arXiv:2302.01900v1 [math.CO] 3 Feb 2023

涉及下取整函数和上取整函数的一些改进式

Luka Podrug 土木工程学院，萨格勒布大学，克罗地亚，萨格勒布10000
luka.podrug@grad.unizg.hr

Dragutin Svrtan 数学系，理学院，萨格勒布大学，克罗地亚，萨格勒布 10000
dragutin.svrtan@gmail.com

摘要

下取整函数和上取整函数在数学中经常出现，对涉及下取整和上取整的求和进行处理是一门微妙的技艺。幸运的是，著名教材 具体数学 提供了很好的入门介绍，阐述了多种技巧，并将若干单重和双重求和作为习题。对于其中两个双重求和，我们给出了相应的单重求和对应式。这些闭式恒等式以一个非负整数的所有 b 进制数字所组成的多重集（视为一个分拆）的对偶划分来表示。我们还给出了涉及小数部分函数和平移小数部分函数的双重求和及单重求和对应式。

1 引言

本文关注涉及向下取整和向上取整函数的一些求和问题，并给出若干新公式，以改进已有结果。为方便读者，我们先介绍一些基本定义。

设 x 为任意实数。 x 的向下取整定义为小于或等于 x的最大整数。更确切地说， $\lfloor x \rfloor = \max\{n \mid n \leq x,\, n \in \mathbb{Z}\}$。 x 的向上取整是大于或等于 x的最小整数，即 $\lceil x \rceil = \min\{n \mid n \geq x,\, n \in \mathbb{Z}\}$。对于任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in \mathbb{R}$ ，我们有 $\lfloor n+x \rfloor = n+\lfloor x \rfloor$ 和 $\lceil n+x \rceil = n+\lceil x \rceil$。最后， x 的小数部分为 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$。我们有时称 $\lfloor x \rfloor$ 为 x的整数部分，因为 $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ ，其中 $0 \leq \{x\} < 1$。对于任意$n \in \mathbb{Z}$ 和 $0 \leq x < 1$ ，我们有 $\{n+x\} = x$。

在整篇论文中，我们使用 Iverson记号 $[P]$，将一个真假命题 P 置于方括号中；若命题为真，结果为 1，若为假，结果为 0。

例如，

$$[j=k]=\begin{cases}1, & \text{if } j=k;\\ 0, & \text{if } j\neq k.\end{cases}$$

我们的主要结果是该求和的一个闭式表达式

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n+jb^{k-1}}{b^k}\right\rfloor,$$

其中 $b\geq 2$、$0\leq j<b$ 和 n 均为任意非负整数。该求和是无穷的，但只有有限项非零，因此它是一个定义良好的整数。这个新公式是已知恒等式 $\sum_{k\geq 1}\sum_{0<j<b}\left\lfloor\frac{n+jb^{k-1}}{b^k}\right\rfloor=n$ [2, Ex. 44, p. 44] 的改进式。在论文的第二部分，我们得到单重和上取整类比式的闭式表达式

$$\sum_{0\leq k\leq\log_b x}\left\lceil\frac{x+jb^k}{b^{k+1}}\right\rceil,$$

并在第4节中给出以下双重和与单重和分数类比式 s,

$$\sum_{0\leq k\leq\log_b n}\sum_{0<j<b}\left\{\frac{n+jb^k}{b^{k+1}}\right\},$$

$$\sum_{0\leq k\leq\log_b n}\left\{\frac{n+jb^k}{b^{k+1}}\right\}.$$

2 涉及下取整函数的求和

我们从一道题目开始，这道题作为习题出现在《具体数学》 [1, Ex. 22, p. 97],中，但其出处可以追溯到更早的一部“400道最佳问题”题集 [4,Problem 4346, p. 48]。这道题涉及求和 $S(n)=\sum\left\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\right\rfloor_{k\geq 1}$ 的求值

下面陈述两种最常见的处理方法。

第一种方法是，对于固定整数 k，令 $f_k(n)=\left\lfloor\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}\right\rfloor$。函数 $x\to\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2}$ 显然是连续的单调递增函数。如果对于某个 n，$\frac{n}{2^k}+\frac{1}{2}=m\in\mathbb{N}$，那么我们有 $f_k(n-1)<f_k(n)$。n 取何值时会出现这种情况?

