1}(\nu_1;x)\right], \end{aligned} \quad n\geq 1. \tag{8}$$

我们想强调的是，文献 [7] 给出了满足相干性 (7) 的概率测度的刻画，并假设 $\xi_n, \tau_n \neq 0$ 对于 $n \geq 1$ 成立。其中涉及的是至多为 1 级的半经典线性泛函。在研究关于由 (1,1)相干测度对定义的索伯列夫内积的正交多项式序列时，文献 [12] 强调了它的作用。注意，当 $\tau_n = 0$ 且 $\xi_n \neq 0$ 对于 $n \geq 1$ 成立时，我们便得到文献 [20] 中关于相干对的结果。因此，一个自然的问题是分析 $\xi_n = 0$ 且 $\tau_n \neq 0$ 对于 $n \geq 0.$ 成立的情形。

在 [24], 中引入了第二类相干对的概念。如果定义在实数轴上的一对概率测度 $\{\nu_0, \nu_1\}$ 所对应的多正交多项式序列$\{P_n(\nu_0; x)\}_{n\geq 0}$ 和 $\{P_n(\nu_1; x)\}_{n\geq 0}$ 满足

$$\frac{1}{n+1}P'_{n+1}(\nu_0;x)=P_n(\nu_1;x)-\tau_n P_{n-1}(\nu_1;x) \quad n\geq 1, \tag{9}$$

其中 $\tau_n \neq 0$ 对 $n \geq 1$成立。所有构成第二类相干对的概率测度对以及准定线性泛函对的刻画，已在 [24]中给出。文中还展示了一些说明性示例。

Δ-相干线性泛函对的概念在 [1]以及 [3]中被引入。具体而言，若一对线性泛函 $\{L_0, L_1\}$ 对应的多正交多项式序列 $\{P_n^{(0)}(x)\}_{n\geq 0}$ 和$\{P_n^{(1)}(x)\}_{n\geq 0}$ 满足式（4）的离散版本，则称其为 Δ-相干对

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n+1}\left[\Delta P_{n+1}^{(0)}(x) - \rho_n \Delta P_n^{(0)}(x)\right], \quad \rho_n \neq 0, \quad n \geq 1. \tag{10}$$

已证明，在此情形下，相对于内积正交的首一多项式序列 $S_n(x)$

$$\langle f, g\rangle_{\mathfrak{S}} = \langle L_0, fg\rangle + \langle L_1, \Delta f \Delta g\rangle$$

满足连接公式

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x) - \gamma_n S_n(x) &= P_{n+1}^{(0)}(x) - \rho_n P_n^{(0)}(x), \\ \Delta S_{n+1}(x) - \gamma_n \Delta S_n(x) &= (n+1) P_n^{(1)}(x), \end{aligned} \quad n \geq 1. \tag{11}$$

在 [3], 中，已证明其中一个必定是 Δ-经典线性泛函。文中还描述了相应的伴随线性泛函。请注意，该内积是对索伯列夫内积 (5) 的离散化，即 ν_0 和 ν_1 是离散测度。

本文安排如下。第 2 节概述后文将用到的线性泛函与正交多项式的基本概念。我们重点介绍一类特殊的线性泛函，即所谓的 Δ-半经典泛函，它将在全文中发挥核心作用。第 3 节引入线性泛函的 Δ-第二类相干对这一概念，并给出其刻画。需要指出的是，这一对中的两个泛函最终都是级数至多为 1 的离散半经典泛函。第 4 节对所有 Δ-第二类相干对进行分类。我们证明，离散经典泛函（夏利埃、克拉夫丘克、迈克斯纳和哈恩）的伴随泛函是级为 $s = 1$的离散半经典泛函。

2 预备知识

令 $\mathbb{P} = \mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{N}_0$ 为非负整数集合

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

我们将 $\delta_{k,\ n}$ 表示克罗内克δ，其定义为

$$\delta_{k,n}=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases},\quad k,n\in\mathbb{N}_0,$$

并称 $\{\Lambda_n(x)\}_{n\geq 0}\subset\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{P}$ 的基，若 $\deg(\Lambda_n)=n$.

设 $L:\mathbb{P}\to\mathbb{C}$ 是一个线性泛函，$\{\Lambda_n(x)\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathbb{P}$ 的基，并选取一个非零序列 $\{h_n\}_{n\geq 0}\subset\mathbb{C}$。如果线性方程组

$$\sum_{i=0}^{n}L\left[\Lambda_k\Lambda_i\right]c_{n,i}=h_n\delta_{k,n},\quad 0\leq k\leq n, \tag{12}$$

有唯一解 $\{c_{n,i}\}_{0\leq i\leq n}$，那么我们可以定义一个多项式 $P_n(x)$，使得

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}c_{n,i}\Lambda_i(x),\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

