电荷与螺线管或环形线圈的经典电磁相互作用

Timothy H. Boyer

纽约市立大学城市学院物理系，美国纽约州纽约市 10031

arXiv:2302.01936v1 [physics.class-ph] 3 Feb 2023

摘要

电子经过长螺线管时，粒子干涉图样中的阿哈罗诺夫–玻姆相移，与在双光束光学干涉图样的一条光路中插入一块延迟玻璃所造成的光学干涉图样偏移，在形式上完全相同。粒子干涉图样的偏转是一个量级为 $1/c^2$的相对论效应，不过文献中很少提及这一相对论特性。本文将全面分析螺线管或环形线圈与带电粒子相互作用的经典电磁学方面。我们指出，螺线管或环形线圈会因经过的电荷而受到磁洛伦兹力。虽然在螺线管或环形线圈的静止参考系中进行分析时，电荷会受到反向法拉第场的作用，但在电荷初始静止的惯性系中进行分析时，所涉及的力仅由电场产生，且大小相等、方向相反。经典分析采用达尔文拉格朗日量进行。我们指出，经典分析表明，角偏转与普朗克常数无关 $\hbar$；其偏转幅度与传统量子分析给出的结果完全相同，但偏转方向明确无歧义。

I. 引言

A. 类似于阿哈罗诺夫–玻姆偏转的光学相移

如果将来自小型光源的光束分成两束再重新合并，通常会产生干涉图样（取决于两束光之间的光程差）；该图样位于单束包络之内，而单束包络取决于每束光内部的光程差。双缝屏障产生光学干涉图样并投射到远处屏幕上的情形，是人们熟悉的例子。如果只在两束光中的一束里插入一块玻璃，那么双缝干涉图样会发生偏转，该图样涉及两束光；而涉及每束光各自的单缝包络则不会偏转。光束的偏转方向明确无歧义，朝向玻璃片使光束速度减慢的一侧。光学双光束干涉图样中的这种偏转，与磁阿哈罗诺夫–玻姆偏转完全相同；后者涉及来自带电粒子源的两束粒子束，这两束粒子束彼此分开，绕过长螺线管后再重新汇合。

B. 磁阿哈罗诺夫-玻姆情形

当电子从长螺线管两侧经过时，会产生干涉图样；随着螺线管磁场的改变，图样也会随之改变。[1][2] 这项效应的实验报告中的一幅图[2] 清楚地显示，随着螺线管中的电流增大，双束干涉图样发生偏转，而单束包络保持原位。这种阿哈罗诺夫–玻姆[3] 相移常被认为在经典电动力学中没有依据，因为电子运动的区域内，未受扰动的无限长螺线管所产生的磁场为零。据称，影响电荷行为的是磁通量。许多物理学家接受了这样的说法：阿哈罗诺夫–玻姆相移代表了矢势的一种效应，而这种效应在经典电动力学中没有对应物。[4][5][6][7][8]然而，当被问及双缝干涉图样向哪个方向偏转时，许多物理学家却答不上来。事实上，尽管关于阿哈罗诺夫–玻姆效应的理论和实验文献浩如烟海，而且相移的大小已得到实验确认，但似乎很难找到权威资料指出偏转方向

无论是在量子理论中，还是在实验报告中，都没有提及偏转方向。此外，对磁能变化的直观讨论表明，粒子会相对滞后（因而发生偏转），但其方向与对经典电动力学情形进行详细分析所得的方向相反。如果螺线管的磁场向上，且电荷从螺线管两侧经过，那么阿哈罗诺夫–玻姆偏转的方向，与电荷穿过螺线管中心时所受的洛伦兹力偏转方向相同还是相反？这一方向是否已得到实验确认？

C. 经典电磁分析

阿哈罗诺夫–玻姆偏转涉及带电粒子和螺线管，而这些都是经典电磁理论的传统研究内容。因此，从经典电动力学的角度讨论螺线管或环形线圈与经过的电荷之间的相互作用，似乎是很自然的。本篇文章是由四篇文章组成的系列中的研究性讨论。第一篇文章指出，许多物理学家只见过教科书示例中高度对称的磁能变化，因此并不熟悉非对称磁能变化。[9] 第二篇文章将阿哈罗诺夫–玻姆相互作用视为一种相对论悖论，其形式类似于杆与谷仓悖论：在一个惯性系中进行分析比在另一个惯性系中更容易。[10] 第三篇短文仅考察了双缝偏转的方向。[11] 本篇文章将对这一问题进行完整而严谨的分析。

D. 本文概要

本文逐步分析了从熟悉的静电学到陌生的经典电动力学方面的过渡。我们从点电荷沿圆形线电荷的对称轴运动时的静电相互作用出发，最后讨论点电荷沿磁环形线圈的对称轴运动的情形。首先，我们引入适用于排除辐射的准静态电磁系统的达尔文拉格朗日量[12]。这种相对论性到$1/c^2$ 阶的相互作用需要使用点电荷。其次，我们指出，由许多等间距排列、彼此靠近的点电荷构成的圆环表现出很大的电磁惯性，这种惯性往往

会阻碍圆环中离散电荷运动状态的改变。第三，我们将这一观点应用于磁性阿哈罗诺夫–玻姆情形的静电类比：在这种类比中，电荷穿过一个电偶极子环。第四，我们讨论磁性阿哈罗诺夫–玻姆情形，并确定其中的力。运动电荷所产生的经典电磁滞后的大小，恰好如五十年前所提出的那样，[13] 也正是解释观测到的干涉图样偏移所需的大小。经典电磁滞后取决于环形线圈中的磁场，因此也取决于沿环形线圈回路对矢势的积分。将螺线管置于双孔掩模的两个孔之间时，产生的相移涉及经典滞后与双孔间距之比。与滞后（或分数相移）相关的角偏转与普朗克常数 $\hbar$无关。经典理论明确确定了偏转方向。第五，我们将阿哈罗诺夫–玻姆相移置于电荷与磁体之间那些尚未得到充分理解的相互作用背景下讨论。我们指出了相移认识过程中的若干历史方面，并提及了进一步开展实验探索的可能性。

II. 达尔文拉格朗日量

关于点电荷与螺线管相互作用的实验观测，通常涉及相对缓慢运动的电荷，包括螺线管导线中的电荷和经过的电荷。对于这种情况，自然的经典电磁近似由达尔文拉格朗日量给出，[12]

$$L = \sum_a \left\{ -M_a c^2 \sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}_a/c)^2} \right\} - \frac{1}{2} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{q_a q_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{1}{2} \sum_a \sum_{b \neq a} \left\{ \frac{q_a q_b}{2c^2} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{[\dot{\mathbf{r}}_a \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)] \, [\dot{\mathbf{r}}_b \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)]}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \right) \right\}, \tag{1}$$

