arXiv:2302.01907v1 [math.GM] 28 Jan 2023

扩展沃森-哈金斯和

罗伯特·雷诺兹

Abstract. 本文将涉及余弦函数与余割函数乘积的沃森-哈金斯求和加以推广，从而推导出广义 Hurwitz-Lerch ζ函数的有限和，并将其表示为 Hurwitz-Lerch ζ函数的形式。对于所涉及参数的各种有限取值，得到一个变换公式。此外，还推导出三角函数的有限乘积。本文的所有结果均为新结果。

1. 引言

Watson [1] 关于原子结构理论的研究涉及余割函数的有限和，并将其用于计算系统的角速度。Harkins 等人 [2] 也开展了原子结构方面的研究，其中利用余弦函数与余割函数乘积的有限和来计算 Nicholson 振动周期。鉴于三角函数的有限和用途广泛且十分重要，作者采用他们的方法，推导三角函数广义情形（即 Hurwitz-Lerch ζ函数）的有限和。

在本文中，我们推导出如下有限和：

$$\begin{aligned}(1.1)\quad \sum_{p=0}^{n-1} e^{-\frac{2ij(\pi lp+mn)}{n}} &\left(\Phi\left(e^{\frac{2i(mn+lp\pi)}{n}},-k,-j-\frac{1}{2}i\log(a)\right)\right.\\ &\left.+e^{2i(2j+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m\right)}\Phi\left(e^{\frac{2i(mn+lp\pi)}{n}},-k,j-\frac{1}{2}i\log(a)+1\right)\right)\\ &=(2i)^{-k}n\left(\log^k(a)+2^{k+1}(in)^k e^{2imn}\Phi\left(e^{2imn},-k,1-\frac{i\log(a)}{2n}\right)\right)\end{aligned}$$

其中，变量 k,a,m 是任意复数，且 $j=0,1,\ldots,n-1$;l 与 n 互素。随后，我们利用这一新表达式推导出用三角函数表示的特例。

一些特殊情形的求值用对数伽马函数和 Glaisher 常数 A 表示；该常数出现在 [3] 第 (5.17) 小节 Barnes 的 G 函数中，以及

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 30E20, 33-01, 33-03, 33-04.
Key words and phrases. Hurwitz-Lerch ζ函数、柯西积分、有限乘积。

[**3**]第 (24.2) 小节中的伯努利数。还推导出新的函数恒等式，并将其用于研究素数的分布（见 [**3**], 第 (25.16(i)) 小节）以及欧拉和的求值（见 [**3**]第 (25.16(ii)) 小节）。根据 [**3**], 第 (25.17) 小节，ζ函数出现在理想量子气体（玻色–爱因斯坦和费米–狄拉克两种情形）的配分函数求值中；对于稀薄气体中的玻色–爱因斯坦凝聚相变，它还决定了气体临界温度和密度（Lifshitz 和 Pitaevskiĭ [**4**]）。量子场论常会遇到形式上发散的和，需要通过正则化过程求值；例如，受限空间中的电磁真空能量（卡西米尔–波尔德效应）。研究发现，可以将发散的和等同于ζ函数及其相关函数，从而完成此类正则化（Elizalde [**5**]）。

我们的预备工作从将围道积分法应用于有限和开始。设 a、 k、 m 和 w 为一般复数，且 $n \in \mathbb{Z}^+$ 和 l 是互素数，则 [**7**] 中由方程 (4.4.6.12) 给出的有限和的围道积分形式 [**6**], 为

(1.2)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{p=0}^{n-1} a^w w^{-k-1} \csc\left(\frac{\pi l p}{n}+m+w\right)\cos\left((2j+1)\left(\frac{\pi l p}{n}+m+w\right)\right)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C n a^w w^{-k-1}\cot(n(m+w))dw$$

推导过程沿用我们在 [**6**] 中使用的方法。该方法涉及使用广义柯西积分公式的一种形式，其表达式为

$$\frac{y^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{wy}}{w^{k+1}}dw, \tag{1.3}$$

其中 $y, w \in \mathbb{C}$ ，且 C 通常是复平面中的一条开围道，双线性伴随式 [**6**] 在围道的端点处取值相同。该方法涉及使用方程 (1.3) 的一种形式，然后将等式两边乘以一个函数，再对两边取有限和。由此可得一个以围道积分表示的有限和。接着，我们将方程 (1.3) 两边乘以另一个函数，并对两边取无穷和，使两个方程的围道积分相同。