我们称 $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ 是关于泛函 L 的正交多项式序列。方程组 (12) 可写为

$$L\left[\Lambda_k P_n\right]=h_n\delta_{k,n},\quad 0\leq k\leq n,$$

利用线性性可知，序列 $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ 满足正交条件

$$L\left[P_k P_n\right]=h_n\delta_{k,n},\quad k,n\in\mathbb{N}_0. \tag{13}$$

线性泛函 L 称为准定的 [6]。

我们将线性泛函与多项式 $q(x)$ 的乘积定义为满足下式的线性泛函 qL

$$(qL)[p]=L[qp],\quad p\in\mathbb{P}, \tag{14}$$

并将线性泛函的伴随算子 Δ^* 定义为

$$(\Delta^* L)[p]=-L[\Delta p],\quad p\in\mathbb{P}. \tag{15}$$

我们称 L 是关于算子 Δ 的半经典泛函（简称 Δ–半经典），[18] 如果存在多项式 (ϕ,ψ)，使得 L满足皮尔逊方程

$$\Delta^*(\phi L)+\psi L=0, \tag{16}$$

其中 ϕ 是首一的，且 $\deg(\psi) \geq 1$. 注意，利用 (14) 和 (15)，我们可以将皮尔逊方程改写为

$$L[\phi \Delta p] = L[\psi p], \quad p \in \mathbb{P}. \tag{17}$$

引理 1 若 $f, g: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$，则有分部求和公式

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) \Delta g(x) = [f(x-1) g(x)]_a^{b+1} - \sum_{x=a}^{b} g(x) \nabla f(x), \quad a, b \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

证明。该公式可由望远镜求和得出

$$\begin{aligned} \sum_{x=a}^{b} [f(x) \Delta g(x) + g(x) \nabla f(x)] &= \sum_{x=a}^{b} f(x) g(x+1) - g(x) f(x-1) \\ &= f(b) g(b+1) - g(a) f(a-1). \end{aligned}$$

■

利用分部求和，我们可以写出 Pear- son 方程 (16) 的另一种形式。

命题 2 令 $L \in P^*$ 定义为

$$L[p] = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) \rho(x), \quad p \in \mathbb{P},$$

其中 $\rho(-1) = 0$，并且

$$\lim_{x \to \infty} p(x) \rho(x) = 0, \quad p \in \mathbb{P}.$$

那么， L 满足皮尔逊方程 (16) 当且仅当

$$\nabla(\phi \rho) + \psi \rho = 0. \tag{19}$$

证明。由于 (16) 与 (17) 等价，我们可以利用 (18) 得出，L 满足 (16) 当且仅当

$$\sum_{x=0}^{\infty} \psi(x) p(x) \rho(x) = -\sum_{x=0}^{\infty} p(x) \nabla(\phi \rho)(x), \quad p \in \mathbb{P}.$$

如果最后一个方程对所有 $p \in \mathbb{P}$ 都成立，那么必有

$$\psi\rho = -\nabla(\phi\rho),$$

由此即可得出结论。 ■

离散半经典线性泛函 L 的级定义为

$$s = \min\{\max\{\deg(\phi) - 2,\ \deg(\psi)\} - 1\}, \tag{20}$$

其中，最小值取遍所有满足线性泛函 L. 的皮尔逊方程 (16) 的多项式对 ϕ、ψ 。级为 $s = 0$ 的泛函称为 Δ-经典的（参见 [11], [15], 和 [22] 等）。$s = 1$ 级的 Δ-半经典线性泛函已在 [8] 和[9]中作了描述。

注 3 设 $\deg(\phi) = d_1$, $\deg(\psi) = d_2$. 。若 $d_1 = d_2 + 1 = s + 2$, 我们始终假设满足可容许条件

$$\psi_{d_2} \neq n - s, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{21}$$

其中 ψ_{d_2} 是 $\psi(x)$ 的首项系数。

我们将由 $\varphi_0(x) = 1$ 和 定义的下降阶乘多项式基记作 $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 0}$

$$\varphi_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x - k), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

多项式 $\varphi_n(x)$ 满足基本恒等式

$$x\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + n\varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{23}$$

and

$$\Delta\varphi_n = n\varphi_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{24}$$

引理4 我们有如下表示

$$\varphi_n(x - 1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varphi_k(n)\varphi_{n-k}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{25}$$

证明。我们使用归纳法。对于 $n=0$，恒等式成立，因为 $\varphi_0(x)=1$.假设对于所有 $0\leq k\leq n$，(25) 成立，并利用递推关系 (23)，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(x-1)&=(x-1-n)\,\varphi_n(x-1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k(n)(x-1-n)\,\varphi_{n-k}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k(n)\left[\varphi_{n+1-k}(x)-(k+1)\,\varphi_{n-k}(x)\right].\end{aligned}$$

由于 $\varphi_{n+1}(n)=0$，我们可以将上面的和改写为

$$\varphi_{n+1}(x-1)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\varphi_k(n)\,\varphi_{n+1-k}(x)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(k+1)\,\varphi_k(n)\,\varphi_{n-k}(x),$$

或者在第二个和中改变求和指标

$$\varphi_{n+1}(x-1)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\varphi_k(n)\,\varphi_{n+1-k}(x)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k\varphi_{k-1}(n)\,\varphi_{n+1-k}(x).$$

但由式（24）可知

$$\varphi_k(n+1)=\varphi_k(n)+k\varphi_{k-1}(n),$$

由此我们得出

$$\varphi_{n+1}(x-1)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\varphi_k(n+1)\,\varphi_{n+1-k}(x).$$

■

命题5 设 $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ 是关于 Δ–级为 s. 的半经典泛函 L 正交的一列多项式。则,

$$L\left[\phi\Delta q\Delta p_n\right]=0,\quad q\in\mathbb{P},\quad \deg(q)<n-s. \tag{26}$$