其中，平方根 $\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}_a/c)^2}$ 应展开至 $(\dot{\mathbf{r}}_a/c)^4$阶。欧拉-拉格朗日运动方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0, \tag{2}$$

其中，向量 $\mathbf{r}_a$ 和 $\dot{\mathbf{r}}_a$ 的每个直角分量都应分别处理。系统的总能量为

$$\begin{aligned} U &= \sum_a \frac{M_a c^2}{\sqrt{1-\left(\dot{\mathbf{r}}_a/c\right)^2}} + \frac{1}{2}\sum_a \sum_{b\neq a} q_a \Phi_b\left(\mathbf{r}_a, t\right) + \frac{1}{2}\sum_a \sum_{b\neq a} q_a \frac{\mathbf{v}_a}{c} \cdot \mathbf{A}_b\left(\mathbf{r}_a, t\right) \\ &= \sum_a \frac{M_a c^2}{\sqrt{1-\left(\dot{\mathbf{r}}_a/c\right)^2}} + \frac{1}{2}\sum_a \sum_{b\neq a} \frac{q_a q_b}{\left|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right|} \\ &+ (1/2)\sum_a \sum_{b\neq a} \left\{\frac{q_a q_b}{2c^2}\right\} \left\{\frac{\dot{\mathbf{r}}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_b}{\left|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right|} + \frac{\left[\dot{\mathbf{r}}_a \cdot \left(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right)\right]\left[\dot{\mathbf{r}}_b \cdot \left(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right)\right]}{\left|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right|^3}\right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

包括涉及质量 M_a 的粒子机械能、涉及电荷间距的电场能量，以及涉及电荷速度 $\dot{\mathbf{r}}_a$ 的磁场能量。系统对应的总线动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_a \left(\frac{M_a \dot{\mathbf{r}}_a}{\sqrt{1-\left(\dot{\mathbf{r}}_a/c\right)^2}} + \sum_{b\neq a} \frac{q_a}{c} \mathbf{A}_b\left(\mathbf{r}_a, t\right)\right) \\ &= \sum_a \frac{M_a \dot{\mathbf{r}}_a}{\sqrt{1-\left(\dot{\mathbf{r}}_a/c\right)^2}} + \sum_a \sum_{b\neq a} q_a \frac{q_b}{2c^2}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_b}{\left|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right|} + \frac{\left(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right)\left[\dot{\mathbf{r}}_b \cdot \left(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right)\right]}{\left|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right|^3}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

并且同时包括机械线动量和电磁场动量。电磁势由标量势

$$V(\mathbf{r}, t) = \sum_a V_a\left(\mathbf{r}, t\right) = \sum_a \frac{q_a}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right|}, \tag{5}$$

和矢势

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}, t\right) = \sum_a \mathbf{A}_a\left(\mathbf{r}, t\right) = \sum_a \frac{q_a}{2c}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_a}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right|} + \frac{\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right)\left[\dot{\mathbf{r}}_a \cdot \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right)\right]}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right|^3}\right). \tag{6}$$

如果将欧拉-拉格朗日运动方程改写为洛伦兹力中的电场和磁场形式，则可得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{M_a \dot{\mathbf{r}}_a}{\sqrt{1-\left(\dot{\mathbf{r}}_a/c\right)^2}}\right) &= q_a \mathbf{E}\left(\mathbf{r}_a, t\right) + q_a \frac{\dot{\mathbf{r}}_a}{c} \times \mathbf{B}\left(\mathbf{r}_a, t\right) \\ &= q_a \sum_{b\neq a}\left(-\nabla_a V_b(\mathbf{r}_a, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_b(\mathbf{r}_a, t)}{\partial t}\right) \\ &+ q_a \frac{\dot{\mathbf{r}}_a}{c} \times \left[\nabla_a \times \sum_{b\neq a} \mathbf{A}_b(\mathbf{r}_a, t)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)=\sum_{a}\frac{q_{a}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right|^{3}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_{a}}{c}\right)^{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_{a}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right)}{c\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right|}\right)^{2}\right]$$
$$-\sum_{a}\frac{q_{a}}{2c^{2}}\left[\frac{\ddot{\mathbf{r}}_{a}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right|}+\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right)\left[\ddot{\mathbf{r}}_{a}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right)\right]}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right|^{3}}\right] \tag{8}$$

and

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\,,t\right)=\sum_{a}q_{a}\frac{\dot{\mathbf{r}}_{a}}{c}\times\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{a}\right|^{3}}. \tag{9}$$

我们特别指出，式 (8) 中电场里涉及 $\ddot{\mathbf{r}}_a$ 的加速度项[14] 。正是这些项与反作用（法拉第）电场相关；这类电场所做的功会抵消磁能的变化，而磁能的变化涉及带电粒子速率的变化。式 (1) 中的达尔文拉格朗日量守恒能量、线动量和角动量。能量中心的匀速运动仅在 $1/c^2$阶成立。

III. 电荷环的电磁惯性

A. 轴对称性

尽管讨论阿哈罗诺夫–玻姆相互作用时通常会提到螺线管，但处理环形线圈要容易得多。因此，我们将研究电荷 e 与各种系统之间的经典电磁相互作用；为便于计算，这些系统都具有轴对称性。我们取对称轴为 z轴。在讨论磁环形线圈之前，所有运动都平行于 z轴，并且存在约束力，阻止任何垂直于 z轴的运动。

B. 电荷 e 与圆形线电荷 λ的非相对论相互作用

我们从电荷为 e、质量为 M_e 的粒子与均匀圆形线电荷之间的非相对论相互作用开始。该粒子位于 z 轴上，位置为 z_e；圆形线电荷的半径为 R、总电荷为 q （单位长度电荷为 $\lambda=q/\left(2\pi R\right)$），质量为 M_q，中心位于 z 轴上，位置为 z_q。圆形线电荷所在平面平行于 xy 平面。于是，在非相对论分析中，电荷 e 和 q 受到大小相等、方向相反的力，其加速度为 a_e

以及 a_q 平行于 z 轴，其表达式为

$$a_e = \frac{eq\left(z_e - z_q\right)}{M_e\left|\left(z_e - z_q\right)^2 + R^2\right|^{3/2}} \quad \text{and} \quad a_q = \frac{qe\left(z_q - z_e\right)}{M_q\left|\left(z_q - z_e\right)^2 + R^2\right|^{3/2}}. \tag{10}$$

C. 阶数为 $1/c^2$ 的相对论相互作用

达尔文拉格朗日量（它给出了阶数为 $1/c^2$ 的相对论电磁效应）要求我们处理的不是连续电荷分布，而是离散点电荷。因此，我们设想将圆形线电荷 λ 替换为 N 个离散点电荷 $q_i = q/N$，每个电荷的质量为 $M_i = M_q/N$，并沿半径为 R 的圆周均匀排列。我们设想每个电荷都可以沿着各自的无摩擦杆移动，这些杆与 z 轴平行。杆提供垂直于 z 轴的约束力，但不会引入能量。