2. Hurwitz-Lerch ζ函数

我们使用 [**8**] 中的方程 (1.11.3)，其中 $\Phi(z,s,v)$ 是勒奇函数，它是赫尔维茨ζ函数 $\zeta(s,v)$ 和多对数函数 $Li_n(z)$ 的推广。勒奇函数的级数表示为

$$\Phi(z,s,v) = \sum_{n=0}^{\infty}(v+n)^{-s}z^n \tag{2.1}$$

其中 $|z|<1$， $v \neq 0$， -1， -2， -3，.....并通过其积分表示进行解析延拓，积分表示为

$$\Phi(z,s,v)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}e^{-vt}}{1-ze^{-t}}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}e^{-(v-1)t}}{e^t-z}dt \tag{2.2}$$

其中 $Re(v)>0$，且 $|z|\leq 1$，$z\neq 1$，$Re(s)>0$ 或 $z=1$，$Re(s)>1$。

3. 赫尔维茨-勒奇 zeta 函数有限和的围道积分表示

我们使用 [6] 中的方法。割线和围道位于复 w 平面的第一象限内，其中 $0<Re(w+m)$。割线从第一象限内部趋近原点，然后沿垂直方向延伸至无穷远；围道以零半径绕过原点，并位于割线的两侧。利用柯西积分公式 (1.3) 的推广形式，我们首先将 y 替换为 $\log(a)+ix+y$，然后将等式两边乘以 e^{itx}，再将 x 替换为 $-x$，构成第二个方程，并将两个方程相加，得到

$$\frac{e^{-itx}\left(e^{2itx}(\log(a)+ix+y)^k+(\log(a)-ix+y)^k\right)}{\Gamma(k+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C 2a^w w^{-k-1}e^{wy}\cos(x(t+w))dw \tag{3.1}$$

接下来，我们将 y 替换为 $i(2y+1)$，将 t 替换为 $\frac{\pi lp}{n}+m$，将 x 替换为 $2j+1$，再将等式两边乘以 $e^{i(2y+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m\right)}$，分别对 $y\in[0,\infty)$ 和 $p\in[0,n-1]$ 取无穷和与有限和，并用赫尔维茨-勒奇 zeta 函数化简，得到

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\Gamma(k+1)}i^{k+1}2^k\sum_{p=0}^{n-1}e^{-\frac{2ij(\pi lp+mn)}{n}}\left(\Phi\left(e^{\frac{2i(mn+lp\pi)}{n}},-k,-j-\frac{1}{2}i\log(a)\right)\right.\\&\left.+e^{2i(2j+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m\right)}\Phi\left(e^{\frac{2i(mn+lp\pi)}{n}},-k,j-\frac{1}{2}i\log(a)+1\right)\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\int_C 2ia^w w^{-k-1}e^{\frac{i(2y+1)(\pi lp+n(m+w))}{n}}\cos\left((2j+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m+w\right)\right)dw$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=0}^{n-1}\int_C\sum_{y=0}^{\infty}2ia^w w^{-k-1}e^{\frac{i(2y+1)(\pi lp+n(m+w))}{n}}\cos\left((2j+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m+w\right)\right)dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{p=0}^{n-1}a^w w^{-k-1}\csc\left(\frac{\pi lp}{n}+m+w\right)\cos\left((2j+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m+w\right)\right)dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C na^w w^{-k-1}\cot(n(m+w))dw$$

由 [7] 中的方程 (4.4.6.12)，其中 $Im(n(m+w))>0$ 且 $Re(n(m+w))>0$，$j=0,\ldots,n-1$；l 和 n 是互素的素数。我们对多重求和应用托内利定理，

参见 [9] 第 177 页，因为被加数在空间 $\mathbb{C}\times[0,n]$ 上具有有界测度。

4. Hurwitz-Lerch ζ函数的围道积分表示

我们采用 [6] 中的方法。利用方程 (1.3)，我们首先将 log(a)+2in(y+1) 替换为.....，并将等式两边乘以 $-2ine^{2imn(y+1)}$，然后对 $y\in[0,\infty)$ 求无穷和，并用 Hurwitz-Lerch ζ函数表示，化简后得到

$$-\frac{2^{k+1}(in)^{k+1}e^{2imn}\Phi\left(e^{2imn},-k,1-\frac{i\log(a)}{2n}\right)}{\Gamma(k+1)} \tag{4.1}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{y=0}^{\infty}\int_C 2ina^w w^{-k-1}e^{2in(y+1)(m+w)}dw$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{y=0}^{\infty}2ina^w w^{-k-1}e^{2in(y+1)(m+w)}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C na^w w^{-k-1}\cot(n(m+w))+ina^w w^{-k-1}dw$$

根据 [10] 中的方程 (1.232.1)，其中 $Im(n(m+w))>0$，以确保该和收敛。

4.1. 附加围道。我们采用 [6] 中的方法。利用方程 (1.3)，我们将 y 替换为 log(a)，并将等式两边乘以 ni，化简后得到

$$\frac{in\log^k(a)}{\Gamma(k+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C ina^w w^{-k-1}dw \tag{4.2}$$

