# 一种用于高周疲劳的相场模型：全寿命分析

Alireza Golahmar[a, b]，Christian F. Niordson[a]，Emilio Martínez-Pañeda[b, *]

[a]丹麦技术大学机械工程系，丹麦孔斯灵比 *DK-2800*[b]帝国理工学院土木与环境工程系，英国伦敦 *SW7 2AZ*

arXiv:2302.01930v1 [cs.CE] 1 Feb 2023

**摘要**

我们提出了一种通用相场公式，用于预测金属中的高周疲劳。文中介绍了不同的疲劳退化函数以及新的损伤累积策略，以考虑：(i) 典型的 S-N 曲线斜率；(ii) 疲劳极限；以及 (iii) 平均应力效应。数值实现采用高效的拟牛顿整体求解策略，并计算了光滑试样和缺口试样的虚拟 S-N 曲线。与实验结果的对比表明，该模型能够准确预测疲劳寿命和疲劳极限，同时还能自然地捕捉应力集中系数和载荷比的影响。

关键词：
相场、有限元法、疲劳、S-N 曲线、全寿命分析

## 1. 引言

疲劳载荷作用下材料的断裂可以说是工程构件失效的主要机制，导致了所有结构失效中的（高达）90% [1]。由于其复杂性，开发能够预测疲劳裂纹扩展的数值方法具有重要价值，并且数十年来一直是一个重要的研究领域。通常，疲劳损伤的演化可分为两个阶段：(i) 裂纹萌生和 (ii) 裂纹扩展。在萌生阶段，材料中会形成微孔洞等永久性微观退化现象，随后产生微裂纹。这些微裂纹开始扩展并最终聚合，形成主要的疲劳（宏观）裂纹。随后，这些宏观裂纹中的一条或多条会先以稳定方式扩展，最终转为不稳定扩展，导致构件完全失效。

疲劳设计通常基于经典经验方法，这些方法需要对大量实验测试数据进行拟合 [2]。此类方法将疲劳寿命估算为以下因素的函数：

*通讯作者。电子邮箱： e.martinez-paneda@imperial.ac.uk (Emilio Martínez-Pañeda)

循环应力（或应变）范围，其中疲劳寿命定义为失效前的循环次数（$N_f$）或反向次数（$2N_f$）。该领域的开创性研究来自 W¨ohler [3], ，其方法通常称为应力寿命法或 S-N曲线法。一般而言，疲劳寿命分析分为两种极限情况。一种称为高周疲劳（HCF），在此情况下，材料承受较低的循环应力幅，主要以弹性方式变形，且需要经历大量循环次数才会失效（通常可达 $10^6$ 循环次数）。这种方法已广泛应用于低幅循环应力场景，例如承受风和海浪所引起的交变机械载荷的海上风电结构。另一种情况是施加的应力足以引起塑性变形，因此只需较少的循环次数便会失效；循环次数为 $10^4$ 或更少，这种情况称为低周疲劳（LCF）。由于应力寿命法具有经验性，其适用范围有限，几乎无法推广至任意材料、几何形状和加载条件。

变分相场断裂模型可提供一种机理性计算框架，用于预测低周和高周疲劳，从而克服经验方法面临的挑战。该模型基于 Griffith热力学框架 [4], ：当固体释放的能量超过其临界值（即材料韧度）时，裂纹便会扩展。Francfort 和 Marigo [5]提出了 Griffith能量平衡的变分形式，Bourdin 等人 [6] 则引入了标量相场变量，对由此得到的泛函进行正则化，并通过储存能与断裂能之间的交换，获得裂纹演化的计算预测。自早期发展以来，相场断裂方法日益受到关注，其应用范围也已扩展至众多领域，包括延性损伤 [7–9], 、动态断裂 [10–12], 、复合材料分层 [13–15], 、功能梯度材料断裂 [16, 17], 以及氢致开裂[18–20],等；概述参见文献 [21, 22] 。

近年来，研究者一直致力于将疲劳损伤纳入变分相场断裂方法。Lo 等人 [23] 在脆性断裂标准相场模型中引入黏性项，并结合修正的 $J$积分，以产生 Paris定律型疲劳裂纹扩展行为。更常见的做法是引入一个额外变量来描述疲劳历史。该变量的定义方式有两种：一是作为相场微力平衡中的耗散项[24–26], ，以有效降低裂纹扩展阻力；二是作为疲劳退化函数，以降低材料韧度 [27–32]。相应地，还需引入一个额外方程来描述疲劳历史变量的演化/累积。Boldrini 等人[24] 根据热力学原理推导了这一额外方程，而 Loew 等人 [25]则提出了一个基于

微裂纹扩展的方程。Seiler 等人 [29] 采用局部应变方法，通过 Neuber 定则以经验方式纳入塑性，而 Schreiber 等人 [26]则采用 Miner 定则来控制疲劳损伤的演化。Alessi 及其合作者 [27] 提出，将疲劳损伤的演化描述为每个循环加载阶段累积应变的函数。遵循 [27], 作者在 [28, 30, 33–37] 中的做法，仅在加载阶段（ [35]中为卸载阶段）累积应变能密度的拉伸（非压缩）部分（ [36, 37]中为弹塑性能量密度）。

本文提出了一种用于模拟金属材料疲劳行为的广义公式。我们将研究范围限定于高周疲劳（HCF）分析，并以 Alessi 等人[27] 和 Carrara 等人 [28]提出的疲劳变分相场方法为基础构建该公式。本文提出了新的疲劳损伤演化累积策略，以捕捉典型的 S-N 曲线斜率、疲劳极限和平均应力效应（载荷/应力比）。该框架涵盖了应用最广泛的两种相场断裂模型，即所谓的`AT1` [38] 和 `AT2` [6]。值得注意的是，数值实现采用拟牛顿整体求解方案 [39, 40], ，这对于最大限度地降低逐循环疲劳模拟的计算成本至关重要。此外，本文提出的新累积策略还可进一步加快计算，因为如下文所述，它使得每个加载循环只需对耦合系统进行一次迭代求解。

第 2 节首先介绍本文提出的广义相场疲劳框架的理论要素。随后，第 3 节详述数值实现。第 4 节给出所得结果。本文研究了若干边值问题，以考察所提建模框架的性能。首先，深入研究均质杆在单轴循环/单调加载下的响应，以展示所引入的不同材料参数和模型参数的影响。此外，预测了不同载荷比和缺口半径下带缺口圆柱棒的失效，并将预测结果与两种钢材（AISI 4340 和 300M）的疲劳实验（S-N 曲线）进行比较。最后，本文在第 5 节以总结性评论作结。

## 2. 疲劳损伤相场模型

本节所述的公式针对占据体积 $\Omega \subset \mathbb{R}^{\delta}$ ($\delta \in [1, 2, 3]$) 的弹性固体的响应，该固体具有外表面 $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{\delta-1}$ ，其单位外法向为 $\mathbf{n}$。我们首先定义模型的场变量（第2.1节），然后运用虚功率原理推导力平衡（第2.2节），接着建立局部自由能

在等温条件下的不平衡关系（第2.3节），最后将理论具体化，针对固体的变形、断裂和疲劳行为选取合适的本构关系（第2.4节）。

### *2.1.* 场变量与运动学

主要场变量为位移场向量 $\mathbf{u}$ 和损伤相场 $\phi$。假设小变形，应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mathsf{T}}\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}\right) \tag{1}$$

疲劳裂纹的成核与扩展通过采用平滑连续的标量相场 $\phi \in [0;1]$来描述。使用辅助相场变量隐式追踪界面，已被证明是处理众多界面问题的一种极具吸引力的计算方法，例如微观结构演化 [41] 和金属腐蚀 [42]。在断裂力学中，相场变量类似于损伤变量；它必须单调增长 $\dot{\phi} \geq 0$，并描述损伤程度，其中 $\phi = 1$ 表示裂纹，$\phi = 0$ 对应完整材料点。由于 $\phi$ 平滑且连续，离散裂纹以弥散形式表示，裂纹的弥散程度由相场长度尺度 $\ell$控制。该弥散表示旨在跨越不连续表面 $\Gamma$，引入以下断裂能 [6]的近似：

$$\Psi^s = \int_\Gamma G_c \,\mathrm{d}S \approx \int_\Omega G_c \gamma_\ell(\phi, \nabla\phi)\,\mathrm{d}V\,, \qquad \text{for} \quad \ell \to 0^+\,, \tag{2}$$

其中，$\gamma_\ell$ 是所谓的裂纹表面密度泛函，$G_c$ 表示临界 Griffith 型能量释放率，或材料韧度。我们将这种与速率无关的断裂描述扩展至可处理与时间和历史相关的问题。因此，对于累积历史变量 $\bar{\alpha}$，若其满足 $\dot{\bar{\alpha}} \geq 0$（当前时刻为 $\tau$），且疲劳退化函数为 $f(\bar{\alpha})$，则断裂能可重新表述如下

$$\Psi^s = \int_0^t \int_\Omega f(\bar{\alpha}(\tau))\, G_c\, \dot{\gamma}_\ell(\phi, \nabla\phi)\,\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

### *2.2.* 虚功率原理。力平衡

现在使用虚功率原理推导耦合问题的平衡方程。对于位移 $\mathbf{u}$，将固体的外表面分解为一部分 $\partial\Omega_u$，在该部分上通过狄利克雷型边界条件规定位移；以及另一部分$\partial\Omega_h$，在该部分上通过 Neumann 型边界条件规定牵引力 $\mathbf{h}$ 。还可以规定单位体积的体力场

$\mathbf{b}$。对于相场 $\phi$，可以在 $\Gamma$处（即固体内部的给定裂纹表面）规定狄利克雷型边界条件。此外，还可以在 $\partial\Omega_f$上规定相场断裂微牵引力 $f$。相应地，外部和内部虚功率为

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{W}}_{\text{ext}} &= \int_{\partial\Omega} \left\{ \mathbf{h}\cdot\dot{\mathbf{u}} + f\dot{\phi} \right\} \mathrm{d}S + \int_{\Omega} \mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}V \\ \dot{\mathcal{W}}_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\sigma} : \nabla\dot{\mathbf{u}} + \omega\dot{\phi} + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\phi} \right\} \mathrm{d}V\end{aligned} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 是与弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$功共轭的柯西应力张量，而 $\omega$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 分别是与相场 $\phi$ 及其梯度 $\nabla\phi$功共轭的微应力。式（4）必须对任意区域 $\Omega$ 以及虚量的任意运动学容许变分成立。因此，应用高斯散度定理和变分法基本引理，可得局部力平衡方程（在 $\Omega$ 内）：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\xi} - \omega &= 0\end{aligned} \tag{5}$$

以及以下自然边界条件（在 $\partial\Omega$ 上）：

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} \\ f &= \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{n}\end{aligned} \tag{6}$$

### *2.3.* 自由能不平衡

热力学第一定律和第二定律可通过单位体积的亥姆霍兹自由能 $\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\ \phi,\ \nabla\phi)$ 和外功 $\mathcal{W}_{\text{ext}}$ 表示：

$$\int_{\Omega} \dot{\psi}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega} \dot{\mathcal{W}}_{\text{ext}}\,\mathrm{d}S \le 0 \tag{7}$$

这通常称为克劳修斯–杜亥姆不等式。代入式（5）–（6）并应用散度定理，可将局部自由能不等式改写为：

$$\int_{\Omega} \dot{\psi}\,\mathrm{d}V - \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\sigma} : \nabla\dot{\mathbf{u}} + \omega\dot{\phi} + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\phi} \right\} \mathrm{d}V \le 0 \tag{8}$$

该式必须对任意体积成立，因此也必须在局部意义上成立：

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \omega - \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \right) \dot{\phi} + \left( \xi - \frac{\partial\psi}{\partial\nabla\phi} \right) \cdot \nabla\dot{\phi} \ge 0 \tag{9}$$

其中提出自由能函数 $\psi$，将固体的弹性应变能密度 $\psi^e$ 与断裂表面能密度 $\psi^s$ 相加，得到：

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi, \nabla\phi \,|\, \bar{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) + \psi^s(\phi, \nabla\phi \,|\, \bar{\alpha}) \tag{10}$$

### *2.4.* 本构理论

与自由能定义式（10）一致，下面我们将建立一种本构理论，以耦合固体的变形、断裂和疲劳行为。

#### *2.4.1.* 弹性

应变能密度 $\psi^e$ 定义为弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$、各向同性线弹性刚度张量$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ 以及相场退化函数 $g(\phi)$ 的函数，该退化函数将在后文定义。因此，

$$\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon},\phi) = g(\phi)\psi_0^e(\boldsymbol{\varepsilon}) \qquad \text{with} \quad \psi_0^e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}} : \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{11}$$

其中， $\psi_0^e$ 表示未损伤各向同性固体的应变能密度。因此，柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 现在可推导为

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = g(\phi)\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{12}$$

这强调了相场序参量如何降低固体的刚度，与连续损伤力学方法中的情况相同。

#### *2.4.2.* 断裂表面能

断裂固体 $\psi^s$ 的表面能密度与式（3）一致，定义为相场损伤 $\phi$、其梯度 $\nabla\phi$ 以及待定义的疲劳退化函数 $f(\bar{\alpha})$ 的函数，

$$\psi^s(\phi, \nabla\phi \,|\, \bar{\alpha}) = f(\bar{\alpha})\, G_c\, \gamma_\ell(\phi, \nabla\phi) \tag{13}$$

其中，裂纹表面密度泛函 $\gamma_\ell$ 表示为

$$\gamma_\ell(\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{4c_w}\left(\frac{w(\phi)}{\ell} + \ell|\nabla\phi|^2\right) \qquad \text{with} \quad c_w = \int_0^1 \sqrt{w(\zeta)}\mathrm{d}\zeta \tag{14}$$

其中 $w(\phi)$ 是待定义的几何裂纹函数，而 $c_w$ 是一个缩放常数 t.