使用达尔文拉格朗日量进行相对论分析，得到了平行于 z 轴的运动方程，其中包含点电荷 q_i 与 q_j 之间的相互作用，而这两个电荷都位于电荷环上。因此，对于较小的粒子速度 $v << c$，由式（8）中的电场可得

$$\begin{aligned} M_e a_e &= e\textstyle\sum_i q_i \dfrac{\left(z_e - z_i\right)}{\left|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i\right|^3} - e\textstyle\sum_i \dfrac{q_i}{2c^2}\left[\dfrac{a_i}{\left|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i\right|} + \dfrac{a_i\left[\left(z_e - z_i\right)^2\right]}{\left|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i\right|^3}\right] \\ &= eq\frac{\left(z_e - z_q\right)}{\left|\left(z_e - z_q\right)^2 + R^2\right|^{3/2}} - \frac{eq}{2c^2}\left[\frac{a_q}{\left|\left(z_e - z_q\right)^2 + R^2\right|^{1/2}} + \frac{a_q\left(z_e - z_q\right)^2}{\left|\left(z_e - z_q\right)^2 + R^2\right|^{3/2}}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

and

$$\begin{aligned} M_i a_q &= q_i \frac{e\left(z_i - z_e\right)}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_e\right|^3} - q_i \frac{e}{2c^2}\left\{\frac{a_e}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_e\right|} + \frac{a_e\left(z_i - z_e\right)^2}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_e\right|^3}\right\} \\ &\quad - q_i \textstyle\sum_{j\neq i} \dfrac{q_j}{2c^2}\dfrac{a_j}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|} \\ &= \frac{q}{N}\frac{e\left(z_q - z_e\right)}{\left|\left(z_q - z_e\right)^2 + R^2\right|^{3/2}} - \frac{q}{N}\frac{e}{2c^2}\left\{\frac{a_e}{\left|\left(z_q - z_e\right)^2 + R^2\right|^{1/2}} + \frac{a_e\left(z_q - z_e\right)^2}{\left|\left(z_q - z_e\right)^2 + R^2\right|^{3/2}}\right\} \\ &\quad - \frac{q}{N}\textstyle\sum_{j\neq i}\dfrac{q/N}{2c^2}\dfrac{a_q}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|} \end{aligned} \tag{12}$$

这里我们利用了这样一个事实：由于具有轴对称性，所有电荷 q_i 都具有相同的加速度 $a_i = a_q$。然而，方程（11）和（12）中的情况与方程（10）中的非相对论方程截然不同。

为了考虑磁场能的变化，电荷 e 和电荷环 q_i 的加速度 a_e 和 a_q 现在出现在运动方程的两边。加速度 a_e 和 a_q 的方程是耦合的。只有在求解耦合方程之后，才能确定电荷 e 和圆环 q 的加速度。这些方程可以改写为

$$\frac{eq\left(z_e-z_q\right)}{\left|\left(z_e-z_q\right)^2+R^2\right|^{3/2}}=M_e a_e+\frac{eq}{2c^2}\left[\frac{1}{\left|\left(z_e-z_q\right)^2+R^2\right|^{1/2}}+\frac{\left(z_e-z_q\right)^2}{\left|\left(z_e-z_q\right)^2+R^2\right|^{3/2}}\right]a_q \quad (13)$$

and

$$\frac{q}{N}\frac{e\left(z_q-z_e\right)}{\left|\left(z_q-z_e\right)^2+R^2\right|^{3/2}}=\left[\frac{eq}{N2c^2}\left\{\frac{1}{\left|\left(z_q-z_e\right)^2+R^2\right|^{1/2}}+\frac{\left(z_q-z_e\right)^2}{\left|\left(z_q-z_e\right)^2+R^2\right|^{3/2}}\right\}\right]a_e + \left[\frac{M_q}{N}+\left(\frac{q}{N}\right)^2\frac{1}{2c^2}\sum\nolimits_{j\neq 1}\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_j|}\right]a_q. \quad (14)$$

除相差一个 N 因子外，方程（13）和（14）左侧的静电力大小相等、方向相反。右侧对应于动量的变化，其中既包括粒子动量，也包括电磁场动量。

D. 紧密间隔的点电荷的电磁惯性

在式 (14) 的最后一行，必须注意，对电荷 $j\neq 1$ 求和的结果除了电荷环中电荷 q_i的质量 M_q/N 之外，还表现为一种电磁惯性贡献。当电荷环中的电荷数目 N 增加而圆环半径 R 保持不变时，电磁惯性贡献会增加，并最终超过质量 M_q，因为对于较大的 N和固定半径 R，$\sum_{j=2}^{N}(1/|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_j|)$会随 N^2增加。随着电荷环中的电荷数目 N 增加，电荷 q_i 与 q_j 之间的间距 $|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|$ 会越来越小，对反向场有贡献的单位长度电荷数也会增加。因此，反向（法拉第）加速度项的影响会越来越大，而每个电荷 q_i 的实际加速度则会越来越小。电荷 e 与圆环相距一定距离，因此，来自电荷 q_i 的贡献不会随着 N 增加而增大，因为这些电荷都与 e距离相同。

E. 电磁惯性很大时的简化

当电荷环中的粒子 q_i 数量 N 很大且彼此间距很小时，圆环的电磁惯性可能变得非常大，而加速度 a_q 则会非常小。因此，在式 (13) 中， a_q 项可以忽略。但这样一来，加速度 a_e/c^2 也很小，在式 (14) 中也可以忽略。粒子环的机械质量 M_q 与电磁项相比可以忽略不计，前提是 N 很大。因此，将第二个方程乘以 N后，方程 (13) 和 (14) 可简化为

$$\frac{eq\left(z_e-z_q\right)}{\left|\left(z_e-z_q\right)^2+R^2\right|^{3/2}}=M_e a_e \tag{15}$$

and

$$\frac{qe\left(z_q-z_e\right)}{\left|\left(z_q-z_e\right)^2+R^2\right|^{3/2}}=\left(\frac{q^2}{2c^2}\frac{1}{N}\sum\nolimits_{j\neq 1}\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_j|}\right)a_q. \tag{16}$$

在圆环电磁惯性很大的情况下，外部电荷 e 的行为就像是在与一个总电荷为 q、质量非常大的圆环相互作用。圆环内部的（法拉第）加速度项所产生的电磁惯性，会阻止间距很近的电荷速度发生变化。如果没有其他电荷的存在，每个质量很小的电荷 q_i M_q/N 都会因外部电荷 e而产生很大的加速度。然而，圆环中其他电荷的加速度电场会抵消每个粒子 q_i 可能产生的这种大加速度。式（15）中电荷 e 的机械线动量变化，与式（16）中电荷环的电磁线动量变化相平衡。