5. 用 Hurwitz-Lerch ζ函数表示的 Hurwitz-Lerch ζ函数有限和

THEOREM 5.1. 对于所有 $k,a,m\in\mathbb{C}$, l 都是素数的情况， $j<n-1$ 那么，

$$\sum_{p=0}^{n-1}e^{-\frac{2ij(\pi lp+mn)}{n}}\left(\Phi\left(e^{\frac{2i(mn+lp\pi)}{n}},-k,-j-\frac{1}{2}i\log(a)\right)\right. \tag{5.1}$$
$$\left.+e^{2i(2j+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m\right)}\Phi\left(e^{\frac{2i(mn+lp\pi)}{n}},-k,j-\frac{1}{2}i\log(a)+1\right)\right)$$

$$=(2i)^{-k}n\left(\log^k(a)+2^{k+1}(in)^k e^{2imn}\Phi\left(e^{2imn},-k,1-\frac{i\log(a)}{2n}\right)\right)$$

PROOF. 关系式 (3.2) 的右端与关系式 (4.2) 和 (4.1) 相加后的结果相同，因此它们的左端也相同。利用伽马函数化简后，即得所需结论。□

Example 5.2. 退化情形。

$$\sum_{p=0}^{n-1} \csc\left(\frac{\pi lp}{n}+m\right)\left(-\cos\left((2j+1)\left(\frac{\pi lp}{n}+m\right)\right)\right) = -n\cot(mn) \tag{5.2}$$

Proof. 使用方程（5.1），令 $k=0$，并利用 [**11**] 中下方表（64:12:7）的条目（2）进行化简。□

6. 三角乘积递推恒等式和变换公式

有限三角乘积在数学的许多领域都十分重要，其用途和性质详见 [**12**] 第 201 页。本小节将针对不同的参数值计算方程（5.1），并推导新的有限三角乘积。

Example 6.1. 涉及三角函数指数的有限乘积

$$\begin{aligned}\prod_{p=0}^{n-1} &\sin^3\left(\frac{\pi p}{n}+\frac{x}{2}\right)\csc^2\left(\frac{\pi p}{n}+\frac{x}{4}\right)\csc\left(\frac{\pi p}{n}+x\right)\\ &\exp\left(4\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\left(2\cos\left(\frac{2\pi p}{n}+x\right)+\cos\left(\frac{2\pi p}{n}+\frac{3x}{2}\right)\right)\right)\\ &= 2\cos^2\left(\frac{nx}{4}\right)\sec\left(\frac{nx}{2}\right)\end{aligned} \tag{6.1}$$

Proof. 使用方程（5.1），令 $k=1,\ a=1,\ m=x,\ l=1,\ j=1$，并利用 [**13**] 中第（8.1）节的方法进行化简。□

Example 6.2. 涉及三角函数指数的有限乘积

$$\begin{aligned}\prod_{p=0}^{n-1} &\left(\sin\left(\frac{\pi p}{n}+\frac{x}{2}\right)\csc\left(\frac{\pi p}{n}+x\right)\right)^{i\pi}\\ &\exp\left(\cot\left(\frac{\pi p}{n}+\frac{x}{2}\right)-\cot\left(\frac{\pi p}{n}+x\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right.\\ &\left.\left(2\cos\left(\frac{2\pi p}{n}+\frac{3x}{2}\right)+i\pi\sin\left(\frac{2\pi p}{n}+\frac{3x}{2}\right)\right)\right)\\ &= 2^{-i\pi}\sec^{i\pi}\left(\frac{nx}{2}\right)\left(\sinh(n\csc(nx))+\cosh(n\csc(nx))\right)\end{aligned} \tag{6.2}$$

Proof. 使用方程 (5.1)，并令 $k=1, a=-1, m=x, l=1, j=1$，然后使用 [**13**] 中小节 (8.1) 的方法进行化简。□

Example 6.3. 涉及三角函数指数的有限乘积

$$\prod_{p=0}^{n-1} \sin^3\left(\frac{\pi p}{n}+\frac{x}{2}\right)\csc^2\left(\frac{\pi p}{n}+\frac{x}{4}\right)\csc\left(\frac{\pi p}{n}+x\right) \tag{6.3}$$

$$\exp\left(-4\sin\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi p}{n}+\frac{3x}{4}\right)-\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3x}{4}\right)\right.$$
$$\sin\left(\frac{6\pi p}{n}+\frac{9x}{4}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{4\pi p}{n}+3x\right)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$$
$$\left.\sin\left(\frac{6\pi p}{n}+\frac{9x}{2}\right)-4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi p}{n}\right)\cos\left(\frac{3\pi p}{n}+\frac{3x}{2}\right)\right)$$

$$=\sec\left(\frac{nx}{2}\right)+1$$

Proof. 使用方程 (5.1)，并令 $k=1,\ a=1,\ m=x,\ l=1,\ j=3$，然后使用 [**13**] 中小节 (8.1) 的方法进行化简。□

