arXiv:2302.01904v1 [math.GM] 15 Dec 2022

利用类似考拉兹问题和 Quibic Duffing 探究某些序列的惊人行为及向混沌的转变 *

Zeraoulia Rafik
巴特纳二大。阿尔及利亚数学系，亚布斯，肯切拉
{1}r.zeraoulia@univ-batna2.dz

摘要

本文将展示利用类似考拉兹问题以及解析数论和动力系统中的一些先进理论所揭示的某些离散映射的惊人行为。我们研究了受迫三次-五次杜芬方程，并据此预测了平衡点附近极限环的数量，还利用类考拉兹问题序列，为受迫阻尼系统中的混沌抑制提出了一种理论方法。文中还介绍了关于该序列行为的一些新结果。

关**键词** 类似考拉兹问题 · 无理性 · 序列

1 引言

科拉茨猜想是数学领域最著名的未解问题之一。[**13**],[**7**] 该猜想提出的问题是：反复进行两种简单的算术运算，是否最终能将每个正整数变为 1。它涉及由整数构成的数列，其中每一项都按以下规则由前一项得到：如果前一项是偶数，下一项就是前一项的一半；如果前一项是奇数，下一项就是前一项的 3 倍加 1。该猜想认为，无论选择哪个正整数作为数列的起始项，这些数列最终都会达到 1。该猜想已通过计算机对不超过 $\approx 5.48 \cdot 10^{18}$ 的数进行了检验，这相当令人印象深刻；不过，我们原先以为，鉴于计算机问世至今已有 50 多年，此时应该已经对极大的整数进行了检验。

新发现的整数基础理论（元数学）可用于形式化并构建一种新的理论数系，据此或可发现、完善并发展其他形式分析框架（[**18**]）。所提出的数系（[**15**]）及其最一般的框架——该框架基于对科拉茨猜想（[**17**]）（即 3x+1 问题）的研究所得的建模结果——已成为一种有效的探索工具，可用于可视化、挖掘和提取有关众多数学定理与猜想的新知识，其中包括科拉茨猜想。近年来，人们对离散动力系统理论的研究兴趣日益浓厚，其中也包括科拉茨问题，尤其是其相关差分方程。关于由科拉茨问题导出的序列，其解的行为与性质，以及有界性和无界性，已有大量研究成果发表于应用数学和物理学的多个领域。（[**1**],[**3**],[**4**] ,[**14**],[**5**]）

定义 1.1 （临界）类似考拉兹问题：映射 f： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 若满足以下条件，则称为类 *Collatz* 映射

$$0 \neq \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{r=1}^{n} \frac{f(r)}{r} \right)^{1/n} \leq 1 \tag{1}$$

* 引用：**作者。标题。页码..... DOI：000000/1111 1.**

若不等式 *(1)* 取等号，则称映射 f 为临界类 *Collatz* 映射。对于每个（临界）类 *Collatz* 映射 f，我们都有相应的（临界）科拉茨类问题：其迭代是否不会发散至无穷大，即

$$\forall n > 0,\ \exists m, r > 0 \textit{ with } f^{\circ(m+r)}(n) = f^{\circ m}(n).$$

如果答案是肯定的，那么我们称 f 为一个可接受的（临界）类 *Collatz* 映射。

本文着重研究一类特定的临界科拉茨类问题：

对于任意给定的 $\alpha > 0$，考虑如下映射 ***[10]***

$$f_\alpha : n \mapsto \begin{cases} \lfloor n\alpha \rfloor & \textit{if } n \textit{ even,} \\ \lfloor n/\alpha \rfloor & \textit{if } n \textit{ odd.} \end{cases} \tag{2}$$

(2) 中的映射 f_α 是临界类 *Collatz* 映射。令 S 表示使 f_α 可接受的所有 $\alpha > 0$ 所构成的集合。

解析数论（[**12**]）中一个备受研究者关注的重要课题，是诸如 $\sqrt{2}$，π，e，$\cdots$ 这样的超越数的无理性测度（[**16**],[**17**]）。本文将展示如下离散映射令人惊叹且出人意料的行为。该映射由 **(2)** 推导而来，取 $\alpha = \sqrt{2}$，于是考虑 [**22**]：

$$f : n \mapsto \begin{cases} \lfloor n/\sqrt{2} \rfloor & \text{if } n \text{ even,} \\ \lfloor n\sqrt{2} \rfloor & \text{if } n \text{ odd.} \end{cases}$$

使其涉及 $\sqrt{2}$，π 以及奇偶性等。

2 分析与讨论

考虑以下映射：

$$f : n \mapsto \begin{cases} \lfloor n/\sqrt{2} \rfloor & \text{if } n \text{ even,} \\ \lfloor n\sqrt{2} \rfloor & \text{if } n \text{ odd.} \end{cases}$$

令 $f^{\circ(r+1)} := f \circ f^{\circ r}$，考虑 $n = 73$ 在 f 的迭代下的轨道，即数列 $f^{\circ r}$(73)：

$$73, 103, 145, 205, 289, 408, 288, 203, 287, 405, 572, 404, 285, 403, 569, 804, 568, 401, \ldots$$

这个数列似乎以指数级速度趋于无穷大，尤其是永远不会进入循环。我们用以下图片来说明这一点：$(f^{\circ r}(73))^{1/r}$，其中 $200 < r < 20000$。见图1：