#### *2.4.3.* 应变能分解

为防止压缩作用下裂纹的成核与扩展，可将应变能密度分解为活性（拉伸）部分和非活性（压缩）部分，

$$\psi^e\left(\boldsymbol{\varepsilon},\phi\right) = g(\phi)\,\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{15}$$

其中，我们采用 Ambati等人提出的混合 公式 [43] ，仅对相场演化方程应用分解。在文献提出的多种分解方案中，

本文采用以下选择:

i) `Spectral tension-compression` Miehe 等人提出的分解 [44]:

$$\psi_0^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\lambda\langle \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle_{\pm}^2 + \mu\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^2\right)\ ,\ \text{with}\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} = \sum_{i=1}^{3}\langle\varepsilon_i\rangle_{\pm}\,\boldsymbol{n}_i\otimes\mathbf{n}_i \tag{16}$$

ii) `No-tension` Freddi 等人提出的分解 [45] （另请参见 [23] 关于三维应变状态的内容） :

$$\psi_0^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}) + \mu\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^2\right)\ ,\ \text{with}\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} = \mathrm{sym}_{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{17}$$

iii) `Volumetric-deviatoric`Amor 等人提出的分解 [46]:

$$\begin{aligned}\psi_0^{+}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}\left(\lambda+\tfrac{2}{3}\mu\right)\langle\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle_{+}^2 + \mu\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}\right)\\ \psi_0^{-}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}\left(\lambda+\tfrac{2}{3}\mu\right)\langle\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle_{-}^2\end{aligned}\ ,\ \text{with}\ \ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \tag{18}$$

其中， $\lambda$ 和 $\mu$ 是各向同性材料的 Lam´é 常数，$\mathbf{I}$ 是单位矩阵。此外， $\pm$是正负号， $\langle\square\rangle$ 是 Macaulay 括号，使得 $\langle\square\rangle_{\pm} := \frac{1}{2}(\square\pm|\square|)$，而 $\mathrm{sym}_{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon})$是应变张量的正定/负定对称部分。对于 `Spectral` 和`No-tension`分解，无穷小应变张量可用主应变 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^3$ 和主应变方向 $\{\mathbf{n}_i\}_{i=1}^3$表示。

### *2.4.4.* 不可逆条件

损伤是一个不可逆过程，因此，相场演化定律必须满足条件 $\phi \geq 0$。为此，我们遵循 Miehe 等人 [47] 的做法，并定义当前时刻 $t$的历史变量场 $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{H} = \max_{\tau\in[0,t]}\psi_0^{+}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\tau))\,, \tag{19}$$

该变量在加载和卸载阶段均满足 Karush–Kuhn–Tucker（KKT）条件,

$$\psi_0^{+} - \mathcal{H} \leq 0\,, \qquad \dot{\mathcal{H}} \geq 0\,, \qquad \dot{\mathcal{H}}(\psi_0^{+} - \mathcal{H}) = 0 \tag{20}$$

### *2.4.5.* 相场断裂

接下来推导相场微应力量 $\omega$ 和 $\boldsymbol{\xi}$。首先，结合式 (11) 和 (19)，固体的总自由能密度 (13) (10) 可表示为

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\nabla\phi\,|\,\bar{\alpha}) = g(\phi)\mathcal{H} + f(\bar{\alpha})\frac{G_c}{4c_w}\left(\frac{w(\phi)}{\ell} + \ell|\nabla\phi|^2\right) \tag{21}$$

因此，微应力变量 $\omega$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 可直接推导为

$$\omega = \frac{\partial\psi}{\partial\phi} = g'(\phi)\mathcal{H} + f(\bar{\alpha})\frac{G_c}{4c_w\ell}w'(\phi) \qquad \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial\psi}{\partial\nabla\phi} = f(\bar{\alpha})\frac{G_c\ell}{2c_w}\nabla\phi \tag{22}$$

将这些本构关系代入相场局部平衡式 (5b)，可得疲劳载荷作用下裂纹相场演化的强形式，

$$\frac{G_c f(\bar{\alpha})}{2c_w}\left(\frac{w'(\phi)}{2\ell}-\ell\nabla^2\phi\right)-\frac{G_c\ell}{2c_w}\nabla\phi\nabla f(\bar{\alpha})+g'(\phi)\mathcal{H}=0 \tag{23}$$

*2.4.6.* 退化与耗散函数

首先，我们定义相场退化函数 $g(\phi)$，该函数控制因损伤演化而导致的储存弹性能退化，并且必须满足

$$g(0)=1,\qquad g(1)=0,\qquad g'(\phi)\leq 0\quad \text{for}\quad 0\leq\phi\leq 1 \tag{24}$$

其中，前两个约束分别对应完全完整状态和完全断裂状态的极限，而最后一个约束确保 $\partial\psi/\partial\phi$ 收敛于完全断裂状态下的最终值。为此，我们采用广泛使用的二次退化函数

$$g(\phi)=(1-\phi)^2 \tag{25}$$

此外，我们定义损伤耗散函数 $w(\phi)$，该函数控制新裂纹形成所导致的能量耗散，并且必须满足

$$w(0)=0,\qquad w(1)=w_1>0,\qquad w'(\phi)\geqslant 0\quad \text{for } 0\leq\phi\leq 1 \tag{26}$$

对于该函数，我们采用文献中可以说是最广泛使用的两种模型，即所谓的 AT1 [38] 和 AT2 [6] 相场模型。具体选择 $w(\phi)=\phi^2(c_w=1/2)$ 得到 AT2 模型，而 $w(\phi)=\phi(c_w=2/3)$ 则对应于 AT1 形式。后者在损伤开始之前引入纯弹性响应，不同于 AT2 情形，在该情形下 $w'(0)=0$。因此，应为 AT1 模型定义损伤驱动力阈值 $\mathcal{H}_{\min}$，使得历史场 (19) 满足

$$\mathcal{H}=\max\left\{\max_{\tau\in[0,t]}\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)),\,\mathcal{H}_{\min}\right\}\qquad\text{with}\quad\mathcal{H}_{\min}=\frac{3G_c}{16\ell} \tag{27}$$

考察式（23）的均匀解，有助于进一步了解相场长度尺度 $\ell$ 的作用。因此，在一维情形下，对于杨氏模量为 $E$ 的试样，当其承受单轴单调应力 $\sigma=g(\phi)E\varepsilon$ 时，应力的均匀解在以下临界强度和应变处达到最大值，

$$\texttt{AT1}:\ \sigma_c=\sqrt{\frac{3EG_c}{8\ell}},\ \varepsilon_c=\sqrt{\frac{3G_c}{8\ell E}},\qquad \texttt{AT2}:\ \sigma_c=\frac{3}{16}\sqrt{\frac{EG_c}{3\ell}},\ \varepsilon_c=\sqrt{\frac{G_c}{3\ell E}} \tag{28}$$

其中，$\ell$ 不仅是正则化参数，也是定义材料强度的材料属性。这使相场模型能够预测裂纹萌生，并自然地

再现过渡裂纹尺寸效应 [22, 48]；即同时捕捉韧性主导的失效（长裂纹）和强度主导的失效（短裂纹）。

### *2.4.7.* 疲劳损伤

相场疲劳模型已证明能够捕捉疲劳裂纹的成核与扩展，并能自然再现 W¨ohler 曲线或 Paris 定律行为等关键特征 [28]。然而，现有模型仍需改进，才能捕捉实验中常见且广泛纳入疲劳设计标准的行为。在全寿命分析中，这包括定义合适的模型/材料参数，以便捕捉：(i) S-N曲线的斜率，(ii) 材料的疲劳极限，以及 (iii) 载荷比效应。因此，我们旨在开发一个能够纳入这些额外建模能力的框架，并展示该框架再现实验数据以及自然捕捉应力集中系数作用的能力（例如，根据光滑试样的 S-N曲线预测带缺口构件的寿命）。

首先，遵循 [27], 通过引入疲劳退化函数 $f(\bar{\alpha})$，来捕捉循环载荷作用所导致的损伤；该函数根据固体经历的疲劳历史有效地降低材料韧度。本文考虑以下文献 [28, 35],提出的疲劳退化函数

$$
\begin{aligned}
f_0(\bar{\alpha}) &= \left(1 - \frac{\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_0}\right)^2 \qquad \text{for } \bar{\alpha} \in [\bar{\alpha}_0, \infty] \text{ (otherwise } f_0(\bar{\alpha}) = 1) \\
f_1(\bar{\alpha}) &= \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_0}\right)^2 \qquad \text{for } \bar{\alpha} \in [0, +\infty] \\
f_2(\bar{\alpha}) &= \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_0}\right)^2 \qquad \text{for } \bar{\alpha} \in [0, \bar{\alpha}_0]
\end{aligned}
\tag{29}
$$

其中， $\bar{\alpha}_0$ 旨在作为一种材料参数，通过实验进行标定。如图 1 所示，它们之间的主要区别在于， $f_0$ 和 $f_1$ 的值渐近趋于零，而$f_2$ 则在 $\bar{\alpha}$达到有限值时趋于零。此外， $f_0$ 还提供了一条初始阈值分支：随着 $\bar{\alpha}$ 增大，材料韧度不受疲劳影响。

此外，疲劳历史变量 $\bar{\alpha}$ 应描述任何能够反映材料循环历史的量 $\alpha$的累积。我们遵循 Carrara 等人 [28] 的做法，保持模型的能量特性，因此采用储存弹性能量密度的正值部分（定义见第2.4.3节）作为疲劳历史变量，即

$$
\alpha = g(\phi)\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{30}
$$

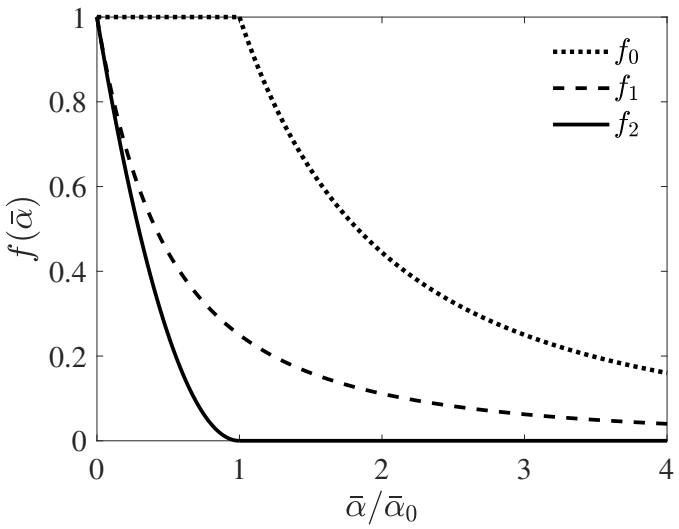


图 1：所考虑的三个疲劳退化函数的演化，见式 (29)。

请注意，采用退化后的应变能密度可确保该量不受裂纹尖端奇异性的影响。因此，在时间离散过程中，疲劳历史变量 $\bar{\alpha}$的演化由下式给出

$$\bar{\alpha}_{t+\Delta t} = \bar{\alpha}_t + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\bar{\alpha}}\, \mathrm{d}\tau = \bar{\alpha}_t + \Delta\bar{\alpha} \tag{31}$$