证明。若 $q=1$，则方程 (26) 显然成立，因此我们可以假设 $\deg(q)\geq 1$. 。利用 (25) 并取 $k\geq 1$，我们得到

$$\Delta\varphi_k=-\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\varphi_j(k)\,\varphi_{k-j}(x+1),$$

两边乘以 Δp_n ，得到

$$\Delta\varphi_k\Delta p_n=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\,\varphi_j\,(k)\,[\Delta\varphi_{k-j}p_n-\Delta\,(\varphi_{k-j}p_n)]\,,$$

其中我们用到了恒等式

$$\Delta\,(fg)=g\,(x+1)\,\Delta f+f\Delta g=g\Delta f+f\Delta g+\Delta f\Delta g. \tag{27}$$

利用皮尔逊方程（16）和（24），我们得到

$$\begin{aligned}L\,[\phi\Delta\varphi_k\Delta p_n]&=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\,\varphi_j\,(k)\,(L\,[\phi\Delta\varphi_{k-j}p_n]-L\,[\psi\varphi_{k-j}p_n])\\&=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\,\varphi_j\,(k)\,\{(k-j)\,L\,[\phi\varphi_{k-j-1}p_n]-L\,[\psi\varphi_{k-j}p_n]\}\,,\end{aligned}$$

由于多项式序列 $\{p_n(x)\}_{n\geq0}$ 关于 L 正交，因此我们得出

$$L\,[\phi\Delta\varphi_k\Delta p_n]=0,\quad k<\min\{n+2-\deg(\phi)\,,\ n+1-\deg(\psi)\}=n-s.$$

利用以下事实： $\{\varphi_k(x)\}_{k\geq0}$ 是一个多项式基，结论得证。 ■

利用命题5，我们可以证明离散半经典多项式的以下刻画。

定理6 设 $\{p_n(x)\}_{n\geq0}$ 是关于泛函 $L.$ 正交的一列首一多项式。以下陈述等价:

命题7 (i) L 是 $\Delta-$ 级半经典的

(ii) 存在一个首一多项式 $\phi(x)$，使得多项式 p_n 满足结构方程

$$\phi\,(x)\,\Delta p_{n+1}=\sum_{k=n-s}^{n+d_1}\epsilon_{n,k}p_k,\quad n>s,\quad \epsilon_{n,n-s}\neq0. \tag{28}$$

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii) 由于序列 $\{p_n\}_{n\geq0}$ 是多项式线性空间中的多项式基，我们可以写成

$$\phi\,(x)\,\Delta p_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+d_1}\epsilon_{n,k}p_k. \tag{29}$$

利用正交关系 (13) 和 (27)，我们有

$$h_k\epsilon_{n,k} = L\left[\phi p_k \Delta p_{n+1}\right] = L\left[\phi\Delta\left(p_k p_{n+1}\right)\right] - L\left[\phi\Delta p_k p_{n+1}\right] - L\left[\phi\Delta p_k \Delta p_{n+1}\right].$$

利用 (17) 和正交性，我们得到

$$L\left[\phi\Delta\left(p_k p_{n+1}\right)\right] = L\left[\psi p_k p_{n+1}\right] = 0, \quad k < n+1-d_2,$$

and

$$L\left[\phi\Delta\varphi_k p_{n+1}\right] = kL\left[\phi\varphi_{k-1} p_{n+1}\right] = 0, \quad k < n+2-d_1,$$

由此可得

$$L\left[\phi\Delta\left(p_k p_{n+1}\right)\right] - L\left[\phi\Delta p_k p_{n+1}\right] = 0, \quad k < n-s.$$

利用 (26)，我们可知

$$L\left[\phi\Delta p_k \Delta p_{n+1}\right] = 0, \quad k < n+1-s,$$

因此

$$\epsilon_{n,k} = 0, \quad k < n-s.$$

对于 $k = n-s$，我们有

$$\epsilon_{n,n-s} = h_{n+1}\left(\frac{\psi_{d_2}}{h_{n+1-d_2}}\delta_{d_2,s+1} - \frac{n+2-d_1}{h_{n+2-d_1}}\delta_{d_1,s+2}\right),$$

由此可得 $\epsilon_{n,\ n-s} \neq 0$ 只要 $d_1 - 2 \neq d_2 - 1$. 若 $d_1 = d_2 + 1$，我们还需要附加条件 (21)。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 由于 $\left\{\frac{p_n}{h_n}L\right\}_{n\geq 0}$ 是满足以下条件的 $\mathbb{P}^*$ 的基

$$\frac{p_n}{h_n}L\left[p_k\right] = \frac{1}{h_n}L\left[p_k p_n\right] = \delta_{k,n},$$

我们有如下表示

$$\Delta^*\left(\phi L\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{p_n}{h_n} L.$$

利用结构关系 (28) 和正交性，我们得到

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \Delta^*\left(\phi L\right)\left[p_{n+1}\right] = -L\left[\phi\Delta p_{n+1}\right] \\ &= -\sum_{k=n-s}^{n+d_1} \epsilon_{n,k} L\left[p_k\right] = \begin{cases} 0, & n > s \\ -\mu_0\epsilon_{n,0}, & n \leq s \end{cases}, \end{aligned}$$

其中 $\mu_0 = L[1]$. 因此， $\Delta^*(\phi L) + \psi L = 0$，其中

$$\psi(x) = \mu_0 \sum_{n=1}^{s+1} \frac{\epsilon_{n-1,0}}{h_n} p_n(x).$$

注意到 $\deg(\psi) - 1 \leq s$，这与 (20) 一致。 ■

关于此类针对 Δ-半经典线性泛函的结构关系的更多信息，请参见 [18]。请注意，在 Δ-经典情形下（$s = 0$）， [11] 给出了刻画此类线性泛函的两个结构关系。