$$\frac{n+2^{k-1}}{2^k}=m\implies n=2^{k-1}\underbrace{(2m-1)}_{\text{odd}}.$$

因此，当 $n=b\cdot 2^{k-1}$ 且 b 为奇数时，$f_k(n-1)<f_k(n)$。对于给定的 n，恰好有一个具有该性质的 b。因此，对于固定的 n，令 b 为奇数，并且满足对某个 $k_n\geq 1$ 有 $n=b\cdot 2^{k_n-1}$。我们有

$$S(n)=\sum_{k\geq 1}f_k(n)\text{ and }S(n-1)=\sum_{k\geq 1}f_k(n-1),$$

并且对于每个 $k \neq k_n$，$f_k(n) = f_k(n-1)$。对于 $k = k_n$，我们有 $f_{k_n}(n) = f_{k_n}(n-1) + 1$，因此 $S(n) = S(n-1) + 1$，从而由归纳法得出 $S(n) = n$。

计算 $S(n)$ 的第二种方法（原解答中采用的方法）使用二进制展开。设 n 的二进制展开为

$$n = (c_m c_{m-1} \cdots c_1 c_0)_2,$$

即，

$$n = c_m 2^m + c_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + c_1 2^1 + c_0,$$

其中每个 c_i 都是 0 或 1，且最高位 c_m 为 1。

我们看到，只有 $s \geq k-1$ 对应的数字 c_s 会产生贡献，因此

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\sum\limits_{s\geq 0} c_s 2^s}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \sum_{s\geq 0} c_s 2^{s-k} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \sum_{0\leq s\leq k-1} c_s 2^{s-k} + \sum_{s\geq k} c_s 2^{s-k} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{s\geq k} c_s 2^{s-k} + \left\lfloor \sum_{0\leq s\leq k-1} c_s 2^{s-k} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{s\geq k} c_s 2^{s-k} + c_{k-1}.
\end{aligned}$$

对 $k \geq 1$ 求和可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor &= \sum_{k\geq 0} c_k + \sum_{k\geq 1} \sum_{s\geq k} c_s 2^{s-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} c_k + \sum_{s\geq 1} \sum_{1\leq k\leq s} c_s 2^{s-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} c_k + \sum_{s\geq 1} c_s \frac{2^s - 1}{2-1} \\
&= \sum_{k\geq 0} c_k + \sum_{s\geq 1} 2^s c_s - \sum_{s\geq 1} c_s \\
&= \sum_{s\geq 0} 2^s c_s \\
&= n.
\end{aligned}$$

更一般地，对于每个基数 b，我们都有以下恒等式 [2, 习题 44，第 44] 页

$$\sum_{k\geq 1} \sum_{0<j<b} \left\lfloor \frac{n + jb^{k-1}}{b^k} \right\rfloor = n. \tag{2.1}$$

要证明它，我们可以使用以下复制恒等式 [1, 3.26，第 85] 页

$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{m}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{2}{m}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor x+\frac{m-1}{m}\right\rfloor=\lfloor mx\rfloor$$

由此得到

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\sum_{0<j<b}\left\lfloor\frac{n+jb^{k-1}}{b^k}\right\rfloor&=\sum_{k\geq 1}\sum_{0<j<b}\left\lfloor\frac{n}{b^k}+\frac{j}{b}\right\rfloor\\&=\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{n}{b^{k-1}}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{b^k}\right\rfloor\right)\\&=n.\end{aligned}$$

为了进一步得到新的精细结果（见下文定理 2），我们需要引入更多记号。对于每个基数 $b\geq 2$，令 n 的 b 进制展开为 $n=(c_mc_{m-1}\cdots c_0)_b$，即

$$n=c_mb^m+c_{m-1}b^{m-1}+\cdots+c_1b+c_0,$$

其中 $c_i\in\{0,1,\ldots,b-1\}$, $m=\lfloor\log_b n\rfloor$，且最高位 b 进制数字 c_m 非零。考虑一个由 b 进制数字组成的多重集 $\{c_0,c_1,\ldots,c_m\}$，并令 $s_b(n)$ 表示 b 进制数字 n 的总和，即

$$s_b(n)=s_b\left(\sum_{s=0}^{\lfloor\log_b n\rfloor}c_sb^s\right)=\sum_{s=0}^{\lfloor\log_b n\rfloor}c_s.$$