Example 6.4. 涉及三角函数指数的有限乘积

$$\prod_{p=0}^{n-1}\sin^{14}\left(\frac{2\pi p}{n}+\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi p}{n}+x\right)\csc^{8}\left(\frac{2\pi p}{n}+\frac{x}{8}\right)\csc^{7}\left(\frac{2\pi p}{n}+\frac{x}{2}\right)$$
$$\exp\left(-8\cos\left(\frac{4\pi p}{n}+\frac{x}{4}\right)+14\cos\left(\frac{4\pi p}{n}+\frac{x}{2}\right)-7\cos\left(\frac{4\pi p}{n}+x\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{4\pi p}{n}+2x\right)\right)$$

$$=8\cos^{8}\left(\frac{nx}{8}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sec^{6}\left(\frac{nx}{4}\right)\tag{6.4}$$

Proof. 使用方程 (5.1)，并令 $k=2,\ a=1,\ m=x,\ l=2,\ j=1$，然后使用 [**13**] 中小节 (8.1) 的方法化简。□

Example 6.5. 含相邻项的递推恒等式。

$$\Phi(z,s,a)=z^{j}\left(z^{j+1}(-\Phi(z,s,a+2j+1))+2z\Phi(z,s,a+j+1)+i^{s}(i(a+j))^{-s}\right)\tag{6.5}$$

Proof. 使用方程 (5.1)，并令 $n=1,\ m=\log(z)/i,\ k=-s,\ a=e^{ai},\ j=0$，然后令 $a\to 2(a-1)z\to\sqrt{z}$ 并化简。□

Example 6.6. 含相邻项的递推恒等式。

$$\Phi(z,s,a)=z\Phi(z,s,a+1)+a^{-s}\tag{6.6}$$

Proof. 使用方程 (5.1)，令 $n=1,m=\log(z)/i,k=-s,a=e^{ai},j=0$并化简。这是 [**14**]中的方程 (10.06.17.0002.01)。□

Example 6.7. 关于 Glaisher 常数 A 的相邻项递推恒等式。

$$-\Phi'(-i,-1,0)-\Phi'(i,-1,0)-\mathrm{Li}'_{-1}(-i)-\mathrm{Li}'_{-1}(i)=\log\left(\frac{A^{24}}{16\ 2^{2/3}e^{2}}\right)\tag{6.7}$$

Proof. 使用方程 (5.1)，并令 $n=2,a=1,j=0,m=\pi/4,l=3$，然后化简。接着对 k 求一阶偏导数，并令 $k=1$，然后化简。□

Example 6.8. 赫尔维茨-勒奇 ζ 函数的指数的商正切函数有限乘积。绘制了一个特殊情形下右侧的图形。

$$\prod_{p=0}^{n-1}\left(i\cot\left(\frac{\pi lp+mn}{2n}\right)\right)^{2e^{-\frac{i(\pi lp+mn)}{n}}}\left(-i\tan\left(\frac{\pi lp+nr}{2n}\right)\right)^{2e^{-\frac{i(\pi lp+nr)}{n}}} = \exp\left(2e^{2imn}\Phi\left(e^{2imn},1,1+\frac{1}{2n}\right)-2e^{2inr}\Phi\left(e^{2inr},1,1+\frac{1}{2n}\right)\right) \tag{6.8}$$

Proof. 使用方程 (5.1)，并通过替换 $m \to r$构造第二个方程，然后取两式之差。接着令 $k=-1$，$a=e^i$，$j=-1$，并根据 [11] 中下方的表 (64:12:7) 的第 (3) 项，用反正切函数化简。然后对两边取指数并化简。□