3 相干对

设 $\{L_0, L_1\}$ 为一对拟定泛函，且 $\left\{P_{(0)n}(x)\right\}_{n\geq 0}$、$\left\{P_n^{(1)}(x)\right\}_{n\geq 0}$ 为相应的首一正交多项式序列。若存在 $\{\tau_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使得.....，则称 $\{L_0, L_1\}$ 为第二类 Δ–相干对（简称 Δc2）。

$$Q_n(x) = \frac{\Delta P_{n+1}^{(0)}(x)}{n+1} = P_n^{(1)}(x) - \tau_n P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{30}$$

其中 $P_{(0)-1}(x) = P_{-1}^{(1)}(x) = 0$. 多项式序列 $\left\{P_n^{(i)}(x)\right\}_{n\geqq 0}$、$i = 0$、1 满足正交条件

$$L_i\left[P_k^{(i)} P_n^{(i)}\right] = h_n^{(i)} \delta_{n,k}, \quad i = 0, 1, \quad n, k \in \mathbb{N}_0. \tag{31}$$

命题 8 若 $\{L_0, L_1\}$ 是 Δc2，且泛函 $\mathbf{v}_n^{(i)}$定义为

$$\mathbf{v}_n^{(i)} = \frac{P_n^{(i)}}{h_n^{(i)}} L_i, \quad i = 0, 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{32}$$

then

$$\Delta^* \mathbf{v}_n^{(1)} = \tau_{n+1}(n+2)\mathbf{v}_{n+2}^{(0)} - (n+1)\mathbf{v}_{n+1}^{(0)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{33}$$

证明。利用 (31) 和 (32)，我们得到

$$\mathbf{v}_n^{(i)}\left[P_k^{(i)}\right] = \delta_{n,k}, \quad i = 0, 1, \quad n, k \in \mathbb{N}_0. \tag{34}$$

令 $\mathbf{u}_n \in \mathbb{P}^*$ 定义为

$$\mathbf{u}_n [Q_k] = \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0. \tag{35}$$

由于线性泛函序列 $\{\mathbf{u}_n\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathbb{P}^*$ 的一组基，我们可以写成

$$\mathbf{v}_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\mathbf{u}_n.$$

利用 (30) 和 (34)，我们得到

$$a_{n,k} = \mathbf{v}_n^{(1)} [Q_k] = \mathbf{v}_n^{(1)} \left[P_k^{(1)} - \tau_k P_{k-1}^{(1)}\right] = \delta_{n,k} - \tau_k \delta_{n,k-1},$$

因此

$$\mathbf{v}_n^{(1)} = \mathbf{u}_n - \tau_{n+1}\mathbf{u}_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{36}$$

若记

$$\Delta^*\mathbf{u}_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}\mathbf{v}_k^{(0)},$$

then

$$b_{n,k} = \Delta^*\mathbf{u}_n \left[P_k^{(0)}\right] = -\mathbf{v}_n^{(0)} \left[\Delta P_k^{(0)}\right] = -k\mathbf{v}_n^{(0)} [Q_{k-1}] = -k\delta_{n,k-1},$$

并由此可得,

$$\Delta^*\mathbf{u}_n = -(n+1)\,\mathbf{v}_{n+1}^{(0)}. \tag{37}$$

将 (37) 代入 (36)，得到 (33)。 ■

借助命题 8，我们可以证明第二类相干对的一个刻画。

定理 9 以下各项等价:

(1) $\{L_0, L_1\}$ 是一个 Δc2。(2) 存在

由下式定义的 $\Lambda_2, \Lambda_3 \in \mathbb{P}$

$$\Lambda_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i^{(k)} x^i, \quad k = 2, 3, \tag{38}$$

并且满足

$$\lambda_2^{(2)} + (n-1)\,\lambda_3^{(3)} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{39}$$

使得

$$\Delta^* L_1 = \Lambda_2 L_0, \quad L_1 = \Lambda_3 L_0. \tag{40}$$

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 将 $n=0$ 代入 (33)，得到

$$\frac{1}{h_0^{(1)}}\Delta^* L_1 = 2\tau_1 \frac{P_2^{(0)}}{h_2^{(0)}} L_0 - \frac{P_1^{(0)}}{h_1^{(0)}} L_0,$$

并定义

$$\Lambda_2(x) = \frac{2\tau_1 h_0^{(1)}}{h_2^{(0)}} P_2^{(0)}(x) - \frac{h_0^{(1)}}{h_1^{(0)}} P_1^{(0)}(x),$$

我们得到 $\Delta^* L_1 = \Lambda_2 L_0$. 。由于 $\tau_1 \neq 0$，可知 $\deg(\Lambda_2) = 2$.