构建本构相场疲劳模型的一个关键方面在于定义 $\Delta\bar{\alpha}$，即用于考虑疲劳损伤累积的方法。在文献 [28], 中，仅在循环的加载阶段考虑疲劳损伤的累积，这会对比例（单调）加载情形产生不利影响。为解决这一问题，Seles 等人 [35]仅在卸载阶段考虑疲劳效应的累积。然而，我们发现，这可能会因材料点局部卸载而导致裂纹尖端后方区域的疲劳历史变量不切实际地增加。本文建议每个循环仅在一次反向过程中（从峰值到谷值，见图 2）累积疲劳效应，从而不影响单调加载情形。最重要的是，这种新的累积策略可显著降低计算成本，因为它只需每个循环使用一个增量，就能准确描述 $\bar{\alpha}$ 的累积。因此，对于恒定幅值情形，不再使用循环内的内部增量，而是施加一个恒定的（代表性）载荷，其幅值等于最大载荷值。如图 2 所示，疲劳历史变量的最大值和最小值分别记为 $\alpha_{\max}$ 和 $\alpha_{\min}$，并可在一次反向过程中的循环峰值和谷值处估算。

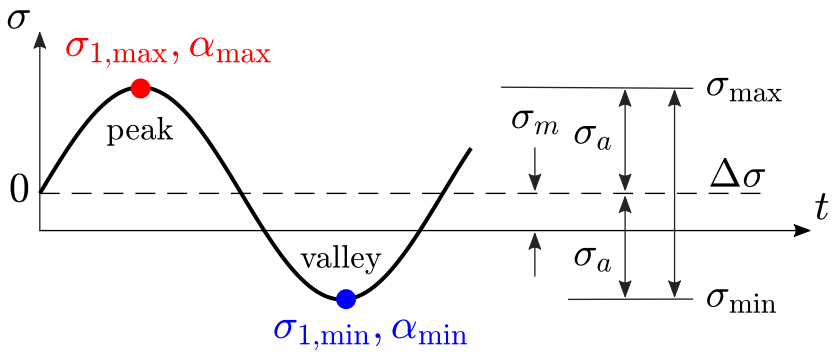


图2：恒幅循环应力加载及主要变量的定义。红点（峰值）表示计算 $\sigma^{\mathrm{I}}_{\max}$ 和 $\alpha_{\max}$ 的位置，蓝点（谷值）表示确定 $\sigma^{\mathrm{I}}_{\min}$ 和 $\alpha_{\min}$的时刻。

基于我们的疲劳累积策略，我们接下来定义 $\Delta\bar{\alpha}$ ，以提出一种考虑以下因素的模型：（i）S-N曲线的斜率；（ii）疲劳极限；以及（iii）应力比的影响。该广义表达式为：

$$\Delta\bar{\alpha} = \left(\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_n}\right)^n \left(\frac{1-R}{2}\right)^{2\kappa n} H\left(\max_{\tau\in[0,t]} \alpha_{\max}\left(\frac{1-R}{2}\right)^{2\kappa} - \alpha_e\right) \tag{32}$$

其各个要素描述如下。需要注意的是，此处 $\Delta\bar{\alpha}$ 被定义为无量纲量。附录A提供了与现有一些主要相场疲劳模型的比较。

*S-N* 曲线斜率。我们加入一个材料参数——指数 $n$——以及一个附加项（$\alpha_{\max}/\alpha_n$）$^n$，使模型具备匹配任意 S-N曲线斜率所需的灵活性。此处需要归一化参数 $\alpha_n$ 以实现量纲一致性。根据式（28）中给出的临界应力和应变，我们采用 $\alpha_n = 1/2\sigma_c\varepsilon_c$。

疲劳极限。引入疲劳阈值变量 $\alpha_e$ ，使模型具有材料疲劳极限；低于该极限时不会发生循环损伤。该变量与 Heaviside函数 $H$（□）结合使用：对于正参数，其值为1；对于负参数，其值为0。 $\alpha_e$ 的大小可根据材料疲劳极限应力 $\sigma_e$ 估算为 $\alpha_e = \sigma_e^2/$（$2E$）。

应力比。众所周知，疲劳行为对应力比具有显著的敏感性，应力比可定义为 $R = \sigma_{1,\min}/\sigma_{1,\max}$，其中 $\sigma_{1,\min}$ 和 $\sigma_{1,\max}$ 分别表示每个循环中的最小和最大主应力（见图 2）。对于比例加载，这种情况

适用于本文的所有分析，因此不会产生歧义。然而，对于非比例加载，必须谨慎地正确定义这些值。一种合适的做法是根据最大主值选取方向 $\boldsymbol{n}_1$，并计算该方向上的最大和最小正应力。需要注意的是， $R$ 并非模型的输入，而是一种材料点量，可在每个循环结束时估算。为了将 $R$引入疲劳历史变量的累积，我们借鉴了经典平均应力关系。具体而言，Walker平均应力关系 [49] 已被广泛用于扩展Basquin型定律，以考虑非零平均应力；该关系表示为：

$$\sigma_{ar} = \sigma_{\max}\left(\frac{1-R}{2}\right)^{\kappa}, \qquad \text{for } (\sigma_{\max} > 0) \tag{33}$$

其中， $\sigma_{ar}$ 表示平均应力为 $\sigma_m = 0$时的等效应力幅， $\sigma_{\max}$ 表示每个循环中的最大应力，$\kappa \in [0,1]$ 是一个材料常数，用于描述材料对平均应力的敏感程度。当 $\kappa = 0.5$时，Walker方程简化为著名的Smith-Watson-Topper（SWT）关系式 [50]。如式（32）所示，我们的模型采用基于Walker方程的项来捕捉载荷比效应。其他方法（涉及使用符号函数，见附录A）与实验结果吻合不佳。

## 3. 数值实现

此处介绍数值实现的细节，首先是有限元离散（第3.1节），随后是残差和刚度矩阵的构造（第3.2节）。

### *3.1.* 有限元离散

采用有限元（FE）方法求解耦合问题。利用Voigt记号，耦合问题的主要运动学变量可用其节点值离散表示，节点 $i$ 处的$\mathbf{u}_i = \{u_x, u_y, u_z\}_i^{\mathsf{T}}$ 和 $\phi_i$ 为

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i \qquad \text{and} \qquad \phi = \sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i \tag{34}$$

其中， $m$ 是每个单元的节点总数， $N_i$ 是与节点 $i$相关联的形函数，而 $\mathbf{N}_i$ 是形函数矩阵，即对角项为 $N_i$ 的对角矩阵。因此，相应的梯度量可离散化为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B}_i^u \mathbf{u}_i \qquad \text{and} \qquad \nabla\phi = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B}_i \phi_i \tag{35}$$

其中，$\mathbf{B}_i^{\mathbf{u}}$表示标准应变-位移矩阵，而$\mathbf{B}_i$是一个包含形函数空间导数的向量。

### *3.2.* 残差和刚度矩阵

现在，我们开始推导耦合问题的弱形式。根据虚功率原理 **(4)** 以及第2.4节所述的本构选取，位移问题和相场问题的弱形式为

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\{ \big[g(\phi)+k\big]\boldsymbol{\sigma}_0 : \nabla\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{u}} \right\} \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{h}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}S = 0 \\
&\int_\Omega \left\{ g'(\phi)\dot{\phi}\,\mathcal{H} + f(\bar{\alpha})\frac{G_c}{4c_w}\left(\frac{w'(\phi)\dot{\phi}}{\ell} + 2\ell\nabla\phi\cdot\nabla\dot{\phi}\right) \right\} \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_f} f\,\dot{\phi}\,\mathrm{d}S = 0
\end{aligned} \tag{36}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}_0$是未损伤固体的柯西应力张量，$k$是一个很小的正数，用于在$\phi = 1$时避免方程组出现病态；本文中$k = 10^{-7}$。现在，利用 **(34)** 和 **(35)** 中给出的有限元离散，并考虑到 **(36)**˙必须对虚量 $\square$ 的任意运动学容许变分成立，可得相应的残差:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i^u &= \int_\Omega \big[g(\phi)+k\big](\mathbf{B}_i^u)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\sigma_0}\,\mathrm{d}V - \int_\Omega (\mathbf{N}_i)^{\mathsf{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_h} (\mathbf{N}_i)^{\mathsf{T}}\mathbf{h}\,\mathrm{d}S \\
r_i^\phi &= \int_\Omega \left\{ g'(\phi)N_i\,\mathcal{H} + f(\bar{\alpha})\frac{G_c}{4c_w}\left(\frac{w'(\phi)}{\ell}N_i + 2\ell(\mathbf{B}_i)^{\mathsf{T}}\nabla\phi\right) \right\} \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_f} N_i\,f\,\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{37}$$

最后，通过对残差关于增量节点变量求导，得到一致切线刚度矩阵，如下所示:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ij}^u &= \frac{\partial \mathbf{r}_i^u}{\partial \mathbf{u}_j} = \int_\Omega \big[g(\phi)+k\big](\mathbf{B}_i^u)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\mathcal{L}}_0\,\mathbf{B}_j^u\,\mathrm{d}V \\
\mathbf{K}_{ij}^\phi &= \frac{\partial r_i^\phi}{\partial \phi_j} = \int_\Omega \left\{ \left( g''(\phi)\,\mathcal{H} + f(\bar{\alpha})\frac{G_c}{4c_w\ell}w''(\phi)\right) N_iN_j + f(\bar{\alpha})\frac{G_c\ell}{2c_w}(\mathbf{B}_i)^{\mathsf{T}}\mathbf{B}_j \right\} \mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{38}$$

随后，我们求解全局线性化有限元方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^u & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^u \\ \mathbf{r}^\phi \end{Bmatrix} \tag{39}$$

通过拟牛顿法实现。具体而言，我们采用 Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno（BFGS）算法 [39, 40], ，该算法提供了一种稳健的整体求解方案，能够准确、高效地估算疲劳裂纹扩展。请注意，BFGS算法要求刚度矩阵必须对称且正定。

## 4. 结果

### *4.1.* 受对称单轴拉压载荷作用的光滑杆

首先，考虑一根在载荷比为 $R = -1$ 的条件下承受单轴循环加载的光滑杆，以深入了解模型特性。假设模型材料具有以下属性：杨氏模量 $E = 1$ MPa、泊松比 $\nu = 0.3$、抗拉强度 $\sigma_c = 1$ MPa、疲劳极限 $\sigma_e = 0.2$ MPa、临界能量释放率 $G_c = 1\text{kJ/m}^2$ 以及疲劳材料参数 $\bar{\alpha}_0 = 100$。通过考虑式（23）的均匀解，可以半解析地求解该边值问题。假设远场应力（或应变）呈分段循环线性变化。在一维条件下，长度尺度与强度之间满足关系式（28），由此，当 `AT1` 和 `AT2` 分别取 $\ell = 0.3750$ mm 和 $\ell = 0.1055$ mm 时，该关系成立。除非另有说明，本文其余部分均采用 `AT1` 模型、 $\kappa = 0.5$、疲劳退化函数（29c） $f_2$以及 `No-tension` 分解（17）。虽然本文所有数值研究均针对恒幅载荷，但我们强调，该模型能够处理任意选取的载荷历史，因此可以捕捉载荷顺序效应。