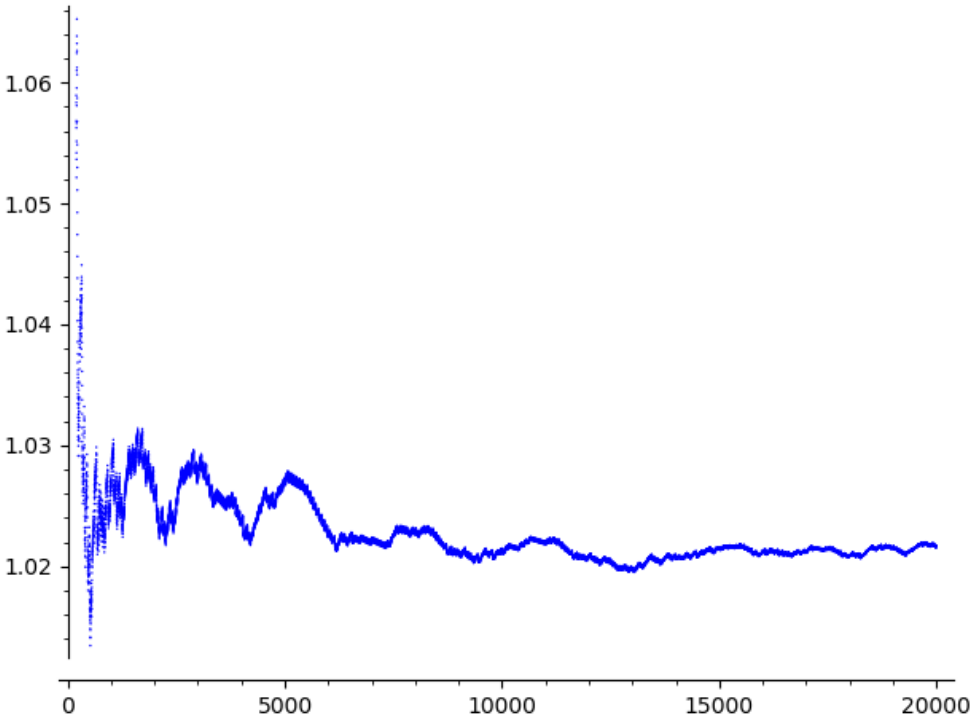

图1：迭代映射 73 次（$(f^{\circ r}(73))^{1/r}$，其中 $200 < r < 20000$）

根据图1，$f^{\circ r}(73) \sim \delta^r$，其中 $\delta \sim 1.02$。

现在考虑数列 $f^{\circ r}(73)$ 的前 m 项为偶数的概率（[9]）：

$$p_0(m) := \frac{|\{r < m \mid f^{\circ r}(73) \text{ is even}\}|}{m}.$$

那么 $p_1(m) := 1 - p_0(m)$ 是 $f^{\circ r}(73)$ 的前 m 项为奇数的概率。

如果我们计算 $p_i(m)$ 在 $m = 10^\ell$、$\ell = 1$、.....、5 时的值，会得到一些意想不到的结果：

之所以出乎意料，是因为看起来 $p_0(m)$ 并不收敛到 $1/2$，而是收敛到 $\alpha \sim 0.465$。这与上述观察相符，因为

$$\delta \sim 1.02 \sim \sqrt{2}^{(0.535-0.465)} = \sqrt{2}^{(1-2\times 0.465)} \sim \sqrt{2}^{(1-2\alpha)}.$$

ℓ	$p_0(10^\ell)$	$p_1(10^\ell)$
1	0.2	0.8
2	0.45	0.55
3	0.467	0.533
4	0.4700	0.5300
5	0.46410	0.53590
6	0.465476	0.534524

$\ell = 6$ 的曲线是使用 Pari/GP 计算的。将内部精度设为 15000 个十进制位后，我们得到了 $p_1(10^6) = 0.534524$，$f^{1e6}(73)$ 的值约为 $3.89439e10394$，（因此需要如此高的精度），其 $\log_{73}()$ 为 5578.52。现在可以问：$f^{\circ r}(73)$ 是否永远不会到达一个循环？$(f^{\circ r}(73))^{1/r}$ 是否收敛于 $\delta \sim 1.02$？$p_0(m)$ 是否收敛于 $\alpha \sim 0.465$？以及 $\delta^2 4^\alpha = 2$ 是否成立？δ 和 α 的精确值是多少？也就是说，能否得到更好的近似值？下图给出了 $100 < m < 20000$ 时 $p_0(m)$ 的取值。见图 2

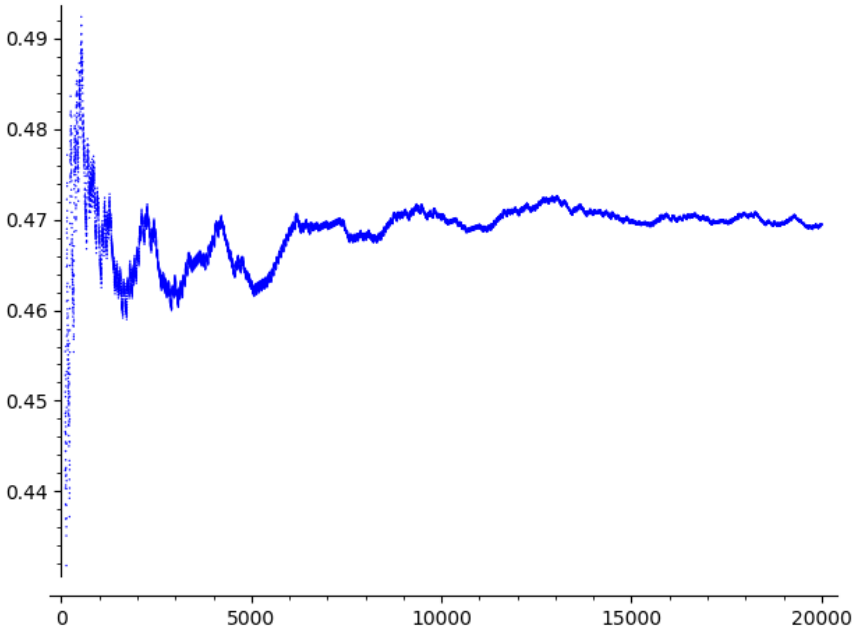

图2： $100 < m < 20000$时 $p_0(m)$的值

请注意，这种现象并非 $n = 73$所独有，但似乎随着 n 变大而频繁发生，随后，相应的概率似乎收敛到相同的 α。如果 $n < 100$，那么它只发生在 $n = 73$；但对于$n < 200$，它发生在 $n = 73$，103，104，105，107，141，145，146，147，148，149，151，152，153，155，161，175，199；而对于 $10000 \leq n < 11000$，恰好发生在954个数值为1的情形中。下图是图3所示的图片，与图2相同，但对应于 $n = 123456789$:

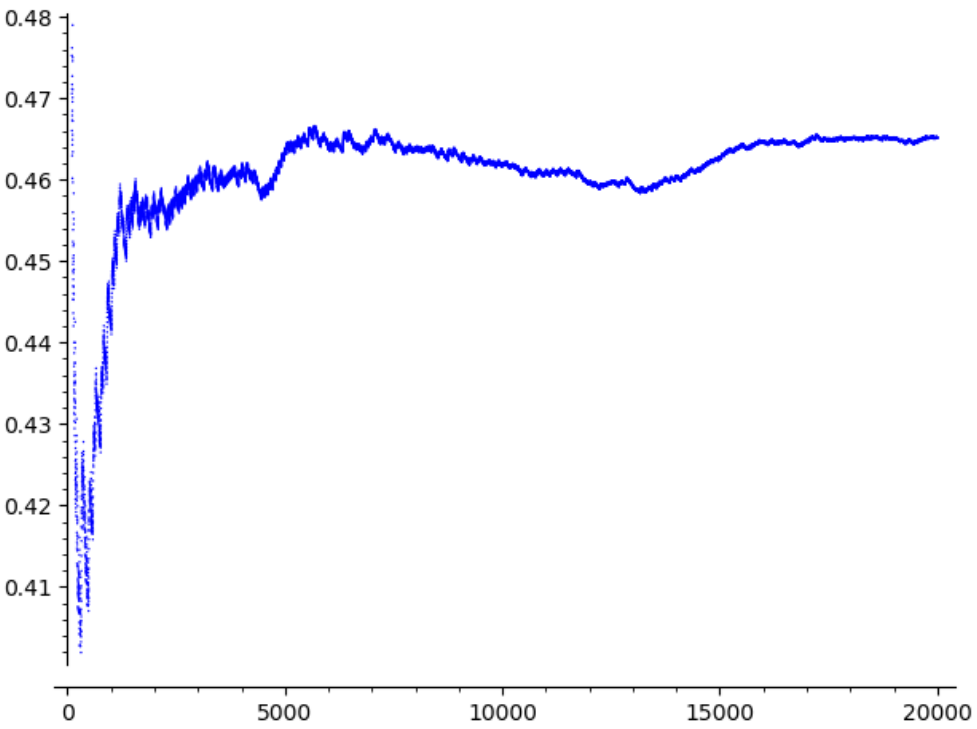

图3： $p_0(m)$ 在 $100 < m < 20000, n = 123456789$ 时的取值

我们可以问：上述现象发生的 n 的集合是否具有自然密度 1？它是余有限集吗？发生这种情况时，是否涉及同一个常数 α？恰好有 1535 个数 $n < 10000$ 不发生上述现象。下一幅图，即图4，展示了对于这样的 n，满足对某个 $r > 0$ 有 $f^{\circ m}(n) = f^{\circ(m+r)}(n)$ 的最小 m （蓝色），以及相应的最小 r （红色）：

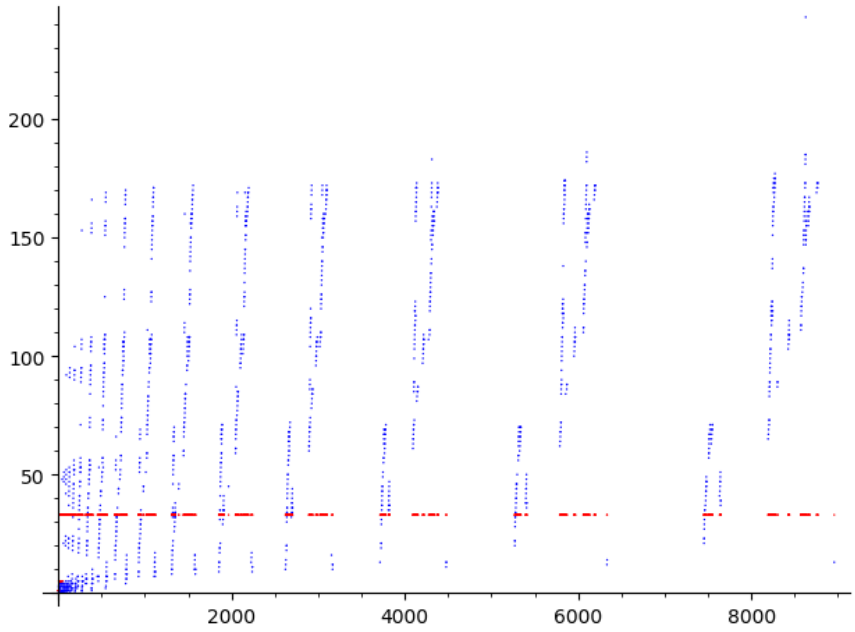

图4：对于某个 $r > 0$，使得 $f^{\circ m}(n) = f^{\circ(m+r)}(n)$ 成立的最小 m

事实上，所有这些数（作为首项）都会到达以下长度为33的循环：

(15, 21, 29, 41, 57, 80, 56, 39, 55, 7 7, 108, 76, 53, 74, 52, 36, 25, 35, 49, 69, 97, 137, 193, 272, 192, 135, 190, 134, 94, 66, 46, 32, 22)

除了以下这些：

7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 38, 40, 54,

它们到达（5，7，9，12，8），而那些 1，2，3，4，6 到达（1），以及 $f(0) = 0$。

如果上述模式无限延续下去，它们就必定有无限多个这样的 n。我们可能需要问，是否有无限多个 n 会到达一个循环？它们是否都会到达上述长度为 33 的循环（除了上面提到的少数几个）？这些数的公式是什么 n?

