arXiv:2302.01909v1 [math.CO] 3 Feb 2023

社会偏好函数的对称群

Daniela Bubboloni*
佛罗伦萨大学 U. Dini 数学与计算机科学系，
Morgagni 大道 67/a，50134 佛罗伦萨，意大利，
电子邮箱：daniela.bubboloni@unifi.it
https://orcid.org/0000-0002-1639-9525

Francesco Nardi
电子邮箱：fardifran@gmail.com

2023年2月6日

摘要

我们介绍社会偏好函数的匿名群、中立群和对称群。受 Kelly 于 1991年 提出的一个至今尚未解决的问题启发，我们研究哪些置换群可以作为社会偏好函数的匿名群、中立群和对称群出现。我们完整描述了中立群，并为匿名群找到了一个充分条件，该条件在很大程度上涵盖了这一问题。利用群 U的轨道扩张概念，我们构造了作为 U 匿名群或对称群所需满足的易处理的必要条件。我们的研究与布尔函数可表示性问题有着深刻的交互，并为这些问题提供了新的认识。

关键词：社会选择理论；群论；布尔函数。

MSC 分类：91B14、20B05、06E30。

1 引言

社会选择理论的主要对象，是描述如何将个体偏好聚合为集体选择。个体偏好由定义在 N $n \geq 2$ 备选项集合上的关系表示，通常要求这些关系为序，即满足自反性、传递性和完全性。很多时候还进一步要求它们具有反对称性，即为线性序。个体偏好的有序列表称为偏好剖面。集体选择可以有多种不同形式： N上的关系集合、 N上的线性序集合、某个 $k \geq 1$的k集合。聚合由某个程序 F 给出，该程序是一个从偏好剖面集合 $\mathcal{P}$ 到所需集体选择集合的函数。对于集体选择的所有可能实例， F 具有确定性，即其输出为单元素集合，被视为一项重要性质。例如，社会选择函数（SCF）定义为一种程序，其中个体偏好为线性序，集体选择为单个备选项；社会偏好函数（SPF）定义为一种程序，其中个体偏好为线性序，集体选择为单个线性序。

许多性质都可用来刻画聚合程序。匿名性、中立性、效率、孔多塞一致性和策略无关性只是其中几个可能的例子。在这些性质中，

*由意大利 INdAM 的 GNSAGA 项目资助。

有两项基本要求几乎难以舍弃，那就是匿名性和中立性。匿名性表示个体的姓名无关紧要，不会影响集体选择；中立性表示备选项的名称无关紧要，不会影响集体选择。遗憾的是，确定性聚合程序通常无法同时保证匿名性和中立性。

设 $h \geq 2$ 为个体的数量。Moulin 的一个著名定理（[15, 定理1，第25]页）证明，存在一个匿名、中立且有效率的 SCF 当且仅当

$$\gcd(h, n!) = 1, \tag{1}$$

一个要求极高的算术条件成立。回顾一下，若一个 SCF 对于每个偏好剖面都不会选择被另一个备选项一致击败的备选项，就称其有效率。如果不要求效率，那么存在匿名且中立的 SCF ，等价于要求备选项的数量 n 不能写成 h 的非平凡因数之和（[15, 问题1，第25]页）；这是一个要求稍低的算术条件。

毫无疑问，(1) 似乎是描述聚合程序的匿名性和中立性时一项至关重要且普遍适用的条件。例如，作为与我们研究相关的另一个例子，Bubboloni 和 Gori 在 [1, 定理 5] 中证明，存在匿名且中立的 SPF 当且仅当 (1) 成立。对 (1) 的一种可能解释，无疑是 [1] 和 [2], 提出的匿名性与中立性的群论解释；他们在其中引入并研究了正则群这一基本概念。

显然，即使 h 与 n 之间的算术关系允许设计出至少一个满足匿名性和中立性的聚合程序，也可能出现这样的情况：某个由于某种原因而被认为适合特定决策过程的聚合程序，却不满足匿名性和中立性。例如，请回想一下，当我们通过将主席一职交给参与决策过程的某一个个体来破除平票时，我们必然会破坏匿名性。同样地，如果我们通过破同分议程来破除平票，即采用一个外生给定的备选项排序，那么我们必然会破坏中立性。换言之，通常而言，具有确定性的聚合程序只满足匿名性和中立性的弱形式。

这些考虑自然引出了我们希望探讨的两个问题：

(a) 给定某种类型的聚合程序 F，我们如何定义一个能够完整描述其匿名性和中立性程度的数学对象？(b) 给定特定程度的匿名性和中立性，何时可以设计出一个具有这种匿名性和中立性程度的某种类型的聚合程序 F？

上述问题在社会选择文献中当然并非新鲜事。我们的主要参考来源和灵感来自 Kelly 在 [9] 中提出的开放问题；这些问题涉及这样一类聚合程序：个体偏好是序（不一定是线性序），而集体选择是在 N 的某个子集中选取一组备选项。他在这一类程序中考察了个体偏好为线性序的子族，并特别讨论了确定性情形。此外，对于 (a)，Kelly 分别定义了匿名群和中立群，并指出问题 (b) 似乎很难处理。即使考虑一些合适的子族，例如 SCFs，这一困难依然存在。(b) 中提出的问题既有趣又棘手，这一点也从 [10], 的内容中得到印证：Kelly 仅对匿名性和中立性的程度由阿贝尔群表示的情形给出了一些部分解答。然而，似乎仍缺少一个能够处理整个问题的一般框架。

本文旨在提出这样一个框架，并回答关于SPFs的议题（a）和（b）。这是一个更为宏大且雄心勃勃的项目的一部分；在后续论文中，该项目将探讨 SCFs以及其他集体选择族。Bubboloni 和

Gori（[1],[2],[3]）在此充分展现了这些代数工具的力量，并为研究提供了主要工具，使一般框架得以构建。

在社会选择理论中处理这一问题时，我们立即意识到， SPFS 的匿名性问题与布尔函数可表示性之间存在一个主要且出人意料的联系；布尔函数可表示性历史悠久（例如，参见 [5],[11],[12],[13],[7],[8],[14]），并且是研究形式语言并行复杂性时出现的课题。当然，我们的方法和结果会对经典的可表示性问题产生影响，本文也在多个方面作出了贡献。特别是，我们提出了一个关于 2-可表示性的原创必要条件（推论 53 ）。

本文结构如下。第 2 节介绍基本记号，并回顾 Bubboloni 和 Gori 的基本定理（[1],[2],[3]）。第 4 节从（a）的角度出发，引入社会偏好函数的匿名群、中立群和对称群，并探讨它们的基本性质。随后，我们从（b）的角度定义匿名群、中立群和对称群的概念，并提出相应的匿名性问题、中立性问题和对称性问题。第 5 节和第 6 节探讨对称群与正则性概念之间的联系，并证明每个匿名群也是一个对称群。第 7 节彻底解决中立性问题，证明备选项上的每个置换群都可以作为某个社会偏好函数的中立群（定理 30）。第 8 节探讨更难的匿名性问题，并在 $h \leq n$ 的情形下给出完整答案！（推论41）由此确定了在备选项数量可变时会出现的匿名群。第 9 节讨论一个关键例子：某个中立群并非对称群。第 10 节阐明 SPFS 的匿名性问题与布尔函数可表示性之间的联系。最后，第 11 节通过引入轨道扩张的概念，给出对称性和匿名性的一个必要条件（定理 52）。

2 初步定义与结果

给定 $k \in \mathbb{N}$，且 $r \in \mathbb{N}$ 是素数，我们将 k 的所谓 r-部分记作 k_r，即整除 k 的最大 r 次幂。我们还定义 $[k] := \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq k\}$ 和 $[k]_0 := \{y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid y \leq k\}$.

本文专门研究这样的有限群：它们是两个对称群直积的子群，其中第一个对称群作用于个体名称的置换，第二个对称群作用于备选项名称的置换。给定一个非空有限集 X，我们将 X 上的对称群记作 S_X。若 $\sigma_1, \sigma_2 \in S_X$，置换 $\sigma_1\sigma_2$ 满足 $\sigma_1\sigma_2(x) = \sigma_1(\sigma_2(x))$，对所有 $x \in X$. 均成立。此外， σ_1 关于 σ_2 的共轭为 $\sigma_1^{\sigma_2} := \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}$。若对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $X = [k]$，则我们采用更简洁的记号 S_k.。令 $\sigma \in S_k$。$j \in [k]$ 在 $\langle\sigma\rangle$ 作用下的轨道记作 $j^{\langle\sigma\rangle}$。σ 的轨道，即集合 $\{j^{\langle\sigma\rangle} : j \in [k]\}$，构成 $[k]$ 的一个划分，因此它们的大小 $x_1, \ldots, x_r$ 之和为 k.。我们称 σ 的类型为无序列表 $T_\sigma := [x_1, \ldots, x_r]$。我们还定义 $\gcd(T_\sigma) := \gcd\{x_1, \ldots, x_r\}$，以及 $\mathrm{lcm}(T_\sigma) := \mathrm{lcm}\{x_1, \ldots, x_r\}$.。注意， T_σ 中等于 1 的项数等于 σ. 的不动点数。回顾一下，两个置换共轭当且仅当它们具有相同的类型，并且 $o(\sigma) = \mathrm{lcm}(T_\sigma)$。

若 $\mathcal{A}$ 是群 G 的子群集合，我们称 $\mathcal{A}$ 对子群封闭，若 $W \in \mathcal{A}$ 和 $U \leq W$ 蕴含 $U \in \mathcal{A}$；称其共轭封闭，若 $W \in \mathcal{A}$ 和 $y \in G$ 蕴含 $W^y \in \mathcal{A}$.

2.1 群 G 对偏好剖面的作用

设 $H := [h]$ 且 $h \geq 2$ 为个体名称集合， $N := [n]$ 且 $n \geq 2$ 为备选项名称集合。我们称有序对 (h, n) 为投票对。全文中，我们用 G 表示群 $G := S_h \times S_n$。

函数 $\pi_1 : G \to S_h$ 和 $\pi_2 : G \to S_n$ 分别由 $\pi_1(\varphi, \psi) = \varphi$ 和$\pi_2(\varphi, \psi) = \psi$ 对所有 $(\varphi, \psi) \in G$定义，它们是群同态，分别称为第一投影和第二

分量。令 $g \in G$。那么我们有 $g = (\pi_1(g)\ \pi_2(g))$。我们设 $\varphi_g := \pi_1(g)$ 和$\psi_g := \pi_2(g)$，以便更简洁地写作 $g = (\varphi_g, \psi_g)$。

令 $U \leq G$。那么我们有 $\pi_1(U) \leq S_h$、 $\pi_2(U) \leq S_n$，以及 $U \leq \pi_1(U) \times \pi_2(U)$，且包含关系通常是严格的。在 G 的子群中，我们关注 $\mathcal{D}_G : = \{V \times W \leq G \mid V \leq S_h$ 以及 $W \leq S_n\}$.。注意， $U \in \mathcal{D}_G$ 当且仅当 $U = \pi_1(U) \times \pi_2(U)$。

令 $\mathcal{L}(N)$ 表示 N 上线性序的集合。正如第 2.2], 节中详细解释的那样， $\mathcal{L}(N)$ 与 S_n 之间存在自然的对应关系，我们对此有着广泛的依赖。例如，线性序 $3 > 2 > 4 > 1$ 对应于满足 $\sigma(1) = 3$、 $\sigma(2) = 2$、 $\sigma(3) = 4$、 $\sigma(4) = 1$ 的 $\sigma \in S_4$ ，也就是 $\sigma =(134)$。

接下来，我们假设每个个体 $i \in H$ 都通过某个 $p_i \in S_n$ 表达其偏好。相应的偏好剖面为 $p = (p_i)_{i=1}^h \in \mathcal{L}(N)^h = (S_n)^h$。我们用 $\mathcal{P}_h(n) := \mathcal{L}(N)^h$ 表示偏好剖面的集合；如果无需强调其对 (h, n) 的依赖，则更简单地记为 $\mathcal{P}$。

若存在 $\sigma \in S_n$ ，使得对每个 $i \in H$， $p_i = \sigma$，则称偏好剖面 $p \in \mathcal{P}$ 为常值偏好剖面。我们用 p_σ 表示这样的 p 。由常值偏好剖面构成的 $\mathcal{P}$ 子集记为 $\mathcal{K}$.

对于每个 $(\varphi, \psi) \in G$ 和 $p \in \mathcal{P}$，我们用 $p^{(\varphi,\psi)} \in \mathcal{P}$ 表示满足以下条件的偏好剖面：对每个 $i \in H$，

$$\left(p^{(\varphi,\psi)}\right)_i := \psi p_{\varphi^{-1}(i)}.$$

值得注意的是，在 [2], 中引入的定义，确定了群 G 在.....上的一个作用 $\mathcal{P}$.