令 $\lambda=\lambda(n,b)=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\lambda_m)$ 为将 b 进制数字 $\{c_0,c_1,\ldots,c_m\}$ 按降序排列后得到的分拆，并令 $\lambda'=\lambda'(n,b)=\left(\lambda'_1\geq\lambda'_2\geq\cdots\lambda'_{b-1}\right)$ 为分拆 λ 的共轭。这遵循 Macdonald 记号 [6]。注意，λ'_j 是大于或等于 j 的 b 进制数字的个数。例如，令 $n=1024$ 和 $b=3$。我们有 $1024=(1101221)_3$。于是 $s_3(1024)=8$, $\lambda=(2\geq 2\geq 1\geq 1\geq 1\geq 1\geq 0)$ 和 $\lambda'=(6\geq 2)$。

注记 1。注意，λ 和 λ' 都是数 $s_b(n)$ 的分拆，即

$$s_b(n)=|\lambda|=\sum_{0\leq j\leq m}\lambda_j=\sum_{0<j<b}\lambda'_j.$$

定理 2。对于任意基数 $b\geq 2$、固定的 j、$0\leq j<b$，以及任意非负整数 n，我们有以下恒等式：

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n+jb^{k-1}}{b^k}\right\rfloor=\frac{n-s_b(n)}{b-1}+\lambda'_{b-j}.\tag{2.2}$$

对于 $j=0$ 和 $b=p$ 为素数的情形，有一个著名的数论公式

$$\nu_p(n!)=\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor=\frac{n-s_p(n)}{p-1},$$

其中，$\nu_p(m)$ 是 m 的因式分解中 p 的重数。

首先，我们陈述并证明一个辅助结果。

引理 3. 对于每个基数 b，设 n 的 b 进制展开为 $n=(c_m c_{m-1}\cdots c_0)_b$，其中对每个 s 和 $0\le j<b$，均有 $0\le c_s\le b-1$。那么对于每个 k

$$\left\lfloor \frac{c_k+j}{b}+\frac{c_{k-1}}{b^2}+\cdots+\frac{c_0}{b^{k+1}}\right\rfloor=\begin{cases}0, & if\ c_k+j<b;\\ 1, & if\ c_k+j\ge b.\end{cases}$$

引理 *3* 的证明。由于

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{c_k+j}{b}+\frac{c_{k-1}}{b^2}+\cdots+\frac{c_0}{b^{k+1}}\right\rfloor &\le \left\lfloor \frac{2b-2}{b}+\frac{b-1}{b^2}+\cdots+\frac{b-1}{b^{k+1}}\right\rfloor\\ &=\left\lfloor 2-\frac{2}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b^3}+\cdots+\frac{1}{b^k}-\frac{1}{b^{k+1}}\right\rfloor\\ &=\left\lfloor 2-\frac{1}{b}-\frac{1}{b^{k+1}}\right\rfloor\\ &<2,\end{aligned}$$

整数部分 $\left\lfloor \frac{c_k+j}{b}+\frac{c_{k-1}}{b^2}+\cdots+\frac{c_0}{b^{k+1}}\right\rfloor$ 只能是 0 或 1。

对于 $c_k+j\ge b$，我们有 $\left\lfloor \frac{c_k+j}{b}+\frac{c_{k-1}}{b^2}+\cdots+\frac{c_0}{b^{k+1}}\right\rfloor=1$；若 $c_k+j<b$，则有 $c_k+j\le b-1$，因此

$$\begin{aligned}0\le\left\lfloor \frac{c_k+j}{b}+\frac{c_{k-1}}{b^2}+\cdots+\frac{c_0}{b^{k+1}}\right\rfloor &\le \left\lfloor \frac{b-1}{b}+\frac{b-1}{b^2}+\cdots+\frac{b-1}{b^{k+1}}\right\rfloor\\ &=\left\lfloor 1-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{b^{k-1}}\right\rfloor\\ &=\left\lfloor 1-\frac{1}{b^{k+1}}\right\rfloor\\ &=0.\end{aligned}$$