图 5 显示了它们的计数函数（看起来是对数函数）：

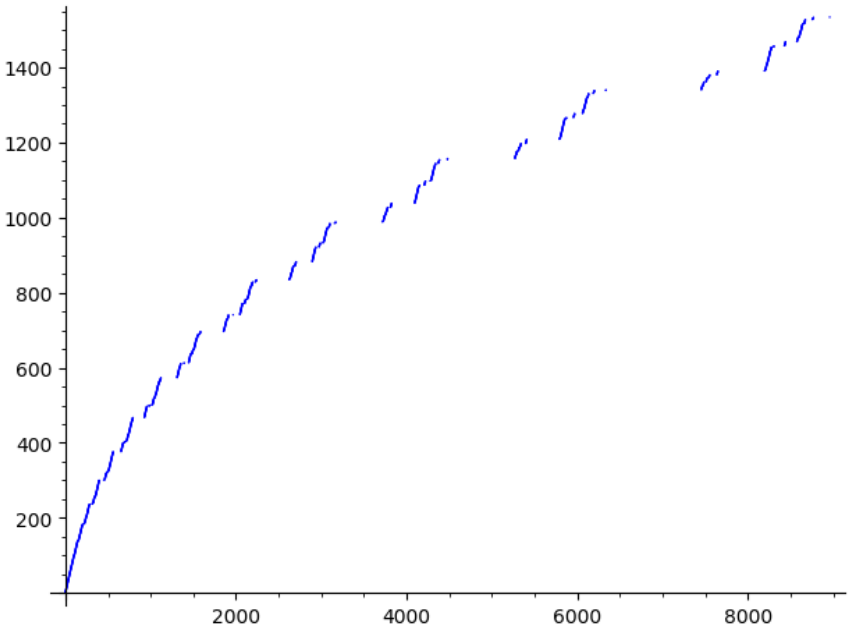

图5：已发生现象的计数函数

3 主要结果

- 1) 数字 m 没有前驱，当且仅当区间 $[m\sqrt{2},(m+1)\sqrt{2}]$ 中没有偶数，且区间 $[m/\sqrt{2},(m+1)/\sqrt{2}]$ 中没有奇数。恰好有 r_ℓ 个这样的数字 $m < 10^\ell$ 满足 $\ell = 1$，2，3，4，5，6 和 $r_\ell = 2$，29，292，2928，29289，292893。奇怪的是，对于 $\ell \le 6$，我们观察到 $r_{\ell-1} = \lfloor r_\ell/10 \rfloor$

- 2) 没有前驱的数具有 $\lfloor n(2+\sqrt{2}) \rfloor$ 这种形式。此外，具有一个前驱的数具有 $\lfloor 2k\sqrt{2} \rfloor$ 这种形式，而具有两个前驱的数具有 $\lfloor (2k-1)\sqrt{2} \rfloor$ 这种形式

- 3) 使用科拉茨序列的 Quibic duffing 振子的未扰动系统的同宿轨道将相平面分为两个区域。在分界曲线内，轨道围绕其中一个中心；在分界曲线外，轨道则同时围绕两个中心和鞍点

4 第一个结果的分析

我们取连续的 m 及其一步前驱 n 中满足 $f(n) = m$ 的 (m, n) ([2]) 对。值 $n = 0$ 表示 m 没有前驱。我之前没有想到，一个 m 可能有两个前驱；但如果 $n/2$ 是奇数，那么 $n/2$ 就是第二个前驱（[7]）。（这使表格更有意思，因为所有奇数前驱 n 都会被偶数前驱 $2n$ 覆盖.....

此外，还会出现一种近似周期结构。我们尝试用三列或四列（m, n）来呈现它，其中第一列包含所有没有前驱的 m。基本模式并非真正的周期模式，但存在一些超模式，它们看起来似乎也是周期性的，实际上却并非如此。这种模式—超模式结构也具有递归性。这让我想起了类似的一种结构：我研究 $\beta = \log_2(3)$时，发现了类似的模式—超模式—超超模式.....结构，而且它与 β的连分数有关。因此，我们认为，对于没有前驱的 m，恐怕无法给出简洁的描述

m	n	m	n	m	n	m	n
		1	2	2	4		
3	0	4	6	5	8		
6	0	7	10	8	12	9	14
10	0	11	16	12	18		
13	0	14	20	15	22	16	24
17	0	18	26	19	28		
20	0	21	30	22	32		
23	0	24	34	25	36	26	38
27	0	28	40	29	42		
30	0	31	44	32	46	33	48
34	0	35	50	36	52		
37	0	38	54	39	56		
40	0	41	58	42	60	43	62
44	0	45	64	46	66		
47	0	48	68	49	70	50	72
51	0	52	74	53	76		
54	0	55	78	56	80	57	82
58	0	59	84	60	86		
61	0	62	88	63	90		
64	0	65	92	66	94	67	96

图 6：已发生现象的前驱解释表

进一步解释一下“递归非周期模式”的概念。如果列出没有前驱的值 m，我们得到

m_k：3, 6,10,13,17,20,23,27,30,...

写出这些数的差（我们在上述 m_k 列表前加上了一个零值）

,3,3,4 ,3,4 ,3,3,4 ,3,4 ,3,3,4 ,3,4 ,3,4 ,3,3,4 , ...

我们注意到，这里有两种不同的词组“3,3,4”和“3,4”交替出现，但并非周期性重复。我们用大写字母“A”表示较长的词组，用小写字母“a”表示较短的词组（其中“A”表示差为 10，“a”表示差为 7）。于是得到

Aa Aa Aaa
Aa Aaa Aa
Aa Aaa Aa
Aaa Aa Aa
Aaa Aa
Aaa Aa ...

我们再次发现只有两种“词”。将它们分别简写为‘Aaa‘=‘B‘和‘Aa‘=‘b‘。现在，‘B‘表示差值为24，‘b‘表示差值为17。于是我们得到

bbB bB bbB
bB bbB bB
bB bbB bB
bbB bB bB
bbB bB bbB
bB bbB bB
bB

使用类似考拉兹问题和 Quibic Duffing 的某些序列的惊人行为及向混沌的转变

```
...
```

下一个显而易见的步骤给出

```
Cc Cc Ccc
Cc Ccc Cc
Cc Ccc Cc
Ccc Cc Cc
Ccc Cc Ccc ...
```

其中 ‘c‘ 表示$17+24=41$ 与 C的 $17+17+24=58$之差。依此类推。如果我们没记错，那么在提到的使用 $\beta=\log_2(3)$ 的情形中，相同的递归模式反映了 β的连分数的渐近分数。到目前为止，这里的前几个差值与 $\sqrt{2}$ 的连分数的渐近分数相符：_

```
                a     b     c                      短模式

[1  1  3     7     17    41   99    239    577   ...  ]   contfrac(sqrt(2)) 的渐近分数
[0  1  2     5     12    29   70    169    408   ...  ]
                                                 ...
            A/2   B/2   C/2                      长模式
```

上述现象可以通过以下几点解释：

- 1) 形如$\lfloor 2k\sqrt{2}\rfloor$ 的数恰有一个前驱 $4k$;
- 2)形如 $\lfloor(2k-1)\sqrt{2}\rfloor$ 的数恰有两个前驱 $2k-1$ 和 $4k-2$;
- 3) 一个数没有前驱，当且仅当它的形式为 $\lfloor n(2+\sqrt{2})\rfloor$。