F. $1/c$ 层级的失效

我们注意到，当电磁惯性很大时，对 $1/c$ 中因子数量的比较便不再有帮助。因此，对电磁惯性有贡献的每一项都是 $1/c^2$ 阶，而粒子惯性质量 M_e 和 M_q 在 $1/c$中是零阶的。这种 $1/c$阶数的转变（其中电磁惯性支配机械惯性）在讨论螺线管的磁能时最为常见。磁能是 $1/c^2$ 阶的，而螺线管中电荷载流子的动能为零

阶于 $1/c$。然而，螺线管中的电磁能远大于其电流载流子的动能，因此后者的能量甚至不会被提及。

IV. 磁性阿哈罗诺夫-玻姆相移的静电类比

A. 作为磁偶极子极限的螺线管

1987年有人指出，存在一种经典静电滞后效应，[15]它是经典滞后的类比；有人曾提出，经典滞后是阿哈罗诺夫-玻姆相移的电磁基础。长螺线管可以看作单位长度上排列的一列磁偶极子。因此，螺线管中每一匝半径为 b 、载有电流 I ，会产生大小为 $m = \pi b^2 I/c$的磁偶极矩，而单位长度上的匝数 n 则将这一表达式转换为单位长度磁偶极子线的表达式。单位长度磁偶极矩为（$\pi b^2 I/c$） $n = [1/\ （4\pi）\ ] B_0 \pi b^2$，其中我们引入了长螺线管内部的磁场 $B_0 = 4\pi n I/c$。其静电类比涉及两条单位长度电荷为 $\pm\lambda$ 、符号相反的线电荷，它们之间存在一个很小的垂直位移 d，从 $-\lambda$ 到$+\lambda$ ，因此可以用单位长度电偶极矩 D $=$dλ来描述二者。

B. 电偶极子圆环

为了简化计算并利用轴对称性，我们将一列电偶极子弯成圆形，这与将螺线管弯成磁环形线圈类似。相应的电荷线弯成两个圆环，每个圆环的总电荷为 $\pm q = \pm\,(2\pi r_{\pm})\,\lambda$, 其中一个圆环的半径为 $r_+ = R + d/2$，带正电荷；另一个圆环的半径为 $r_- = R - d/2$，带负电荷。

我们设想，这些电荷圆环各自由 N 个独立电荷 $\pm q_i$ 构成，其电荷量为 $\pm q_i = \pm q/N$。这些独立电荷可以无摩擦地沿着平行于 z 轴的直杆滑动；这些杆本身呈圆形排列，半径为 $R + b/2$ 的杆上带有正电荷 q_i，半径为 $R - b/2$的杆上带有负电荷 $-q_i$。电荷 $\pm q_i$ 会受到圆环中电荷的吸引

的作用 正电荷，两者最初都假定静止在 xy 平面内 .

C. 相互作电荷 e 最初静止时与电偶极子环的相互作用

现在，我们引入电荷 e ，它沿着中心 z 轴在杆上无摩擦地滑动。当电荷 e 最初静止并位于 z_e 处、沿着 z 轴时，电荷 e 与电荷环上的电荷 $\pm q_i$ 之间会产生静电力。然而，由于正环中彼此紧密排列的电荷 q_i 具有电磁惯性（如上一节所述），正环上的电荷 q_i 会以非常小的共同加速度远离（正）电荷 e。同样，由于负环中彼此紧密排列的电荷 $-q_i$ 具有电磁惯性，负环上的电荷会以非常小的共同加速度朝向电荷 $e.$ 。正、负电荷环的加速度会使电偶极子环略微极化，因为正环和负环的加速度方向相反。

D. 运动电荷 e 与电偶极子环的相互作用

接下来，我们考虑一种电学情形：当电荷 e 远离位于 $z_q = 0$处的电荷环时，它最初以速度v_{e0} 沿 z 轴运动。由于每个电荷环的加速度因其巨大的电磁惯性而可以忽略不计，偶极子环只会发生极其微弱的极化，并对穿过这些环中心的电荷 e 施加静电偶极力。因此，电荷 e 在电环静电力作用下的加速度由牛顿第二定律给出；对于非相对论速度 v_{e0} ，有

$$\begin{aligned} M_e\frac{dv_e}{dt} &= e\left[\frac{q(z_e-z_q)}{\left[(z_e-z_q)^2+(R+b/2)^2\right]^{3/2}}-\frac{q(z_e-z_q)}{\left[(z_e-z_q)^2+(R-b/2)^2\right]^{3/2}}\right]_{z_q=0} \\ &= \frac{eqz_e}{\left(z_e^2+R^2\right)^{3/2}}\left[1-\frac{3}{2}\frac{(Rb+b^2/4)}{(z_e+R^2)}+...-\left(1-\frac{3}{2}\frac{(-Rb+b^2/4)}{(z_e+R^2)}+...\right)\right] \\ &= \frac{-3eqz_eRb}{\left(z_e^2+R^2\right)^{5/2}} \end{aligned} \tag{17}$$

在比值 b/R 的最低阶近似下。当 z_e 的值为负时，正电荷 e 的加速度为正。

假设电荷 e 与电荷环之间的相互作用很弱，我们可以在近似处理方程（17）右侧的 $v_e(t) \approx v_{e0}$ 的同时，计算电荷 e 在时刻 t 的速度变化 $\Delta v_e(t)$。因此，令 $z_e \approx v_{e0}t$，我们得到 $\Delta v_e(t) = v_e(t) - v_{e0}$，其中

$$\Delta v_e(t) = \int_{-\infty}^{t'=t} dt' \left(\frac{-3eq\,(v_{e0}t')\,Rb}{M_e\left[(v_{e0}t')^2 + R^2\right]^{5/2}} \right) = \frac{eqRb}{M_e v_{e0}\left[(v_{e0}t)^2 + R^2\right]^{3/2}}. \tag{18}$$

E. 电能守恒

在这种静电情况下，很容易通过施加力来计算电荷 e 的速度变化 Δv_e。不过，只有假设电磁惯性非常大，以至于电荷环的位置几乎不发生变化，计算才会变得简单。在假设构成电偶极子环的每个电荷环都具有很大的电磁惯性时，我们可以应用能量守恒，同时考虑粒子动能和电场能。电荷 e 远离电荷环时的初始动能为 $m_e v_{e0}^2/2$，并假设在电荷 e 接近偶极子环的短暂时间内，电荷环自身的静电能基本保持不变。因此，对于电荷 e 速度的微小变化，能量守恒要求粒子动能的变化 $M_e v_e^2/2 - M_e v_{e0}^2/2 \approx M_e v_{e0}\Delta v_e$ 应与电荷 e 和偶极子环之间电势能的变化相平衡，

$$\begin{aligned} M_e v_{e0}\Delta v_e &= -e\left[\frac{q}{\left[(z_e - z_q)^2 + (R + b/2)^2\right]^{1/2}} - \frac{q}{\left[(z_e - z_q)^2 + (R - b/2)^2\right]^{1/2}} \right]_{z_q=0} \\ &= \frac{eqRb}{\left[z_e^2 + R^2\right]^{3/2}} \end{aligned} \tag{19}$$