□

定理 *2* 的证明。将 n 的 b 进制展开代入 n，并利用引理 3，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{n+jb^{k-1}}{b^k}\right\rfloor &=\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{n}{b^k}+\frac{j}{b}\right\rfloor\\ &=\sum_{k\ge1}\left\lfloor\sum_{s\ge0}\frac{c_s b^s}{b^k}+\frac{j}{b}\right\rfloor\\ &=\sum_{k\ge1}\left\lfloor\sum_{s\ge k}c_s b^{s-k}+\frac{c_{k-1}+j}{b}+\frac{c_{k-2}}{b^2}+\cdots+\frac{c_0}{b^k}\right\rfloor\\ &=\sum_{k\ge1}\sum_{s\ge k}c_s b^{s-k}+\sum_{k\ge1}\left\lfloor\frac{c_{k-1}+j}{b}+\frac{c_{k-2}}{b^2}+\cdots+\frac{c_0}{b^k}\right\rfloor\\ &=\sum_{k\ge1}\sum_{s\ge k}c_s b^{s-k}+\sum_{k\ge1}[c_{k-1}+j\ge b] \qquad \text{(by Lemma 3)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s\geq 1} c_s \left(b^0 + b^1 + \cdots + b^{s-1}\right) + \sum_{s\geq 0} [c_s \geq b-j] \\
&= \sum_{s\geq 1} c_s \cdot \frac{b^s - 1}{b-1} + \lambda'_{b-j} \\
&= \frac{1}{b-1}\left(\sum_{s\geq 1} c_s b^s + c_0 - c_0 - \sum_{s\geq 1} c_s\right) + \lambda'_{b-j} \\
&= \frac{1}{b-1}\left(\sum_{s\geq 0} c_s b^s - \sum_{s\geq 0} c_s\right) + \lambda'_{b-j} \\
&= \frac{n - s_b(n)}{b-1} + \lambda'_{b-j}.
\end{aligned}
$$

□

于是立即得到双重求和公式 (2.1):

推论 4. 对于任意基数 $b \geq 2$ 和任意非负整数 n，我们有以下恒等式:

$$\sum_{k\geq 1} \sum_{0<j<b} \left\lfloor \frac{n + jb^{k-1}}{b^k} \right\rfloor = n.$$

证明。 通过改变求和次序，左端等于

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} \sum_{0<j<b} \left\lfloor \frac{n + jb^{k-1}}{b^k} \right\rfloor &= \sum_{0<j<b} \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n + jb^{k-1}}{b^k} \right\rfloor \\
&= \sum_{0<j<b} \left(\frac{n - s_b(n)}{b-1} + \lambda'_{b-j}\right) && \text{(by Theorem 2)} \\
&= n - s_b(n) + (\lambda_{b-1} + \cdots + \lambda_1) \\
&= n. && \text{(by Remark 1)}
\end{aligned}
$$

□

3 涉及上取整函数的求和

现在我们来关注公式 (2.1) 众所周知的上取整类比。一个双重和 [1, 例 39，第 99] 页

$$\sum_{0\leq k\leq \log_b x} \sum_{0<j<b} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil$$

等于 ($b -$ 1) ($\lfloor$对数$_b\, x\rfloor + 1$) + $\lceil x\rceil$ − 对于每个实数 $x \geq 1$ 和每个整数 $b \geq$，均成立

2. 更一般地，我们陈述这个公式的如下改进式。同样，设 $b \geq 2$ 为任意基数，设 $n := \lceil x\rceil$，且设 $n = (c_m c_{m-1} \cdots c_0)_b$ 为 n 的 b 进制展开；如前所述， $\lambda = \lambda(n, b)$ 和 $\lambda' = \lambda'(n, b)$ 是 b 进制数字及其转置构成的多重集的分拆。注意， $m = \lfloor \log_b n\rfloor$ 是 n 的 b 进制展开中最高位数字的位置。我们还定义 $\nu_b(n) := \max\left\{k \mid b^k \backslash n\right\}$。对于每个固定的 $j, 0 < j < b$，我们将求出该求和。