命题 1. [2, 命题 2] 设 $U \leq G$ 和 $p \in \mathcal{P}$。

(i) 对每个 (φ_1, ψ_1)、$(\varphi_2, \psi_2) \in U$，均有

$$p^{(\varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2)} = \left(p^{(\varphi_2,\psi_2)}\right)^{(\varphi_1,\psi_1)}. \tag{2}$$

(ii) 函数 f: $U \to S_{\mathcal{P}}$ 定义为：对每个 $(\varphi, \psi) \in U$，

$$f(\varphi, \psi) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \qquad p \mapsto p^{(\varphi,\psi)}$$

是群 U 在集合 $\mathcal{P}$. 上的作用

因此，我们可以使用与作用相关的典型对象。首先，对于 $U \leq G$，我们考虑由 p^U: $= \{p^g \in \mathcal{P}$: $g \in U\}$ 给出的 $p \in \mathcal{P}$ 的 U-轨道。 $\mathcal{P}^U = \{p^U$: $p \in \mathcal{P}\}$ 的 U-轨道集合是 $\mathcal{P}$ 的一个划分。我们用 $R(U)$ 表示 $\mathcal{P}^U$ 的大小。若只涉及一个子群 U ，我们就简单地写作 R ，而不写 $R(U)$。任何满足 $\mathcal{P}^U = \{p^{j\,U}$: $j \in [R]\}$ 的有序列表 $(p^j)_{j=1}^R \in \mathcal{P}^R$ 都称为 U-轨道的一个代表系。我们用 $\mathfrak{S}(U)$ 表示 U-轨道的代表系集合。对于 $p \in \mathcal{P}$， p 在 U 中的稳定子群是 U 的子群，定义为 $\mathrm{Stab}_U(p) := \{g \in U : p^g = p\}$. 。众所周知， p^U 的大小等于 $\mathrm{Stab}_U(p)$ 在 U. 中的指数。

2.2 U-对称 SPFs

定义在 n 个备选项和 h 个个体上的社会偏好函数 SPF ，是一个从 $\mathcal{P} = \mathcal{L}(N)^h$ 到 $\mathcal{L}(N) = S_n$ 的函数。我们用 $\mathcal{F}_h(n)$ 表示投票对 (h, n) 的 SPFs 集合。若无需强调其对 (h, n) 的依赖，我们用记号 $\mathcal{F}$ 代替 $\mathcal{F}_h(n)$。

我们为不熟悉这一主题的读者举一个简单的例子。

例2。假设只有 $n = 2$ 个备选项，因此 $N = \{1, 2\}$，且有 h 个体。那么，个体可能持有的偏好只有两种： $1 > 2$ 和 $2 > 1$。就

对称群 S_2而言，这些偏好当然是 id 和 (12)。对于偏好剖面 $p \in (S_2)^h$，令 $c_p(1,2) := |\{i \in [h] : p_i = id\}|$ 表示持有偏好 $1 > 2$ 的个体数量。我们将打破平票的多数 SPF 定义为函数 $M : (S_2)^h \to S_2$，对于每个 $p \in (S_2)^h$，定义为

$$M(p) = \begin{cases} (12) & \text{if} \quad c_p(1,2) < h/2 \\ id & \text{if} \quad c_p(1,2) \geq h/2. \end{cases}$$

注意，当 h 为偶数且恰有 $h/2$ 个体表达偏好 $1 > 2$、$h/2$ 个体表达偏好 $2 > 1$时，M 选择 $1 > 2$.

定义 3. 令 $F \in \mathcal{F}$。给定 G的一个子群 U，如果对于每个 $p \in \mathcal{P}$和 $(\varphi, \psi) \in U$，都有：那么称 $F \in \mathcal{F}$ 是 U-对称的。

$$F(p^{(\varphi,\psi)}) = \psi F(p),$$

其中，右侧的乘积是群 S_n. 内的置换 ψ 和 $F(p)$ 的乘积。U-对称的 SPFs 集合记为 $\mathcal{F}_h(n)^U$；若无需强调其对 (h, n) 的依赖，则简记为 $\mathcal{F}^U$。

例如，考虑例2中的 SPF M。如果 h 为偶数，那么 M 是 $S_h \times \{id\}$-对称的。然而，M 不是 $S_h \times S_2$-对称的。这是因为在打破平票时，优先选择备选项 1 而非备选项 2。如果 h 为奇数，我们则会看到 M 是 $S_h \times S_2$-对称的。

作为对称性的一种特殊情形，我们可以得到匿名性和中立性。事实上，若 $F \in \mathcal{F}^{S_h \times \{id\}}$，则称 $F \in \mathcal{F}$ 具有匿名性；若 $F \in \mathcal{F}^{\{id\} \times S_n}$.，则称其具有中立性。我们回顾一个有用的结果。

命题 4. [2, 命题 1] 若 U_1，$U_2 \leq G$，则 $\mathcal{F}^{U_1} \cap \mathcal{F}^{U_2} = \mathcal{F}^{\langle U_1,\ U_2 \rangle}$。特别地，$F$具有匿名性和中立性，当且仅当 $F \in \mathcal{F}^G$。

注意，若 $U' \leq U$，则 $\mathcal{F}^U \subseteq \mathcal{F}^{U'}$.。另请注意，$\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$绝非空集。然而，对于一般的 $U \leq G$，并不保证存在具有对称性 U 的 SPF。下一节将讨论这一问题。

3 G 的正则子群

3.1 基本事实

为了探讨是否可能对某个投票对 (h, n) 存在 $\mathcal{F}_h(n)^U \neq \varnothing$，并理解构造具有对称性 U 的 SPF 的具体方法，我们回顾 [2] 中的一个基本定义。若子群 U 属于 $G = S_h \times S_n$，且对每个 $p \in \mathcal{P}$，则称其为正则子群，

$$\mathrm{Stab}_U(p) \subseteq S_h \times \{id\}. \tag{3}$$

G 的正则子群集合记作 $\mathcal{R}_h(n)$；当我们无需强调其对 (h, n) 的依赖关系时，也可简记为 $\mathcal{R}$。需要强调的是，在置换群理论中，regular 一词的含义有所不同，它表示具有平凡稳定子群的传递置换群。在 [2] 中使用同一个词，是因为存在某种类比：满足 (3) 的子群在因子 S_n 上的投影都是平凡的。

命题 5. $\mathcal{R}$ 非空且对子群封闭。特别地，当且仅当 G 的每个子群都是正则子群时，G 才是正则的。

证明。G 中形如 $V \times \{id\}$的子群（对某个 $V \leq S_h$而言）是正则的，因此 $\mathcal{R} \neq \varnothing$. 令$U \in \mathcal{R}$和 $W \leq U$。于是我们有 $\mathrm{Stab}_W(p) \leq \mathrm{Stab}_U(p) \subseteq S_h \times \{id\}$，从而 $W \in \mathcal{R}$。 □

由定义可立即得到以下有用引理。

引理 6. 设 $g_1=(\varphi_1,\psi_1)$ $g_2=(\varphi_2,\psi_2)\in G$。若 $\langle g_1,g_2\rangle\in\mathcal{R}$ 和 $p\in\mathcal{P}$，则 $p^{g_1}=p^{g_2}$ 蕴含 $\psi_1=\psi_2$.

现在回顾文献中的两个重要结果。

定理 7. [2, 定理 7] $\mathcal{F}^U\neq\varnothing$ 当且仅当 $U\in\mathcal{R}$。

定理 8. [1, 命题 3 和 4] 设 $U\in\mathcal{R}$, $(p^j)_{j=1}^R\in\mathfrak{S}(U)$ 是 $\mathcal{P}$ 上 U-轨道的一个代表系，且 $\mathfrak{q}=(q_i)_{j=1}^R\in\mathcal{L}(N)^R$。那么以下事实成立：

(*i*) 存在唯一的 $F\in\mathcal{F}^U$，使得对于每个 $j\in[R]$, $F(p^j)=q_j$ 成立。

(*ii*) 将 (*i*) 中的函数记为 $F_{\mathfrak{q}}$ 后，映射

$$g:\mathcal{L}(N)^R\to\mathcal{F}^U,\quad g(\mathfrak{q})=F_{\mathfrak{q}}$$

是一个双射。特别地，$|\mathcal{F}^U|=n!^R$。

3.2 类 $\mathcal{R}$

正则性的群论刻画是 [2, 定理 12] 的一个特例。定理 9。设 $U\leq G$。以下事实等价：

(*a*) $U\in\mathcal{R}$;

(*b*) 对于每个满足 $\psi\neq id$ 且 r 为素数的 $(\varphi,\psi)\in U$，若对某个 $a\in\mathbb{N}$ 有 $|\psi|_r=r^a$，则有 $r^a\nmid$最大公约数(T_φ)。

上述定理使正则性的概念易于处理，并能区分正则子群与非正则子群。例如，$A_4\times S_2\notin\mathcal{R}$ 因为 $((12)(34),(12))\in A_4\times S_2$，且由于 $T_{(12)(34)}=[2,2]$，我们有 $2=|(12)|\mid$最大公约数$[2,2]=2$。现在我们展示一个有趣且范围广泛的正则子群族。

推论 10. 设 $W\leq S_n$。若对于某个 $i\in[h]$，有 $V\leq S_{[h]\setminus\{i\}}$，则 $U=V\times W\in\mathcal{R}$。特别地 $\{id\}\times W\in\mathcal{R}$。

证明。设 $(\varphi,\psi)\in U$，其中 $\psi\neq id$，且 r 是一个素数，使得对于某个 $a\in\mathbb{N}$，有 $|\psi|_r=r^a$。由于 $\varphi(i)=i$，我们有 T_φ 含有一项等于 1，因此最大公约数$(T_\varphi)=1$，从而我们必然有 $r^a\nmid$最大公约数(T_φ)。因此，根据定理 9，我们推得 U 是正则的。第二部分由 $\{id\}\leq S_{[h]\setminus\{i\}}$ 立即得出。□

我们还回顾一下 [2] 中的引理17。它给出了整个群 $G=S_h\times S_n$ 正则的一个充要条件。

命题 11. 群 G 是正则的，当且仅当最大公约数$(h,n!)=1$.

我们已经注意到，$\mathcal{R}$ 对子群封闭。利用定理 9，并回想共轭保持类型和置换阶不变，可以很容易地证明以下命题。为简洁起见，我们省略证明。

命题 12. 类 $\mathcal{R}$是共轭封闭的。

使用经典的群论运算构造 $\mathcal{R}$ 时，主要障碍之一来自以下观察。

注13. 由两个正则子群生成的子群一般而言并非正则子群。

证明。考虑投票对 $(h,n)=(3,3)$，以及 $G=S_3\times S_3$ 的子群 $V=\langle(123)\rangle\times\{id\}$ 和 $W=\{id\}\times\langle(123)\rangle$。$V\in\mathcal{R}$，因为它包含于 $S_3\times\{id\}$ 中，而 $W\in\mathcal{R}$ 根据推论 10。然而，$\langle V,W\rangle=\langle(123)\rangle\times\langle(123)\rangle$ 根据定理 9 并非正则。□

4 与一个 SPF相关的对称群

现在我们介绍本文的主要定义。

定义14。设 $F \in \mathcal{F}$。我们定义

1） F 的匿名群为

$$G_1(F) := \big\{(\varphi, id) \in G \mid F(p^{(\varphi,id)}) = F(p), \quad \forall\, p \in \mathcal{P}\big\};$$

2） F 的中立群为

$$G_2(F) := \big\{(id, \psi) \in G \mid F(p^{(id,\psi)}) = \psi F(p), \quad \forall\, p \in \mathcal{P}\big\};$$

3） F 的对称群为

$$G(F) := \big\{(\varphi, \psi) \in G \mid F(p^{(\varphi,\psi)}) = \psi F(p), \quad \forall\, p \in \mathcal{P}\big\}.$$

我们统称群 $G_1(F)$ $G_2(F)$ $G(F)$为该 SPF F的对称群。

举两个例子。设 D_i 为以 $i \in H$为独裁者的独裁函数，也就是说， $D_i(p) = p_i$ 对所有 $p \in \mathcal{P}$都成立的 SPF。那么我们有

$$G_1(D_i) = \big\{(\varphi, id) \in G \mid \varphi(i) = i\big\} \times \{id\} \cong S_{H\setminus\{i\}} \times \{id\}, \qquad G_2(D_i) = \{id\} \times S_n, \tag{4}$$

并且 $G(D_i) = S_{H\setminus\{i\}} \times S_n$.。注意，群 $S_{H\setminus\{i\}} \times \{id\}$ 在 $S_h \times \{id\}$ 中是极大的，因此独裁函数的匿名性水平非常高。类似地，独裁函数的对称性水平也非常高。

对于例2中讨论的多数函数 SPF M，根据 h的奇偶性，情况有所不同。如果 h 是偶数，那么

$$G_1(M) = S_h \times \{id\} = G(M), \qquad G_2(M) = \{id\} \times \{id\}.$$

如果 h 是奇数，那么

$$G_1(M) = S_h \times \{id\}, \qquad G_2(M) = \{id\} \times S_2, \qquad G(M) = S_h \times S_2.$$

根据上述结果可知，当且仅当 h 为奇数时， M 才是匿名且中立的。注意，对于每个 SPF F，显然有

$$G_1(F) = G(F) \cap \big(S_h \times \{id\}\big), \quad G_2(F) = G(F) \cap \big(\{id\} \times S_n\big). \tag{5}$$

如引言所述，对于定义14，我们受到 [9] 的启发。然而，Kelly 只提出分别研究匿名群和中立群，并未定义对称群。如今， [2], 群作用的存在已得到充分认可，因此以统一的形式处理这三个概念并着重探讨它们之间的关系，既十分自然，也富有成效。

命题 15. 设 $F \in \mathcal{F}$。则以下结论成立：

(*i*) $G(F)$ 是 G 的子群。

(*ii*) $G_1(F)$ 和 $G_2(F)$ 是 $G(F)$ 的子群，其中 $G_1(F) \le S_h \times \{id\}$ 且 $G_2(F) \le \{id\} \times S_n$.

(*iii*) $\langle G_1(F)\ G_2(F)\rangle = G_1(F) \times G_2(F) \le G(F)$，且该包含通常是适当的 r.