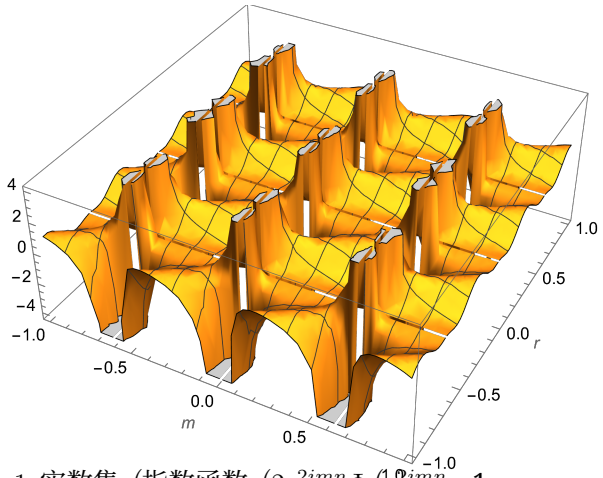

Figure 1. 实数集 $\left(\text{指数函数}\ \left(2e^{2imn}\Phi\left(e^{2imn},\ 1,\ 1+\frac{1}{2n}\right)-2e^{2inr}\Phi\left(e^{2inr},\ 1,\ 1+\frac{1}{2n}\right)\right)\text{其中}\ m,\ r\in\mathbb{R}\ \text{且}\ n=5\right.$

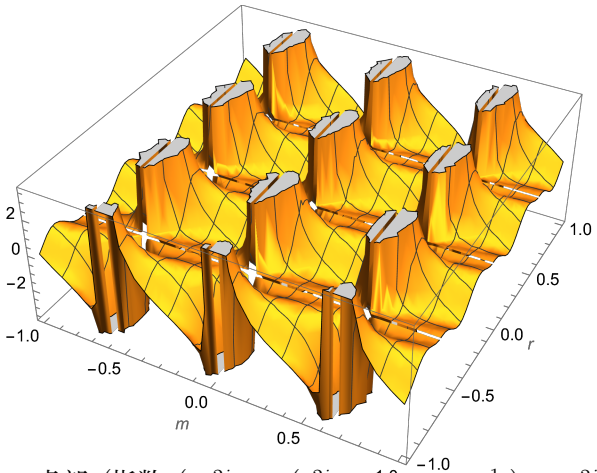

FIGURE 2. 虚部 (指数 $\left(2e^{2imn}\Phi\left(e^{2imn},\ 1,\ 1+\frac{1}{2n}\right)-2e^{2inr}\Phi\left(e^{2inr},\ 1,\ 1+\frac{1}{2n}\right)\right)$)。其中 $m,\ r\in\mathbb{R}$ 且 $n=5$

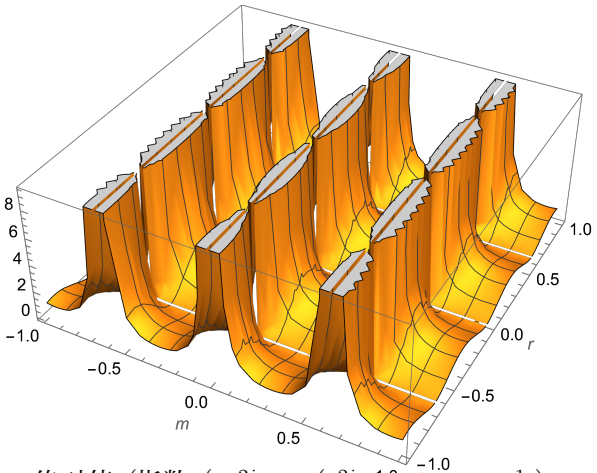

FIGURE 3. 绝对值 (指数 $\left(2e^{2imn}\Phi\left(e^{2imn},\ 1,\ 1+\frac{1}{2n}\right)-2e^{2inr}\Phi\left(e^{2inr},\ 1,\ 1+\frac{1}{2n}\right)\right)$)。其中 $m,\ r\in\mathbb{R}$ 且 $n=5$

EXAMPLE 6.9. 三角函数商的复数幂

$$\prod_{p=0}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{lp\pi}{n}+\frac{x}{b}\right)}{\sin\left(\frac{lp\pi}{n}+x\right)}\left(\frac{\cos\left(\frac{lp\pi}{n}+\frac{x}{b}\right)\tan\left(\frac{lp\pi}{n}+\frac{x}{b}\right)}{\cos\left(\frac{lp\pi}{n}+\frac{x}{b^2}\right)\tan\left(\frac{lp\pi}{n}+\frac{x}{b^2}\right)}\right)^b = \frac{\sin\left(\frac{nx}{b}\right)}{\sin(nx)}\left(\frac{\cos\left(\frac{nx}{b}\right)\tan\left(\frac{nx}{b}\right)}{\cos\left(\frac{nx}{b^2}\right)\tan\left(\frac{nx}{b^2}\right)}\right)^b \tag{6.9}$$