定理5。 对于任意基数 $b \geq 2$、固定的 j, $0 < j < b$, 以及任意实数 $x \geq 1$, 我们有如下恒等式:

$$\sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil = \frac{n - s_b(n)}{b-1} + m + \lambda'_{b-j} + \left[c_{\nu_b(n)} \neq b - j \right], \tag{3.1}$$

其中， $n = \lceil x \rceil$ 和 $m = \lfloor \log_b n \rfloor$ 是 n的 b进制展开中最高位数字的位置。

证明。令 $b \geq 2$、 $0 < j < b$和 $0 \leq k \leq \log_b x$ 为整数，且 $f(x) = \frac{x+jb^k}{b^{k+1}}$。则 f是一个连续的单调递增函数。设 $f(x) = z \in \mathbb{Z}$。于是有$x = zb^{k+1} - jb^k \in \mathbb{Z}$, 并且可以得出 $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, 因为 f 满足必要条件 [1,(3.10), 第 71]页。于是

$$\sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil = \sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil.$$

设 n的 b进制展开为

$$n = (c_m c_{m-1} \cdots c_1 c_0)_b,$$

即,

$$n = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + \cdots + c_1 b^1 + c_0,$$

其中每个 $c_s \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ 以及最高位数字 c_m 均非零。

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil &= \sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \frac{n}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\rceil \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \sum_{s \geq 0} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\rceil \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \sum_{s \geq k+1} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \sum_{0 \leq s \leq k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\rceil \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \sum_{s \geq k+1} c_s b^{s-k-1} + \sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \frac{c_k + j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil.
\end{aligned}$$

通过改变求和次序，第一个（双重）求和等于

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \sum_{s \geq k+1} c_s b^{s-k-1} &= \sum_{1 \leq s \leq \log_b x+1} c_s b^{s-1} \sum_{0 \leq k \leq s-1} b^{-k} \\
&= \sum_{1 \leq s \leq \log_b x+1} c_s b^{s-1} \cdot \frac{1 - b^{-s}}{1 - b^{-1}} \\
&= \sum_{1 \leq s \leq \log_b x+1} c_s \cdot \frac{b^{s-1} - b^{-1}}{1 - b^{-1}} \\
&= \sum_{1 \leq s \leq \log_b x+1} c_s \cdot \frac{b^s - 1}{b - 1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b-1}\left(\sum_{1\le s\le \log_b x+1} c_s b^s - \sum_{1\le s\le \log_b x+1} c_s\right)$$
$$= \frac{n-s_b(n)}{b-1}.$$

第二个（单重）求和的上界为

$$\left\lceil \frac{c_k+j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil \le \left\lceil \frac{2b-2}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \cdots + \frac{b-1}{b^{k+1}} \right\rceil$$
$$= \left\lceil 2 - \frac{2}{b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^3} + \cdots + \frac{1}{b^k} - \frac{1}{b^{k+1}} \right\rceil$$
$$= \left\lceil 2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^{k+1}} \right\rceil$$
$$\le 2.$$

因此，$\left\lceil \frac{c_k+j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil$ 要么是 1，要么是 2。

对于 $c_k + j > b$，我们有 $\left\lceil \frac{c_k+j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil = 2$。对于 $c_k + j < b$，我们有 $c_k + j \le b-1$，并且

$$1 \le \left\lceil \frac{c_k+j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil \le \left\lceil \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \cdots + \frac{b-1}{b^{k+1}} \right\rceil$$
$$= \left\lceil 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^3} + \cdots + \frac{1}{b^k} - \frac{1}{b^{k+1}} \right\rceil$$
$$= \left\lceil 1 - \frac{1}{b^{k-1}} \right\rceil$$
$$= 1.$$