类似地，在 (33) 中令 $n=1$，可得

$$\frac{1}{h_1^{(1)}}\Delta^*\left(P_1^{(1)} L_1\right) = 3\tau_2 \frac{P_3^{(0)}}{h_3^{(0)}} L_0 - 2\frac{P_2^{(0)}}{h_2^{(0)}} L_0$$

利用 (27)，可得

$$\Delta^* P_1^{(1)} L_1 + P_1^{(1)} \Delta^* L_1 + \Delta^* P_1^{(1)} \Delta^* L_1 = \left(\frac{3\tau_2 h_1^{(1)}}{h_3^{(0)}} P_3^{(0)} - \frac{2h_1^{(1)}}{h_2^{(0)}} P_2^{(0)}\right) L_0.$$

由于 $\Delta^* P_1^{(1)} = 1$ 且 $\Delta^* L_1 = \Lambda_2 L_0$，我们得出 $L_1 = \Lambda_3 L_0$，其中

$$\Lambda_3(x) = \frac{3\tau_2 h_1^{(1)}}{h_3^{(0)}} P_3^{(0)}(x) - \frac{2h_1^{(1)}}{h_2^{(0)}} P_2^{(0)}(x) - \Lambda_2(x)\left[P_1^{(1)}(x) + 1\right].$$

注意，$\deg(\Lambda_3) \leq 3$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 由于多项式序列 $\{P_n^{(1)}(x)\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathbb{P}$ 的一组基，因此我们有

$$Q_n(x) = P_n^{(1)} + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} P_k^{(1)}(x).$$

利用正交性和式 (27)，我们得到

$$\begin{aligned}
&(n+1)\, h_k^{(1)} c_{n,k} = (n+1)\, L_1\left[Q_n P_k^{(1)}\right] = L_1\left[\Delta P_{n+1}^{(0)} P_k^{(1)}\right] \\
&= L_1\left[\Delta\left(P_{n+1}^{(0)} P_k^{(1)}\right)\right] - L_1\left[P_{n+1}^{(0)} \Delta P_k^{(1)}\right] - L_1\left[\Delta P_{n+1}^{(0)} \Delta P_k^{(1)}\right] \\
&= -L_0\left[\Lambda_2 P_{n+1}^{(0)} P_k^{(1)}\right] - L_0\left[\Lambda_3 P_{n+1}^{(0)} \Delta P_k^{(1)}\right] - L_0\left[\Lambda_3 \Delta P_{n+1}^{(0)} \Delta P_k^{(1)}\right],
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $0 \leq k \leq n-1$

$$L_0\left[\Lambda_2 P_{n+1}^{(0)} P_k^{(1)}\right] = \lambda_2^{(2)} h_{n+1}^{(0)} \delta_{k,n-1},$$
$$L_0\left[\Lambda_3 P_{n+1}^{(0)} \Delta P_k^{(1)}\right] = (n-1)\,\lambda_3^{(3)} h_{n+1}^{(0)} \delta_{k,n-1}.$$

由（40）可知

$$\Delta^*\left(\Lambda_3 L_0\right) = \Lambda_2 L_0.$$

因此， L_0 是 $\Delta-$至多为1级的半经典对象。利用（26），我们得出

$$L_0\left[\Lambda_3 \Delta P_{n+1}^{(0)} \Delta P_k^{(1)}\right] = 0, \quad k < n.$$

因此，对所有的 $0 \leq k \leq n-1$

$$(n+1)\, h_k^{(1)} c_{n,k} = -\left[\lambda_2^{(2)} + (n-1)\,\lambda_3^{(3)}\right] h_{n+1}^{(0)} \delta_{k,n-1},$$

并且我们得到

$$Q_n(x) = P_n^{(1)}(x) - \tau_n P_{n-1}^{(1)}(x),$$

其中

$$\tau_n = \frac{\lambda_2^{(2)} + (n-1)\,\lambda_3^{(3)}}{n+1} \frac{h_{n+1}^{(0)}}{h_{n-1}^{(1)}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

由于多项式 Λ_2、Λ_3 满足（39），我们看到 $\tau_n \neq 0$. ■

4 分类

本节将找出所有第二类相干对 $\Delta-$。根据定理 9，只需考虑满足皮尔逊方程的 $s \leq 1$ 级离散半经典泛函。

$$\Delta^*\left(\Lambda_3 L_0\right) = \Lambda_2 L_0, \quad \deg\left(\Lambda_2\right) = 2, \quad \deg\left(\Lambda_3\right) \leq 3. \tag{42}$$

在 [8]，中，我们对满足式 (19) 的 $s \leq 1$ 级离散半经典泛函进行了分类，并得到以下几种情形：

1. 夏利埃（ $s = 0$级）

$$\rho(x) = \frac{z^x}{x!}, \tag{43}$$

$$\phi(x) = 1, \quad \psi(x) = \frac{x}{z} - 1. \tag{44}$$

2. 迈克斯纳（ $s=0$级）

$$\rho(x)=(a)_x\frac{z^x}{x!}, \tag{45}$$

$$\phi(x)=x+a,\quad \psi(x)=\frac{x}{z}-(x+a). \tag{46}$$

子情况：Kravchuk 多项式

$$\rho(x)=(-N)_x\frac{z^x}{x!},\quad N\in\mathbb{N}, \tag{47}$$

$$\phi(x)=x-N,\quad \psi(x)=\frac{x}{z}-(x-N). \tag{48}$$

3. 哈恩（ $s=0$级）

$$\rho(x)=\frac{(-N)_x(a)_x}{(b+1)_x}\frac{1}{x!},\quad N\in\mathbb{N}, \tag{49}$$