PROOF. 使用方程 (5.1)，令 $k=1,\ a=1,\ m=x,\ j=-1$，并使用 [**13**] 中第 (8.1) 小节的方法进行化简。□

EXAMPLE 6.10. Lerch 函数与相邻项的递推恒等式

(6.10)
$$\begin{aligned} e^{i\pi jl}\left(\Phi(z,s,a-j)+z^{2j+1}\left(\Phi(z,s,a+j+1)+e^{i\pi(j+1)l}\Phi\left(e^{il\pi}z,s,a+j+1\right)\right)\right) \\ +\Phi\left(e^{il\pi}z,s,a-j\right) \\ =2e^{i\pi jl}z^j\left(2^{1-s}z^2\Phi\left(z^2,s,\frac{a}{2}+1\right)+e^{\frac{i\pi s}{2}}(ia)^{-s}\right) \end{aligned}$$

PROOF. 使用方程 (5.1)，并令 $n=2,\ m=\log(z)/(2i)\ k=-s,\ a=e^{ai}$，然后化简。□

EXAMPLE 6.11. Lerch 函数递推恒等式的特殊情形

$$\Phi'(-i,0,a)+\Phi'(i,0,a)=2\log\left(\frac{2\Gamma\left(\frac{a}{4}\right)}{(a-2)\Gamma\left(\frac{a-2}{4}\right)}\right) \tag{6.11}$$

PROOF. 使用方程 (6.10)，令 $a=2a,\ l=1,\ z=i,\ j=-1$，并使用其中的方程 (25.14.2) 进行化简。接着，对 s 求一阶偏导数，令 $s=0$，并使用 [**3**] 中的方程 (25.11.18) 进行化简。□

EXAMPLE 6.12. Lerch 函数递推恒等式的特殊情形

$$\Phi'(-i,0,a)-\Phi'(i,0,a)=i\log\left(\frac{4\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)^2}\right) \tag{6.12}$$

PROOF. 使用方程 (6.10)，并令 $a=2a, l=1, z=i, j=1$，再利用 [**3**] 中的方程 (25.14.2) 化简。接着对 s 求一阶偏导数，并令 $s=0$，再利用 [**3**] 中的方程 (25.11.18) 化简。□

EXAMPLE 6.13. Lerch 函数递推恒等式的特殊情形

$$\Phi'(-i,0,a)^2-\Phi'(i,0,a)^2=2i\log\left(\frac{\Gamma\left(\frac{a}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a+2}{4}\right)}\right)\log\left(\frac{4\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)^2}\right) \tag{6.13}$$

PROOF. 使用方程 (6.11) 和 (6.12)，并将两式相乘，即得所引结果。

□

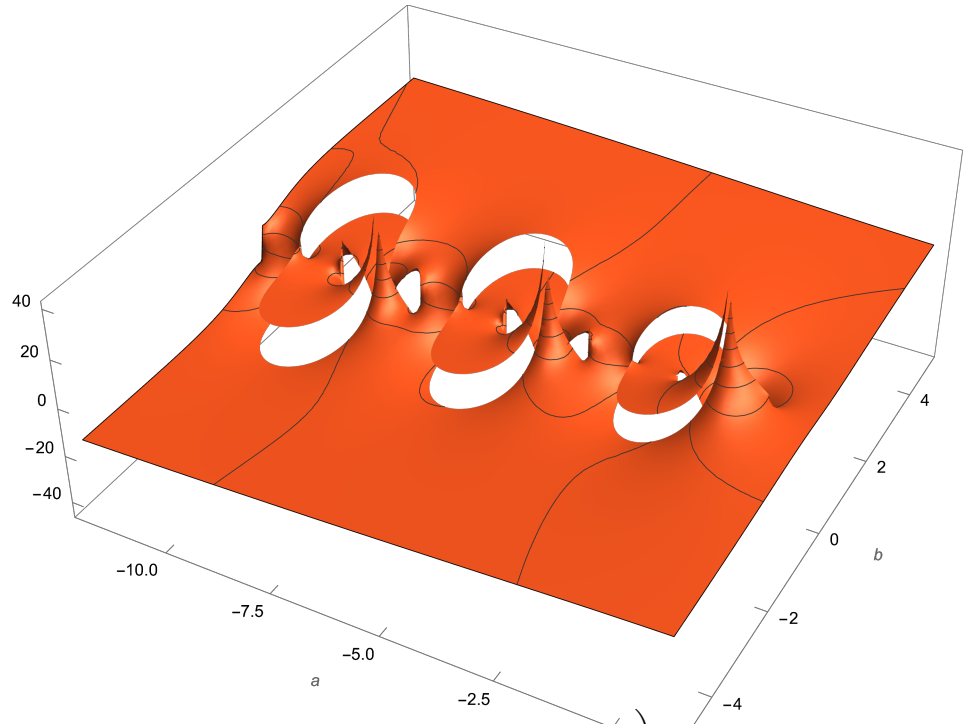

FIGURE 4. $\mathrm{Re}\left(2i\log\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}(a+ib)\right)\left(\frac{1}{4}(a+ib+2)\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}(a+ib+3\right)^2\left(\right)\left(\left(\right)\right)^2}\right)\right)$ 其中 $a, b \in \mathbb{R}$