在 b/R 的最低阶近似下。因此，能量守恒方程 (19) 给出的速度变化与基于电力在方程 (18) 中得到的相同。

F. 经典静电滞后效应

我们可以对式 (18) 中电荷 e 的速度变化进行积分，从而求得穿过电偶极子环的电荷 e 相对于以恒定速度 $v_e(t) = v_{e0}$ 运动的电荷的相对滞后（或超前）。相对滞后

Δz_e（电荷 e 穿过电偶极子环之后）可表示为电荷 e 与电偶极子环之间相互作用的一阶近似：

$$\begin{aligned}\Delta z_e &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \Delta v_e\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{M_e v_{e0}} \left(\frac{eqRb}{\left(z_e^2 + R^2\right)^{3/2}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{M_e v_{e0}} \left(\frac{eqRb}{\left[(v_{e0}t)^2 + R^2\right]^{3/2}} \right) = \frac{eqb}{M_e v_{e0}^2} \frac{2}{R} = 4\pi \frac{eD}{M_e v_{e0}^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

其中，我们引入了单位长度偶极矩 $D = \lambda b = [q/\,(2\pi R)]\, b$ 其中b 是电荷圆环之间的垂直（径向）距离。

我们注意到，式（20）中这一静电相对滞后（发生在穿过电偶极子环的电荷与以恒定速度 v_{e0} 运动的电荷 e 之间）的最终表达式，与电偶极子环的平均半径 R 无关。滞后仅取决于电荷 e 是否穿过了电偶极子环。此外，滞后与单位长度偶极矩 D 成正比。这种电滞后情形类似于磁滞后情形，后者的滞后取决于磁通量。在下一节讨论阿哈罗诺夫–玻姆相移时，我们将得到一种类似的经典滞后：电偶极子环的单位长度电偶极矩 D 被环形线圈的单位长度磁偶极矩或磁通量 $B_0 \pi b^2$ 所取代，该环形线圈被描绘成磁偶极子环。在这两种情况下，经典滞后都与圆环的平均半径 R 无关。如果半径 R 不断增大，偶极子环就会变成直线；滞后取决于电子从哪一侧经过，但与电荷 e 到偶极子直线的距离无关。

V. 阿哈罗诺夫–玻姆相移

A. 物理设置

上述简单模型中出现的基本滞后思想，为阿哈罗诺夫–玻姆相互作用提供了经典电磁学基础，其中电荷 e 与磁体相互作用。为简化计算，我们考虑磁环形线圈，而非长螺线管。我们考虑一个带电粒子 e 沿载流环形线圈的对称轴运动。我们假设该环形线圈以 z 轴为对称轴，并且其

平均半径为 R，具有一个（平均）磁场

$$\mathbf{B}_T = \widehat{\phi} B_T = \widehat{\phi} \frac{4\pi}{c} nI, \tag{21}$$

其中， n 是单位长度匝数， I 是每匝中的电流。磁场局限在环形体积内部，该体积的横截面积 πb^2很小，体积为$(2\pi R)\,\pi b^2$。环形线圈整体呈电中性，固定的负电荷与产生磁场 $\mathbf{B}_T$的运动正电荷相平衡。因此，在环形线圈自身的静止参考系中，未受扰动的环形线圈外部既没有电场，也没有磁场。

B. 在环形线圈初始静止的惯性系中进行分析

1. 电荷 e 对环形线圈的磁力

我们将在最低阶近似下考察电荷 e 与环形线圈之间的相互作用；在这种近似下，尽管彼此存在，电荷 e 和环形线圈仍各自保持未受扰动时的运动。在此近似中，若在环形线圈的静止参考系S_T 中考察，且电荷 e 以速度 $\mathbf{v}$ 运动，则由于未受扰动的环形线圈外部不存在电场或磁场，电荷 e 不受任何力。

环形线圈整体呈电中性，因此不会受到电荷e产生的净电力。另一方面，运动电荷 e 的磁场确实会对环形线圈施加净磁力。若将环形线圈的一匝视为磁偶极子

$$\mathbf{m} = \widehat{\phi} \pi b^2 I / c \tag{22}$$

其中， πb^2 为横截面积， I 为该匝中的电流，那么电荷 e 的磁场 $\mathbf{B}_e$ 对该匝施加的力为

$$\mathbf{F}_{\mathbf{m}}^{(B)} = -\nabla_{\mathbf{m}} \left\{ -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e \left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}, t \right) \right\} = -\nabla_{\mathbf{m}} \left\{ -\mathbf{m} \cdot \left[e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\widehat{r} R + \widehat{z} \left(z_{\mathbf{m}} - z_e \right)}{\left[\left(z_{\mathbf{m}} - z_e \right)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \right] \right\}. \tag{23}$$

这里可以交换点积和叉积的顺序，并注意到 $\mathbf{m} \times \mathbf{v}$ 的方向为 $\widehat{r}$。式（23）中这个力的 z 分量乘以环形线圈周围圆环的数量$n 2\pi R$ ，得到作用于环形线圈、沿对称轴方向的力

$$F_T^{(B)} = \left[(n 2\pi R) \left(\frac{\pi b^2 I}{c} \right) \right] \frac{ev}{c} \frac{-3R \left(z_T - z_e \right)}{\left[\left(z_T - z_e \right)^2 + R^2 \right]^{5/2}}. \tag{24}$$

看起来这些力并不平衡，因为显然只有环形线圈受到力，而电荷 e 却没有。

2. 磁能变化

在这个 S_T 惯性系中的分析也引发了关于能量守恒的问题。看来，电荷 e的动能以及相互作用过程中（在未扰动近似下处理）的电场能都没有变化，但磁能却发生了变化，因为运动电荷 e 的磁场与环形线圈内部的磁场$\widehat{}$重叠。两个磁场都沿 ϕ方向，磁场的重叠能为

$$\Delta U_{overlap}^{(B)}=\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}_e\cdot\mathbf{B}_T\left(2\pi R\pi b^2\right)=\frac{1}{4\pi}\left[e\frac{v}{c}\frac{R}{\left[\left(z_{\mathbf{m}}-z_e\right)^2+R^2\right]^{3/2}}\right]\left(\frac{4\pi}{c}nI\right)\left(2\pi R\pi b^2\right). \tag{25}$$

然而，这种磁　能变化的平衡方面并不立即显而易见　　.