$$\phi(x)=(x-N)(x+a),\quad \psi(x)=(N-a+b)x+aN. \tag{50}$$

4. 广义夏利耶（ $s=1$级）

$$\rho(x)=\frac{1}{(b+1)_x}\frac{z^x}{x!}, \tag{51}$$

$$\phi(x)=1,\quad \psi(x)=\frac{x(x+b)}{z}-1. \tag{52}$$

5. 广义迈克斯纳（ $s=1$级）

$$\rho(x)=\frac{(a)_x}{(b+1)_x}\frac{z^x}{x!}, \tag{53}$$

$$\phi(x)=x+a,\quad \psi(x)=\frac{x(x+b)}{z}-(x+a). \tag{54}$$

6. 广义克拉夫丘克（ $s=1$级）

$$\rho(x)=(-N)_x(a)_x\frac{z^x}{x!},\quad N\in\mathbb{N}, \tag{55}$$

$$\phi(x)=(x-N)(x+a),\quad \psi(x)=\frac{x}{z}-(x-N)(x+a). \tag{56}$$

7. I 型广义哈恩（ $s=1$级）

$$\rho(x)=\frac{(a_1)_x(a_2)_x}{(b+1)_x}\frac{z^x}{x!}, \tag{57}$$

$$\phi(x)=(x+a_1)(x+a_2), \quad \psi(x)=\frac{x(x+b)}{z}-(x+a_1)(x+a_2). \tag{58}$$

注意，若设定 $z=1$、$a_1=a$、$a_2=-N$，则可得到哈恩多项式。

8. II 型广义哈恩（ $s=1$ 级）

$$\rho(x)=\frac{(-N)_x(a_1)_x(a_2)_x}{(b_1+1)_x(b_2+1)_x}\frac{1}{x!}, \quad N\in\mathbb{N}, \tag{59}$$

$$\begin{aligned}&\phi(x)=(x-N)(x+a_1)(x+a_2), \\ &\psi(x)=(N-a_1-a_2+b_1+b_2)x^2+(Na_1+Na_2-a_1a_2+b_1b_2)x+Na_1a_2\end{aligned} \tag{60}$$

若将 L_0、$L_1\in\mathbb{P}^*$ 定义为

$$L_i[p]=\sum_{x=0}^{\infty}p(x)\rho_i(x), \quad i=0,1, \quad p\in\mathbb{P},$$

其中 $\rho_i(-1)=0$、$i=0$、1，则可利用 (2) 将 (40) 改写为

$$\nabla(\Lambda_3\rho_0)+\Lambda_2\rho_0=0, \quad \rho_1=\Lambda_3\rho_0. \tag{61}$$

命题 10 令 q、ϕ_0、$\psi_0\in\mathbb{P}$. 若 $L_0\in\mathbb{P}^*$ 满足

$$\nabla(\phi_0\rho_0)+\psi_0\rho_0=0, \tag{62}$$

and

$$\Lambda_2=(q-\nabla q)\psi_0-\phi_0\nabla q, \quad \Lambda_3=q\phi_0, \tag{63}$$

then

$$\nabla(\Lambda_3\rho_0)+\Lambda_2\rho_0=0. \tag{64}$$

证明。若我们使用恒等式

$$\nabla (fg) = g\nabla f + f\nabla g - \nabla f \nabla g, \tag{65}$$

结合 (63)，我们得到

$$\nabla (\Lambda_3 \rho_0) = (\nabla q)\, \phi_0 \rho_0 + (q - \nabla q)\, \nabla (\phi_0 \rho_0)\,.$$

利用 (62)，我们得到

$$\nabla (\Lambda_3 \rho_0) = (\nabla q)\, \phi_0 \rho_0 - (q - \nabla q)\, \psi_0 \rho_0 = -\Lambda_2 \rho_0,$$

由此可得 (64)。 ■

现在我们将求出所有满足 $\deg(\Lambda_2) = 2.$ 的 Δc2 对

4.1 情形 I：$\deg(\Lambda_3) = 0$

若取 $\Lambda_3 = 1$，由 (61) 可知

$$\nabla \rho_0 + \Lambda_2 \rho_0 = 0, \quad \rho_1 = \rho_0,$$

并且，如果 $\rho_0(x)$ 是与广义 Charlier 多项式 (51) 对应的权函数，我们由 (52) 可知

$$\Lambda_2 (x) = \frac{x\,(x+b)}{z} - 1, \quad z \neq 0.$$

因此，广义 Charlier 多项式是第二类自相干的。注意，这一点在 [10] 中已经被观察到。

4.2 情形 II (a)：$\deg(\Lambda_3) = 1$

若取 $\Lambda_3 = x + \omega$, $\omega \in \mathbb{C}$，则由 (61) 可知

$$\nabla [(x+\omega)\, \rho_0] + \Lambda_2 \rho_0 = 0, \quad \rho_1 = (x+\omega)\, \rho.$$

若 $\rho_0(x)$ 是与夏利埃多项式 (43) 对应的权函数，我们可以将命题 10 应用于 $q = x + \omega$，从而得到

$$\Lambda_2 (x) = \frac{x}{z}\,(x + \omega - 1) - (x+\omega)\,, \quad z \neq 0,$$