#### *4.1.1.* 材料行为概述

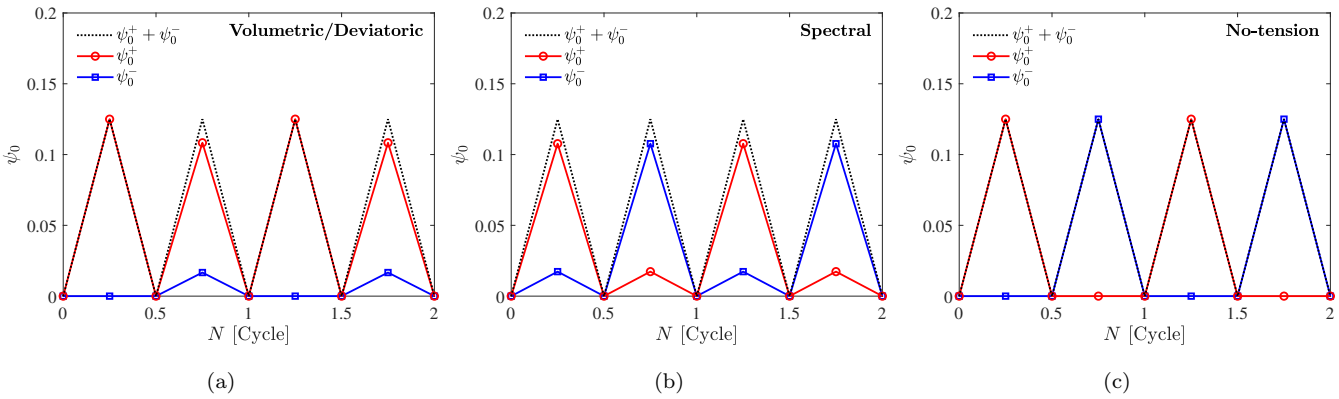


图 3：疲劳驱动力（回顾 $\alpha = g(\phi)\psi_0^+$）对所选应变能密度分解方式的敏感性；全反向循环载荷（$R = -1$）下的拉伸 $\psi_0^+$ 和压缩 $\psi_0^-$ 分量，分别考虑 (a) 体积/偏应变、(b) 谱分解和 (c) 无拉伸分解。

图3展示了在远场应力幅值为 $\sigma_a/\sigma_c = 0.5$、假设疲劳幂指数为 $n = 1$ 的条件下，弹性应变能密度及其活性（拉伸）和非活性（压缩）部分的演变。可以清楚地看到， `No-tension` 分解能够恰当地将应变能密度分解，使其在受拉时压缩部分为零、受压时拉伸部分为零，而这对于

`Volumetric/deviatoric` 和 `Spectral` 分解则并非如此。图4也展示了 `No-tension` 分解的一致性，其中给出了疲劳历史变量 $\bar{\alpha}$ 的循环演变。可以看出，疲劳效应仅在每个循环的反向（峰值至谷值）阶段累积，并且随着幂指数 $n$增大， $\bar{\alpha}$ 的增长速率会降低。

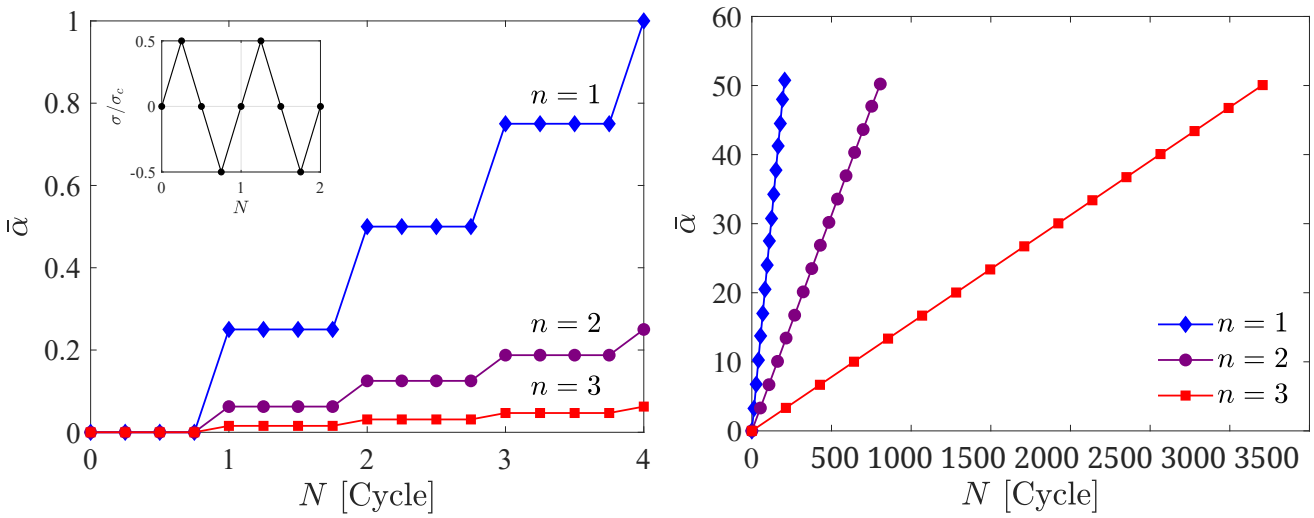


图4：疲劳历史变量 $\bar{\alpha}$ 在不同幂指数 $n$下的循环演化：(a) 最初几个循环的细节，展示无拉伸分解如何在每个循环中仅于一个半循环内恰当地累积损伤；(b) 多个循环中的演化，展示指数参数 $n$的影响。

通过比较载荷控制与位移控制数值实验之间的差异，可以进一步深入了解模型行为的演变。为此，我们采用 `AT2` 相场模型并进行模拟：(i) 施加远场应力幅值$\sigma_a/\sigma_c = 0.5$ （载荷控制），以及 (ii) 施加远场应变幅值 $\varepsilon_a/\varepsilon_c = 0.5$ （位移控制）。载荷控制加载的结果见图 5(a)-(b)，位移控制加载的结果见图5(c)-(d)。这些图展示了材料应力-应变行为，以及相关变量（$\bar{\alpha}, \phi$、循环应力/应变）随循环次数（$N$）的演变。如图5b所示，对于载荷控制情况，相场在初始阶段逐渐演化，并在末期迅速增长，此时应变达到其临界值 $\varepsilon_c$。然而，位移控制加载时并非如此：相场呈渐近趋势，逐渐逼近其上限 $\phi \to 1$ （见图5d）。因此，在考虑位移控制条件时，必须设定一个失效阈值（例如，$\phi = 0.95$）。这种 $\phi$ 随时间的变化会影响疲劳历史变量 $\bar{\alpha}$ 以及循环应力的循环演变，这是由于相场退化函数 (25) 出现在 $\boldsymbol{\sigma}$ (12)和 $\alpha$ (30)的定义中。

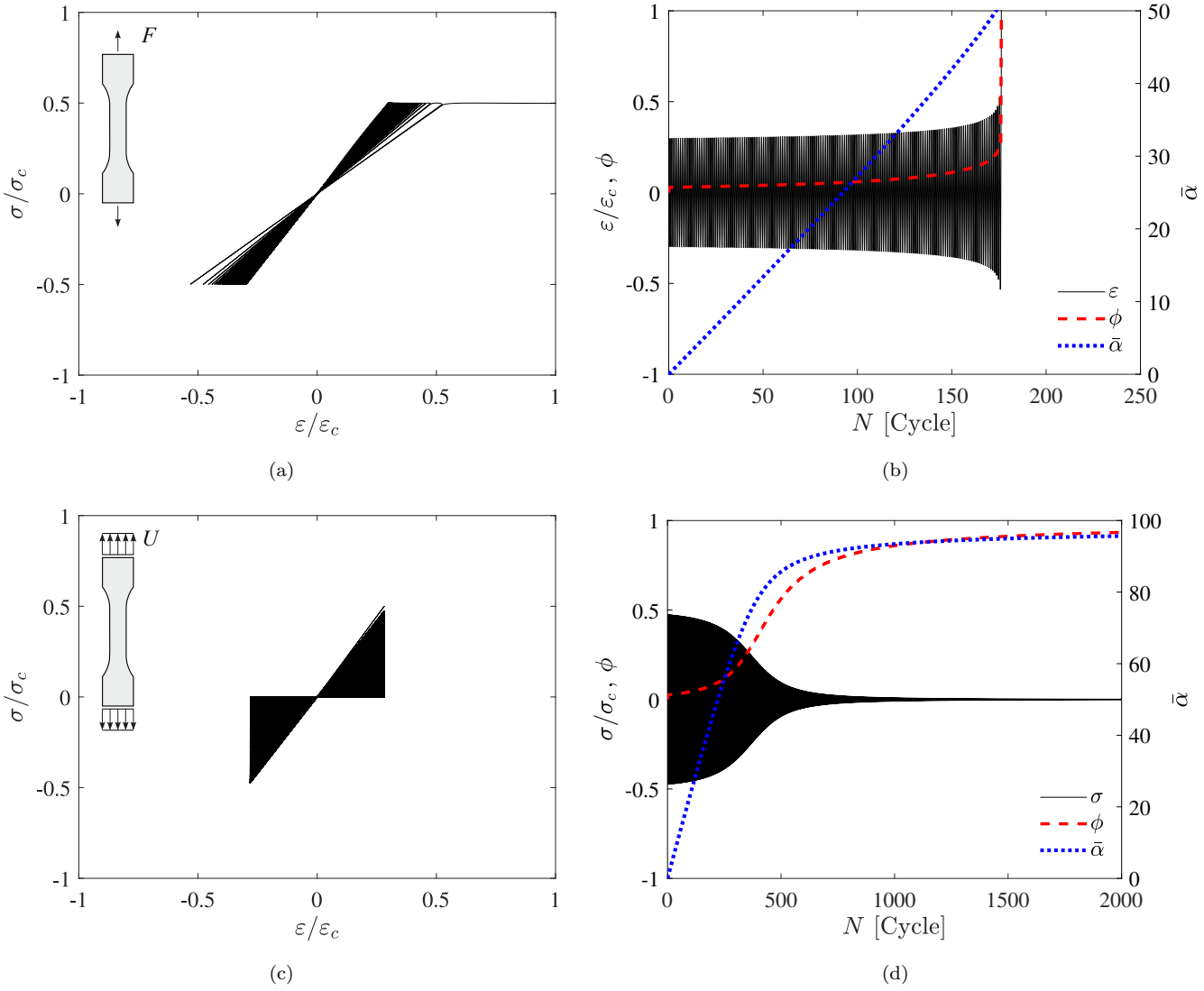


图 5：载荷控制条件下的单轴拉压响应（a）和（b），以及位移控制条件下的单轴拉压响应（c）和（d）。应力-应变曲线见（a）和（c）；（b）和（d）则显示相关变量（$\bar{\alpha}$，$\phi$，循环应力/应变）随循环次数 $N$ 的变化。所考虑的循环次数使曲线几乎重叠（黑色区域）。计算采用 AT2、$n = 1$、$\kappa = 0.5$ 和无拉伸分解。

我们进一步考察相场断裂本构模型（AT1 与 AT2）以及载荷幅值（$\varepsilon_a/\varepsilon_c = 0.15$ 与 $\varepsilon_a/\varepsilon_c = 0.5$）的作用，以获得更深入的认识。所得结果如图6所示。对于应变幅值 $\varepsilon_a/\varepsilon_c = 0.15$，产生的应力低于假定的材料疲劳极限（$\sigma_e/\sigma_c = 0.2$），因此杆的单调响应及其临界强度（应变）不受疲劳影响（见图6a）。另一方面，当载荷幅值超过疲劳极限（$\varepsilon_a/\varepsilon_c = 0.5$，图6b）时，杆的单调响应表现出临界强度和应变显著下降的现象。对于两种 AT1

以及 AT2 模型，前者的影响更为显著。

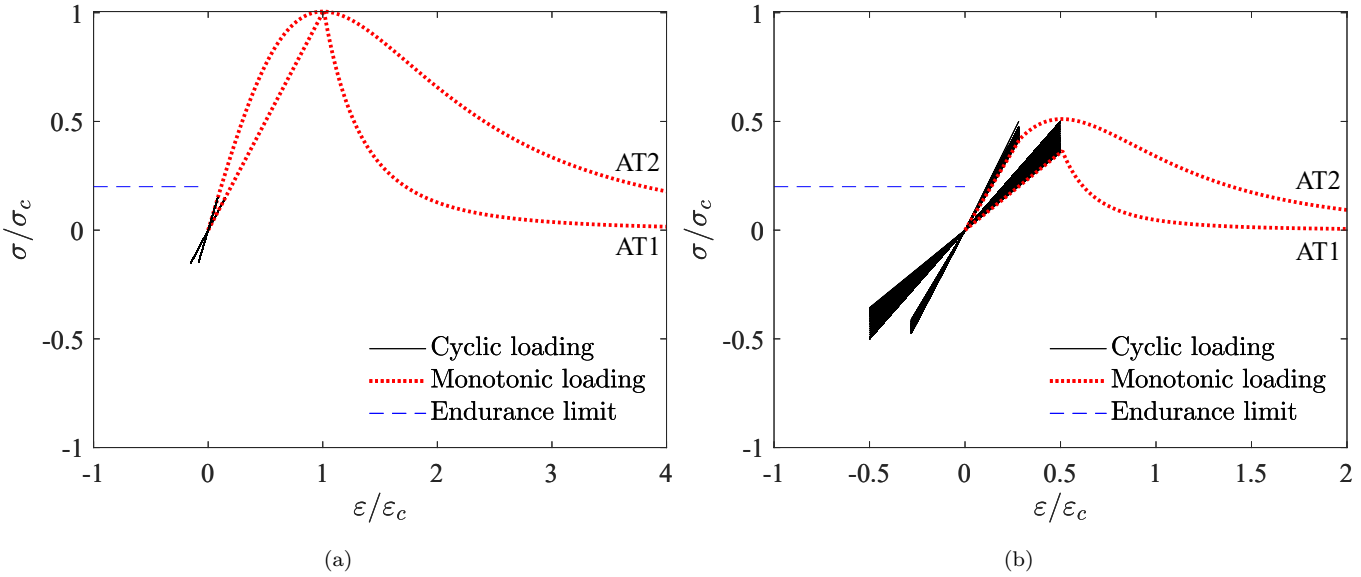


图6：不同初始远场应变幅值下，AT1 和 AT2 损伤模型的单轴循环响应与单调响应：(a) $\varepsilon_a/\varepsilon_c = 0.15$ 和(b) $\varepsilon_a/\varepsilon_c = 0.5$。所考虑的循环次数使曲线几乎重合（黑色区域）。计算采用 $n = 1$、 $\kappa = 0.5$ 和无拉伸分解。