对于 $c_k + j = b$ 和 $c_{k-1} = c_{k-2} = \cdots = c_0 = 0$，我们有 b^k 整除 n，因此 $\nu_b(n) = k$，并且

$$\left\lceil \frac{c_k+j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil = 1.$$

对于至少一个满足 $0 \le s \le k-1$ 的 $c_s > 0$，我们有 $\left\lceil \frac{c_k+j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil = 2$。因此：

$$\sum_{0\le k\le \log_b x} \left\lceil \frac{c_k+j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\rceil = m + 1 + \lambda'_{b-j} - \left[c_{\nu_b(n)} = b-j\right]$$
$$= m + \lambda'_{b-j} + \left[c_{\nu_b(n)} \ne b-j\right].$$

最后，我们得到

$$\sum_{0\le k\le \log_b x} \left\lceil \frac{x+jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil = \frac{n-s_b(n)}{b-1} + m + \lambda'_{b-j} + \left[c_{\nu_b(n)} \ne b-j\right].$$

□

推论 6。 对于每个基数 $b \geq 2$ 和每个实数 $x \geq 1$，都有以下恒等式：

$$\sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \sum_{0<j<b} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil = (b-1)(m+1) + n - 1,$$

其中 $n = \lceil x \rceil$ 和 $m = \lfloor \log_b n \rfloor$ 是 n的 b进制展开中最高位数字的位置。证明。

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \sum_{0<j<b} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil &= \sum_{0<j<b} \sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil \\
&= \sum_{0<j<b} \left(\frac{n - s_b(n)}{b-1} + m + 1 + \lambda'_{b-j} - \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \right) \\
&= n - s_b(n) + (b-1)(m+1) + \sum_{0<j<b} \left(\lambda'_{b-j} - \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \right).
\end{aligned}$$

尚需证明

$$\sum_{0<j<b} \left(\lambda'_{b-j} - \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \right) = s_b(n) - 1.$$

根据注 1，$\sum_{0<j<b} \lambda'_{b-j} = s_b(n)$。我们还可以看出

$$\sum_{0<j<b} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] = 1.$$

这是因为恰好有一个 k 使得 $\nu_b(n) = k$。由于 $c_{\nu_b(n)} > 0$ 且 j 的取值范围是从 1 到 $b-1$，因此使表达式 $\left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right]$ 等于 1 所需的数字也必定出现，且恰好出现一次。

最后，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k \leq \log_b x} \sum_{0<j<b} \left\lceil \frac{x + jb^k}{b^{k+1}} \right\rceil &= n - s_b(n) + (b-1)(m+1) + \sum_{0<j<b} \left(\lambda'_{b-j} - \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \right) \\
&= n - s_b(n) + (b-1)(m+1) + s_b(n) - 1 \\
&= (b-1)(m+1) + n - 1.
\end{aligned}$$

□

4 涉及小数部分函数的求和

在下面的定理中，我们得到向下取整和向上取整公式 (2.2) 和 (3.1) 的小数部分类比。

定理 7。 对于任意基数 $b \geq 2$、固定的 j、$0 < j < b$，以及任意非负整数 n，我们有以下恒等式：

$$\sum_{0 \leq k \leq \log_b n} \left\{ \frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right\} = \frac{1}{b-1} \left(s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}} \right) + (m+1)\frac{j}{b} - \lambda'_{b-j},$$

其中，$m = \lfloor \log_b n \rfloor$ 是 n 的 b 进制展开中最高位数字的位置。

证明。 假设 n 的 b 进制展开为

$$n = (c_m c_{m-1} \cdots c_1 c_0)_b,$$

也就是说

$$n = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + \cdots + c_1 b^1 + c_0,$$

其中每个 $c_s \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ 和最高位数字 c_m 都非零。

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \le k \le \log_b n} \left\{ \frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right\} &= \sum_{0 \le k \le \log_b n} \left\{ \sum_{s \ge 0} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\} \\
&= \sum_{0 \le k \le \log_b n} \left\{ \sum_{s \ge k+1} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\} \\
&= \sum_{0 \le k \le \log_b n} \left\{ \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\}.
\end{aligned}$$