(*iv*) $G(F) = G_1(F) \times G_2(F)$ 当且仅当 $G(F) \in \mathcal{D}_G$。

(*v*) 。*If* $G(F) \leq S_h \times \{id\}$ *then* $G(F) = G_1(F)$. *If* $G(F) \leq \{id\} \times S_n$, *then* $G(F) = G_2(F)$

证明。(*i*) 显然，$(id, id) \in G(F)$，使得 $G(F) \neq \varnothing$。若 (φ_1, ψ_1)，$(\varphi_2, \psi_2) \in G(F)$ 且 $p \in \mathcal{P}$，由 (2) 得，

$$F(p^{(\varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2)}) = F((p^{(\varphi_2, \psi_2)})^{(\varphi_1, \psi_1)}) = \psi_1 F(p^{(\varphi_2, \psi_2)}) = \psi_1\psi_2 F(p).$$

因此 $(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2) \in G(F)$。由于这里讨论的是有限群，这就保证了 $G(F)$ 是 G 的子群。

(*ii*) 由于由 (*i*) 可得 $G(F) \leq G$，且子群的交也是子群，因此 $G_1(F) \leq G(F)$ 和 $G_2(F) \leq G(F)$ 由 (5) 立即得出。

(*iii*) 群 $S_h \times \{id\}$ 和 $\{id\} \times S_n$ 的元素两两可交换，且它们的交为平凡交。因此，由 (5) 可知，$G_1(F)$ 和 $G_2(F)$ 也满足相同性质。因此 $\langle G_1(F)\ G_2(F)\rangle = G_1(F)G_2(F) = G_1(F) \times G_2(F)$。

现在，我们给出一个例子，说明 $G(F)$ 与 $G_1(F) \times G_2(F)$ 之间是真包含关系。考虑投票对 $(h, n) = (3, 2)$ 和 $U := \langle(\sigma, \sigma)\rangle$，其中 $\sigma := (12)$。由于根据命题 11，G 是正则的，G 的每个子群都是正则的，因此 U 也是正则的。于是，根据定理 7，$\mathcal{F}^U \neq \varnothing$. 。我们证明 U 是某个 $F \in \mathcal{F}^U$ 的对称群。反设 $G(F) > U$ 对所有 $F \in \mathcal{F}^U$ 均成立。由于真包含 U 的子群只有 $V = \langle(\sigma, id)、(id, \sigma)\rangle$ 和 G 本身，因此我们有 $\mathcal{F}^U = \mathcal{F}^G \cup \mathcal{F}^V$。但由于 $\mathcal{F}^G \subseteq \mathcal{F}^V$，于是我们有 $\mathcal{F}^U = \mathcal{F}^V$，从而 $|\mathcal{F}^U| = |\mathcal{F}^V|$。根据定理 8，这意味着 $2^{R_U} = 2^{R_V}$，进而 $R_U = R_V$。我们将证明实际上有 $R_V < R_U$。确实，考虑偏好剖面 $p := (\sigma, id, \sigma) \in \mathcal{P}$，并注意到 $p^U = \{p, (\sigma, id, id)\}$，而 $p^V = \{p, (\sigma, id, id)、(id, \sigma, id)、(id, \sigma, \sigma)\}$。因此，至少 V-轨道 p^V 是多个 U-轨道的并，这意味着 $R_V < R_U$。于是存在 $F \in \mathcal{F}$，使得 $U = G(F)$。根据 (5)，我们便有 $G_1(F) = \{id\} \times \{id\} = G_2(F)$，因此也有 $G_1(F) \times G_2(F) = \{id\} \times \{id\} < U$.

(*iv*) 假设 $G(F) = G_1(F) \times G_2(F)$。那么，显然我们也有 $G(F) = \pi_1(G_1(F)) \times \pi_2(G_2(F))$，因此 $G(F) \in \mathcal{D}_G$.

反过来，假设对于某些 $V \leq S_h$ 和 $W \leq S_n$，有 $G(F) = V \times W \in \mathcal{D}_G$。我们证明 $G_1(F) = V \times \{id\}$。令 $(\varphi, id) \in G_1(F)$。由于 $G_1(F) \leq G(F)$，我们有 $(\varphi, id) \in V \times W$，从而 $\varphi \in V$，因此 $(\varphi, id) \in V \times \{id\}$。另一方面，若 $(\varphi, id) \in V \times \{id\}$，我们也有 $(\varphi, id) \in G(F)$；根据对称群的定义，这意味着 $(\varphi, id) \in G_1(F)$。类似地，可以证明 $G_2(F) = \{id\} \times S_n$。由此可得 $G(F) = V \times W = (V \times \{id\}) \times (\{id\} \times W) = G_1(F) \times G_2(F)$。

(*v*) 这些事实可由 (5) 立即得出。 □

命题 15 (*iii*) 的一个重要推论是，对称群 $G(F)$ 通常不等于匿名群与中立群的乘积 $G_1(F) \times G_2(F)$。我们强调，情形 $G(F) \notin \mathcal{D}_G$ 在应用中颇为重要，正如下一个例子所示。

例 16. 假设备选项是个体的一个子集，即 $N \subseteq H$。这种情况自然会出现在委员会需要选出部分成员组成子委员会，或选出一位主席时。显然，此时我们有 $n \leq h$. 。在这种情况下，从社会选择理论的角度来看，个体和备选项名称唯一允许的变换属于：

$$U_{N\subseteq H} := \{(\varphi, \psi) \in S_h \times S_n \mid \varphi(i) = \psi(i), \quad \forall i \in N\}$$

当然，$U_{N\subseteq H}$ 是 G 的子群，而且可以立即验证 $U_{N\subseteq H} \notin \mathcal{D}_G$。如果能设计出一个具有 $G(F) = U_{N\subseteq H}$ 的 SPF F，那就再好不过了。不过我们将在第 5 节看到，这是不可能的。

为求完整起见，我们陈述关于 $U_{H\subseteq N}$正则性的基本结果。

命题 17. [4, 命题 22] 设 $N \subseteq H$。那么 $U_{N\subseteq H} \in \mathcal{R}$ 当且仅当最大公约数$(h,n) = 1$。

特别地，由于最大公约数$(h,h) = h \neq 1$，对角群 $U_{N=H} := \{(\varphi,\varphi) \in S_h \times S_h\}$ 永远不是正则的。

定义 18. 设 (h,n) 是一个投票对。我们称

1) $U \leq S_h \times \{id\}$ 是关于投票对 (h,n) 的 SPFS 的匿名群，如果存在 $F \in \mathcal{F}_h(n)$ 使得 $G_1(F) = U$. 这类匿名群的集合记作

$$\mathrm{SPFAG}_h(n);$$

2) $U \leq \{id\} \times S_n$ 是关于投票对 (h,n) 的 SPFS 的中立群，如果存在 $F \in \mathcal{F}_h(n)$ 使得 $G_2(F) = U$ 这类中立群的集合记作

$$\mathrm{SPFNG}_h(n);$$

3) $U \leq G$ 是关于投票对（h,n）的 SPFS的对称群，如果存在$F \in \mathcal{F}_h(n)$，使得 $G(F) = U$。这类对称群的集合记为

$$\mathrm{SPFSG}_h(n).$$

接下来，我们通过让 h 和 n 变化，定义由上述集合得到的以下群集合：
1) $\mathrm{SPFAG}_h := \bigcup_n \mathrm{SPFAG}_h(n)$, $\mathrm{SPFAG}(n) := \bigcup_h \mathrm{SPFAG}_h(n)$, $\mathrm{SPFAG} := \bigcup_{h,n} \mathrm{SPFAG}_h(n)$; 2) $\mathrm{SPFNG}_h := \bigcup_n \mathrm{SPFNG}_h(n)$, $\mathrm{SPFNG}(n) := \bigcup_h \mathrm{SPFNG}_h(n)$, $\mathrm{SPFNG} := \bigcup_{h,n} \mathrm{SPFNG}_h(n)$; 3) $\mathrm{SPFSG}_h := \bigcup_n \mathrm{SPFSG}_h(n)$, $\mathrm{SPFSG}(n) := \bigcup_h \mathrm{SPFSG}_h(n)$, $\mathrm{SPFSG} := \bigcup_{h,n} \mathrm{SPFSG}_h(n)$.

如果 $\mathrm{SPFAG}_h(n) = \{U \leq S_h \times \{id\}\}$，则称投票对（$h,n$）为完全匿名；如果 $\mathrm{SPFNG}_h(n) = \{U \leq \{id\} \times S_n\}$，则称其为完全中立；如果 $\mathrm{SPFSG}_h(n) = \{U \leq S_h \times S_n\}$，则称其为完全对称。

请注意，投票对具有完全匿名性（中立性、对称性），这反映出可以构造具有任意程度匿名性（中立性、对称性）的 SPFS，这是一个非常显著的性质。

如果投票对（h,n）具有完全匿名性（中立性、对称性），那么集合 $\mathrm{SPFAG}_h(n)$（$\mathrm{SPFNG}_h(n)$、$\mathrm{SPFSG}_h(n)$）也对子群封闭。然而，对于一般的投票对（h,n），集合 $\mathrm{SPFAG}_h(n)$、$\mathrm{SPFNG}_h(n)$ 和 $\mathrm{SPFSG}_h(n)$ 通常并不对子群封闭。这无疑构成了处理这些集合的一大难点。

匿名群、中立群和对称群的性质通常相当复杂，而且很难判断某个群是否属于这些类别之一。因此，我们提出本文旨在探讨的三个问题。

匿名性问题。确定 $\mathrm{SPFAG}_h(n)$、SPFAG_h、$\mathrm{SPFAG}(n)$ 和 SPFAG 中的群。中立性问题。确定 $\mathrm{SPFNG}_h(n)$、SPFNG_h、$\mathrm{SPFNG}(n)$ 和 SPFNG 中的群。对称性问题。确定 $\mathrm{SPFSG}_h(n)$、SPFSG_h、$\mathrm{SPFSG}(n)$ 和 SPFSG 中的群。

请注意，在 SPFS 的语境下，匿名性问题和中立性问题主要对应 Kelly 在 [9] 中提出的两个问题。相比之下，对称性问题则完全是全新的。我们将看到，这三个问题之间并不能直接相互推导；要研究它们，需要运用群论概念进行深入分析，而且每个问题都需要采用不同的策略。目前请注意，命题 15 (v) 立即推出以下两个包含关系

$$\mathrm{SPFSG}_h(n) \cap \{V \times \{id\} : V \leq S_h\} \subseteq \mathrm{SPFAG}_h(n),$$
$$\mathrm{SPFSG}_h(n) \cap \{\{id\} \times W : W \leq S_n\} \subseteq \mathrm{SPFNG}_h(n).$$

5 对称群初探

本节开始研究对称性问题，并给出 SPFSG$_h(n)$ 的一些基本包含关系。首先介绍一类特殊的正则子群。

定义 19. 设 $U \in \mathcal{R}_h(n)$。若 $V \in \mathcal{R}_h(n)$ 且 $V \geq U$。蕴含 $V = U$，则称 U 为正则极大。我们用 $\mathcal{R}_h(n)$ 表示正则极大子群的集合。

。命题 20. 类 $\mathcal{R}_h(n)$ 非空且共轭封闭。

证明. 集合 $\mathcal{R}_h(n)$ 在包含关系下构成一个非空偏序集，因此它存在极大元，这些极大元.
. 恰好构成 $\mathcal{R}_h(n)$。设 $U \in \mathcal{R}_h(n)$ 且 $g \in G$。假设对于某个 $V \in \mathcal{R}$，有 $U^g \leq V$。那么，由于共轭是一个双射和群同态，我们有 $(U^g)^{g^{-1}} \leq V^{g^{-1}}$，因此 $U \leq V^{g^{-1}}$。根据命题 12，我们有 $V^{g^{-1}} \in \mathcal{R}_h(n)$，因此由 U的极大性可知 $U = V^{g^{-1}}$。再对 g应用共轭，我们得到 $U^g = V$. □

命题 21. (i) 设 $U \in .\mathcal{R}_h(n)$。那么，对于每个 $F \in \mathcal{F}_h(n)^U$，都有 $G(F) = U$。

.(ii) 包含关系 $\mathcal{R}_h(n) \subseteq$SPFSG$_h(n) \subseteq \mathcal{R}_h(n)$ 成立。特别地，SPFSG$_h(n) \neq \varnothing$.

证明。设 $F \in \mathcal{F}_h(n)$。那么，根据定义 3 和 14，我们立即得到 $F \in \mathcal{F}_h(n)^{G(F)}$。因此 $\mathcal{F}_h(n)^{G(F)} \neq \varnothing$，并且根据定理 7，$G(F) \in \mathcal{R}_h(n)$。这表明 SPFSG$_h(n) \subseteq \mathcal{R}_h(n)$。.为完成对 (ii) 的证明，只需证明 (i)。设 $U \in \mathcal{R}_h(n)$。由于 U 是正则的，根据定理 7，有 $\mathcal{F}_h(n)^U \neq \varnothing$。于是取 $F \in \mathcal{F}_h(n)^U$。由于 SPFSG$_h(n) \subseteq \mathcal{R}_h(n)$，我们知道 $G(F)$ 是正则的，并且显然 $U \leq G(F)$。因此，根据 U 在正则子群中的极大性，我们可推出 $G(F) = U$。 □

根据命题 21，每个对称群都必须是正则的。这是一项非常严格的限制，对我们正在发展的理论有重大影响。

例如，考虑投票对 (h, h)。那么，根据命题 17，群 $U_{N=H} = \{(\varphi, \varphi) \in S_h \times S_h\}$ 永远不可能是对称群。因此，遗憾的是，当备选项集合与个体集合重合时，要求 SPF遵循由群$U_{N=H}$ 所体现的自然对称性是不可能的。

作为命题 21 的第一个应用，我们推导出完全对称投票对的一个必要条件。

命题 22. 如果投票对 (h, n) 是完全对称的，那么 $\gcd(h, n!) = 1$。

证明. 设 (h, n) 是完全对称的。那么，G 是一个对称群，因此，根据命题 21，G是正则的。由此，根据命题 11，我们有 $\gcd(h, n!) = 1$。 □

注意，给定 $U \in \mathcal{R}$ 并取 $F \in \mathcal{F}^U$，我们必然有 $G(F) \geq U$。难点在于，是否存在满足另一包含关系 $G(F) \leq U$ 的特殊 $F \in \mathcal{F}^U$。本部分研究的主要工具是定理 8。它允许我们只需指定其在 $\mathcal{P}$ 上 U-轨道的代表系上的取值，就能显式构造一个 U-对称的 SPF 。