其中我们还用到了 (44)。泛函 L_1 是 L_0 的 Christoffel 变换，满足

$$\nabla\left[(x+\omega)\,\rho_1\right]+\Lambda_2\rho_1=0,$$

利用 (54)，我们看到 $\rho_1(x)$ 是与广义 Meixner 多项式 (53) 对应的权函数，其中

$$a=\omega,\quad b=\omega-1.$$

4.3 情形 II (b)：$\deg(\Lambda_3)=1$

若取 $\Lambda_3=x+\omega,\omega\in\mathbb{C}$，则由 (61) 可得

$$\nabla\left[(x+\omega)\,\rho_0\right]+\Lambda_2\rho_0=0,\quad \rho_1=(x+\omega)\,\rho.$$

若 $\rho_0(x)$ 是与 Kravchuk 多项式 (47) 对应的权函数，我们可以利用命题 10 和 $q=x+\omega$，得到

$$\Lambda_2(x)=\frac{x}{z}(x+\omega-1)-(x+\omega)(x-N),\quad z\neq 0,$$

这里也用到了 (48)。泛函 L_1 是 L_0 的 Christoffel 变换，满足

$$\nabla\left[(x+\omega)\,\rho_1\right]+\Lambda_2\rho_1=0,$$

利用 (56)，我们看到 $\rho_1(x)$ 是与广义 Kravchuk 多项式 (55) 对应的权函数，其中

$$a=\omega,\quad b=\omega-1.$$

4.4 情形 III：$\deg(\Lambda_3)=2$

如果我们取 $\Lambda_3=(x+\omega)(x+a)\ \ \omega\in\mathbb{C}$，那么由 (61) 可得

$$\nabla\left[(x+\omega)(x+a)\,\rho_0\right]+\Lambda_2\rho_0=0,\quad \rho_1=(x+\omega)(x+a)\,\rho_0.$$

若 $\rho_0(x)$ 是与迈克斯纳多项式 (45) 对应的权函数，则我们可以将命题 10 与 $q=x+\omega$ 一起使用，并得到

$$\Lambda_2(x)=\frac{x}{z}(x+\omega-1)-(x+\omega)(x+a),\quad z\neq 0,$$

其中我们也用到了 (46)。泛函 L_1 是 L_0 的 Christoffel 变换，满足

$$\nabla\left[(x+\omega)(x+a)\rho_1\right]+\Lambda_2\rho_1=0,$$

由此并利用 (58)，我们看到 $\rho_1(x)$ 是与 (57) 中的 I 型广义 Hahn 多项式对应的权函数，其中

$$a_1=a,\quad a_2=\omega,\quad b=\omega-1.$$

4.5 情形 IV：$\deg(\Lambda_3)=3$

若取 $\Lambda_3=(x+\omega)(x-N)(x+a)\quad \omega\in\mathbb{C}, N\in\mathbb{N}$，由 (61) 可推得

$$\begin{gathered}\nabla\left[(x+\omega)(x-N)(x+a)\rho_0\right]+\Lambda_2\rho_0=0,\\ \rho_1=(x+\omega)(x-N)(x+a)\rho_0.\end{gathered}$$

若 $\rho_0(x)$ 是与 (49) 中的哈恩多项式对应的权函数，我们可以将命题 10 与 $q=x+\omega$ 结合使用，得到

$$\Lambda_2=(N-a+b-1)x^2+(N\omega+Na-a\omega+b\omega-b)x+Na\omega,$$

这里我们也用到了 (50)。泛函 L_1 是 L_0 的 Christoffel 变换，满足

$$\nabla\left[(x+\omega)(x-N)(x+a)\rho_1\right]+\Lambda_2\rho_1=0,$$

由此并利用 (60)，我们看到 $\rho_1(x)$ 是与 (59) 中的 II 型广义 Hahn 多项式对应的权函数，其中

$$a_1=a,\quad a_2=\omega,\quad b_1=b,\quad b_2=\omega-1.$$

请注意， Δ级经典线性泛函的 Christoffel 变换已在 [23]中得到分析。

5 结论与未来方向

我们已对所有 Δ第二类相干对 $\{L_0,L_1\}$ 进行了分类，并推导出以下结果：

L_0	L_1
广义夏利耶	广义夏利耶
夏利埃	广义迈克斯纳
克拉夫丘克	广义克拉夫丘克
迈克斯纳	I 型广义哈恩
Hahn	II 型广义哈恩

.

在所有情况下，泛函 L_1 都是 L_0 的 Christoffel 变换，这与 Meijer [20] 针对连续情形所得的一般结果一致。

在一项正在进行的研究中，我们探讨与一对第二类相干对相关的离散索博列夫内积的解析性质。我们必须指出，在 [5] 中，作者研究了与索伯列夫内积相关的离散多项式的渐近性质及其零点位置

$$\langle p, q\rangle_{\mathfrak{S}} = \langle u_0, pq\rangle + \lambda\langle u_1, \Delta p \Delta q\rangle,$$

其中 $\lambda \geq 0$、(u_0, u_1) 是一对 Δ-相干的正定线性泛函，而 u_1 是 Meixner线性泛函。推导出这些正交多项式与 Laguerre-Sobolev 正交多项式之间的一种极限关系，它类似于 Askey方案中 Meixner 多项式与 Laguerre多项式之间已有的关系。注意，Meixner 多项式是 Δ 自相干的。因此，当 $u_0 = u_1$ 是 Meixner 泛函时，这类多项式的迈勒-海涅型公式及其零点已在 [21]中研究。 [4]分析了外相对渐近、Plancherel-Rotach渐近以及极限关系。 [2]讨论了这类多项式的代数性质及其零点的行为。