内层求和有如下界

$$\begin{aligned}
\frac{c_k + j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} &\le \frac{2b-2}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \cdots + \frac{b-1}{b^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^{k+1}} \\
&< 2.
\end{aligned}$$

因此，$\left\{ \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\}$ 只能是 $\sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b}$ 或 $\sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} - 1$。当 $c_k + j \ge b$ 时，我们有 $\left\{ \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\} \ge 1$，且 $\left\{ \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\} = \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} - 1$。当 $c_k + j < b$ 时，我们有 $c_k + j \le b - 1$，且

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{c_k + j}{b} + \frac{c_{k-1}}{b^2} + \cdots + \frac{c_0}{b^{k+1}} \right\} &\le \left\{ \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \cdots + \frac{b-1}{b^{k+1}} \right\} \\
&= 1 - \frac{1}{b^{k-1}} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

我们得出结论：$\left\{ \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} \right\} = \sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b}$。

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \le k \le \log_b n} \left\{ \frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right\} &= \sum_{0 \le k \le \log_b n} \left(\sum_{0 \le s \le k} \frac{c_s b^s}{b^{k+1}} + \frac{j}{b} - [c_k \ge b - j] \right) \\
&= \sum_{0 \le s \le \log_b n} c_s \sum_{s \le k \le \log_b n} b^{s-k-1} + (\lfloor \log_b n \rfloor + 1) \frac{j}{b} - \lambda'_{b-j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{0\le s\le \log_b n} c_s \cdot \frac{b^{-1} - b^{s-\lfloor \log_b n\rfloor -2}}{1-\frac{1}{b}} + (m+1)\frac{j}{b} - \lambda'_{b-j} \\
&= \sum_{0\le s\le \log_b n} c_s \cdot \frac{1-b^{s-m-1}}{b-1} + (m+1)\frac{j}{b} - \lambda'_{b-j} \\
&= \frac{\sum\limits_{0\le s\le \log_b n} c_s}{b-1} - \frac{\sum\limits_{0\le s\le \log_b n} c_s b^s}{b^{m+1}(b-1)} + (m+1)\frac{j}{b} - \lambda'_{b-j} \\
&= \frac{1}{b-1}\left(s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}}\right) + (m+1)\frac{j}{b} - \lambda'_{b-j}.
\end{aligned}
$$

□

最后，通过对定理 7 中的公式关于 $0 < j < b$ 进行简单求和，双重和分数类比式的闭式公式如下:

推论 8. 对于每个基数 $b \ge 2$ 和每个非负整数 n，我们都有以下恒等式:

$$
\sum_{0\le k\le \log_b n} \sum_{0<j<b} \left\{\frac{n+jb^k}{b^{k+1}}\right\} = (m+1)\frac{b-1}{2} - \frac{n}{b^{m+1}},
$$

其中 $m = \lfloor$对数$_b\, n\rfloor$ 是 n在 b进制展开中的最高位数字的位置。

证明. 改变求和次序后，左端等于

$$
\begin{aligned}
\sum_{0<j<b} \sum_{0\le k\le \log_b n} \left\{\frac{n+jb^k}{b^{k+1}}\right\} &= \sum_{0<j<b} \left(\frac{1}{b-1}\left(s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}}\right) + (m+1)\frac{j}{b} - \lambda'_{b-j}\right) \\
&= s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}} + (m+1)\frac{b(b-1)}{2b} - s_b(n) \\
&= (m+1)\frac{b-1}{2} - \frac{n}{b^{m+1}}.
\end{aligned}
$$

□

“400道最佳问题”中的另一个问题 [4, 问题 4375，第 50] 页，涉及对下列函数求和:

$$
((x)) = \begin{cases} x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}\left(= \{x\} - \frac{1}{2}\right), & \text{if } x \text{ is not an integer;} \\ 0, & \text{if } x \text{ is an integer.} \end{cases}
$$