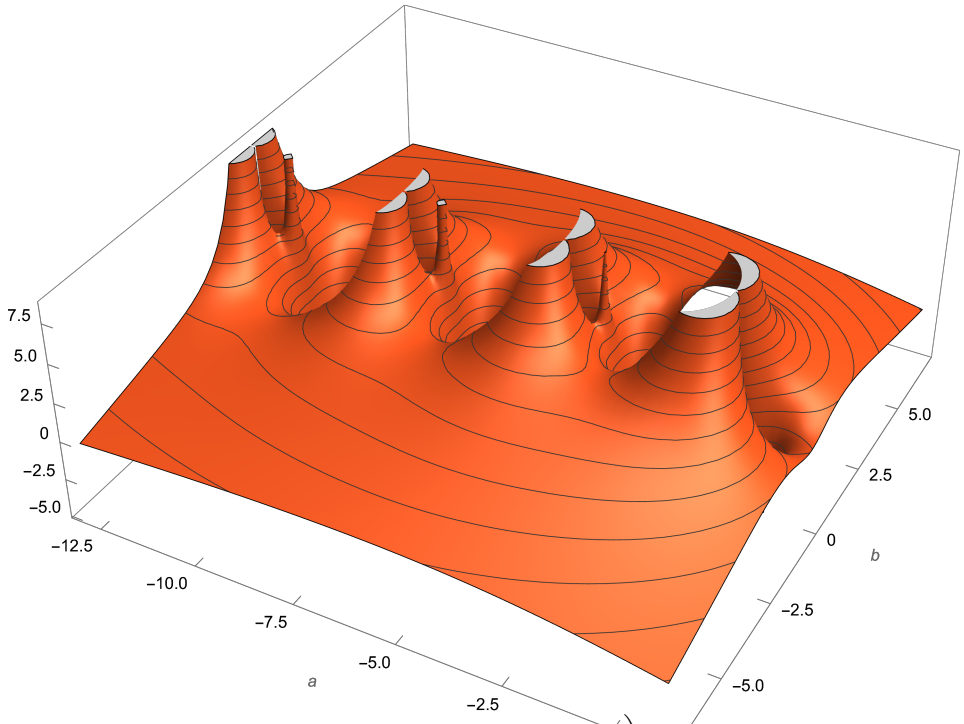

FIGURE 5. 虚部 $\left(2i \text{对数} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}(a+ib)\right)\left(\frac{1}{4}(a+ib+2)\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}(a+ib+3)\right)^2(0)}\right)\right)$ 对数 $\left(\frac{4\Gamma\left(\frac{1}{4}(a+ib+1)\right)^2}{\Gamma(a+ib)}\right)$ 其中 $a, b \in \mathbb{R}$