C. 在电荷 e 最初静止的惯性系中的分析

1. 描述中所用惯性系的改变

对于相对论系统，惯性系的变化可能显著改变对物理系统的描述。因此，如果我们转到这样一个 S_e' 惯性系：未受扰动的电荷 e 静止，未受扰动的环形线圈以速度 –v运动，那么电荷 e 与环形线圈之间不存在磁力，但存在电力。由于电荷 e 静止，它只有静电场。在这个 S_e' 惯性系中，环形线圈以速度 –v运动，此时它具有一圈电偶极子，这些电偶极子既会产生电场，也会受到电力作用。电荷 e 与环形线圈之间的电力现在大小相等、方向相反。此外，在这个 S_e' 惯性系中，电场能发生了变化，而电力对环形线圈做功，使其动能发生变化，这正好解释了电场能的变化。我们将详细分析这一切。

2. 磁偶极子的洛伦兹变换

如果我们取环形线圈的一匝（一个电流环），可以将它看作一个磁偶极子 m，如式（22）所示。我们想要考察这个磁偶极子在某个运动惯性系中的表现。在其静止参考系中，可以将磁偶极子 m 想象成位于 zx平面内的一个圆，半径为 b ，圆上均匀分布着电荷，圆环中心位于原点。负电荷 $-q_i$ 静止在坐标$z_{-i} = b\cos\phi_i$、 $x_{-i} = b\sin\ \phi_i$处；运动的正电荷位于 $z_{+i} = b\cos(\omega t + \phi_i)$、$x_{+i} = b\sin(\omega t + \phi_i)$处，并以速度 $v = \omega b.$ 沿圆轨道运动。我们关注的是在一个沿 z轴以速度 $\mathbf{v} = \hat{z}v$ 运动的带撇号惯性系中观察到的这些电荷的轨迹，因此磁偶极子此时具有速度 $-\mathbf{v}$。

对于适用于达尔文拉格朗日量的小速度 $v << c$ ，洛伦兹变换涉及 $z = \gamma(z' + vt')$ $\approxeq [1 + v^2/(2c^2)](z' + vt')$ 、 $x = x'$，以及 $t = \gamma(t' + vz'/c^2) \approxeq [1 + v^2/(2c^2)](t' + vz'/c^2)$ $\approxeq [1 + v^2/(2c^2)]\, t' + vz'/c^2$。因此，在带撇坐标系中观察时，磁偶极子以速度 $-\mathbf{v}$ 运动，负电荷的位置位于带撇坐标

$$\left(z'_{-i} + vt'\right) = +b\left[1 - v^2/(2c^2)\right]\cos\phi_i, \quad \text{and} \quad x'_{-i} = b\sin\phi_i, \tag{26}$$

这对应于沿运动方向的收缩。

载流电荷的轨迹可通过展开以下表达式得到

$$\begin{aligned}\left(z'_{+i} + vt'\right) &= \frac{1}{\gamma}z_{+i} = \frac{b}{\gamma}\cos\left\{\omega\gamma\left(t' + vz'_{+i}/c^2\right) + \phi_i\right\} \\ &\approxeq \left[1 - v^2/(2c^2)\right] b\cos\left\{\omega\left[1 + v^2/(2c^2)\right] t' + \phi_i + \omega v z'_{+i}/c^2\right\}\end{aligned} \tag{27}$$

and

$$\begin{aligned}x'_{+i} &= x_{+i} = b\sin\left\{\omega\gamma\left(t' + vz'_{+i}/c^2\right) + \phi_i\right\} \\ &\approxeq b\sin\left\{\omega\left[1 + v^2/(2c^2)\right] t' + \phi_i + \omega v z'_{+i}/c^2\right\}.\end{aligned} \tag{28}$$

将这些表达式按小速度 $v << c$ 展开，我们得到

$$\begin{aligned}\left(z'_{+i} + vt'\right) &= \left[1 - v^2/(2c^2)\right] b\cos\left\{\omega\left[1 + v^2/(2c^2)\right] t' + \phi_i\right\} \\ &\quad - b\frac{\omega v}{c^2}\frac{b}{2}\sin\left\{2\left(\omega\left[1 + v^2/(2c^2)\right] t' + \phi_i\right)\right\}\end{aligned} \tag{29}$$

and

$$x'_{+i} = b\sin\left\{\omega\left[1+v^2/(2c^2)\right]t' + \phi_i\right\} + b\frac{\omega v}{c^2}b\cos^2\left\{\omega\left[1+v^2/(2c^2)\right]t' + \phi_i\right\}. \tag{30}$$

采用小源近似时，对时刻 t' 的相位 ϕ_i 求平均后，正电荷和负电荷的平均 z 分量位置均为 $\langle z'_{+i}\rangle = -vt' = \langle z'_{-i}\rangle$。然而，运动的正电荷现在具有电偶极矩（垂直于速度方向），因为对相位 ϕ_i 求平均后，由式（30）可得

$$q\langle x'_{+i}\rangle = \frac{v}{c}\frac{q\omega b^2}{2c} = \frac{v}{c}m \tag{31}$$

其中， m 是该系统的磁偶极矩，而 $\langle x'_{-i}\rangle = 0$。我们的计算结果与 Jackson 经典电动力学著作第一版[16] 完全一致；Griffiths 中的一道习题[17], 也指出，速度为 v 的磁偶极子在最低阶近似下具有电偶极矩 p $=$(v/c) $\times$m。$\widehat{\ }$在我们的情形中，偶极矩的方向由 $(-\hat{z})$ $\times\,\phi = \hat{r}$给出，其中 $\hat{r}$ 从 z 轴指向磁偶极子在 xz平面中的位置。

在 S'_e 惯性系中，对于位于 $x'z'$平面的场点 r′，其电场 E′ (r′, t') 可通过将分量 z'_{-i}、 x'_{-i}、 z'_{+i}和 x'_{+i} 代入式（26）、（29）和（30），再代入式（8）求得。注意，式（8）中的表达式包含静电贡献以及 $1/c^2$. 中的附加项。由于忽略了 $1/c^4$ 中的项，式（26）、（29）和（30）中的$1/c^2$ 项对电场在$1/c^2$ 阶的贡献，实际上只通过静电贡献 E′ (r′, t') $= \sum_a$ (r′ − r′$_a$) / |r′ − r′$_a$|^{3}体现。因此，式（31）中得到的电偶极矩将以一种类似于静电学中熟悉的形式作出贡献。

3. 电力

我们分析的环形线圈并非由单个电流环形成磁偶极子，而是由一组这样的磁偶极子组成，它们沿环形线圈的对称轴（即我们的 z 轴）呈圆形排列。因此，在电荷e 静止、环形线圈以速度 −v 运动的 S'_e 惯性系中，环形线圈表现为一个圆形排列的电偶极子阵列，这与上文静电类比一节中讨论的电偶极子环完全类似