这个函数是定义著名的戴德金和 [5, 定义 5.1，第 92]页的基础。这里我们可以轻易得到该函数单和与双重和的闭式类比。

*Re*标记 9. 对于 $0 \le k \le \log_b n$ 且固定 $j, 0 < j < b$，在分数中只有一个 s

$$
\frac{n+jb^k}{b^{k+1}}
$$

是一个整数。

$_m$证明。 如果 $\nu_b(n) = k$ 那么 $c_k \neq 0$ 和 $n = \sum c_s b^s$，其中 $m = \lfloor \log_b n \rfloor$。 那么$_{s=k}$

$$\frac{n + jb^k}{b^{k+1}} = \frac{c_k + j}{b} + c_{k+1} + c_{k+2}b + \cdots + c_m b^{m-k-1}.$$

那么， $c_k = b - j$ 给出了上述分数唯一的整数值。 □

定理10. 对于任意基数 $b \geq 2$、固定的 j、 $0 < j < b$，以及任意非负整数 n，我们有如下恒等式:

$$\sum_{0 \leq k \leq \log_b n} \left(\left(\frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right) \right) = \frac{1}{b-1} \left(s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}} \right) + (m+1) \left(\frac{j}{b} - \frac{1}{2} \right) - \lambda'_{b-j} + \frac{1}{2} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right],$$

其中， $m = \lfloor$对数$_b\, n \rfloor$ 是 n 的 b 进制展开中最高位数字的位置。

证明. 假设 n 的 b 进制展开 $n = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + \cdots + c_1 b^1 + c_0$ 中的 c_m 非零。

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \leq k \leq \log_b n} \left(\left(\frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right) \right) \\
=&\sum_{0 \leq k \leq \log_b n} \left\{ \frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right\} - \sum_{0 \leq k \leq \log_b n} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \qquad \text{(by Remark 9)} \\
=&\frac{1}{b-1} \left(s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}} \right) + (m+1)\frac{j}{b} - \lambda'_{b-j} - \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \\
=&\frac{1}{b-1} \left(s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}} \right) + (m+1) \left(\frac{j}{b} - \frac{1}{2} \right) - \lambda'_{b-j} + \frac{1}{2} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right].
\end{aligned}$$

□

推论11. 对于任意基数 $b \geq 2$ 以及任意非负整数 n，我们有如下恒等式:

$$\sum_{0 \leq k \leq \log_b n} \sum_{0 < j < b} \left(\left(\frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right) \right) = \frac{1}{2} - \frac{n}{b^{m+1}},$$

其中， $m = \lfloor$对数$_b\, n \rfloor$ 是 n 的 b 进制展开中最高位数字的位置。

证明。 注意，根据注 9，求和 $\sum \frac{1}{2} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right]$ 等于 $_{1\,2\circ\ 0<j<b}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \leq k \leq \log_b n} \sum_{0 < j < b} \left(\left(\frac{n + jb^k}{b^{k+1}} \right) \right) \\
=&\sum_{0 < j < b} \left(\frac{1}{b-1} \left(s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}} \right) + (m+1) \left(\frac{j}{b} - \frac{1}{2} \right) - \lambda'_{b-j} + \frac{1}{2} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \right) \\
=&s_b(n) - \frac{n}{b^{m+1}} + (m+1) \left(\frac{b(b-1)}{2b} - \frac{b-1}{2} \right) - s_b(n) + \sum_{0 < j < b} \frac{1}{2} \left[c_{\nu_b(n)} = b - j \right] \\
=&\frac{1}{2} - \frac{n}{b^{m+1}}.
\end{aligned}$$

□

我们希望，我们的求和技巧还能进一步应用于数论、逼近论或其他领域。

参考文献

[1] R. L. Graham、D. E. Knuth 和 O. Patashnik，《具体数学》，Addison-Wesley，1994年。[2] D. E. Knuth，《计算机程序设计艺术》，Addison-Wesley，1997年。[3] D. E. Knuth，《关于记号的两篇短文》，《美国数学月刊》99（1992年），403–422。[4] H. Eves 和 E. P. Starke，《奥托·邓克尔纪念问题集》，《美国数学月刊》64的增刊，1957年。[5] F. Hirzebruch 和 D. Zagier，《阿蒂亚-辛格定理与初等数论》，Publish or Perish Inc.，1974年。[6] I. G. Macdonald，《对称函数与 Hall 多项式》，牛津大学出版社，1995年。