使用回溯算法（递归）后，我们似乎得到了 $m=73$ 的前驱树。如果没有错误，那么这棵树也应该是完整的。*（但我的程序可能仍有错误，请检查结果！）

回退步沿着从右上方到西南方向（反对角线）的方向向下移动。当存在两个可能的前驱时，它们位于同一列的不同几行中。如果某个前驱没有进一步的前驱，则会打印一条短线（‘—‘）。

```
                                        73   <--- start
                                    104
                                148
                            105 ---

                            210
                        149
                    212
                300 ---

                        298
                    211 ---

                    422
                299
            424
        600 ---

                598
            423 ---
```

```
    846 ---
---------------------------- tree seems to be complete (please check for errors!)
```

我们可以利用贝蒂定理 [**19**] 对主要结果给出启发式证明，该定理指出：

定理 1 给定一个无理数 $r>1$，存在 $s>1$，使得贝蒂数列 $\boldsymbol{B_r}$ 和 $\boldsymbol{B_s}$ 将正整数集划分为两个部分：每个正整数恰好属于这两个数列中的一个。

证明 4.1 根据贝蒂定理（定理 *1*），我们可以说：$A=\{E(n(\sqrt{2}+2)\,;\ n\in\mathbb{N}^*\}$ 和 $B=\{E(n\sqrt{2});n\in\mathbb{N}^*\}$是 $\mathbb{N}^*$的一个划分。并且我们有 $E(n(\sqrt{2}+2))=2n+E(n\sqrt{2})$，其中 E 是整数部分函数，这就证明了结果 *2* 的一部分（没有前驱的数的形式）。

对于第一个结果，假设整数 n 为奇数的概率是 $\frac{1}{2}$，并且当 n 为偶数（分别为奇数）时，$f(n)$ 为奇数的概率也为 $\frac{1}{2}$。我们将会看到（令人惊讶的是），当 $r\geq 2$ 时，$f^{\circ r}(n)$ 为奇数的概率不再是 $\frac{1}{2}$（在某种意义上，概率与 f 和其自身的复合并不交换）。

- *1)* 如果 n 和 $m=f(n)$ 为偶数：注意，$\frac{n}{\sqrt{2}}=m+\theta$（其中 $0<\theta<1$），因此 $m=\frac{n}{\sqrt{2}}-\theta$，那么

$$f^{\circ 2}(n)=f(m)=\left\lfloor\frac{m}{\sqrt{2}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\frac{n}{\sqrt{2}}-\theta}{\sqrt{2}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{2}-\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right\rfloor$$

  但 $\frac{n}{2}$ 为偶数的概率为 $\frac{1}{2}$，因此在这种情况下，$f^{\circ 2}(n)$ 为奇数的概率为 $\frac{1}{2}$。

- *2)* 如果 n 为偶数且 $m=f(n)$ 为奇数：

$$f^{\circ 2}(n)=f(m)=\left\lfloor\sqrt{2}m\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{2}(\frac{n}{\sqrt{2}}-\theta)\right\rfloor=\left\lfloor n-\sqrt{2}\theta)\right\rfloor$$

  但 n 为偶数，且 $0<\sqrt{2}\theta<1$ 的概率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$（因为假设 θ 在开区间 $(0,1)$上*[9]* 统计等分布），因此 $f^{\circ 2}(n)$ 为奇数的概率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

- *3)* 如果 n 为奇数且 $m=f(n)$ 为偶数：

$$f^{\circ 2}(n)=f(m)=\left\lfloor\frac{m}{\sqrt{2}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\sqrt{2}n-\theta}{\sqrt{2}}\right\rfloor=\left\lfloor n-\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right\rfloor$$

  但 n 为奇数且 $0<\frac{\theta}{\sqrt{2}}\leq 1$，因此 $f^{\circ 2}(n)$ 为偶数。

- *4)* 如果 n 是奇数且 $m=f(n)$ 是奇数：

$$f^{\circ 2}(n)=f(m)=\left\lfloor\sqrt{2}m\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{2}(\sqrt{2}n-\theta)\right\rfloor=\left\lfloor 2n-\sqrt{2}\theta\right\rfloor$$

  *b*但 $2n$ 是偶数，且 $0<\sqrt{2}\theta<1$ 的概率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此 $f^{\circ 2}(n)$ 为奇数的概率是 $\sqrt{\frac{2}{2}}$.

综合这四种情况，我们可以推得 $f^{\circ 2}(n)$ 为奇数的概率是

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2\sqrt{2}+1}{8}$$

以此类推，我们可以得到 $f^{\circ 3}(n)$ 为奇数的概率是：

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+1\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}+7}{16}$$

对于 $2\leq r\leq 24$，我们计算了 $f^{\circ r}(n)$ 为奇数的概率 p_r（见附录）。从实验结果来看，p_r 似乎收敛到一个数值 $\simeq 0.532288725\simeq\frac{8+3\sqrt{2}}{23}$，该数值由逆符号计算器得出。这引出了以下问题/猜想：

$$\lim_{r\to\infty}p_r=\frac{8+3\sqrt{2}}{23}\ ?$$

如果是这样，考虑数字 α，那么

$$\alpha = 1 - \frac{8+3\sqrt{2}}{23} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23} \simeq 0.467711,$$

它 与上述计算结果相符（分析与讨论部分）。接下来，我们得到：

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{2^{\alpha}} = 2^{\frac{1}{2}-\alpha} = 2^{\frac{6\sqrt{2}-7}{46}} \simeq 1.022633$$

5 Ho利用科拉茨问题研究未受扰动系统中的莫克利尼克轨道与混沌

尽管混沌尚无普遍接受的数学定义，但罗伯特·L·德瓦尼最初提出的一种常用定义指出，要将一个动力系统归类为混沌系统，它必须具备以下性质：

- 1) 它必须对初始条件敏感
- 2) 它必须是拓扑混合的
- 3) 它必须具有稠密周期轨道

首先，我们可以考虑简谐驱动阻尼摆，它常被用作混沌系统的一个简单示例，其方程为

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{q}\dot{\phi} + \sin\phi = A\cos(\omega t) \tag{3}$$