不过，现在电偶极子的阶数为 $1/c^2$，而非 $1/c$ 的零阶项。正是这些 $1/c^2$ 阶电偶极子对电荷 e 产生电力，并使环形线圈受到电力作用。

环形线圈所受的合力对应于作用在每个电偶极子上的力的 z 分量之和，表达式为

$$\begin{aligned} F_T^{(E)} &= \sum_i \widehat{z} \cdot \left[(\mathbf{p}_i \cdot \nabla_{\mathbf{m}}) \mathbf{E}_e \left(\mathbf{r}_m, t \right) \right] \\ &= (n 2\pi R) \left(\frac{v}{c} m \right) \frac{\partial}{\partial R} e \frac{(z_T - z_e)}{\left[(z_T - z_e)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \\ &= (n 2\pi R) \frac{v}{c} \left(\frac{\pi b^2 I}{c} \right) e \frac{-3R(z_T - z_e)}{\left[(z_T - z_e)^2 + R^2 \right]^{5/2}}. \end{aligned} \tag{32}$$

式（32）中的这个电力与式（24）中的磁力相同。在式（24）中，该力是作用于环形线圈的磁力，出现在环形线圈静止而电荷 e 运动的 S_T 惯性系中。在式（32）中，该力是电力，出现在电荷 e 静止而环形线圈运动的 S'_e 惯性系中。由于我们的分析与达尔文拉格朗日量一样，在 $1/c^2$ 阶精度内是准确的，因此我们预计，当惯性系变换且速度为 $v << c$ 时，这些力的大小保持不变。带电粒子对环形线圈施加的电力 $F_T^{(E)}$，对应着环形线圈对电荷 e 施加的力 $F_e^{(E)}$，$F_{(E)e} = -F_{(E)T}$。由于环形线圈中存在电偶极子环，该力大小相等、方向相反。

4. 电能

在 S'_e 惯性系中，电场能量的变化与点电荷电场中电偶极子的能量有关

$$\Delta U^{(E)} = -\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{E} = -\left(n 2\pi R\right) \left[\left(\frac{v}{c} \right) \left(\frac{\pi b^2 I}{c} \right) \right] e \frac{R}{\left[(z_T - z_e)^2 + R^2 \right]^{3/2}}. \tag{33}$$

式（32）中电力所做的功与电磁场中电能的变化直接相关。[9] 容易验证，$\Delta U^{(E)} = -\int_{\infty}^{z_T} dz F_{(E)T}$。因此，在电荷 e 静止而环形线圈运动的 S'_e 惯性系中，所做的功与电能的变化相平衡。然而，我们看到

式（33）中的电能变化 $\Delta U^{(E)}$ 恰好是式（25）中正的磁重叠能 $\Delta U^{(B)}_{overlap}$ 的相反数。

D. Rea在环形线圈惯性系中分析电荷-环形线圈相互作用

1. 磁能变化的两个方面

电荷 e 与环形线圈未受扰动的运动，在电荷 e 静止、环形线圈以速度 –v运动的 S'_e 系中，似乎既清晰明了，又符合能量守恒。为什么在环形线圈静止的 S_T 参考系中，电荷 e以速度v运动时，分析结果看起来如此不同？答案的一部分在于，电荷 e 与环形线圈之间能量传递的一个方面尚未提及。

这里整个系统的磁能变化包含两项，形式如下

$$\Delta U^{(B)} = \Delta U^{(B)}_{overlap} + \Delta U^{(B)}_{toroid\ currents}. \tag{34}$$

因此，除了 $\Delta U^{(B)}_{overlap}$这一项之外，还有第二项，它涉及电荷 e 的电场作用于环形线圈电流时所传递的能量。向环形线圈电流传递净能量的并非电荷 e 的静电场（它没有 emf），而是电荷 e电场中 $1/c^2$ 的那些项。这些 $1/c^2$ 电场项与变化的磁场B$_e$相一致，会引起环形线圈粒子 q_i 速度Δv_i 的变化，从而导致环形线圈磁场B$_T$发生变化。

2. 环形线圈对变化磁通的响应

环形线圈对运动电荷 e引起的磁通量变化，响应方式与螺线管相同。如果电阻为零，且磁能远大于电流载流子的动能，那么环形线圈中的磁通量就不会变化。将环形线圈的恒定横截面积 πb^2 约去，环形线圈磁通量恒定这一条件给出

$$0 = \Delta B_e + \Delta B_T = B_e + (B_T - B_{T0}), \tag{35}$$

因为在初始时刻，电荷 e在环形线圈所在位置产生的磁场 B_e 为零，而环形线圈中有电流流过，产生了初始磁场 B_{T0}。因此，环形线圈磁通量恒定意味着

$$B_T - B_{T0} = -B_e. \tag{36}$$

3. 磁能变化

重叠积分中的磁能与相互作用呈线性关系，涉及形如$ev_e\sum_i q_i v_i$的求和。另一方面，环形线圈的磁能变化与相互作用呈二次关系，涉及形如$\sum_i\sum_{j\neq i} q_i q_j\left[(v_i+\Delta v)\,(v_j+\Delta v)\right.$ $\left.-\,v_i v_j\right] = \sum_i\sum_{j\neq i} q_i q_j[v_i\Delta v + v_j\Delta v]$的求和。因此，只保留最低阶项时，环形线圈磁能的总变化 $\Delta U^{(B)}$ 涉及环形线圈的一个恒定体积 $\pi b^2 2\pi R$ 乘以磁能密度的变化

$$\begin{aligned}\Delta U^{(B)} &= \frac{1}{4\pi}\left[B_e B_{T0} - 2B_e B_{T0}\right]\left(\pi b^2 2\pi R\right)\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[-B_e B_{T0}\right]\left(\pi b^2 2\pi R\right) = -\Delta U^{(B)}_{overlap}.\end{aligned} \tag{37}$$

因此，磁场能的总变化恰好等于式（25）中出现的重叠磁能 $\Delta U^{(B)}_{overlap}$ 的负值。

4. 与电能变化的一致性

总磁能变化 $\Delta U^{(B)}$ 与在惯性系 S'_e 中求得、并出现在方程（33）中的电能变化完全一致。系统（电荷 e 与环形线圈）的 $1/c^2$ 电磁能变化在两个惯性系中相同。然而，在 S_T 系中，电磁能变化是磁 $\Delta U^{(B)}$；而在 S'_e 惯性系中，电磁能变化是电 $\Delta U^{(E)}$。磁能变化由反作用（法拉第）加速度电场所做的功来解释：这些电场使环形线圈中的磁通量保持恒定，并在电荷 e 上施加磁能平衡力；该电荷正是试图改变环形线圈中磁场的施动者。[9] 正是环形线圈电流载流子的速度变化，在惯性系 S_T （即环形线圈静止的参考系）中对电荷 e 产生反作用（法拉第）电场。