6 致谢

Diego Dominici 谨此感谢剑桥艾萨克·牛顿数学科学研究所，在“适用的复苏渐近：迈向普适理论”（ARA2）项目期间给予的支持与款待。本研究得到英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）资助，项目编号为 EP/R014604/1。

Francisco Marcell´an 获得了欧洲区域发展基金、西班牙科学与创新部—国家研究署的支持，资助项目编号为 PID2021-122154NB-I00；此外还获得了马德里自治区政府（西班牙马德里自治区）的支持

该资助依据 UC3M 多年期协议，在大学教授卓越计划框架下提供，资助项目为 EPUC3M23，属于第五期PRICIT（区域研究与技术创新计划）。

参考文献

[1] I. Area, E. Godoy, and F. Marcellán. 所有 Δ-相干对的分类。Integral Transform. Spec. Funct. 9(1), 1–18 (2000).[2] I. Area, E. Godoy, and F. Marcellán. 涉及差分的内积：Meixner-Sobolev多项式。J. Differ. Equations Appl. 6(1), 1–31 (2000).[3] I. Area, E. Godoy, and F. Marcellán. Δ-相干对与离散变量正交多项式。Integral Transforms Spec. Funct. 14(1), 31–57 (2003).[4] I. Area, E. Godoy, F. Marcellán, and J. J. Moreno-Balcázar. Meixner-Sobolev 正交多项式的比值与Plancherel-Rotach渐近式。J. Comput. Appl. Math. 116(1), 63–75 (2000).[5] I. Area, E. Godoy, F. Marcellán, and J. J. Moreno-Balcázar. Meixner 型 Δ-Sobolev 正交多项式：渐近性质与极限关系。J. Comput. Appl. Math. 178(1-2), 21–36 (2005).[6] T. S. Chihara.《正交多项式导论》。数学及其应用，第 13 卷。Gordon and Breach Science Publishers，纽约—伦敦—巴黎（1978）。[7] A. M. Delgado and F. Marcellán. 伴随线性泛函与 Sobolev 内积：案例研究。Methods Appl. Anal. 11(2), 237–266 (2004).[8] D. Dominici and F. Marcellán. 第一类离散半经典正交多项式。Pacific J. Math. 268(2), 389–411 (2014).
[9] D. Dominici and F. Marcellán. 第二类离散半经典正交多项式。载于《正交多项式：当前趋势及

应用》，《SEMA SIMAI Springer 丛书》第 22 卷，第 103–169 页。施普林格，查姆（[2021]©2021）。
[10] D. Dominici and J. J. Moreno-Balcázar. 与广义 Charlier 多项式相关的一族 Sobolev 正交多项式的渐近分析。arXiv:2210.00082 (2022).[11] A. G. García, F. Marcellán, and L. Salto. 离散经典正交多项式的分布研究。载于《第四届正交多项式及其应用国际研讨会论文集（埃维昂莱班，1992）》，第 57 卷，第 147–162 页（1995）。
[12] J. C. García-Ardila, F. Marcellán, and M. E. Marriaga. 从标准正交多项式到 Sobolev 正交多项式：半经典线性泛函的作用。载于《正交多项式》，Tutor. Sch. Workshops Math. Sci.，第 245–292 页。Birkh¨auser/Springer，查姆（[2020]©2020）。[13] A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Nø rsett, and J. M. Sanz-Serna. 关于相对于某些 Sobolev 内积正交的多项式。逼近理论杂志 65(2), 151–175 (1991).
[14] A. Iserles, J. M. Sanz-Serna, P. E. Koch, and S. P. Nø rsett. Sobolev 空间中的正交性与逼近。载于《逼近算法 II（什里文汉姆，1988）》，第 117–124 页。Chapman and Hall，伦敦（1990）。
[15] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw.《超几何正交多项式及其 q-类比》。数学 Springer 专著。Springer 出版社，柏林（2010）。序言由 Tom H. Koornwinder 撰写。[16] F. Marcellán, T. E. Pérez, and M. A. Piñar. 加权 Sobolev 空间上的正交多项式：半经典情形。第 2 卷，第 93–122 页。（1995）。特殊函数（都灵，1993）。[17] F. Marcellán and J. Petronilho. 正交多项式与相干对：经典情形。Indag. Math. (N.S.) 6(3), 287–307 (1995).

[18] F. Marcellán and L. Salto。离散半经典正交多项式。J. Differ. Equations Appl. 4(5)，463–496（1998）。
[19] F. Marcellán and Y. Xu。关于 Sobolev 正交多项式。数学快报 33(3)，308–352（2015）。[20] H. G. Meijer。所有相干对的确定。逼近理论杂志 89(3)，321–343（1997）。[21] J. J. Moreno-Balcázar。Δ-迈克斯纳-Sobolev 正交多项式：迈勒-海涅型公式与零点。J. Comput. Appl. Math. 284，228–234（2015）。[22] A. F. Nikiforov、S. K. Suslov、 and V. B. Uvarov。《离散变量的经典正交多项式》。计算物理丛书。Springer 出版社，柏林（1991）。译自俄文。
[23] A. Ronveaux and L. Salto。离散正交多项式——经典泛函的多项式修正。J. Differ. Equations Appl. 7(3)，323–344（2001）。
[24] M. H. Suni、 G. A. Marcato、 F. Marcellán、and A. Sri Ranga。第二类测度相干对及其相关的 Sobolev 正交多项式：泛函方法。已投稿（2022）。