只要 A 和 ω 较小，系统的行为就类似于受迫简谐振子，并渐近趋于具有固定周期的规则振荡。然而，在其余参数保持不变的情况下，随着 A (或 ω)增大，系统会经历一连串倍周期分岔，进而产生混沌行为；继续增大该参数后，系统又会恢复规则振荡。例如，当 $q = 2$ 和 $\omega = 2/3$ 时，首次倍周期分岔（“对称性破缺”）发生在 $A \approx 1.07$，而首次出现混沌则在 $A \approx 1.08$。这些严格结果似乎是通过数值模拟获得的。实际上，人们可能更关注混沌不会出现的情形 [**20**]。是否已知关于 A, ω 和 q 的严格条件，能够使系统处于首次倍周期分岔之前？不过，这个问题并非本文的研究目标；但如果能对某些动力系统的混沌行为得出一些结论，并借助某种离散迭代映射探索在三次-五次杜芬方程中抑制混沌的新方法，将会非常有意义，这正是本文的研究目的。对于具有分数阶位移的未扰动系统，当 $\varepsilon = 0$时，微分方程 (3) 可改写为：对于 $A = 0$，至

$$\ddot{x} - ax + bx^3 + cx^5 = 0. \tag{4}$$

Let

$$\Delta := b^2 + 4ac. \tag{5}$$

$\Delta > 0$ 的平衡点为：

$$(x, \dot{x}) = \left(\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}}, 0 \right) : \text{centers} \tag{6}$$

定义

$$x_e^+ = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}} \text{ and } x_e^- = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}} \tag{7}$$

方程 (4) 的能量函数为

$$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2}ax(t)^2 + \frac{1}{4}bx(t)^4 + \frac{1}{6}cx(t)^6 = K \tag{8}$$

其中， K 是能量常数，取决于初始振幅 $x(0) = x_0$ 和初始速度 $x'(0) = \dot{x}_0$：

$$K = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 - \frac{1}{2}ax_0^2 + \frac{1}{4}bx_0^4 + \frac{1}{6}cx_0^6. \tag{9}$$

根据 K 的不同，水平集也各不相同。它们的共同点是，都会形成围绕不动点的闭合周期轨道：这些不动点为 $(x, \dot{x}) = (x_e^+, 0)$、$(x, \dot{x}) = (x_e^-, 0)$，或全部三个不动点 $(x_e^\pm, 0)$ 和 $(0, 0)$。这两组轨道之间的边界对应于 $K = 0$，当

$$\dot{x}_0 = \pm x_0\sqrt{\frac{1}{6}\left(6a - 3bx_0^2 - 2cx_0^4\right)}. \tag{10}$$

水平集

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{6}cx^6 = 0 \tag{11}$$

由两条同宿轨道组成

$$\Gamma_+^0(\mathrm{t}) \equiv (x_+^0(\mathrm{t}), \dot{x}_+^0(\mathrm{t})), \tag{12}$$

$$\Gamma_-^0(\mathrm{t}) \equiv (x_-^0(\mathrm{t}), \dot{x}_-^0(\mathrm{t})), \tag{13}$$

它们将双曲鞍点 (0，0) 与自身连接起来，并包含稳定流形和不稳定流形。函数 $x_\pm^0$(t) 可以使用以下两个公式求得

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^0(t)[\gamma \cos\omega(t+t_0) - \delta\dot{x}^0(t)]dt, \tag{14}$$

with

$$x^0(t) = \frac{A\mathrm{sech}\left(\sqrt{k}t\right)}{\sqrt{1+\lambda\cdot\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{k}t\right)}}. \tag{15}$$

。见图5

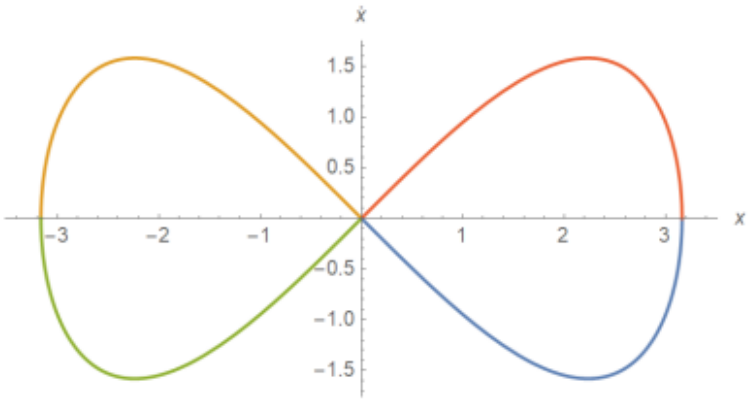

Figure 5. Homoclinic orbit.

同宿轨道 [**21**] 将相平面分为两个区域。在分界曲线内部，轨道围绕其中一个中心运行；在分界曲线外部，轨道围绕两个中心和鞍点运行。从物理上看，这意味着对于某些初始条件，振荡围绕一个稳态位置 [**23**]，进行；而对于其他初始条件，振荡则围绕所有稳态解（两个稳定解和一个不稳定解）进行。

现在，在第二种情况下，方程（3）右端使用迭代映射（类似科拉茨问题的序列），即受扰系统。我们注意到向混沌的转变（对初始条件的敏感性）。考虑以下初值问题：

$$\ddot{x} - ax + bx^3 + cx^5 = f, \dot{(x(0))} = 0, x(0) = 0 \tag{16}$$

使得：

$$f : n \mapsto \begin{cases} \lfloor n/\sqrt{2} \rfloor & \text{if } n \text{ even}, \\ \lfloor n\sqrt{2} \rfloor & \text{if } n \text{ odd}. \end{cases}$$

令 $f^{\circ(r+1)} := f \circ f^{\circ r}$，考虑 $n = 73$ 在 f 上经过迭代的轨道，即序列 $f^{\circ r}$(73)：

$$73, 103, 145, 205, 289, 408, 288, 203, 287, 405, 572, 404, 285, 403, 569, 804, 568, 401, \ldots$$

（参见.....）看来，这个数列呈指数级发散至无穷大，尤其是永远不会进入循环。用以下图片来说明（$f^{\circ r}$(73))$^{1/r}$，其中 $200 < r < 20000$，见图7