现在我们转而讨论集合 SPFSG$_h(n)$ 的其他性质。值得注意的是，SPFSG$_h(n)$ 是共轭封闭的；并且，给定满足 $G(F) = U$ 和 $g \in G$ 的 $F \in \mathcal{F}$，我们可以显式构造一个 SPF，使其对称群为 U 经 g. 共轭得到的共轭群 U^g

定义 23. 设 $F \in \mathcal{F}$ 满足 $G(F) = U$。对于 $g = (\varphi_g, \psi_g) \in G$，定义 SPF F_g 如下

$$F_g(p) := \psi_g F(p^{g^{-1}})$$

对所有 $p \in \mathcal{P}$. ，我们称 F_g 为 g. 对 F 的共轭

命题 24. 设 $F \in \mathcal{F}$ 和 $g \in G$。则 $G(F_g) = G(F)^g$. 。特别地，$\mathrm{SPFSG}_h(n)$ 在共轭下封闭。

证明。令 $U := G(F)$。我们首先证明 $G(F_g) \geq U^g$。令 $u \in U^g$，于是 $u = gu'g^{-1}$，其中 $u' \in U$ 为某个值。此外，$\varphi_u = \varphi_g\varphi_{u'}\varphi_{g^{-1}}$ 且 $\psi_u = \psi_g\psi_{u'}\psi_{g^{-1}}$。令 $p \in \mathcal{P}$。根据 F 的 U-对称性及定义 23，可得

$$F_g(p^u) = \psi_g F((p^u)^{g^{-1}}) = \psi_g F(p^{g^{-1}gu'g^{-1}}) = \psi_g F(p^{u'g^{-1}})$$

$$= \psi_g F((p^{g^{-1}})^{u'}) = \psi_g\psi_{u'}F(p^{g^{-1}}) = \psi_g\psi_{u'}\psi_g^{-1}F_g(p) = \psi_u F_g(p).$$

因此 $u \in G(F_g)$。

现在证明另一个包含关系。令 $v \notin U^g$。那么 $g^{-1}vg \notin U$，且由于 $G(F) = U$，存在 $p \in \mathcal{P}$ 使得 $F(p^{g^{-1}vg}) \neq \psi_g^{-1}\psi_v\psi_g F(p)$。考虑偏好剖面 p^g。我们证明 $F_g((p^g)^v) \neq \psi_v F_g(p^g)$。事实上

$$F_g((p^g)^v) = \psi_g F((p^{vg})^{g^{-1}}) = \psi_g F(p^{g^{-1}vg}) \neq \psi_g\psi_g^{-1}\psi_v\psi_g F(p) =$$

$$\psi_v\psi_g F(p) = \psi_v\psi_g F((p^g)^{g^{-1}}) = \psi_v\psi_g\psi_g^{-1}F_g(p^g) = \psi_v F_g(p^g)$$

由此可得 $v \notin G(F_g)$，进而 $G(F_g) = U^g$。现在，陈述的最后一部分显然成立。

□

推论 25. 设 $F \in \mathcal{F}$ 和 $g \in G$。那么 $G_1(F_g) = G_1(F)^g$. 特别地，$\mathrm{SPFAG}_h(n)$ 在共轭下封闭。

证明。根据命题 24、式 (5)，并注意到 $S_h \times \{id\}$ 是 G的正规子群，我们有

$$G_1(F_g) = G(F_g) \cap \big(S_h \times \{id\}\big) = G(F)^g \cap \big(S_h \times \{id\}\big)^g = [G(F) \cap \big(S_h \times \{id\}\big)]^g = G_1(F)^g.$$

□

6 匿名群与对称群

在本节中，我们证明，对于 $S_h \times \{id\}$ 的一个子群而言，它是匿名群当且仅当它是对称群。此外，我们还考察平凡群的性质。

命题 26. 设 (h, n) 是一个投票对，且 $V \leq S_h$。以下事实等价：

(*a*) $V \times \{id\} \in \mathrm{SPFSG}_h(n)$;

(*b*) $V \times \{id\} \in \mathrm{SPFAG}_h(n)$。

换句话说，我们有

$$\mathrm{SPFSG}_h(n) \cap \{V \times \{id\} : V \leq S_h\} = \mathrm{SPFAG}_h(n).$$

特别是，

$$\mathrm{SPFSG}_h(n) \supseteq \mathrm{SPFAG}_h(n).$$

证明。令 $U := V \times \{id\}$。

（a） $\Rightarrow$ （b）令 $U \in \mathrm{SPFSG}_h$（n）。那么我们有 $U = G$（F），其中某个 $F \in \mathcal{F}^U$，并利用（5）可推得 G（F）$= G_1$（F）。因此 $U = G_1$（F）$\in \mathrm{SPFAG}_h$（n）。

(*b*) $\Rightarrow$(*a*) 设 $U \in \mathrm{SPFAG}_h(n)$。则存在 $F \in \mathcal{F}^U$ 使得 $G_1(F) = U$。从F出发，我们现在要构造一个新的 SPF F'，使得 $G(F') = U$。固定一个系统 $\mathbf{p} = (p^j)_{j=1}^R$，由

U-轨道在 $\mathcal{P}$ 上的代表元。由于 $U \le S_h \times \{id\}$，常值剖面集合 $\mathcal{K}$ 是由 U-轨道组成的并集，其中每个轨道都是单元素集合，因此 $\mathcal{K} \subseteq \{p^j \mid j \in [R]\}$。根据定理 8，存在唯一一个 U-对称的 SPF F'，使得

$$F'(p^j) = \begin{cases} id & \text{if} \quad p^j \in \mathcal{K} \\ F(p^j) & \text{otherwise} \end{cases}$$

注意，我们显然有 $G(F') \ge U$。此外，由于每个 $p \in \mathcal{K}$ 都必须出现在 p^j 中，因此对所有 $p \in \mathcal{K}$，都有 $F'(p) = id$。我们首先断言，F' 在 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{K}$ 上与 F 重合。令 $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{K}$。那么存在 $j \in [R]$，使得 $p^j \notin \mathcal{K}$ 且 $\bar{\varphi} \in V$，并且 $p = p^{j(\bar{\varphi},id)}$。由 F 这一事实，我们进而得到 $F' \in \mathcal{F}^U$

$$F'(p) = F'(p^{j(\bar{\varphi},id)}) = F'(p^j) = F(p^j) = F(p^{j(\bar{\varphi},id)}) = F(p).$$

接下来我们断言，$G(F') = G_1(F')$。事实上，令 $g = (\varphi, \psi) \in G(F')$，并令 $p = p_{id} \in \mathcal{K}.$。那么 $p^{(\varphi,\psi)} = p_\psi \in \mathcal{K}.$。根据 F' 的定义及其 U-对称性，我们可以推得

$$id = F'(p^{(\varphi,\psi)}) = \psi F'(p) = \psi\, id = \psi$$

因此 $\psi = id$。于是 $g = (\varphi, id) \in G(F') \cap S_h \times \{id\} = G_1(F')$。由于反向包含显而易见，因此我们有 $G(F') = G_1(F')$。

现在我们断言 $G_1(F') = U$。由 $G(F') \ge U$ 和 $U \le S_h \times \{id\}$，可立即得出包含关系 $G_1(F') \ge U$。由于 $S_h \times \{id\} \ge G_1(F')$，为了证明另一个包含关系 $G_1(F') \le U$，我们证明 U 在 $S_h \times \{id\}$ 中的补集包含于 $G_1(F')$ 在 $S_h \times \{id\}$ 中的补集。于是设 $(\varphi, id) \notin U$，并证明 $(\varphi, id) \notin G_1(F')$。由于 $G_1(F) = U$，存在 $p \in \mathcal{P}$，使得 $F(p^{(\varphi,id)}) \ne F(p)$。注意，显然 $p \notin \mathcal{K}$，因为假设 $p \in \mathcal{K}$，便有 $p^{(\varphi,id)} = p$，因此也有 $F(p^{(\varphi,id)}) = F(p)$。于是，由于 F' 在 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{K}$ 上与 F 一致，我们也有 $F'(p^{(\varphi,id)}) \ne F'(p)$，正如所需。

由此可得 $U = G_1(F') = G(F')$，因此 $U \in \mathsf{SPFSG}_h(n)$。 □

由此立即得出一个重要结论，即以下事实。

推论 27. 每个匿名群也是一个对称群。

例 28. (*a*) 若 $2 \le h \le n!$，则 $A_h \times \{id\}$ 是一个匿名群。

(*b*) 对每一对 (h, n)，群 $S_h \times \{id\}$ 是一个匿名群。

证明. (*a*) 由于个体的数量至多等于备选项上线性序的数量，因此存在一个 $p \in \mathcal{P}$，其分量各不相同。于是，对于某些 $\varphi_1, \varphi_2 \in S_h$，$p^{(\varphi_1,id)} = p^{(\varphi_2,id)}$ 蕴含 $\varphi_1 = \varphi_2$。

令 $U := A_h \times \{id\}$。我们证明 $p^{((12),id)} \notin p^U$。反设存在 $u = (\sigma, id) \in U$，使得 $p^{((12),id)} = p^u$。于是 $(12) = \sigma \in A_h$，这就产生了矛盾。因此，$p^1 := p$ 和 $p^2 := p^{((12),id)}$ 是 U 在 $\mathcal{P}$ 上的两个不同轨道的代表元。我们补全列表 (p^1, p^2)，得到 U-轨道的一个代表系 $(p^i)_{i=1}^R$。固定 $\sigma \in S_h$，使得 $\sigma \ne id$。由定理 8，存在唯一的 $F \in \mathcal{F}^U$，使得

$$F(p^1) = id, \qquad F(p^2) = \sigma, \qquad F(p^j) = id \quad \text{per} \quad 3 \le j \le r.$$

于是我们有

$$F(p^{((12),id)}) = F(p^2) = \sigma \ne id = F(p).$$

由此可得 $G_1(F) \ne S_h \times \{id\}$。另一方面，由于 F 是 U-对称的，且 U 在 $S_h \times \{id\}$ 中是极大的，我们推得 $G_1(F) \ge U$，以及 $G_1(F) = U$。

(*b*) 考虑由 $F(p) = id$ 为所有 $p \in \mathcal{P}$ 定义的常值 SPF，并注意到 $G_1(F) = S_h \times \{id\}$。 □

现在我们证明，无论个体和备选项的数量是多少，平凡子群 $\mathbb{1} = \{(id, id)\}$ 都属于 $\mathrm{SPFAG}_h(n)$、$\mathrm{SPFNG}_h(n)$ 和 $\mathrm{SPFSG}_h(n)$。我们强调，证明平凡群是一个对称群，对于不同的集体选择而言，需要采用不同类型的论证。Kelly 在 [10] 中证明，对于那些将单个备选项与由序构成的偏好配置相关联的集体选择，$\mathbb{1}$ 是一个对称群。

命题 29. 对于每个投票对 (h, n)，平凡群是一个匿名群、中立群和对称群。

证明. 首先设 $n \geq 3$。给定 $p \in \mathcal{P}$，定义集合 $U_p := \{i \in H \mid p_i(\mathbf{1}) = 1\}$ 以及由下式给出的 SPF F

$$F(p) = \begin{cases} id & \text{if} \quad U_p = \varnothing \\ p_{\min U_p} & \text{if} \quad U_p \neq \varnothing \end{cases}$$

对所有 $p \in \mathcal{P}.$，回忆一下 $H = [h]$.

我们断言 $G_1(F) = 1$。设 $\varphi \in S_h \setminus \{id\}$。我们证明存在 $p \in \mathcal{P}$，使得$F(p^{(\varphi,id)}) \neq F(p)$。由于 $\varphi \neq id$，我们有

$$H_\varphi := \{i \in H \mid \varphi^{-1}(i) > i\} \neq \varnothing.$$

设 i 为 H_φ 的最小值，并令 $j := \varphi^{-1}(i)$。注意 $j > i$。考虑偏好配置 $p \in \mathcal{P}$，使得 $p_i = id, p_j =$ (23) 且 $p_k =$ (12)，其中 $k \in H \setminus \{i, j\}$。由于对所有 $k < i$， $p_k(\mathbf{1}) = 2$ 都成立，而$p_i(\mathbf{1}) = 1$，因此 $F(p) = p_i = id$。现在我们证明 $F(p^{(\varphi,id)}) = p_j$。若 $k < i$，则有$\varphi^{-1}(k) \leq k < i$，从而 $p_k^{(\varphi,id)} = p_{\varphi^{-1}}(k) =$(12)。另一方面， $p_i^{(\varphi,id)} = p_{\varphi^{-1}}(i) = p_j =$ (23)，因此 $p_i^{(\varphi,id)}(\mathbf{1}) = 1$。于是$U_{p^{(\varphi,id)}}$ 的最小值为 i，且 $F(p^{(\varphi,id)}) = p_j =$ (23) $\neq id$。

令下一步为 $n = 2$。称 $p \in \mathcal{P}$ 为有序的，若存在 $j \in [h]$ 使得 $p_i = id$ 对 $i \in [j]$ 和$p_i =$ (12) 对 $j + 1 \leq i \leq h.$ 成立。定义 SPF F 为

$$F(p) = \begin{cases} id & \text{if} \quad p \text{ is ordered} \\ (12) & \text{if} \quad p \text{ is not ordered} \end{cases}$$