### *4.1.2.* 参数研究

随后，开展参数研究，以考察疲劳模型/材料的影响 l

参数。评估对应变幅值 $\bar{\alpha}_0$ 和 $\alpha_e$ 敏感性的计算结果分别示于图7a和图7b，以远场应力幅值与失效循环次数的关系（S–N 曲线）表示。采用 AT1 模型，应力幅值按材料强度归一化；箭头表示所谓的疲劳未失效现象，即试样在测试期间未发生失效。首先，如图7a所示，结果表明， $\bar{\alpha}_0$取值越高，疲劳寿命越长，这与预期一致。其次，图7b展示了阈值参数 $\alpha_e$ 降低时，疲劳寿命实际上趋于无限的应力幅值（疲劳极限）也随之降低。对于 $\bar{\alpha}_0$ 和 $\alpha_e$，其取值变化均不会导致 S-N 曲线斜率出现明显变化。

最后，参数研究通过考察幂指数$n$的作用而告结束。结果如图 8 所示。S-N 曲线明显取决于 $n$ 的大小（见图 8a）；较大的 $n$ 值会使疲劳响应更容易受到应力幅变化的影响。换言之，该参数 $n$ 提供了额外的建模灵活性，使模型能够捕捉任何材料的 S-N 曲线斜率 $m^*$ 。如图 8b 所示， $n$ 与 $m$ 之间存在线性关系。基于这一发现，我们在表 1 中列出了不同相场

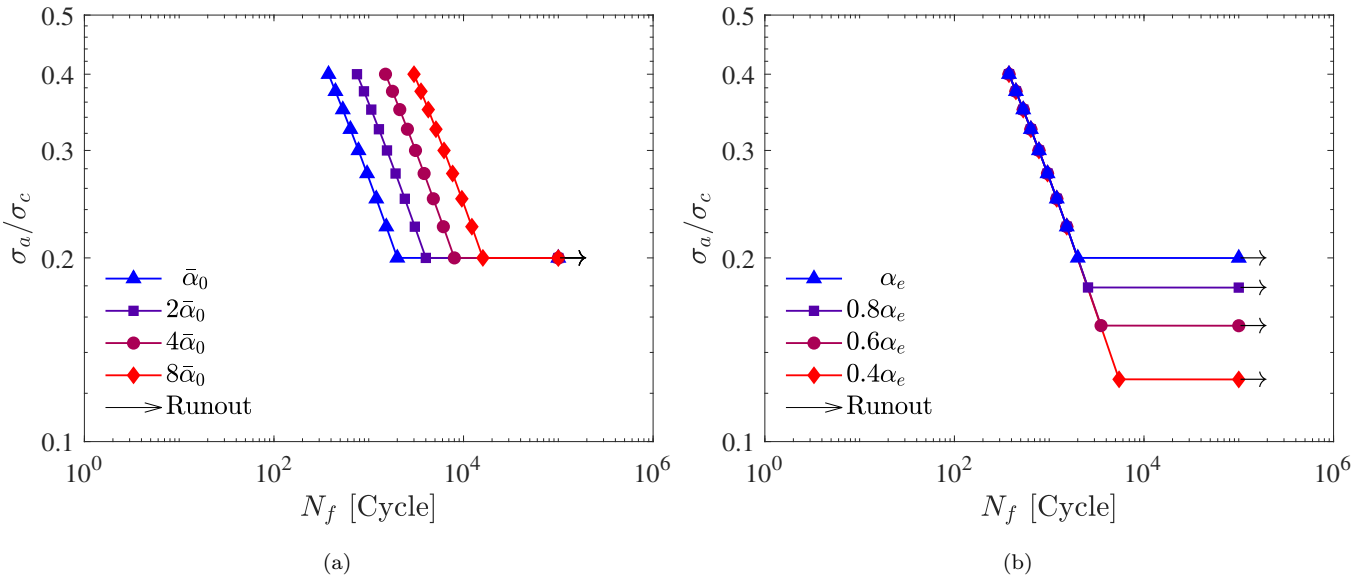


图 7：参数研究。S-N曲线对以下参数的敏感性：(a) 疲劳易损性参数 $\bar{\alpha}_0$，以及 (b) 耐久参数 $\alpha_e$。计算采用 AT1、$n = 1$、$\kappa = 0.5$ 和无拉伸分解进行。

模型和疲劳退化函数对应的这一线性关系的系数，

$$n = C_1 m + C_2 \tag{40}$$

其中 $m = -(m^*)^{-1}$。还值得注意的是，在较高应力幅下，S-N曲线会偏离这种线性行为，表现出由损伤驱动的失效，这一点也已由 Carrara 等人 [28] 报道。

| | $f_0$ | | $f_1$ | | $f_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_1$ | $C_2$ |
| AT1 | 0.50 | −0.56 | 0.50 | −0.63 | 0.50 | −0.13 |
| AT2 | 0.50 | −0.55 | 0.49 | −0.61 | 0.49 | −0.12 |

表 1：幂指数 $n$ 与 S-N 斜率之间线性关系的系数，见公式（40）。

### *4.1.3.* 载荷比效应

现在，我们将考察所提出的模型能否捕捉平均应力效应对 S-N 曲线行为的影响。为此，考虑两种载荷控制情形：(i) 在应力幅 $\sigma_a$ 固定时，改变 $R$；(ii) 在最大应力 $\sigma_{\max}$ 固定时，改变 $R$。这些加载情形尤为值得关注，因为实验观察表明，在.....方面

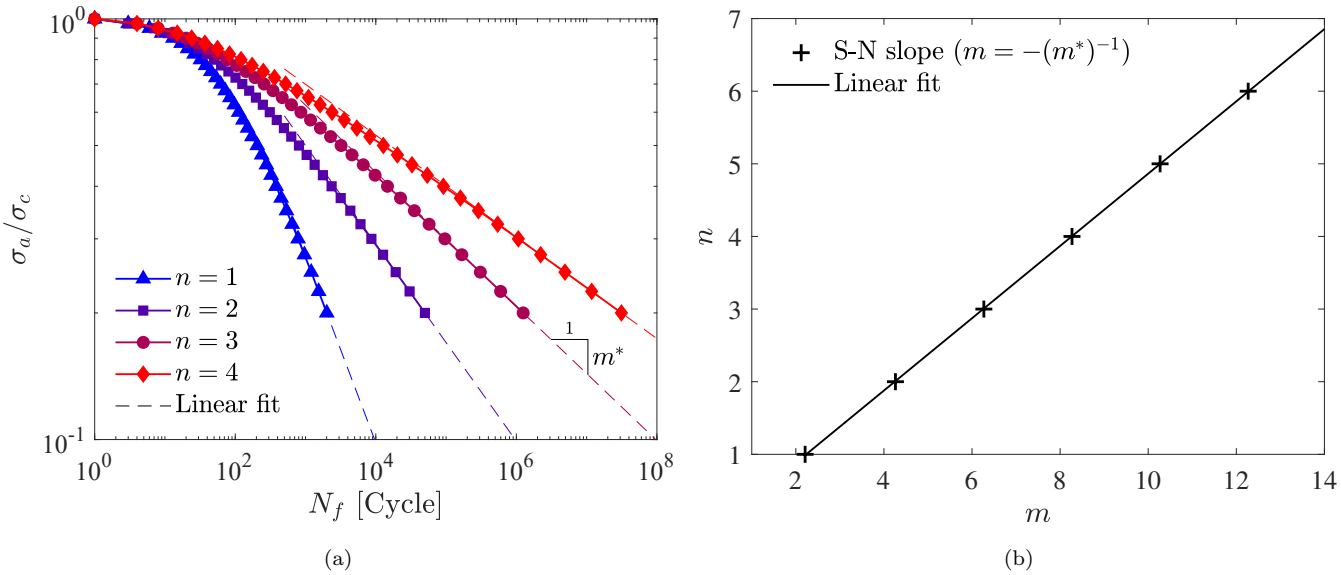


图8：参数研究。幂指数 $n$ 对（a）S-N 曲线行为以及（b）其与 S-N 斜率呈线性关系的敏感性。计算采用 AT1、$\kappa = 0.5$ 和无拉伸分解。

.....与循环次数的关系中，$R$ 呈现相反趋势：在 $\sigma_a$ 固定的实验中，随着 $R$ 减小，疲劳寿命延长；而在 $\sigma_{\max}$ 固定的测试中则观察到相反趋势 [51, 52]。所得结果如图 9 所示，同时附图展示了 $\sigma_a/\sigma_c = 0.4$ 和 $\sigma_{\max}/\sigma_c = 0.4$ 两种情况下的加载条件。对于两种加载情形，载荷比 $R$ 对疲劳寿命和疲劳极限都有显著影响。先来看应力幅固定的情况，见图 9a。对于给定的 $\sigma_a$，随着载荷比 $R$ 增大，疲劳寿命显著缩短，这与实验观察一致 [52]。还可以观察到，在较高载荷比下，S-N 曲线呈现非线性行为，疲劳寿命明显下降。这可以解释为：在较高载荷比下，附图中观察到的循环应力最大值达到材料临界强度 $\sigma_c$，这表明失效由静态损伤而非疲劳所主导（另见图 8a）。接下来，来看图 9b 中恒定 $\sigma_{\max}$ 的结果。与恒定 $\sigma_a$ 情况下的观察结果相反，且与实验结果一致（参见文献 [51] 及下文的实验对比），随着 $R$ 增大，疲劳寿命延长。因此，所提出的广义模型能够充分捕捉载荷比 $R$ 在应力幅恒定和最大应力恒定两种情况下的影响。