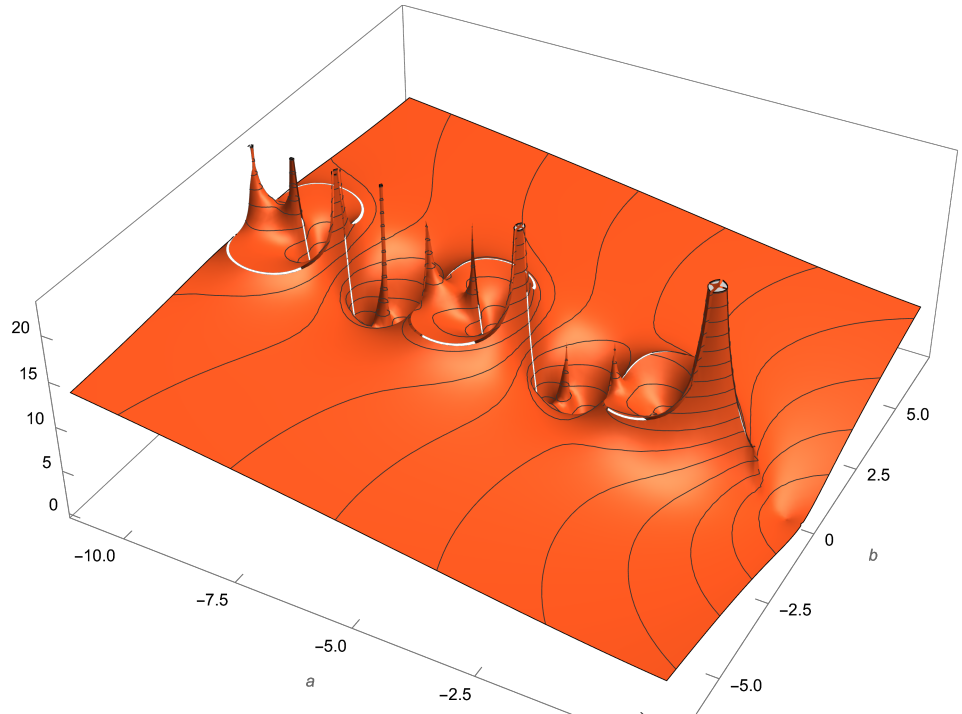

FIGURE 6. 绝对值 $\left(2i\,\text{对数}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}(a+ib)\right)\left(\frac{1}{4}(a+ib+2)\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}(a+ib+3)\right)^2(0)}\right)\right)$ 对数 $\left(\frac{4\Gamma(}{}\right)$ 其中 $a, b \in \mathbb{R}$

7. 结论

本文介绍了一种方法，可通过围道积分推导 Hurwitz-Lerch ζ函数的有限和，以及一些有趣的三角函数有限乘积。未来工作中，我们将把这种方法应用于其他三角公式，以推导 Hurwitz-Lerch 函数的其他有限和。文中结果已使用 Wolfram 的 Mathematica 对积分中参数的实数、虚数和复数取值进行了数值验证。

参考文献

[1]G.N. Watson M.A.（1916）XVI. 余割级数之和，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学杂志》，31:182, 111-118，DOI：10 1080 14786440208635481 。/ Harkins WD，Wilson ED。

[2] *Recent work on the structure of the atom*。（原子结构第三篇论文。）《美国化学会志》。37: 1396-1421。DOI：10 1021 02171 003 。/Ja A Olver，F.W.J.；Lozier, D.W.；Boisvert, R.F.；Clark, C.W.（编）*Mathematical Functions* [3] *NIST Digital Library of* ；美国商务部，美国国家标准与技术研究院：美国华盛顿特区；剑桥大学出版社：英国剑桥，2010；附1张CD-ROM（Windows、Macintosh和UNIX）。MR 2723248 (2012a:33001)。

[4] E. M. Lifshitz 和 L. P. Pitaevski
ˇ 1980 *Statistical Physics Part 2: Theory of the Con-* ı（），。培格曼出版社，*densed State*
牛津。[5] E. Elizalde（1995） *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*。《物理学讲义》。新系列m：专著，第35卷，施普林格出版社，柏林。[6]Reynolds, R.；Stauffer, A. 用特殊函数表示定积分的求值方法及示例。*Int. Math. Forum* **2020**, *15*, 235–244, doi: 10 12988 2020 91272 。/imf. . A. P. Prudnikov、[7]
Yu. A. Brychkov 和 O. I. Marichev（
1986 *Integrals and Series: Ele-* a），第 卷。Gordon & *mentary Functions* 1
Breach 科学出版社，纽约。[8] Erd
´ *Higher Transcendental Func-* eyli、W. Magnus、F. *tions*
Oberhettinger、F.G. Tricomi；麦格劳-希尔图书公司：美国纽约州纽约；加拿大安大略省多伦多；英国伦敦，1953；第一卷。[9] Gelca, Rˇazvan., Andreescu, Titu。 *Putnam and Beyond*。德国：施普林格国际出版公司，2017。[10] Gradshteyn, I.S.；Ryzhik, I.M. *Tables of Integrals, Series and Products*，第6版；学术出版社：美国马萨诸塞州剑桥，2000。[11] Oldham, K.B.；Myland, J.C.；Spanier, J.
An Atlas of Functions: With Equator the Atlas , ，第版；施普林格：*Function Calculator* 2 2009
美国纽约州纽约，。[12] G.E. Bergum、Andreas N. Philippou、Alwyn F. Horadam。，
Applications of Fibonacci Num-
bers: Volume 6 Proceedings of 'The Sixth International Research Conference on Fibonacci
Numbers and Their Applications，华盛顿州立大学，美国华盛顿州普尔曼，1994年7月18日至22日。荷兰：施普林格荷兰，2012。[13] Reynolds, R., & Stauffer, A.（
2022 *A Note on the Infinite Sum of the Lerch* ）。。《欧洲纯粹与应*function* 15 1 158 168
用数学杂志》，（），–。https://doi.org/ 10 29020 15 1 4137 。/nybg.ejpam.v i。[14]
Weisstein, Eric W. "Lerch 超越函数。" 摘自数学世界—Wolfram 网络资源。
https://mathworld.wolfram.com/LerchTranscendent.html http://functions.wolfram.com/10.06.17.0002.01

(罗伯特·雷诺兹) Department of Mathematics and Statistics, York University, Toronto,ON, Canada, M3J1P3*Email address*,通讯作者： milver@my.yorku.ca