注意， $F(p) = F(p')$ 当且仅当 $p, p' \in \mathcal{P}$要么都为有序，要么都不为有序。反设，存在 $(\varphi, id) \in G_1(F)$，且满足 $\varphi \neq id$。考虑 (??) 中的集合 H_φ。令i 为 H_φ 的最小值，并令 $j := \varphi^{-1}(i) \in H.$。注意， $h \geq j > i$。定义偏好剖面$p \in \mathcal{P}$，使得对 $k \in [i]$ 有 $p_k = id$，并且对 $i + 1 \leq k \leq h.$ 有 $p_k =$ (12)。于是， p中等于 id 的分量数恰好为 i，且 p 有序。我们声称，偏好剖面 $p^{(\varphi,id)}$ 却不是有序的。首先注意， $p_i^{(\varphi,id)} = p_{\varphi^{-1}}(i) = p_j =$(12)。若 $i = 1$，则这一事实立即意味着$p^{(\varphi,id)}$ 不是有序的。接下来假设 $i \geq 2$。若 $1 \leq k \leq i - 1$，则有 $\varphi^{-1}(k) \leq k < i$，因此 $p_k^{(\varphi,id)} = p_{\varphi^{-1}}(k) = id$。于是还剩下一处 id 未计入，且它必然作为某个个体 $\ell \in H$ 的偏好关系 $p_\ell^{(\varphi,id)}$ 出现，其中 $\ell > i.$。因此， $p^{(\varphi,id)}$ 不是有序的。

因此，我们已经证明 $\mathbb{1} = \{id\} \times \{id\}$ 是一个匿名群。根据定理 26，$\mathbb{1}$ 也是一个对称群。现在，由（5）可知，$\mathbb{1}$ 也是一个中立群。 □

7 中立性问题的解

关于中立性，我们得到了一个相当令人惊讶的结果。

定理 30。 $\{id\} \times S_n$ 的每个子群都是中立群。特别地，$\mathrm{SPFNG}_h(n)$ 对子群封闭且共轭封闭。

证明。设 $U = \{id\} \times W$是 $\{id\} \times S_n$的子群，其中 $W \leq S_n$。若 $W = S_n$，则由 (4) 可知，个体 1 的独裁函数 D_1 满足 $G_2(D_1) = id \times S_n$。接下来假设$W < S_n$，因此 $m = |S_n : W| \geq 2$。设 $x_1 = id$、.....、$x_m \in S_n$ 是 S_n中 W 的右陪集的一组代表元。固定一个偏好剖面 $p \in \mathcal{P}$，并令 $p^i := p^{(id,x_i)}$ 对所有 $i \in [m]$成立。我们声称，每个p^i 都属于不同的 U-轨道。反设存在两个不同的指标j、 $k \in [m]$ 以及 $\psi \in W$，使得 $p^{j(id,\psi)} = p^k$。那么，由 (2) 可得 $p^{(id,\psi x_j)} = p^{(id,x_k)}$，因此考察该等式中偏好剖面的第一个分量，可得 $\psi x_j p_1 = x_k p_1$。由群 S_n中的消去律，进而得到 $\psi x_j = x_k$，矛盾。

因此， p^1、.....、p^m 均可选作其 U轨道的代表元。现在将此列表补充为一个有序集合（p^j）$_{j=1}^{R} \in \mathfrak{S}$（$U$），作为所有 U轨道的代表元。根据推论 10，有 $U \in \mathcal{R}$。因此，根据定理 8，存在唯一的 $F \in \mathcal{F}^U$，使得对所有$j \in [m]$都有 F（p^j） $= id$。显然，我们有 G_2（F） $\geq U$。为了证明等号成立，只需证明：若 $\psi \in S_n \setminus W$，则 F（$p^{(id,\psi)}$） $\neq \psi F$（p）。设 $\psi \in S_n \setminus W$。那么存在 $\sigma \in W$和 $j \neq 1$，使得 $\psi = \sigma x_j$；并且根据 F的 U对称性，我们有

$$F(p^{(id,\psi)}) = F(p^{(id,\sigma x_j)}) = F((p^{(id,x_j)})^{(id,\sigma)}) = \sigma F(p^j) = \sigma \neq \psi = \psi F(p^1) = \psi F(p).$$

□

我们指出定理 30 的两个直接推论。

推论 31。每个投票对（h， n）都是完全中立的。

推论 32。以下等式成立：

$$\mathrm{SPFNG}_h(n) = \{\{id\} \times W : W \leq S_n\} = \mathrm{SPFNG}(n).$$

此外，

$$\mathrm{SPFNG}_h = \mathrm{SPFNG} = \{\{id\} \times W : W \textit{ is a permutation group}\}.$$

8 匿名性问题

毫无疑问，匿名性问题比中立性问题更难。有一点是确定的：并非对于每个投票对 (h, n)， $S_h \times \{id\}$ 的每个子群都是匿名群。我们提出一个关键例子。回想一下，克莱因群是由下式给出的 S_4 的子群

$$K := \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

命题33。设 $(h, n) = (4, 2)$，且 $U = K \times \{id\}$，其中 $K \leq S_4$是克莱因群。那么 U是一个正则子群，但既不是对称群，也不是匿名群。

证明。用符号 0、1 表示两个备选项上的两种可能线性序，使得 $\mathcal{P} = \{0, 1\}^4$。群 U作用于 $\mathcal{P}$，通过置换 $\{0, 1\}$ 中由四个元素组成的有序字符串；容易验证共有 7 个轨道 $\mathcal{O}_i$，其中 $i \in [7]$。我们先汇总涉及 0 和 1 数量不同的偏好剖面的那些情况。

$\mathcal{O}_1 = \{[1111]\}$， $\mathcal{O}_2 = \{[0000]\}$， $\mathcal{O}_3 = \{[1110], [0111], [1011], [1101]\}$，

$\mathcal{O}_4 = \{[1000], [0100], [0010], [0001]\}$.

然后是关于包含两个 0 和两个 1 的偏好剖面的情形。

$\mathcal{O}_5 = \{[1100], [0011]\}$， $\mathcal{O}_6 = \{[1010], [0101]\}$， $\mathcal{O}_7 = \{[0110], [1001]\}$.

U 是正则的，因为 $U \leq S_h \times \{id\}$，因此 $\mathcal{F}^U \neq \varnothing$。取 $F \in \mathcal{F}^U$。我们证明必然有 $G(F) > U$。由于 F是 U-对称的，因此 F在每个 U-轨道上取值相同。令 $x_i \in \{0,1\}$ 为 F在 $\mathcal{O}_i$上所取的值，其中 $i \in \{5,6,7\}$。于是，在 x_5、x_6、x_7中，至少有两个相等。先假设 $x_5 = x_6$，并考虑 $g := ((23)\ id) \in G \setminus U$。我们证明 $g \in G(F)$。注意，若 $i \in [7] \setminus \{4,5\}$，则 $p \in \mathcal{O}_i$意味着 $p^g \in \mathcal{O}_i$，因此 $F(p^g) = F(p)$。此外，若 $p \in \mathcal{O}_5$，则 $p^g \in \mathcal{O}_6$，且有 $F(p^g) = x_6 = x_5 = F(p)$。同理，若 $p \in \mathcal{O}_6$，则 $p^g \in \mathcal{O}_5$，且有 $F(p^g) = x_5 = x_6 = F(p)$。若 $x_5 = x_7$ 或 $x_6 = x_7$，证明方法相同，只需分别使用 $g := ((13)\ id)$ 或 $g := ((12)\ id)$。

这表明 U 不是对称群。现在，根据推论 27，U 也不是匿名群。

□

Kelly 在 [10, 第18] 页提出猜想：$S_h \times \{id\}$ 的每个子群都是某种特定类型的集体选择——称为代表元系统——的匿名群。

根据上述例子，我们可以明确 $\mathrm{SPFNG}_h(n)$ 与 $\mathrm{SPFAG}_h(n)$，或 $\mathrm{SPFSG}_h(n)$ 之间的一个根本区别。

推论34。(*i*) 存在一些对 (h,n)，使得集合 $\mathrm{SPFAG}_h(n)$ 不对子群封闭。

(*ii*) 存在一些对 (h,n)，使得集合 $\mathrm{SPFSG}_h(n)$ 不对子群封闭。

证明。考虑 $(h,n) = (4,2)$。根据例 28 (*b*)，群 $S_4 \times \{id\}$ 是匿名群，而根据命题33，它的子群 $K \times \{id\}$ 不是匿名群。为了讨论对称群，请注意，根据命题26，群 $S_4 \times \{id\}$ 是对称群，而 $K \times \{id\}$ 不是。

□

8.1 小稳定子的作用与充分条件

为了识别 $\mathrm{SPFAG}_h(n)$ 中的群，考虑偏好剖面在 $S_h \times \{id\}$ 作用下的稳定子群是相当重要的。借助以下定义，可以立即描述这些稳定子群。设 (h,n) 是一个投票对，并设 $\{H_1, \ldots, H_k\}$ 是将 H 划分为 $2 \leq k \leq \min\{h, n!\}$ 个部分的划分。我们称群 $\times_{i\in[k]} S_{H_i}$ 为 S_h 的具有 k 个块的完全非传递子群。

注35. 设 (h,n) 是一个投票对。$S_h \times \{id\}$ 的子群 $V \times \{id\}$ 是某个 $p \in \mathcal{P}$ 的稳定子群，当且仅当对于某个 $2 \leq k \leq \min\{h, n!\}$，$V$ 是 S_h 的具有 k 个块的完全非传递子群，或者 $V = S_h$.

现在固定以下记号。

(†) 若 $V < S_h$，则令 $|S_h : V| = m+1$, $m \geq 1$，并令 $\varphi_0 = id, \varphi_1, \ldots, \varphi_m \in S_h$ 为 S_h 中 V 的右 $m+1$ 陪集的一组代表元。

引理 36. 设 $V < S_h$, $U = V \times \{id\}$ 和 $p \in \mathcal{P}$。则 $p^{S_h \times \{id\}}$ 分解为 U-轨道 $\{(p^{(\varphi_j, id)})^U : j \in [m]_0\}$。这些轨道不一定互不相同。对 φ_j 重新排序后，若 $j \in [m]$，则存在这样一组轨道的代表系，其形式为 $\{p^{(\varphi_j, id)} : j \in [s]_0\}$，其中 $0 \leq s \leq m$ 适当选取。

证明. $p^{S_h \times \{id\}}$ 分解为 U-轨道这一事实显然。更准确地说，我们需要证明：

$$p^{S_h \times \{id\}} = \bigcup_{j \in [m]_0} (p^{(\varphi_j, id)})^U. \tag{6}$$

显然，对于每个 $j \in [m]_0$，都有 $(p^{(\varphi_j, id)})^U \subseteq (p^{(\varphi_j, id)})^{S_h \times \{id\}} = p^{S_h \times \{id\}}$. 此外，若$p^{(\varphi, id)} \in p^{S_h \times \{id\}}$，则存在 $j \in [m]_0$，使得对于某个 $v \in V$，有 $\varphi = v\varphi_j$。由此可得 $p^{(\varphi, id)} = (p^{(\varphi_j, id)})^{(v, id)} \in (p^{(\varphi_j, id)})^U$. 这就证明了（6）。

现在，对于 $i \neq j \in [m]_0$，有 $(p^{(\varphi_i,id)})^U = (p^{(\varphi_j,id)})^U$ 或 $(p^{(\varphi_i,id)})^U \cap (p^{(\varphi_j,id)})^U = \varnothing$. 接着，我们可以从 $\{(p^{(\varphi_j,id)})^U$ 中选出一个子集： $j \in [m]_0\}$ 该子集由彼此不同且涵盖所有可能轨道的轨道构成。由于显然可以将 $p^{S_h \times \{id\}}$ 中 U-轨道的一个代表元选为 p，因此存在 s，满足 $0 \leq s \leq m$，使得在对 φ_j重新排序后，其中 $j \in [m]$， $p^{S_h \times \{id\}}$中 U-轨道的一个代表系为 $\{p^{(\varphi_j,id)}$: $j \in [s]_0\}$。

引理 37. 设 $V < S_h$ 和 $U = V \times \{id\}$。若 $p \in \mathcal{P}$ 满足 $\mathrm{Stab}_{S_h \times \{id\}}(p) \leq U$，则 $p^U \neq (p^{(\varphi_j,id)})^U$ 对所有 $j \in [m]$ 均成立。特别地， U 在 $p^{S_h \times \{id\}}$ 中的 $s+1$ 轨道至少有两个。

证明. 设 $p \in \mathcal{P}$ 满足 $\mathrm{Stab}_{S_h \times \{id\}}(p) \leq V \times \{id\}$，并反设存在 $j \in [m]$ 使得 $(p^{(\varphi_j,id)})^U = p^U$。那么，对于某个 $\varphi \in V$，我们有 $p^{(\varphi_j,id)} = p^{(\varphi,id)}$，因此利用 (2)，可得 $(\varphi^{-1}\varphi_j, id) \in \mathrm{Stab}_{S_h \times \{id\}}(p) \leq U$。所以 $\varphi^{-1}\varphi_j \in V$，进而 $\varphi_j \in V$ 也成立，矛盾。 □

下一个定理是本文关于匿名群的主要结果之一。它给出了一个群成为匿名群的充分条件。

定理 38. 设 $V < S_h$ 满足存在 $p \in \mathcal{P}$，使得稳定子$_{S_h \times \{id\}}(p) \leq V \times \{id\}$。那么$V \times \{id\}$ 是一个匿名群。

证明. 设 $U := V \times \{id\}$。根据引理 36， $p^{S_h \times \{id\}}$ 分解为 U-轨道 $\{(p^{(\varphi_j,id)})^U$: $j \in [m]_0\}$。此外，根据引理 37，对于所有 $j \in [m]$，都有 $p^U \neq p^{(\varphi_j,id)^U}$，并且在 $p^{S_h \times \{id\}}$中至少有两个 U-轨道。然而，注意到对于适当的j、 $k \in [m]$，我们无法排除 $p^{(\varphi_j,id)^U} = p^{(\varphi_k,id)^U}$，其中 $j \neq k$. 。根据引理 36，经过重新排序后，存在 s，满足 $1 \leq s \leq m$，使得$p, p^{(\varphi_1,id)} \ldots, p^{(\varphi_s,id)}$ 是 $p^{S_h \times \{id\}}$中包含于 $\mathcal{P}$的 U-轨道的一组代表元。