### *4.2.* 与实验*S-N*曲线的比较

现在，我们将模型预测与圆柱杆光滑和缺口试样在单轴拉伸-压缩疲劳实验中获得的 S–N 曲线进行比较。实验数据取自参考文献 [51]，涉及两种低合金钢：

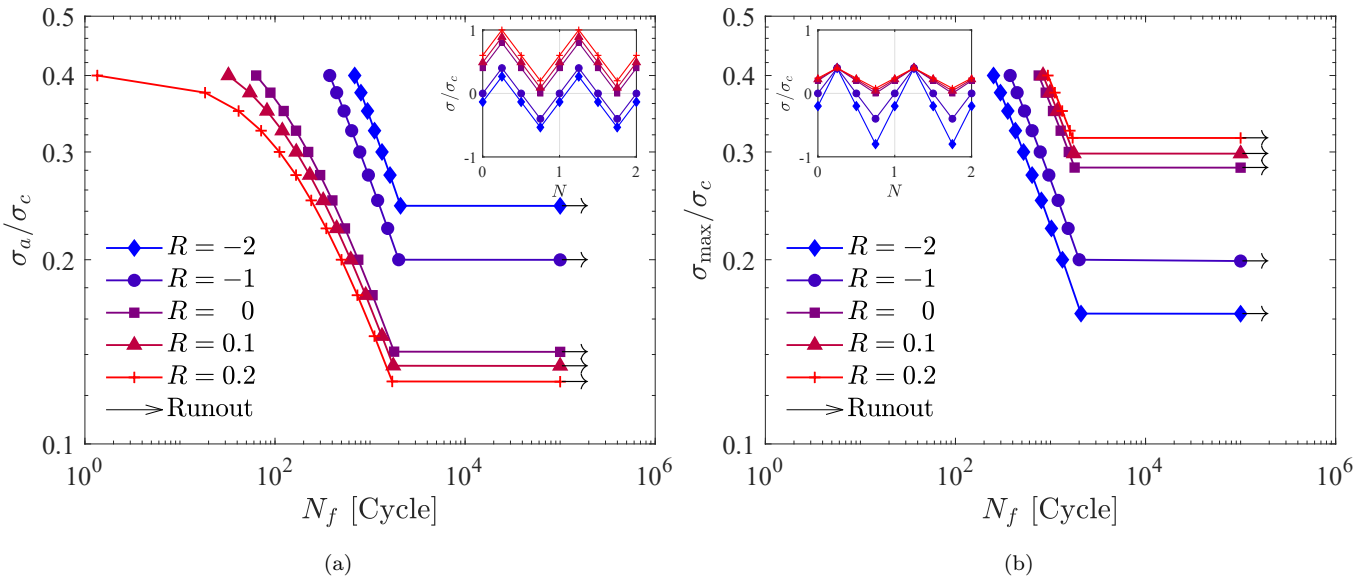


图9：载荷比（$R$）的影响，采用（a）固定应力幅 $\sigma_a$和（b）固定最大应力 $\sigma_{\max}$得到的预测结果。子图展示了加载条件，具体情况为 $\sigma_a/\sigma_c = 0.4$ 和 $\sigma_{\max}/\sigma_c = 0.4$。计算采用AT1、 $n = 1$、 $\kappa = 0.5$ 和无拉伸分解。

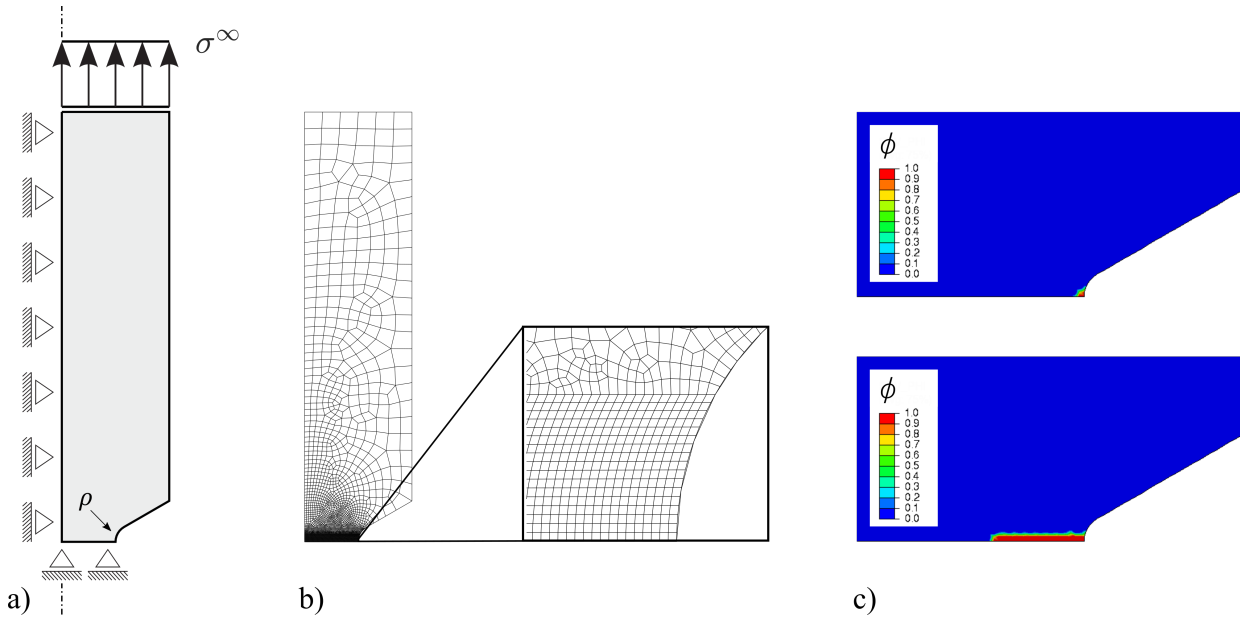


图10：带缺口圆柱棒（60° V形槽）：（a）几何形状和边界条件，（b）有限元网格，包括缺口尖端前方网格的详细视图，以及（c）展示300M钢裂纹萌生和扩展过程的代表性相场等值线（截至失稳破坏事件），其中 $K_t = 5$ 和 $\sigma_{\max}^{\text{nom}} = 300$ MPa。

抗拉强度为 1,793 MPa 的 AISI 4340钢，以及抗拉强度为 2,000 MPa 的 300M钢。实验在实验室空气中进行，采用恒定最大应力幅，并使用不同的应力比 $R$。与钢材的常见情况一样，假设这两种材料的杨氏模量均为 $E = 210$ GPa，泊松比均为 $\nu = 0.3$。韧度值取为

对于 AISI 4340 和 300M，分别等于 $G_c = 20$ kJ/m$^2$ 和 $G_c = 13$ kJ/m$^2$，其依据是参考文献 [1] 报告的平面应变断裂韧度测量结果。无缺口试样的结果可通过对式 (23) 的均匀解进行考虑而半解析地获得。对于缺口试样，采用有限元计算，并利用轴对称性，仅考虑试样的一个平面截面。此外，由于垂直对称性，仅对计算域的上半部分进行建模（见图 10）。有限元域采用 4 节点双线性轴对称四边形单元进行离散，并采用全积分；同时对缺口尖端前方的网格进行加密，此处的特征单元尺寸比相场长度尺度 $\ell$小 10 倍（见图 10b）。在一维条件下，长度尺度与强度通过式 (28) 相关联，该关系给出 AISI 4340 和 300M 的数值分别为 $\ell = 0.318$ mm 和 $\ell = 0.315$ mm。对于 300M 缺口试样，所考虑的缺口半径数值为 $\rho = 1.016$、0.368 和 0.107 mm，棒材毛直径为 $D = 12.7$ mm，净直径为 $d = 6.35$ mm。由此得到以下应力集中系数（SCF）： $K_t = 2$、3 和 5。对于 AISI 4340，缺口半径数值为 $\rho = 0.762$和 0.254 mm。所考虑的直径为 $D = 7.62$ mm、$D = 6.86$ mm 和 $d = 5.59$ mm，对应的 SCF 值为$K_t = 2$ 和 3。试样承受载荷比为 $R = -1$的分段循环线性力控制载荷。疲劳极限根据 S-N曲线本身估算，取预期可达到无限寿命的应力水平；AISI 4340 和 300M 分别取 $\sigma_e = 530$ MPa 和 $\sigma_e = 650$ MPa。S-N曲线的斜率及其与 $\log N$ 轴的截距，分别与疲劳参数 $n$ 和 $\bar{\alpha}_0$ 相关联（见图 8 和附录 B）。得益于这一特性，现在可以估算疲劳参数 $n$和 $\bar{\alpha}_0$，使其与承受全反向循环载荷（$R = -1$）的无缺口（光滑）试样实验结果达到最佳拟合；参数值分别为 $\bar{\alpha}_0 = 5.0 \times 10^{-4}$、 $n = 10$ 和 $\bar{\alpha}_0 = 1.7 \times 10^{1}$、 $n = 6$时，与 AISI 4340 和 300M 的实验结果吻合良好。因此，其他任何效应（例如缺口半径的作用或对载荷比的敏感性）都可作为模型的自然结果进行预测，无需额外拟合。

所得实验和数值结果如图 11 所示。可以看出，预测的虚拟 S-N 曲线与测量数据吻合良好。在实验和模拟中，结果均表明疲劳寿命对缺口半径高度敏感，半径减小会导致疲劳寿命下降。正如预期，较小的缺口半径会使缺口尖端处的应力集中更严重，从而导致疲劳裂纹更早萌生。还值得注意的是，对于 300M钢，缺口半径较小时，计算结果与实验的吻合度有所下降（$K_t = 5$），

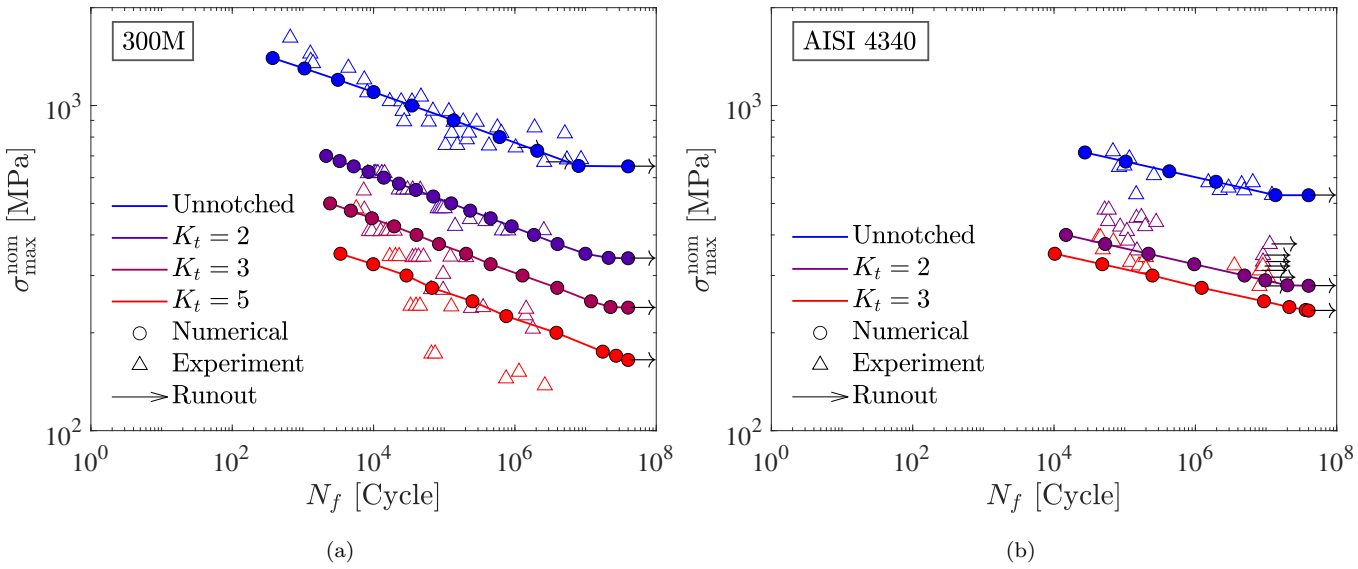


图 11：实验验证。两种钢材的光滑圆柱试样和带缺口圆柱棒所得的数值与实验 [51] S–N 曲线：(a) 300M；(b) AISI 4340。结果表明，该模型能够预测应力集中源（以应力集中系数 $K_t$ 量化）对疲劳寿命的缩短作用。

因为实验 S–N 曲线的斜率发生了变化。对于$K_t = 5$，斜率的这种变化可能与反向屈服效应等塑性现象有关 [53]。

此外，如 AISI 4340 的实验所示，该模型能够准确捕捉应力集中对疲劳极限的影响。总体而言，结果表明，该模型无需拟合，即可可靠地预测含有不同缺口（应力集中体）的试样的疲劳寿命和疲劳极限。

基于 300M 的结果，我们利用该模型进一步深入了解材料疲劳行为。首先，如图 12a 所示，将起裂和失效循环次数绘制为最大名义应力 $\sigma_{\max}^{\text{nom}}$ 和应力集中系数 $K_t$的函数。结果表明，随着缺口变得更加尖锐，裂纹萌生与最终失效之间的差异增大。这是由于在更尖锐的缺陷中，应力、应变和损伤局部化程度更高。随后，在固定缺口半径 $\rho$ 的情况下，通过改变相场长度尺度参数$\ell$研究长度尺度之间的相互作用——见图 12b。具体而言，我们选择考虑一个高出两倍的 $\ell$ 值（即 $2\ell = 0.63$ mm）。结果表明，随着 $\ell$增加，疲劳抗力降低。这与预期一致，因为根据公式 (28)，较高的 $\ell$ 值将导致材料强度降低，从而缩短裂纹萌生所需的时间。值得注意的是，所考虑的 $\ell$ 值与缺口半径处于同一数量级。然而，结果并不随$\ell/\rho$进行尺度变化，这表明问题中的其他长度尺度也会产生影响。考虑以下结果即可看出这一点