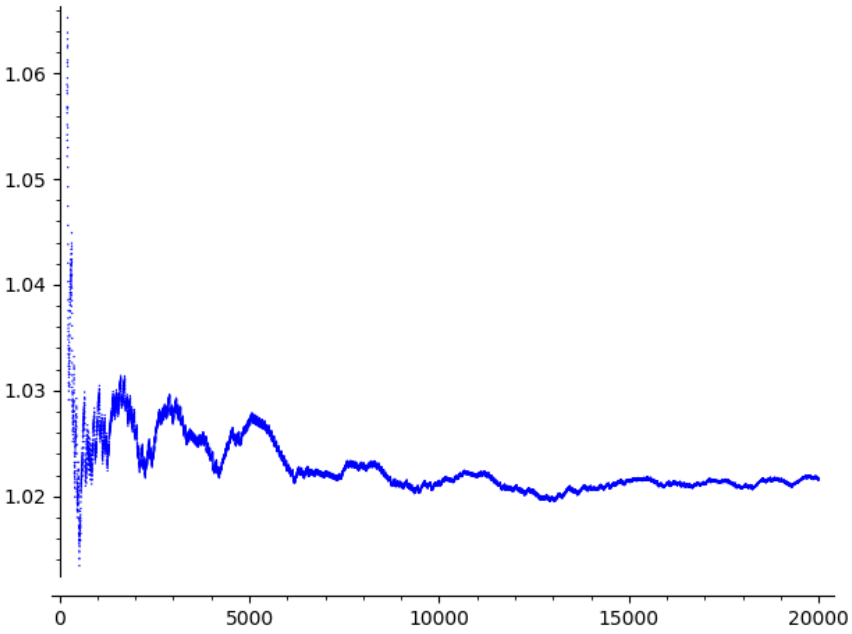

图7： $200 < r < 20000$的指数发散

对于与系统（16）对应的初值问题的初始敏感性，我们得到了以下图像，直至$r = 20000$（小扰动），见图8:

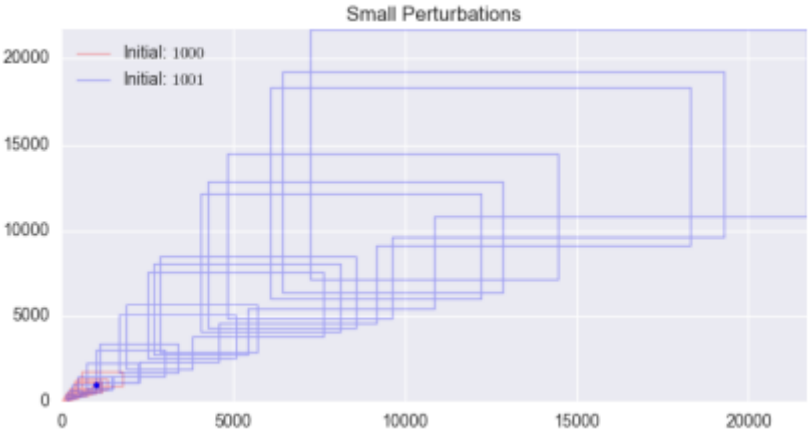

图8: 科拉茨数列在小扰动下直至 $r = 20000$ 时对初始条件的敏感性 e

我们现在可以展示.....绘制截至 $r = 20000$的轨迹相空间图，即小扰动，见图 9

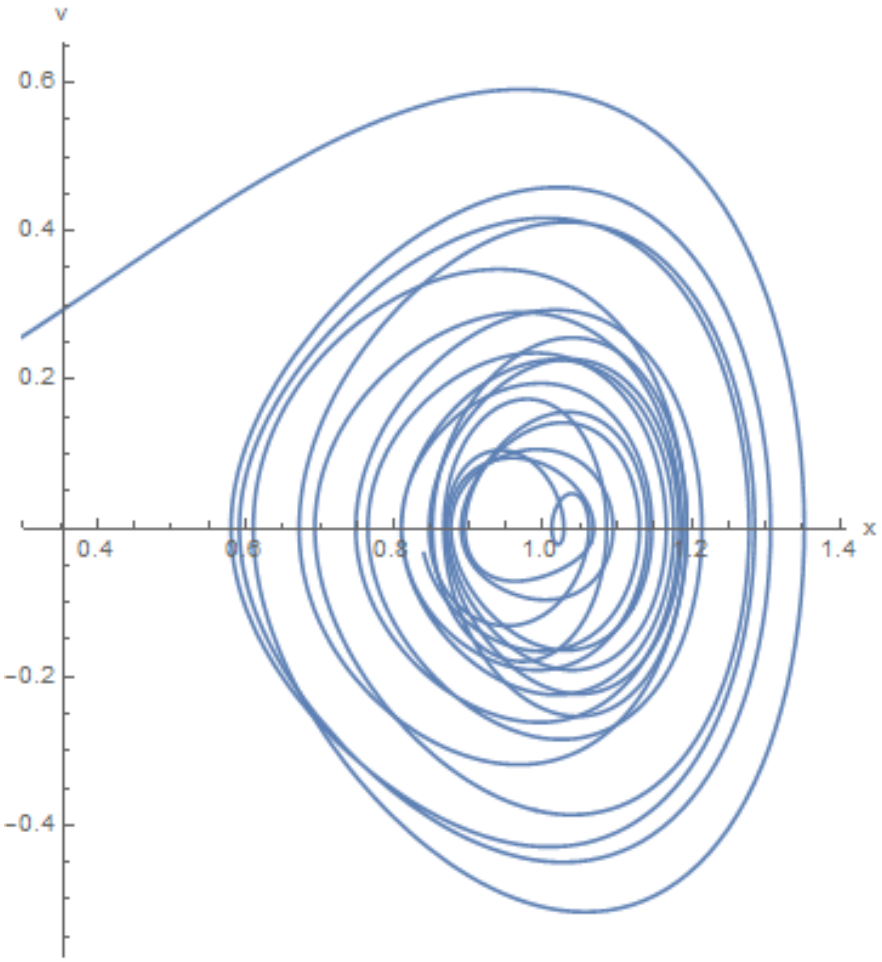

图9：使用科拉茨序列对（16）进行 73 次迭代时向混沌的转变 $r = 20000$

这看起来很复杂，但实际上，图中的大部分内容都展示了运动接近其最终状态的初始阶段，而最终状态要简单得多。这种早期行为称为“初始暂态”。

致谢

本研究基于 Sebastien Palcoux 的工作，他在 arXiv 上发表了一篇题为《某些类似超越数的意外行为》的研究论文 $\sqrt{2}$ [**22**]