现在通过添加其余 U-轨道的适当代表元 p^{s+1}、.....、 p^R，将其补充为 $\mathcal{P}$ 上 U-轨道的一个完全代表系。接下来固定 $\sigma \in S_n \setminus \{id\}$，并指定

$$F(p) = id, \qquad F(p^{(\varphi_j,id)}) = \sigma \quad \text{for } j \in [s], \qquad F(p^t) = id \quad \text{for } t \in \{s+1, \ldots, R\}.$$

根据定理 8，存在唯一的 $F \in \mathcal{F}^U$ 延拓该指定，而且显然， $G_1(F) \geq U$。我们证明等号成立。反设存在 $(\varphi, id) \in G_1(F) \setminus U$。于是$\varphi = \bar{\varphi}\varphi_j$，其中某个 $j \in [m]$ 和 $\bar{\varphi} \in V$。我们断言， $F(p^{(\varphi_j,id)}) = \sigma$. 。当 $j \in [s]$时，根据 F 的定义即可得到这一点。接下来假设 $j \geq s+1$。那么，根据引理 36，存在 $k \in [s]$，使得 $(p^{(\varphi_j,id)})^U = (p^{(\varphi_k,id)})^U$。因此，我们有 $p^{(\varphi_j,id)} = (p^{(\varphi_k,id)})^{(v,id)}$，其中某个 $v \in V$。于是，回想起 $F \in \mathcal{F}^U$ 并利用 (2)，可得

$$F(p^{(\varphi_j,id)}) = F((p^{(\varphi_k,id)})^{(v,id)}) = F(p^{(\varphi_k,id)}) = \sigma.$$

再次考虑到 $F \in \mathcal{F}^U$ 和 (2) 这一事实，我们现在很容易计算得出

$$F(p^{(\varphi,id)}) = F(p^{(\bar{\varphi}\varphi_j,id)}) = F((p^{(\varphi_j,id)})^{(\bar{\varphi},id)}) = F(p^{(\varphi_j,id)}) = \sigma.$$

另一方面，由于 $(\varphi, id) \in G_1(F)$，我们还有 $F(p^{(\varphi,id)}) = F(p) = id$，这就产生了矛盾。 □

请注意，上述定理不可逆。事实上，设 (h, n) 是一个满足 $h > n!$ 的投票对。根据命题 29，我们知道平凡群是一个匿名群。另一方面，每个 $p \in \mathcal{P}$ 至少有两个相等的分量，因此稳定子$_{S_h \times \{id\}}(p)$ 并非平凡群。

推论 39. 设 $V \leq S_h$ 在 k 个块中包含一个 S_h 的完全非传递子群，且 $2 \leq k \leq \min\{h, n!\}$。那么 $V \times \{id\}$ 是一个匿名群。

证明。若 $V = S_h$，我们知道 $S_h \times \{id\}$ 是一个匿名群。假设 $V < S_h$。根据注35，存在 $p \in \mathcal{P}$，使得稳定子$_{S_h \times \{id\}}(p) \leq V \times \{id\}$，并且根据定理 38，我们推导出 $V \times \{id\}$ 是一个匿名群。 □

推论40。设 H_1，……，H_k 是将 H 划分为 k 个部分的一个划分，其中 $1 \le k \le \min\{h, n!\}$。那么该子群

$$(\times_{i=1}^{k} S_{H_i}) \times \{id\}$$

是一个匿名群。

推论41. 若 $h \le n!$，则 $S_h \times \{id\}$ 的每个子群都是匿名群。

证明. 由于 $h \le n!$，我们有 $\min\{h, n!\} = h$，并且可以考虑 S_h 在 h 个块上的完全非传递群，也就是平凡群。现在，S_h 的每个子群都包含平凡群，因此根据推论 39，它是一个匿名群。 □

请注意，上述推论如何将克莱因子群的病态情况完全控制住。根据命题33，我们知道 $K \times \{id\} \notin \text{SPFAG}_4(2)$，现在根据推论41，我们看到 $K \times \{id\} \in \text{SPFAG}_4(3)$。但更重要的是，我们能够解决匿名性问题的一个主要部分。

推论42. $\text{SPFAG}_h = \{U \le S_h \times \{id\}\}$ 和 $\text{SPFAG} = \{V \times \{id\} : V\text{是一个置换群}\}$.

当然，如果能知道对于每个投票对（h, n），$\text{SPFAG}_h(n)$ 中有哪些群，以及对于每个 n，$\text{SPFAG}(n)$ 中有哪些群，我们会很高兴。但这些问题仍未解决。

作为上述推论和命题 26 的直接推论，我们还可以得到一些关于对称性的信息。

推论43. $\text{SPFSG}_h \supseteq \{U \le S_h \times \{id\}\}$ 和 $\text{SPFSG} \supseteq \{V \times \{id\} : V\text{是一个置换群}\}$.

9 一个关键例子

上一节中那些棘手的结果可能会让人以为，对称性问题的难点仅限于匿名性问题。遗憾的是，情况要复杂得多。例如，考虑 $V \le S_h$ 和 $W \le S_n$。根据定理 30，我们知道 $\{id\} \times W$ 是一个中立群。因此，如果 $V \times \{id\}$ 是一个匿名群，那么人们可能会猜想群 $V \times W$ 必然是一个对称群。遗憾的是，事实并非如此。下一个命题将通过$V = \{id\}$ 和 $W = S_2$ 给出一个引人注目的例子。

命题44. 设 $(h, n) = (3, 2)$ 且 $U = \{id\} \times S_2$。那么 U 是一个中立群，但不是对称群。

证明. 根据定理 30，U 是一个中立群。为了证明 U 不是对称群，我们考虑 G 中严格包含 U的以下子群：

$$X := \langle (12) \rangle \times S_2, \qquad Y := \langle (23) \rangle \times S_2, \qquad Z := \langle (13) \rangle \times S_2.$$

我们证明

$$\mathcal{F}^U = \mathcal{F}^X \cup \mathcal{F}^Y \cup \mathcal{F}^Z. \tag{7}$$

这意味着 $U \notin G(\mathcal{F})$。事实上，假设 (7) 成立，并取 $F \in \mathcal{F}^U$。那么存在$W \in \{X, Y, Z\}$ 使得 $F \in \mathcal{F}^W$，因此 $G(F) \ge W > U$.

由 X、Y、$Z \ge U$，我们立即得到 $\mathcal{F}^X \cup \mathcal{F}^Y \cup \mathcal{F}^Z \subseteq \mathcal{F}^U$。为了证明等式成立，我们证明

$$|\mathcal{F}^X \cup \mathcal{F}^Y \cup \mathcal{F}^Z| = |\mathcal{F}^U|. \tag{8}$$

由定理 8 可得 $|\mathcal{F}^U| = 2^{R_U}$。此外，很容易验证 $R_U = 4$，因此$|\mathcal{F}^U| = 16$。现在注意到

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle = G = S_3 \times S_2,$$

由命题 4 可得

$$\mathcal{F}^X \cap \mathcal{F}^Y = \mathcal{F}^Y \cap \mathcal{F}^Z = \mathcal{F}^X \cap \mathcal{F}^Z = \mathcal{F}^X \cap \mathcal{F}^Y \cap \mathcal{F}^Z = \mathcal{F}^G.$$

因此，根据容斥原理，我们得到

$$|\mathcal{F}^X \cup \mathcal{F}^Y \cup \mathcal{F}^Z| = |\mathcal{F}^X| + |\mathcal{F}^Y| + |\mathcal{F}^Z| - 2|\mathcal{F}^G|.$$

由于很容易验证 $R_X = R_Y = R_Z = 3$ 和 $R_G = 2$，由定理 8 可得，

$$|\mathcal{F}^X \cup \mathcal{F}^Y \cup \mathcal{F}^Z| = 2^3 + 2^3 + 2^3 - 2 \cdot 2^2 = 16,$$

这就证明了 (8)。 □

稍加努力并采用类似的论证，可以证明对于 $(h, n) = (4, 2)$，子群 $\{id\} \times S_2 \leq G = S_4 \times S_2$ 也不是对称群。不过，似乎无法将针对 $(h, n) \in \{(3, 2)、(4, 2)\}$ 这两种情况的证明推广开来。因此，我们提出一个开放问题。

开放问题。对于哪些投票对 (h, n)，子群 $\{id\} \times S_2$ 是对称群?

请注意，例如，当 $(h, n) = (2, 2)$ 时，$\{id\} \times S_2$ 是一个对称群。事实上，根据命题 11，$S_2 \times S_2 \notin \mathcal{R}_2(2)$。另一方面，根据推论 10，$\{id\} \times S_2 \in \mathcal{R}_2(2)$。因此。$\{id\} \times S_2 \in \mathcal{R}_2(2)$，从而由命题 21 可知，$\{id\} \times S_2$ 是一个对称群。

我们强调，对命题44与推论 27进行比较，凸显了匿名群与中立群在性质和行为上的不同。事实上，一般而言，我们有 $\mathrm{SPFNG}_h(n) \not\subseteq \mathrm{SPFSG}_h(n)$；而我们总有 $\mathrm{SPFAG}_h(n) \subseteq \mathrm{SPFSG}_h(n)$。

10 匿名性与布尔函数可表示性

本节探讨社会偏好函数的匿名性问题与所谓的布尔函数可表示性之间的重要联系。我们相信，这一全新的视角或许能为布尔函数领域的一些棘手未解问题带来启发。

我们回顾一些重要定义。设 $h, k \in \mathbb{N}$，其中 $h, k \geq 2$。一个取值于 k 的布尔函数是一个函数 $F\colon \{0,1\}^h \to \{0, \ldots, k-1\}$。取值为 2 的布尔函数也称为布尔函数。我们用 $\mathcal{B}_h(k)$ 表示取值于 k 的布尔函数的集合。给定 $\varphi \in S_h$ 和 $x \in \{0,1\}^h$，我们定义

$$x^\varphi := (x_{\varphi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\varphi^{-1}(h)}) \in \{0,1\}^h,$$

在 $\{0,1\}^h$ 上建立 S_h 的作用。

给定 $F \in \mathcal{B}_h(k)$，集合

$$S(F) := \left\{\varphi \in S_h \middle| \, F(x^\varphi) = F(x),\ \forall x \in \{0,1\}^h\right\}$$

是 S_h 的一个子群，称为 F 的不变群。

若存在 $h \geq 2$ 和 $F \in \mathcal{B}_h(k)$，使得 $S(F) = V \leq S_h$，则称置换群 V 为 k-可表示；若它对某个 $k \geq 2$ 是 k-可表示的，则称其为可表示的。在文献中，k-可表示子群的集合记为 $\mathrm{BGR}(k)$；可表示子群的集合记为 BGR。注意，若我们设 $\mathrm{BGR}_h(k) := \{S(F) : F \in \mathcal{B}_h(k)\}$，则有

$$\mathrm{BGR}(k) = \bigcup_h \mathrm{BGR}_h(k)$$

and

$$\mathrm{BGR} = \bigcup_{h,k} \mathrm{BGR}_h(k).$$

我们还补充指出，也可以考虑

$$\mathrm{BGR}_h := \bigcup_{k} \mathrm{BGR}_h(k)$$

可能会引起兴趣。

可表示群在计算机科学、泛代数和图论中发挥着重要作用，自 Clote 和 Kranakis 的论文 [5]发表以来，相关研究已有三十多年。该论文具有开创性，原因有二：它首次提出了这一问题，给出了解决问题的一些主要工具；同时还包含一个由 Kisielewicz [11],发现的错误\，这一错误引发了可表示性理论中的一个著名而耐人寻味的问题：确定集合 BGR(2) 的性质。BGR \ BGR(2) 中唯一已知的群是克莱因群 K，但甚至不知道 BGR \ BGR(2) 是否有限。目前，这个集合仍是一个纯粹的谜，近来一些大规模的研究也未能破解它（[12], [13],[14]）。值得注意的是，在 [14]中，作者刻画了 BGR(2) 中的有限单群。我们强调，这些最新成果似乎证实了 BGR \BGR(2) $= \{K\}$。例如，Grech 在 [12]中证明，属于 BGR \BGR(2) 的唯一正则置换群是 K. 然而，对于 BGR \ BGR(2) $= \{K\}$的证明，目前看来似乎仍是一个无法实现的目标。

现在我们回到社会偏好函数的框架，考察 SPFs 的匿名群与可表示群之间的一项主要联系。问题的核心在于，群 $U \leq S_h \times \{id\}$ 作用于 $\mathcal{P} = (S_n)^h$ 的元素时，只是置换从含有 n 个元素的集合中选出的对象串的顺序，而不考虑这些置换的性质。

命题45. 设 $h, n, k \in \mathbb{N}$，其中 $h, n, k \geq 2$ 且 $k \leq n!$. 那么

$$\{V \times \{id\} : V \in \mathrm{BGR}_h(k)\} \subseteq \mathrm{SPFAG}_h(n).$$

若 $k = n = 2$，则等号成立。特别地，

$$\{V \times \{id\} : V \in \mathrm{BGR}_h(2)\} = \mathrm{SPFAG}_h(2)$$

and

$$\{V \times \{id\} : V \in \mathrm{BGR}(2)\} = \mathrm{SPFAG}(2).$$

证明. 首先，我们以一种方便的方式描述取值于 k 的布尔函数环境，将符号 $\{0, \ldots, k-1\}$ 选作 S_n 中 k 个不同置换的名称，其中包括 $0 = id$ 和 $1 = (12)$。这有意义，因为根据假设，$k \leq n!$ 设 $V \in \mathrm{BGR}_h(k)$。那么存在 $F \in \mathcal{B}_h(k)$, F: $\{0,1\}^h \to \{0, \ldots, k-1\}$，使得 $S(F) = V$。现在我们构造 $F' \in \mathcal{F}_h(n)$，使得 $G_1(F') = V \times \{id\}$。考虑 $\mathcal{P}_h(n)$ 上 $U := V \times \{id\}$ 的 $r \in \mathbb{N}$ 个轨道的一个代表系 $(p^j)_{j=1}^r$，使得前 $s \leq r$ 个分量 $(p^j)_{j=1}^s$ 是 $\{0,1\}^h = \{p \in \mathcal{P}_h(n)$ 上 U-轨道的代表元：$p_i \in \{id = 0, (12) = 1\}, \forall i \in [h]\}$。