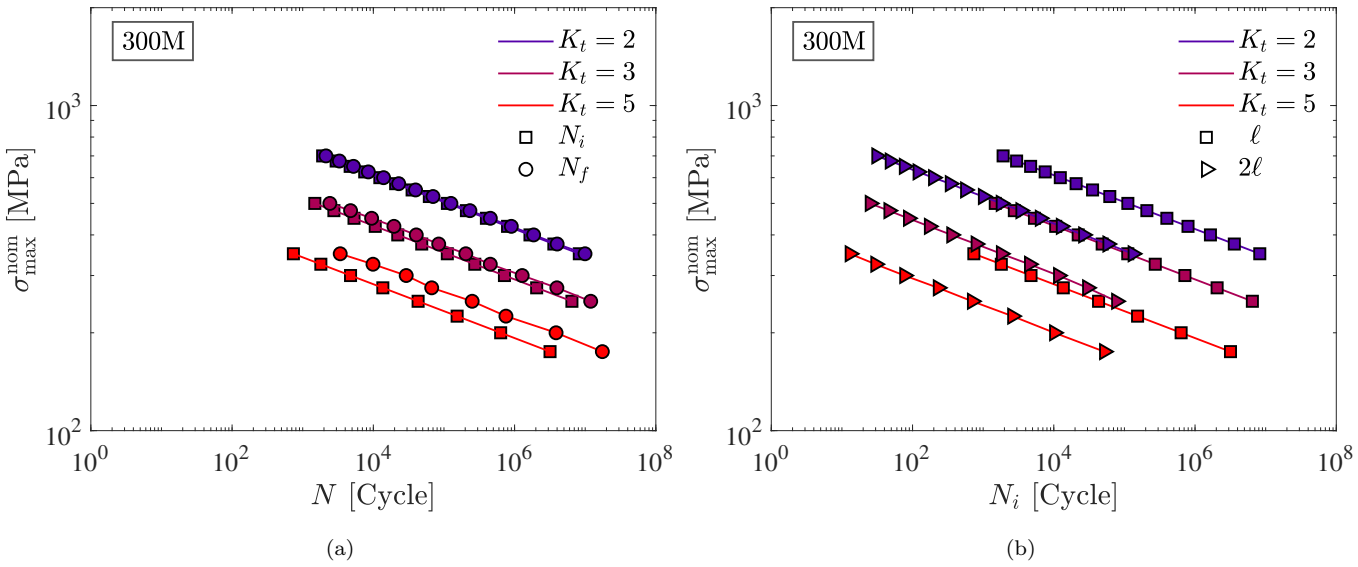


图 12：模型预测的带缺口圆柱棒 S–N 曲线行为：(a) 裂纹萌生循环次数（$N_i$）与失效循环次数（$N_f$）的比较，以及 (b) 相场长度尺度 $\ell$ 与缺口半径 $\rho$之间的相互作用。结果采用适用于 300M钢的参数获得。

对于 $K_t = 2$ 和 $2\ell$ 的结果以及 $K_t = 3$ 和 $\ell$的结果，它们分别给出 $\rho/\ell = 1.168$ 和$\rho/\ell = 1.613$，但似乎彼此完全重合。可以进行量纲分析，以确定理解问题中各种长度尺度相互作用所需的计算。

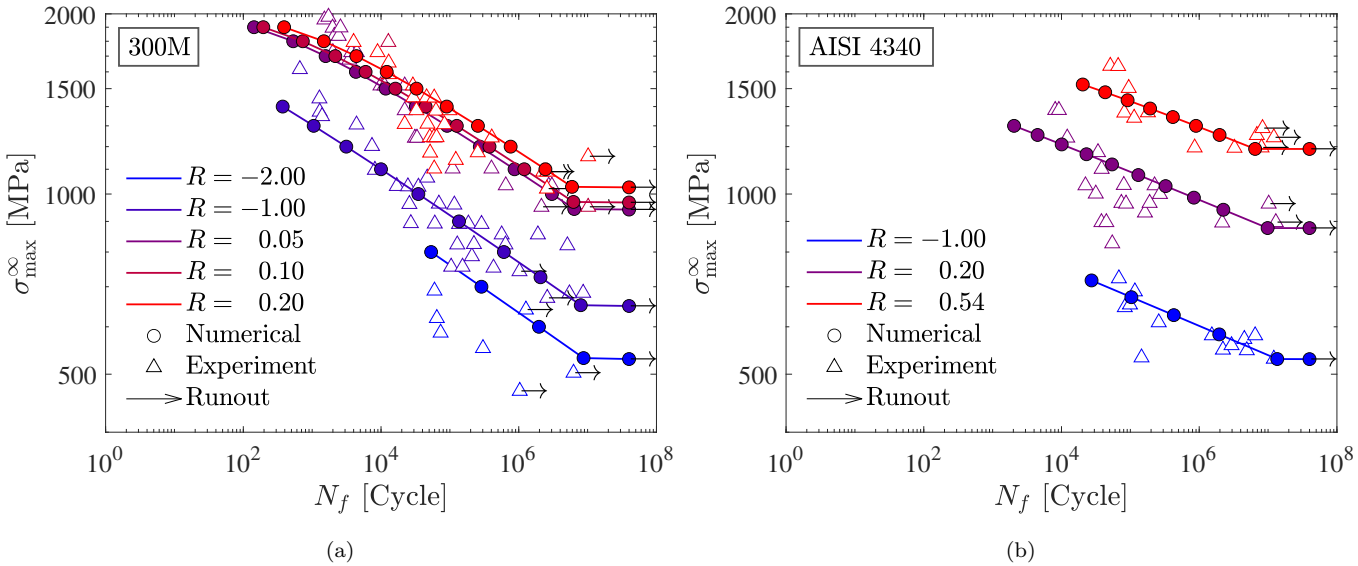


图 13：实验验证。两种钢材在不同载荷比 $R$ 下，光滑圆柱棒的数值与实验 [51] S–N 曲线：(a) 300M，(b) AISI 4340。结果表明，该模型能够预测载荷比对材料疲劳抗力的影响。

最后，我们验证模型　对上述两种钢（300M 和 AISI 4340）载荷比效应的预测与实验结果的比较　o

所考虑的钢材（300M 和 AISI 4340）。模型参数与此前考虑的相同。对此，需要指出的是，根据 [52] 中报告的估算结果，AISI 4340 和 300M 的 $\kappa$ 分别取 0.55 和 0.5。不过，采用更简单的 Smith-Watson-Topper（SWT）关系也会得到类似结果，因此完全无需使用这一参数。图 13 将数值预测结果与实验数据一并展示。数值结果和实验数据均呈现出相同的定性趋势：对于固定的 $\sigma^{\infty}_{\max}$，失效循环次数 $N_f$ 随载荷比 $R$ 的增加而增加。此外，对于 300M 和 AISI 4340 两种材料，该模型与实验结果吻合良好，表明模型能够成功预测平均应力效应。对于 $R = -2$ 和 300M 的特定情况，结果存在一些差异；在这两种情况下，试样在其疲劳寿命的大部分时间内处于压缩状态，且实验数据离散性显著。

## 5. 结论

我们提出了一种通用的相场公式，用于模拟金属材料的高周疲劳行为。本文提出的建模框架涵盖两种主要的相场损伤模型（`AT1` 和 `AT2`）、不同的疲劳退化函数，以及一种能够显著加快计算并实现以下模拟的新型累积方法：(i) 不同的 S-N 曲线斜率；(ii) 疲劳极限；以及 (iii) 平均应力效应（载荷/应力比）。我们采用有限元法对所提出的理论框架进行数值实现，并使用稳健、高效的拟牛顿（BFGS）算法以整体方式求解所得方程组。我们开展了全寿命分析，以考察该框架建模能力的表现，并研究了各种应变能分解方法（体积/偏应变、谱分解、无拉伸）对疲劳损伤累积的影响。此外，我们还针对不同的应力/载荷比以及缺口试样和光滑试样，获得了虚拟 S–N 曲线。主要发现包括：

- 该模型能够充分捕捉疲劳寿命对存在应力集中源（如缺口）的敏感性；随着应力集中程度增加，疲劳寿命和疲劳极限均会降低。

- 该模型能够充分捕捉平均应力效应（载荷比， $R$）对疲劳响应的影响。与实验观察一致，模型预测，随着 • 的降低，疲劳寿命和

疲劳极限会提高（应力幅 $\sigma_a$ 固定时），而在最大应力 $\sigma_{\max}$ 固定时则恰好相反。

- 与实验结果无论在定性还是定量方面都吻合良好，该模型对300M和AISI 4340钢的疲劳寿命及疲劳极限数据均能很好地拟合。此外，该模型还能自然地捕捉应力集中源和载荷比对这两种材料疲劳响应的影响。

所提出的建模框架为高效预测承受高周疲劳的构件服役寿命提供了平台。未来研究可致力于开发一种广义模型，使其也能考虑低周和中周疲劳、塑性效应以及Paris定律行为。

## 6. 致谢

A. Golahmar感谢Vattenfall Vindkraft A/S和丹麦创新基金（资助编号0153-00018B）的经费支持。E. Mart´ınez-Pa˜neda感谢UKRI未来领袖奖学金计划 [（资助编号MR/V024124/1]）的经费支持。

## 附录A. 与现有相场疲劳模型的比较

考虑参考文献 [28, 式（45）]中针对 $\Delta\bar{\alpha}$ 提出的以下近似

$$\Delta\bar{\alpha} = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|\, H\left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{t_{n+1} - t_n}\right) \tag{A.1}$$

其中，下标 $_n$ 和 $_{n+1}$ 分别表示时间增量 $t = t_n$ 和 $t = t_{n+1}$。当 $\Delta\alpha/\Delta t < 0$ （卸载）时，Heaviside函数 $H(\square) = 0$。接下来，我们使用 `Spectral` 分解拆分（16），并采用每循环 8 个加载步（见图 A.14），计算杆在全反向循环载荷（$R = -1$）作用下疲劳历史变量 $\bar{\alpha}$ 的总增量

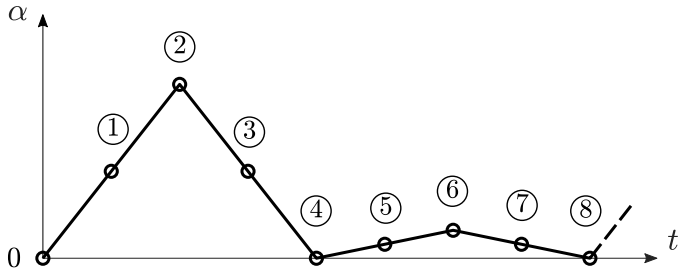


图 A.14：采用谱分解的完全反向循环载荷（$R = -1$）杆中 $\alpha$ 的示意变化。

$$\begin{aligned}\text{Inc. } 0\text{ - }4\text{:}\quad & \bar{\alpha}_4 = \bar{\alpha}_3 = \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 + |\alpha_2 - \alpha_1| = \alpha_2 \\ \text{Inc. } 4\text{ - }8\text{:}\quad & \bar{\alpha}_8 = \bar{\alpha}_7 = \bar{\alpha}_6 = \bar{\alpha}_5 + |\alpha_6 - \alpha_5| = \underbrace{\alpha_2 + \alpha_6}_{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}\end{aligned} \tag{A.2}$$

这表明，每个循环结束时疲劳损伤的累积可以用一次反向过程中峰值 $\alpha_2$ 和谷值 $\alpha_6$ 处得到的 $\alpha$ 值来描述（另见图 2）。因此，式（A.1）可以改写为

$$\Delta\bar{\alpha} = \frac{\alpha_{\max}^n - \operatorname{sgn}(R)\,\alpha_{\min}^n}{\alpha_n^n} \tag{A.3}$$

其中，应力比 $R$ 及其符号 sgn($R$)可在每个循环内实时针对每个材料点计算。对于 $n = 1$ 和 $\alpha_n = 1$ 的特定取值，采用 `No-tension` 分解时，式（A.3）在每个循环结束时可还原为式（A.1），适用于任意应力比 $R$；采用其他分解时，则适用于 $R \geq 0$ 和$R = -1$。此外，对于恒定幅值情形，可以每个循环仅使用一个增量，并施加一个幅值为最大幅值的恒定（代表性）载荷，从而加快 $\Delta\bar{\alpha}$ 的计算。因此，式（A.3）可改写为

$$\Delta\bar{\alpha} = \left(\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_n}\right)^n \left(1 - \operatorname{sgn}(R)|R|^{2n}\right) \tag{A.4}$$