6 声明

作者声明，他们不存在已知的可能影响本文所报告工作的竞争性财务利益或个人关系。

7 数据可用性

作者未能为本研究所使用的数据找到有效的数据存储库

8 附录

计算：

sage: for iin range(3,26): ....: print(sq2(i)) ....:[1/4*sqrt(2) + 1/8, 0.
478553390593274?1/16*sqrt(2) + 7/16, 0.525888347648318?3/32*sqrt(2) + 13/
32, 0.538832521472478?15/64*sqrt(2) + 13/64, 0.534581303681194?5/
128*sqrt(2) + 61/128, 0.531805217280199?39/256*sqrt(2) + 81/256, 0.
531852847392776?93/512*sqrt(2) + 141/512, 0.532269260352925?51/
1024*sqrt(2) + 473/1024, 0.532348527032254?377/2048*sqrt(2) + 557/2048,
0.532303961432938?551/4096*sqrt(2) + 1401/4096, 0.532283123258685?653/
8192*sqrt(2) + 3437/8192, 0.532285334012406?3083/16384*sqrt(2) + 4361/
16384, 0.532288843554459?3409/32768*sqrt(2) + 12621/32768, 0.
532289246647030?7407/65536*sqrt(2) + 24409/65536, 0.532288816169701]
[22805/131072*sqrt(2) + 37517/131072, 0.532288667983386?24307/
262144*sqrt(2) + 105161/262144, 0.532288700334941?72761/
524288*sqrt(2) + 176173/524288, 0.532288728736551?159959/
1048576*sqrt(2) + 331929/1048576, 0.532288729880941?202621/
2097152*sqrt(2) + 829741/2097152, 0.532288725958633?639131/
4194304*sqrt(2) + 1328713/4194304, 0.532288724978704?1114081/
8388608*sqrt(2) + 2889613/8388608, 0.532288725350163?1825983/
16777216*sqrt(2) + 6347993/16777216, 0.532288725570602?5183461/
33554432*sqrt(2) + 10530125/33554432, 0.532288725561857]

代码：

```
def sq2(n): c=0for i in range(2^n): l=
list(Integer(i).digits(base=2,padto=n)) if l[-1]==1: cc=1/
4 for j inrange(n-2): ll=[l[j],l[j+1],l[j+2]]if ll==[0,0,0]:
cc*=1/2 if ll==[0,0,1]: cc*=1/2 if ll==[0,1,0]: cc*=
(1-sqrt(2)/2) if ll==[0,1,1]: cc*=sqrt(2)/2 if ll==[1,0,0]:
cc*=1if ll==[1,0,1]: cc=0break if ll==[1,1,0]: cc*=
(1-sqrt(2)/2) if ll==[1,1,1]: cc*=sqrt(2)/2 c+=cc return [
c.expand(),c.n()]
```

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^0(t)[\gamma \cos\omega(t+t_0) - \delta\dot{x}^0(t)]dt, \tag{17}$$

Let

$$x^0(t) = \frac{A\text{sech}\left(\sqrt{k}t\right)}{\sqrt{1+\lambda\cdot\text{sech}^2\left(\sqrt{k}t\right)}}. \tag{18}$$

参考文献

[1] J.J. O Connor 和 E.F. Robertson，洛塔尔·科拉茨，苏格兰圣安德鲁斯大学数学与统计学院；（2006）[2] H. Niederreiter 和 I. E. Shparlinski，《有理函数生成的动力系统》。载于《应用代数、代数算法与纠错码》（图卢兹，2003），《计算机科学讲义》第2643卷，第6–17页。施普林格，柏林，2003。[3] Livio Colussi，《科拉茨函数的收敛类》，《理论计算机科学》；第412卷第39期，第5409–5419页（2011）。[4] Jeffrey C. Lagarias 和 Daniel J. Bernstein，《3x+1 共轭映射》，《加拿大数学杂志》；第48卷第6期，第1154–116页（1996）。[5] Alex V. Kontorovich，Yakov G.Sinai，《(d,g,h)-映射的结构定理》，https://arXiv.org/abs/math/ 0601622，2006[6] G. H. Hardy 和 E. M. Wright，《数论导引》，牛津大学；（2008）。[7] Poonen，B.：《用全称—存在公式刻画有理数中的整数》。《美国数学杂志》131(3)，675–682（2009）[8] van der Poorten，A.J.：《关于两个有理分式的 Hadamard 商的 Pisot 猜想的解答》。《巴黎科学院院报》306(97)，102（1988）[9] Rabin，M.O.：《用于素性测试的概率算法》。《数论杂志》12(1)，128–138（1980）[10] Shalev，A.：《字映射理论中的一些结果与问题》。载于：《Erdos 百年纪念文集》，〃第611–649页。施普林格（2013）[11] Smith，A.：《全等数具有正的自然密度》。预印本（2016）。arXiv:1603.08479[12] Tao，Z.：《关于将大奇整数表示为三个几乎相等的素数之和》。《数学学报》7(3)，259–272（1991）[13] Collatz，L.：《关于（3n+1）问题的起源》。《曲阜师范大学学报·自然科学版》12(3)，9–11（1986）[14] Lagarias，J.C.：《3x+1问题：注释书目（1963–2000）》。arXiv 数学（NT0608208）（2006）[15] Wirsching，G.J.：《由 3n+1 函数生成的动力系统》。《数学讲义》第1681卷。施普林格，柏林（1981）[16] Hata，M.《圆周率及其他一些数的有理逼近》。《算术学报》63，335–349，1993。[17] Amdeberhan，T. 和 Zeilberger，D.《利用 q-WZ 对证明 q-Apéry 无理性》。《应用数学进展》20，275–283，1998。[18] Oliveira e Silva，T.《3x+1 猜想的计算机验证》。2008年9月19日。http://www.ieeta. pt/˜tos/3x+1.html[19] John William Strutt，第三代瑞利男爵（1894）。《声学理论》。第1卷（第二版）。麦克米伦。第123页。[20] H.W. Haslach H.W. Haslach。《非线性本构方程作用下柱的屈曲后行为》，《国际非线性力学杂志》**20**[21] P. Holmes 与 J. Marsden P. Holmes 与 J. Marsden。《一个具有无穷多个周期轨道的偏微分方程：受迫梁的混沌振荡》，理性力学档案，*Holmes, Philip and Marsden, Jerrold E.*，**292**，419–448。[22]Sebastien Palcoux. 涉及 $\sqrt{2}$ 与奇偶性的意外行为，2020 https://mathoverflow.net/q/ 353493/51189[23] Pyragas，1996 Pyragas„《通过自控制反馈持续控制混沌》，学术出版社，圣迭戈，，第118–123页。