根据定理 7，存在 $F' \in \mathcal{F}_h(n)^U$，使得对于 $j \leq s$，$F'(p^j) = F(p^j)$；对于 $s < j \leq r$，$F'(p^j) = F(p^s)$。根据 $\mathcal{F}_h(n)^U$ 的定义，我们当然有 $G_1(F') \geq U$。此外，可以立即观察到 $F'_{|_{\{0,1\}^h}} = F$。现在，由于 $S(F) = V$，对于每个 $\varphi \in S_h \setminus V$，存在 $\bar{p} \in \{0,1\}^h \subseteq \mathcal{P}_h(n)$，使得 $F(\bar{p}^{(\varphi, id)}) \neq F(\bar{p})$。因此，我们还有 $F'(\bar{p}^{(\varphi, id)}) \neq F'(\bar{p})$，从而$G_1(F') = U$。

现在假设 $k = n = 2$。那么 $\{0,1\} = S_2$。令 $U = V \times \{id\} \in \mathrm{SPFAG}_h(2)$，其中$U = G_1(F')$，对某个 $F' \in \mathcal{F}_h(2)$ 成立。那么我们也有 $F' \in \mathcal{B}_h(2)$ 和 $S(F') = V$。 □

根据命题45，我们可以看出，识别两个备选项下 SPF 的匿名群，与识别由布尔函数表示的2-可表示群，是同一个问题。因此，遗憾的是，它的难度也相同。不过，研究 SPFs 所采用的不同策略或许也能为 2-可表示性带来启发。

事实上，我们的论文至少从两个方面加深了对可表示性的认识。首先，在方法论上，$G = S_h \times S_2$ 对 $\mathcal{P} = S_2^h = \{0,1\}^h$ 的作用提供了坚实的数学结构作为依据，并为构造布尔函数提供了一种方法，正如定理 8 所述。其次，一些针对社会偏好函数提出的定理可以直接改写为关于布尔函数的定理。例如，根据定理 38 和命题45，我们可以推导出以下命题。

命题46. 设 $V \leq S_h$ 包含一个类型为 $S_{H_1} \times S_{H_2}$的子群，其中 $\{H_1, H_2\}$ 是$H = [h]$. 的一个划分。那么，V 是 2-可表示的。

注意，对于 $\{H_1, H_2\}$ 是 $H = [h]$的一个划分的情形，群 $S_{H_1} \times S_{H_2}$构成 S_h的极大非传递子群的共轭类。当 $|H_1| = |H_2|$时， h 为偶数，而 $S_{H_1} \times S_{H_2}$ 在 S_h 中不是极大子群，因为它包含在极大子群 $S_{h/2} \wr S_2$的一个副本中。换言之，命题46保证以下群是 2-可表示的：当 $m \in [h-1]$时的 $S_m \times S_{h-m}$，以及当 h 为偶数时的 $S_{h/2} \wr S_2$。这些事实也可由定理 3.1、定理5.4]得出。

11 对称性问题与轨道扩张

本节介绍子群 U 在 G 中的轨道扩张 $O(U)$这一概念。它是 U 的一个特殊超群；当 U 是对称群时，它等于 U 本身。这是本文的一个主要结果，并为判断 G 的子群是否为对称群提供了非常有力的工具。此外，根据命题 26，它还提供了一种工具，用于判断 G 中包含在 $S_h \times \{id\}$ 内的子群是否为匿名群。

我们先在 G 的子群集合上定义一个关系。

定义47。设 $U, V \leq G$。若满足以下条件，我们记作 $U \leq_{\mathcal{P}} V$

$$p^U \subseteq p^V, \quad \forall\, p \in \mathcal{P}.$$

若 $U \leq_{\mathcal{P}} V$ 且 $V \leq_{\mathcal{P}} U$ 时，我们记作 $V \cong_{\mathcal{P}} U$，并称 U 与 V 在 $\mathcal{P}$ 上轨道等价 .

当然， $U \leq V$ 蕴含 $U \leq_{\mathcal{P}} V$，但反过来并不成立。注意，$\cong_{\mathcal{P}}$ 确实是一种等价关系。关系 $\leq_{\mathcal{P}}$ 的作用可由以下结果看出。

命题 48. 设 U、$V \leq G$ 满足 $\langle U$、$V\rangle \in \mathcal{R}$。则有以下结论：

(i) *If* $U \leq_{\mathcal{P}} V$, *then* $\mathcal{F}^V \subseteq \mathcal{F}^U$.

(ii) *If* $U \cong_{\mathcal{P}} V$, *then* $\mathcal{F}^V = \mathcal{F}^U$.

证明。(i) 令 $\mathrm{p}_V = (p^j)_{j=1}^{R_V} \in \mathfrak{S}(V)$ 为 $\mathcal{P}$ 上 V-轨道的代表系。根据$U \leq_{\mathcal{P}} V$，对所有 $j \in [R_V]$，我们有 $p^{jU} \subseteq p^{jV}$。因此，对于互不相同的 $i, j \in [R_V]$，有 $p^{jU} \cap p^{iU} \subseteq p^{jV} \cap p^{iV} = \varnothing$。于是，$\mathrm{p}_V$ 的分量是 U-轨道中某个子集的代表元。特别地，我们有 $R_U \geq R_V$，并且可以补全有序列表 p_V，从而得到 $\mathcal{P}$ 上 U-轨道的代表系 $\mathrm{p}_U = (p^j)_{j=1}^{R_U} \in \mathfrak{S}(U)$。令 $F \in \mathcal{F}^V$，并令 $F(p^j) =:$ 对于 $j \in [R_U]$，有 $q_j \in S_n$。根据定理 8，存在唯一的 $\tilde{F} \in \mathcal{F}^U$ 使得

$$\tilde{F}(p^j) = q_j, \quad \forall\, j \in R_U.$$

我们断言 $F=\tilde{F}$。令 $p\in\mathcal{P}$。那么存在唯一的 $j\in[R_V]$ 使得 $p\in p^{jV}$。令 $(\varphi,\psi)\in V$，使得 $p=p^{j(\varphi,\psi)}$。根据 F 的 V-对称性，我们得到

$$F(p)=F(p^{j(\varphi,\psi)})=\psi q_j. \tag{9}$$

回想一下，$p^{jU}\subseteq p^{jV}$，会出现两种可能：$p\in p^{jU}$ 或 $p\in p^{jV}\setminus p^{jU}$。我们分别进行考察。

先设 $p\in p^{jU}$。那么存在 $(\bar{\varphi},\bar{\psi})\in U$ 使得 $p=p^{j(\bar{\varphi},\bar{\psi})}$。由于 $\tilde{F}\in\mathcal{F}^U$，我们有

$$\tilde{F}(p)=\tilde{F}(p^{j(\bar{\varphi},\bar{\psi})})=\bar{\psi}\tilde{F}(p^j)=\bar{\psi}q_j. \tag{10}$$

另一方面，我们有 $p^{j(\varphi,\psi)}=p=p^{j(\bar{\varphi},\bar{\psi})}$，并且根据 $\langle U$的正则性以及引理 6，$V\rangle$ 我们得到 $\psi=\bar{\psi}$。因此，由 (9) 和 (10)，可得 $F(p)=\psi q_j=\bar{\psi}q_j=\tilde{F}(p)$。

接着设 $p\in p^{jV}\setminus p^{jU}$。那么必然有 $R_U>R_V$，并且存在 $k\in\{R_V+1,\dots,R_U\}$ 和 $(\bar{\varphi},\bar{\psi})\in U$ 使得 $p=p^{k(\bar{\varphi},\bar{\psi})}$。此外，由于 $U\leq_{\mathcal{P}}V$，我们有 $p^k\in p^U\subseteq p^V=p^{jV}$。那么存在 $(\hat{\varphi},\hat{\psi})\in V$ 使得 $p^k=p^{j(\hat{\varphi},\hat{\psi})}$。由 $F\in\mathcal{F}^V$ 和 $\tilde{F}\in\mathcal{F}^U$，继而得到

$$\tilde{F}(p)=\tilde{F}(p^{k(\bar{\varphi},\bar{\psi})})=\bar{\psi}\tilde{F}(p^k)=\bar{\psi}F(p^k)=\bar{\psi}F(p^{j(\hat{\varphi},\hat{\psi})})=\bar{\psi}\hat{\psi}q_j. \tag{11}$$

另一方面，我们有 $p^{j(\varphi,\psi)}=p=p^{k(\bar{\varphi},\bar{\psi})}=p^{j(\bar{\varphi}\hat{\varphi},\bar{\psi}\hat{\psi})}$，并且根据 $\langle U$ 的正则性，结合引理 6 可得 $V\rangle$ 和 $\bar{\varphi}\hat{\varphi}=\bar{\psi}\hat{\psi}$。因此，由 (9) 和 (11) 得到 $F(p)=\psi q_j=\bar{\psi}\hat{\psi}q_j=\tilde{F}(p)$。

因此，我们已经证明了 $F=\tilde{F}$，因此 $\mathcal{F}^V\subseteq\mathcal{F}^U$。(ii) 根据 $U\leq_{\mathcal{P}}V$ 和 $V\leq_{\mathcal{P}}U$，利用 (i) 可得 $\mathcal{F}^V\subseteq\mathcal{F}^U$ 和 $\mathcal{F}^U\subseteq\mathcal{F}^V$。因此 $\mathcal{F}^V=\mathcal{F}^U$。 □

定义 49。设 $U\in\mathcal{R}$。我们将 G 的子群集合定义为

$$\mathcal{A}(U):=\{V\in\mathcal{R}:V\geq U,\ V\leq_{\mathcal{P}}U\}$$

以及 G 的子群

$$O(U):=\langle\mathcal{A}(U)\rangle.$$

我们将 U 的轨道扩张称为 $O(U)$。注意 $U\in\mathcal{A}(U)$，因此

$$U\leq O(U)\leq G. \tag{12}$$

容易看出，如果 $g\in G$，那么 $O(U^g)=O(U)^g$。为简洁起见，我们省略这一常规证明。特别地，如果 U 是 G 的正规子群，那么 $O(U)$ 也是 G. 的正规子群。

命题 50. 设 $U\in\mathcal{R}$。则以下事实成立：

(i) $O(U)\in\mathcal{R}$。(ii) $\mathcal{F}^U=\mathcal{F}^{O(U)}$。(iii) $\bigcap_{F\in\mathcal{F}^U}G(F)=O(U)$。

证明. (i)-(ii) 根据命题 4，我们有

$$\mathcal{F}^{O(U)}=\mathcal{F}^{\langle\mathcal{A}(U)\rangle}=\bigcap_{V\in\mathcal{A}(U)}\mathcal{F}^V. \tag{13}$$

令 $V\in\mathcal{A}(U)$。则有 $V\leq_{\mathcal{P}}U$ 和 $U\leq V\in\mathcal{R}$。因此，根据命题 48，我们推出$\mathcal{F}^U\subseteq\mathcal{F}^V$。所以，根据 (13)、$U$ 的正则性以及定理 7，我们得到

$$\mathcal{F}^{O(U)}=\bigcap_{V\in\mathcal{A}(U)}\mathcal{F}^V\supseteq\mathcal{F}^U\neq\varnothing.$$

特别地， $\mathcal{F}^{O(U)} \neq \varnothing$，因此根据定理 7， $O(U)$ 是正则的。此外，根据 $U \leq O(U)$，我们还有 $\mathcal{F}^{O(U)} \subseteq \mathcal{F}^U$，从而得到 $\mathcal{F}^U = \mathcal{F}^{O(U)}$。

（iii）定义

$$S := \bigcap_{F \in \mathcal{F}^U} G(F)$$

并令 $F \in \mathcal{F}^U$。由（ii），我们有 $F \in \mathcal{F}^{O(U)}$，因此 $G(F) \geq O(U)$。由此可得 $S \geq O(U)$。我们证明等号成立。反设 $S > O(U)$，并令 $g = (\varphi, \psi) \in S \setminus O(U)$。我们注意到 $\langle g, U \rangle \in \mathcal{R}$。事实上，由于 $U \leq S$和 $g \in S$，可得 $\langle g, U \rangle \leq S$。现在， S显然是正则的，因为它包含于 $G(F) \in \mathcal{R}$。因此，其子群 $\langle g, U \rangle$也正则。若假设对所有 $p \in \mathcal{P}$都有 $p^g \in p^U$，则 $\langle g, U \rangle \leq_{\mathcal{P}} U$，从而 $\langle g, U \rangle \in \mathcal{A}(U)$。于是 $g \in O(U)$，与假设矛盾。因此存在 $\bar{p} \in \mathcal{P}$ 使得 $\bar{p}^g \notin \bar{p}^U$。由于 $\bar{p}$ 和 $\bar{p}^g$ 属于两个不同的 U-轨道，可以将它们分别选作 $\bar{p}^U$和$(\bar{p}^g)^U$的代表元。于是令 $p^1 := \bar{p}^g$，
$p^2 = \bar{p}$ p^j U U :，并将此列表补全为一个系统 $(\ )_{j=1}^{R_U} \in \mathfrak{S}(\ )$ 的代表元，以代表 $\mathcal{P}$上的 -轨道。由定理 8，存在唯一的 $F \in \mathcal{F}^U$使得对所有 $j \in [R_U]$， $F(p^j) = id$。由于$g \in S$，我们有 $g \in G(F)$，因此

$$id = F(p^1) = F(\bar{p}^g) = \psi F(\bar{p}) = \psi F(p^2) = \psi. \tag{14}$$

现在固定 $\sigma \in S_n \setminus \{id\}$.。根据定理 8，存在唯一的 $\hat{F} \in \mathcal{F}^U$，使得 $\hat{F}(p^1) = \sigma$，且对所有 $j \in [R_U] \setminus \{1\}$， $\hat{F}(p^j) = id$。由于 $g \in G(\hat{F})$，利用（14），我们得到

$$\sigma = \hat{F}(p^1) = \hat{F}(\bar{p}^g) = \hat{F}(\bar{p}) = \hat{F}(p^2) = id,$$