采用 `No-tension` 和 `Volumetric-deviatoric` 分解时，对于固定应力比 $R \geq 0$，该式的解析结果与式（A.3）和式（A.1）相同。最后，对于 $n = 1$、$\alpha_n = 1$、 $R = -1$ 和 $\alpha_e = 0$的特定取值，采用 `No-tension` 分解时，我们的新累积方法（32）在解析上可还原为式（A.1）。

## 附录 B. 疲劳材料参数 $\bar{\alpha}_0$ 的估算

考虑由疲劳试验获得、并由巴斯昆关系 $\sigma_\square = C^* (N_\square)^{m^*}$ 在数学上描述的典型 S-N 曲线，其中（$N_\square, \sigma_\square$）对应于拟合曲线的数据集 $\square$。如图 8 所示，S-N曲线 $m^*$ 的斜率与幂指数$n$相关，不同相场损伤模型和疲劳退化函数选取下的拟合参数列于表 1。现在，我们通过考虑式 (23) 的均匀解，并假设$\alpha = \psi_0^+(\varepsilon)$的应变能密度为未损伤状态，来估算疲劳材料参数 $\bar{\alpha}_{0\circ}$ 然后，考虑 `AT1` 损伤模型、 $f_2$ 疲劳退化函数，并注意到对于 $\sigma = \sigma_c$（静载荷）， $f(\bar{\alpha}) = 1$，则

$$\left(\frac{\sigma_\square}{\sigma_c}\right)^2 = f(\bar{\alpha}) = \left(1 - \frac{N_\square}{\bar{\alpha}_0}\left(\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_c}\right)^n\right)^2 = \left(1 - \frac{N_\square}{\bar{\alpha}_0}\left(\frac{\sigma_\square}{\sigma_c}\right)^{2n}\right)^2 \tag{B.1}$$

由此得到

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{N_\square \left(\frac{\sigma_\square}{\sigma_c}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{\sigma_\square}{\sigma_c}\right)} \tag{B.2}$$

对于该情况，可通过采用较低的应力幅值来获得较好的估算值 $\sigma_\square$（因此 $N_\square$对应的疲劳寿命较长），此时 S-N曲线仍未偏离线性。

## 参考文献


[1] R. I. Stephens、A. Fatemi、R. R. Stephens、H. O. Fuchs，《工程金属疲劳》，第2版，John Wiley & Sons，2000年。

[2] S. Suresh，《材料疲劳》，第2版，剑桥大学出版社，1998年。

.[3] A. W¨ohler，《关于铁和钢的强度试验》，Ernst & Korn，1870年。

[4] A. A. Griffith，《固体中的断裂与流动现象》，《哲学汇刊 A辑》，221（1920）163–198。

[5] G. A. Francfort、J.-J. Marigo，将脆性断裂重新视为能量最小化问题，《固体力学与物理学杂志》46 (1998) 1319–1342。

[6] B. Bourdin、G. A. Francfort、J. J. Marigo，断裂变分方法，施普林格·荷兰，2008。

[7] M. Ambati、T. Gerasimov、L. D. Lorenzis，延性断裂的相场建模，《计算力学》55(2015) 1017–1040。

[8] M. J. Borden、T. J. R. Hughes、C. M. Landis、A. Anvari、I. J. Lee，延性材料断裂的相场公式：有限变形平衡定律推导、塑性退化及应力三轴度效应，《计算力学与工程方法》312 (2016) 130–166。

[9] M. Isfandbod, E. Mart´ınez-Pa˜neda，氢致断裂的基于机制的多陷阱相场模型，《国际塑性杂志》144（2021）103044。

[10] M. J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. R. Hughes, C. M. Landis，动态脆性断裂的相场描述，《计算力学与工程方法》217-220 (2012) 77–95。

[11] R. J. M. Geelen, Y. Liu, T. Hu, M. R. Tupek, J. E. Dolbow，动态内聚断裂的相场公式，《计算力学与工程方法》348 (2019) 680–711。[12] G. Moln´ar, A. Gravouil, R. Seghir, J. R´ethor´e，一种开源 Abaqus 相场方法实现，用于研究塑性对动态裂纹扩展中瞬时断裂韧度的影响，《计算力学与工程方法》365 (2020) 113004。[13] R. Alessi, F. Freddi，混杂层合板中的失效与复杂裂纹模式：一种相场方法，《复合材料B辑：工程》179 (2019) 107256。[14] T. K. Mandal, V. P. Nguyen, J.-Y. Wu，一种适用于超弹性复合材料的长度尺度无关各向异性相场断裂模型，《国际力学科学杂志》188 (2020) 105941。[15] A. Quintanas-Corominas, A. Turon, J. Reinoso, E. Casoni, M. Paggi, J. A. Mayugo，一种结合内聚区模型的相场方法，用于模拟基体开裂引起的分层，《计算力学与工程方法》358 (2020) 112618。

[16] Hirshikesh、S. Natarajan、R.K. Annabattula、E. Mart´ınez-Pa˜neda，《功能梯度材料中裂纹扩展的相场建模》，《复合材料B辑：工程》169 (2019) 239–248。

[17] P. K. A. V. Kumar、A. Dean、J. Reinoso、P. Lenarda、M. Paggi，《功能梯度材料断裂的相场建模：G-收敛性及梯度变化影响的力学见解》，Thin-Walled Structures 159 (2021) 107234。[18] E. Mart´ınez-Pa˜neda、A. Golahmar、C. F. Niordson，《氢致开裂的相场公式》，《计算力学与工程方法》342 (2018) 742–761。[19] F. P. Duda、A. Ciarbonetti、S. Toro、A. E. Huespe，《弹塑性固体中溶质辅助脆性断裂的相场模型》，《国际塑性学杂志》102 (2018) 16–40。[20] J.-Y. Wu、T. K. Mandal、V. P. Nguyen，《氢致开裂的相场正则化内聚区模型》，《计算力学与工程方法》358 (2020) 112614。[21] J.-Y. Wu、V. P. Nguyen、C. T. Nguyen、D. Sutula、S. Sinaie、S. Bordas，《断裂相场建模》，《应用力学进展》53 (2020) 1–183。[22] P. K. Kristensen、C. F. Niordson、E. Mart´ınez-Pa˜neda，《相场断裂评估：裂纹萌生与扩展》，《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》379 (2021) 20210021。

[23] Y. S. Lo、M. J. Borden、K. Ravi-Chandar、C. M. Landis, 《疲劳裂纹扩展的相场模型》, 《固体力学与物理学杂志》132 (2019) 103684。[24] J. L. Boldrini、E. A. B. de Moraes、L. R. Chiarelli、F. G. Fumes、M. L. Bittencourt, 《用于结构损伤与疲劳的非等温热力学一致相场框架》, 《计算力学与工程方法》312 (2016) 395–427。[25] P. J. Loew、B. Peters、L. A. Beex, 《采用黏性耗散的橡胶疲劳相场损伤建模：裂纹萌生与扩展》, 《材料力学》142 (2020) 103282。[26] C. Schreiber、C. Kuhn、R. M¨uller、T. Zohdi, 《循环疲劳裂纹扩展的相场建模方法》, 《国际断裂学杂志》225 (2020)。[27] R. Alessi、S. Vidoli、L. D. Lorenzis, 《基于变分相场模型的疲劳唯象方法：一维情形》, 《工程断裂力学》190 (2018) 53–73。[28] P. Carrara、M. Ambati、R. Alessi、L. D. Lorenzis, 《基于变分相场方法的脆性材料疲劳行为建模框架》, 《计算力学与工程方法》361 (2020) 112731。[29] M. Seiler、T. Linse、P. Hantschke、M. K¨astner, 《延性材料疲劳断裂的高效相场模型》, 《工程断裂力学》224 (2020)。[30] M. Simoes、E. Mart´ınez-Pa˜neda, 《形状记忆合金断裂与疲劳的相场建模》, 《计算力学与工程方法》373 (2021) 113504。[31] M. Simoes、C. Braithwaite、A. Makaya、E. Mart´ınez-Pa˜neda, 《形状记忆合金疲劳裂纹扩展建模》, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 45 (2022) 1243–1257。[32] W. Ai、B. Wu、E. Mart´ınez-Pa˜neda, 《锂离子电池电极颗粒疲劳裂纹扩展建模的耦合相场公式》, 《电源杂志》544 (2022) 231805。[33] M. M. Hasan、T. Baxevanis, 《脆性材料低周疲劳的相场模型》, 《国际疲劳杂志》150 (2021) 106297。[34] A. Golahmar、P. K. Kristensen、C. F. Niordson、E. Mart´ınez-Pa˜neda, 《氢致疲劳的相场模型》, 《国际疲劳杂志》154 (2022) 106521。[35] K. Sele˘s、F. Aldakheel、Z. Tonkovi´c、J. Sori´c、P. Wriggers, 《脆性与延性固体疲劳失效的一般相场模型》, 《计算力学》67 (2021)。

[36] J. Ulloa, J. Wambacq, R. Alessi, G. Degrande, S. Fran¸cois, 《能量形式下耦合循环塑性的疲劳相场建模》, 《计算力学与工程方法》373（2021）113473。[37] Z. Khalil, A. Y. Elghazouli, E. Mart´ınez-Pa˜neda, 《一种用于弹塑性固体疲劳裂纹扩展的广义相场模型及高效整体求解器》, 《计算力学与工程方法》388（2022）114286。[38] K. Pham, H. Amor, J. J. Marigo, C. Maurini, 《梯度损伤模型及其在近似脆性断裂中的应用》, 《国际损伤力学杂志》20（2011）618–652。[39] J.-Y. Wu, Y. Huang, V. P. Nguyen, 《关于统一相场损伤理论的BFGS整体算法》, 《计算力学与工程方法》360（2020）112704。[40] P. K. Kristensen, E. Mart´ınez-Pa˜neda, 《采用拟牛顿方法和新型自适应步长方案的相场断裂建模》, 《理论与应用断裂力学》107（2020）102446。[41] N. Provatas, K. Elder, 《材料科学与工程中的相场方法》, John Wiley & Sons, 2011。[42] C. Cui, R. Ma, E. Mart´ınez-Pa˜neda, 《一种用于溶解驱动的应力腐蚀开裂的相场公式》, 《固体力学与物理学杂志》147（2021）104254。[43] M. Ambati, T. Gerasimov, L. D. Lorenzis, 《脆性断裂相场模型综述及一种新的快速混合公式》, 《计算力学》55（2015）383–405。[44] C. Miehe, F. Welshinger, M. Hofacker, 《断裂的热力学一致相场模型：变分原理与多场有限元实现》, 《国际工程数值方法杂志》83（2010）1273–1311。[45] F. Freddi, G. Royer-Carfagni, 《正则化断裂变分理论：一种统一方法》, 《固体力学与物理学杂志》58（2010）1154–1174。[46] H. Amor, J. J. Marigo, C. Maurini, 《含单边接触的变分脆性断裂正则化形式：数值实验》, 《固体力学与物理学杂志》57（2009）1209–1229。[47] C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger, 《率无关裂纹扩展的相场模型：基于算子分裂的稳健算法实现》, 《计算力学与工程方法》199（2010）2765–2778。

[48] E. Tann´e, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, 《脆性断裂变分相场模型中的裂纹萌生》，《固体力学与物理学杂志》110（2018）80–99。[49] K. Walker, 《应力比对2024-T3和7075-T6铝合金裂纹扩展与疲劳的影响：环境和复杂载荷历史对疲劳寿命的影响》，ASTM STP 462（1970）。[50] K. N. Smith, P. Watson, T. H. Topper, 《金属疲劳的应力-应变函数》，Journal of Material，ASTM 5（1970）767–778。[51] MIL-HDBK-5H, 《军事手册：航空航天飞行器结构用金属材料与构件》，美国国防部，1998。[52] N. E. Dowling, C. A. Calhoun, A. Arcari, 《应力-寿命疲劳中的平均应力效应及Walker方程》，Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures 32（2009）163–179。[53] R. C. McClung, 《疲劳中的裂纹闭合与塑性区尺寸》，Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 14 (4)（1991）455–468。