矛盾。 □

我们终于可以给出对称性和匿名性的必要条件了。

推论 51. 如果 U 是对称群，那么 $O(U) = U$。

证明。根据假设，存在 $F \in \mathcal{F}^U$ 使得 $G(F) = U$。由命题 21（ii），我们知道 $U \in \mathcal{R}$。于是，由命题 50（iii），可得 $O(U) \leq U$。根据（12），我们还有 $U \leq O(U)$，因此 $O(U) = U$。 □

推论 52. 如果 U 是匿名群，那么 $O(U) = U$。

证明。若 U是一个匿名群，则 $U \leq S_h \times \{id\}$，且根据命题 26， U也是一个对称群。因此，根据推论 51，我们得到 $O(U) = U$。 □

推论 53。若置换群 V是 2-可表示的，则 $O(V \times \{id\}) = V \times \{id\}$。

证明。这可由命题 45 和推论 52 直接推出。 □

据我们所知，推论 53 所表达的关于 2-可表示性的必要条件，过去在文献中似乎从未被明确指出过。与我们的 $O(U)$类似的形式化思路，可见于 [7] 和 [8],，它们是在 k值布尔函数的背景下，并以伽罗瓦连接的方式处理这一问题。此外，在关系群的背景下， [6] 中也出现了类似的形式化。当然，自 [5]以来，文献无疑已强调：必须考虑到 S_h 的不同子群可能在 $\{0,1\}^h$上产生相同轨道这一可能性，以及这对可表示性问题所带来的影响。其他重要论述见于 [11]。特别是， [11, 定理 2.2] 保证，当且仅当 V是在 $\{0,1\}^h$上具有相同轨道数的 S_h 的子群中极大的子群时， $V \in \mathrm{BGR}_h$。

毫无疑问， $O(U)$ 的定义 49 可能显得有些古怪，人们或许会希望它更简单一些。遗憾的是，要实现

推论 51 和 52 所提出的目标，似乎必须保留其中所有细节。一个小小的安慰是，对于 $U \in \mathcal{R}$，可以考虑 G 中更易于处理的子集

$$W(U) := \{g \in G : p^g \in p^U, \quad \forall p \in \mathcal{P}\}.$$

这个集合与 $O(U)$ 有很强的联系，尽管一般而言， $W(U) \neq O(U)$。不过，借助以下结果， $W(U)$ 能够大大简化 $O(U)$ 的计算。

命题 54. 设 $U \in \mathcal{R}$。则以下结论成立

(i) $O(U) \leq W$。(ii) $W(U) \in \mathcal{R}$ 当且仅当 $W(U) = O$。(iii) $U \cong_{\mathcal{P}} O(U)$。$(iv)$ 若 $U \leq S_h \times \{id\}$，则 $W(U) \leq S_h \times \{id\}$ 且 $W(U) = O(U)$。(v) $W(U)$ 可能不是正则的，因此不同于 $O(U)$。

证明. (i) 为了证明 $W(U) \leq G$，只需证明它对乘积封闭。令 $g_1, g_2 \in W(U)$。固定 $p \in \mathcal{P}$。根据 $W(U)$ 的定义，存在 $u_1, u_2 \in U$，使得 $p^{g_2} = p^{u_2}$ 且 $(p^{u_2})^{g_1} = (p^{u_2})^{u_1}$。由此可得

$$p^{g_1 g_2} = (p^{g_2})^{g_1} = (p^{u_2})^{g_1} = (p^{u_2})^{u_1} = p^{u_1 u_2} \in p^U.$$

现在令 $Z \in \mathcal{A}(U)$。根据 $\mathcal{A}(U)$ 的定义，我们有 $p^Z \subseteq p^U$，对所有 $p \in \mathcal{P}$ 均成立。因此 $W(U) \geq Z$，从而 $W(U) \geq \langle \mathcal{A}(U) \rangle = O(U)$。

(ii) 假设 $W(U) \in \mathcal{R}.$。根据 $W(U)$ 的定义，我们得到 $p^{W(U)} \subseteq p^U$，对所有 $p \in \mathcal{P}$ 均成立。因此 $W(U) \leq_{\mathcal{P}} U$。此外，显然有 $U \leq W(U) \in \mathcal{R}$。由此可得 $W(U) \in \mathcal{A}(U)$ 且 $W(U) \leq O(U)$。因此，根据 (i)， $O(U) = W(U)$。

反过来，若有 $O(U) = W(U)$，则根据命题 50 (i)，我们有 $O(U) \in \mathcal{R}$，从而 $W(U) \in \mathcal{R}$.

(iii) 由于 $U \leq O(U)$，显然有 $U \leq_{\mathcal{P}} O(U)$。我们证明 $O(U) \leq_{\mathcal{P}} U$。令 $g \in O(U)$。于是根据 (i)，我们有 $g \in W(U)$，从而 $p^g \in p^U$，对所有 $p \in \mathcal{P}$ 均成立。因此 $p^{O(U)} \subseteq p^U$。

(iv) 令 $U \leq S_h \times \{id\}$ 和 $g = (\varphi, \psi) \in W(U)$。考虑 $p \in \mathcal{K}$ 一个常值偏好配置，其中 $p_i = id$ 对所有 $i \in [h]$ 均成立。于是 $p^U = \{p\}$，因此 $p^g \in p^U$ 推出 $p^g = p$，从而 $p_1^g = p_1$，也就是说，$\psi id = id.$。因此 $\psi = id$，这表明 $g \in S_h \times \{id\}$。由 (ii) 以及正则性的定义，现在可得 $O(U) = W(U)$。

(v) 根据 (ii)，我们只需举出一个群 U，使得 $W(U) \notin \mathcal{R}.$。考虑 $(h, n) = (2, 2)$ 和 $U = \{id\} \times S_2$。由命题 11 可知， $G = S_2 \times S_2$ 不是正则的。因此，只需证明 $W(U) = G.$。令 $p \in \mathcal{P}$。那么我们有

$$p^{((12),id)} = \begin{cases} p & \text{if} \quad p_1 = p_2 \\ p^{(id,(12))} & \text{if} \quad p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

无论如何，我们有 $p^{((12),id)} \in p^U$。因此 $((12)\ id) \in W(U)$，从而 $W(U) \geq \langle ((12)\ id)\ U \rangle = G$，所以 $W(U) = G$. □

作为轨道扩张概念的一项应用，我们现在可以完成对 $A_h \times \{id\}$ 的讨论，该讨论始于例 28。下面的结果完整回答了 Kelly 在 [9]中提出的一个问题。我们强调，交错群在社会选择文献中受到广泛关注，因此，确定 $A_h \times \{id\}$ 何时是一个匿名群十分重要。然而，通常缺少明确的形式化证明。例如，在 [9, 第 91], 页中，研究了一类针对 $h = 3$ 和 $n = 2$ 的特定社会偏好对应，并指出 $A_3 \times \{id\}$ 对它们而言不是匿名群，却没有给出证明。

命题 55. 设（h, n）是一个投票对。那么以下事实成立：

（i）如果 $h \leq n!$，那么 O（$A_h \times \{id\}$）$= A_h \times \{id\}$。（ii）如果 $h > n!$，那么 O（$A_h \times \{id\}$）$= S_h \times \{id\}$。（iii） $A_h \times \{id\} \in$ SPFAG$_h$（n）当且仅当 $h \leq n$!.

证明。（i）由例 28 可知，当 $h \leq n!$ 时， $A_h \times \{id\}$ 是一个匿名群。因此，由推论 52 可得 O（$A_h \times \{id\}$）$= A_h \times \{id\}$.

（ii）设 $n > h!$，并设 $U := A_h \times \{id\}$ 且 $V := S_h \times \{id\}$。我们证明$U \cong_{\mathcal{P}} V$。 $U \leq_{\mathcal{P}} V$是平凡的。反过来，固定 $p \in \mathcal{P}$和（φ， id）$\in V$。我们证明 $p^{(\varphi,id)} \in p^U$。如果 $\varphi \in A_h$，则无需证明。假设 $\varphi \notin A_h$。由于 $h > n!$，存在互不相同的 i、$j \in [h]$，使得 $p_j = p_i$。于是$p^{((ij),id)} = p$。由 $\varphi \notin A_h$ 可得 φ（ij）$\in A_h$，因此

$$p^{(\varphi,id)} = (p^{((ij),id)})^{(\varphi,id)} = p^{(\varphi(ij),id)} \in p^U.$$

这意味着 $V \leq_{\mathcal{P}} U$和$V \cong_{\mathcal{P}} U$。由于 $V \in \mathcal{R}$，我们有 $V \in \mathcal{A}(U)$ 和 $O(U) \geq V > U$。此外，根据命题 54，我们有 $O(U) \leq W(U) \leq V$，因此 $O(U) = V$.

(iii) 如果 $h \leq n!$ 我们就援引例 28。如果 $n > h!$，那么根据 (ii)，我们知道 $O(U) > U$。因此，根据推论 52， U 不可能是匿名群。要处理对称性，只需应用命题 26。 □

注意，作为推论 53 和命题 55 的推论，我们可以得出一个众所周知的事实：对于 $h \geq 3$, $A_h \notin$ BGR$_h$(2)。另一个有趣的推论是，命题 22 的逆命题不成立。事实上，取 $n = 3$ 和 $h = 5$. 。那么我们有 gcd(5, 3!) $= 1$，但投票对 (h, n) =(5, 3) 并非完全对称，因为根据命题 55, $A_5 \times \{id\}$ 不是对称群。

例 56。设 (h, n) =(4, 2)，且 $U = K \times \{id\}$，其中 $K \leq S_4$ 是克莱因群。那么 $O(U) = U$。

证明。在整个证明中，我们使用命题33的证明中引入的相同记号。反设 $O(U) > U$。由于 U 是 $S_4 \times \{id\}$ 的正规子群，因此 $O(U)$ 也是 $S_4 \times \{id\}$ 的正规子群。

因此，根据 S_4 的正规子群的结构，我们有

$$O(U) \in \{S_4 \times \{id\},\ A_4 \times \{id\}\}.$$

由此可得 ((123) id) $\in O(U)$。现在考虑 $p = [1100]$，并注意到

$$p^{((123),id)} = [0110]$$

而

$$p^U = \{[1100], [0011]\}.$$

因此 $p^{((123),id)} \notin p^U$，从而 ((123) id) $\notin W(U)$。由此，根据命题 54，我们也有 ((123) id) $\notin O(U)$, 这就产生了矛盾。 □

由于根据命题33，我们知道 $K \times \{id\} \notin$ SPFSG$_4$(2)，上述例子表明，条件 $O(U) = U$ 并不能保证 U 是一个对称群。换言之，推论 52 不可逆。我们尚未发现其他满足 $O(U) = U$ 且$U \notin$ SPFSG$_h$(2) 的 $U \leq S_h \times \{id\}$。另一方面，在 $S_h \times \{id\}$ 未涵盖的子群中，肯定还存在其他病态情形。例如，考虑投票对 (3, 2) 和群 $U = \{id\} \times S_2$。根据命题44，我们知道 $U \notin$ SPFSG$_3$(2)。然而, $O(U) = U$。事实上，可以

证明，对于每个投票对 (h, n)，每个 $U \leq \{id\} \times S_n$ 都满足 $O(U) = U$。其原因涉及一些关于将 $O(U)$ 分解为子群的直积的技术考量，这将成为未来研究的一部分。

显然，我们对 SPFSG$_h(n)$、SPFSG$_h$、SPFSG(n) 和 SPFSG 的理解远未完全。我们关于它们的研究成果只是冰山一角，仍有许多值得探索。

参考文献

[1] D. Bubboloni, M. Gori, 匿名且中立的多数规则，《社会选择与福利》43 (2014), 377–401.[2] D. Bubboloni, M. Gori, 对称多数规则，《数理社会科学》76 (2015), 73–86.[3] D. Bubboloni, M. Gori, 社会选择对应的确定性细化，《数理社会科学》84 (2016), 37–49.[4] D. Bubboloni, M. Gori, 集体决策中的平局裁决，《经济与金融决策》44 (2021), 411–457.[5] P. Clote, E. Kranakis, 布尔函数、不变群与并行复杂性，《SIAM计算杂志》20 (1991年), 553–590.[6] F. Dalla Volta, J. Siemons, 关于无序关系定义的轨道等价与置换群，《代数组合学杂志》35 (2012), 547–564.[7] E. K. Horv´ath, G. Makay, R. P¨oschel, T. Waldhauser, 有限函数的不变群与置换群的轨道等价，《开放数学》13, no. 1 (2015), 83–95.[8] E. K. Horv´ath, R. P¨oschel, S. Reichard, 函数的不变群及相关的伽罗瓦连接，Beitr¨age zur Algebra und Geometrie/代数与几何贡献 62 (2021), 495–512.[9] J. S. Kelly, 猜想与未解问题，9. 对称群，《社会选择与福利》8 (1991), 89–95.[10] J. S. Kelly, 社会选择中的阿贝尔对称群，《数理社会科学》25 (1992), 15–25.[11] A.Kisielewicz, 布尔函数的对称群与置换群的构造，《代数杂志》199 (1998), 379–403.[12] M. Grech, 布尔函数的正则对称群，《离散数学》310 (2010), 2877–2882.[13] A. Kisielewicz, M. Grech, 布尔函数的对称群，《欧洲组合学杂志》40 (2014), 1–10.

[14] A.Kisielewicz, M. Grech, 轨道闭置换群、关系群与单群, 《代数组合学杂志》(2023), 1–28. doi:10.1007/s10801-022-01214-2[15] H. Moulin, 社会选择策略, 《经济学高级教材》, 1983, 北荷兰出版公司。