5. $1/c$幂次层级的失效

过去曾有人声称，运动电荷 e 的电场绝不可能对掠过的电荷产生量级为 $1/c^2$的反作用力。有人声称，电荷 e 的感应场会使环形线圈中的载流电荷以 $1/c^2$ 的量级加速，从而在电荷 e处产生量级为 $1/c^4$的反作用（法拉第）加速度电场。这种涉及 $1/c$ 次幂的论证是谬误的，因为它并未反映环形线圈（或螺线管）对试图改变其电流载流子速度的施动者会如何响应。电感 L较大的螺线管会试图阻止其电流载流子的速度发生变化，因此会对试图造成这种速度变化的施动者施加反作用力。由于螺线管中有大量电流载流子，这种反作用力并不遵循$1/c$中的量级层次。例如，螺线管的电荷载流子质量在 $1/c$中属于零阶；每个电流载流子的反作用（法拉第）加速度场所产生的反作用力可能只有 $1/c^2$量级，但数量庞大的电流载流子会产生反作用电力，试图阻止施动者改变电流载流子的速度，因为速度变化会导致磁能变化。正是同一个反作用（法拉第）加速度电场作用于掠过的电子，改变其动能，从而使电荷 e与环形线圈构成的整个系统达到磁能平衡。

6. 准静态电动力学中加速度电场的陌生性

在近年的教科书中，方程（8）的电场中出现的关键（法拉第）加速度项从未被提及。教科书中关于 $emfs$ 的计算都针对对称情形；在这些情形下，无须提及电荷的加速度电场，就能轻易地从变化的磁通量求出电场。事实上，通常根本不会提到螺线管中的电荷载流子，因为与螺线管磁场中的能量相比，它们的动能微不足道。诚然，1940年的一本教科书[14] 中确实提到了加速度电场，但在近年的论述中，它们已经消失了。

由于不熟悉那些用于平衡磁能变化的加速度场，人们产生了一整类涉及带电粒子与磁体相互作用的“悖论”。

带电粒子的速度一旦发生变化，磁场能就会随之改变。磁力不做功，因此无法解释这些能量变化。准静态系统的磁能平衡要求存在与带电粒子加速度相关的力。[9] 带电粒子速度的变化会产生加速度场，如此处方程（8）最后一行所示。这些加速度场会对施加速度变化的作用体施加力，以促使其遵守能量平衡（楞次定律）。

E. 阿哈罗诺夫-玻姆情形下电荷 e 的经典滞后

1. 电荷 e的速度变化

环形线圈静止参考系中的能量平衡，由电荷 e 的速度变化来保证，该变化补偿了总磁能的变化，其值为式 (25) 的负值，

$$\begin{aligned} 0 &= M_e v_{e0} \Delta v_e + \Delta U^{(B)} \\ &= M_e v_{e0} \Delta v_e - \frac{1}{4\pi} \left[e \frac{v}{c} \frac{R}{\left[(z_{\mathbf{m}} - z_e)^2 + R^2 \right]^{3/2}} \right] \left(\frac{4\pi}{c} nI \right) \left(2\pi R \pi b^2 \right), \end{aligned} \tag{38}$$

其中，量 $B_T = (4\pi/c)\, nI$ 是环形线圈的磁场，其方向与电荷 e的磁场沿相同的$\curvearrowleft \phi$方向。然后约去公共因子$v_{e0} = v$，得到

$$M_e \Delta v_e = \frac{e}{2c^2} \frac{B_T \pi b^2 R^2}{\left| (z_e - z_q)^2 + R^2 \right|^{3/2}}. \tag{39}$$

2. 经典电磁滞后

根据式 (39) 中出现的经过电荷 e 速度变化，我们可以计算该电荷相对于初速度相同、但未穿过磁环形线圈的粒子所产生的经典电磁延迟 $e\, v_{e0}$。我们对速度变化Δv_e 在整个时间范围内积分（正如静电类比的式 (20) 中所做的那样），得到

$$\Delta z_e = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{e}{2M_e c} \frac{B_0 \pi b^2 R^2}{\left| (z_e - z_q)^2 + R^2 \right|^{3/2}} \right) = \frac{e B_0 \pi b^2}{M_e v_{e0} c}. \tag{40}$$

这一经典电磁延迟表达式的大小与前文多次给出的相同，[13][15] 并且恰好产生了实验观测到的干涉图样偏移。[1][2] 根据当前分析，可以得出明确的经典预测，确定偏转方向。假设电荷为正，且电荷的磁场与环形线圈的磁场方向一致，则穿过环形线圈中心的电荷会先加速、随后减速，因此 Δz_e 为正位移。

3. 经典滞后导致的相移

阿哈罗诺夫–玻姆相移在掩模上设置两个小狭缝的装置中或许最为清晰。[15] 传统装置会在两个狭缝之间放置一个长螺线管。对于我们讨论的环形线圈，可以将环形线圈套在掩模的两个狭缝中的一个周围。或者，也可以使用两个环形线圈，每个线圈的磁通量为一半；将一个朝前的环形线圈套在一个狭缝周围，另一个朝后的环形线圈套在另一个狭缝周围。双狭缝干涉图样的相移取决于环形线圈中的电流；该电流会使穿过一个狭缝的粒子相较于穿过另一个狭缝的粒子产生相对滞后（或超前，具体取决于电流方向）。

4. 量子理论中的相移

电子干涉图样的量子分析涉及波函数 $\psi(z,t) \simeq \exp\left[i(p_z z/\hbar) + i\phi - i\omega t\right]$ 的相移，该波函数与电子通过的狭缝相对应。薛定谔方程确实表明，相位变化取决于环形线圈中的磁通量，但并未指出相移的物理基础；薛定谔方程没有说明相移究竟是由速度变化导致的经典滞后引起，还是源于一种新的粒子速度恒定的量子拓扑效应。目前，实验结果允许这两种解释。按照本文提出的滞后解释，两条路径之间的相位差 ϕ 由式（40）得出，表示为

$$\phi = \frac{p_z \Delta z_e}{\hbar} = (M_e v)\left(\frac{eB_T \pi b^2}{M_e v_{e0} c}\right)\frac{1}{\hbar} = \frac{e\Phi}{c\hbar} \tag{41}$$

其中 $\Phi = B_T \pi b^2$ 是环形线圈中的磁通量。该相移的大小与阿哈罗诺夫和玻姆所预测的相同。

5. 经典滞后与量子相移都给出一个与 $\hbar$ 无关的偏转角

如果掩模中两个狭缝之间的间距对应于距离 d，那么电荷 e 通过后，在远处屏幕上观察到的双缝干涉偏转角 [18] 将为

$$\theta \approx \frac{\Delta z_e}{d} = \frac{eB_0 \pi b^2}{M_e v_{e0} c d} = \frac{e\Phi}{cpd}. \tag{42}$$

这个偏转角只是两个长度之比，与普朗克常数 $\hbar$ 无关。经典理论和量子理论预测的偏转角 θ 大小相同。对于任何波长的波，双缝干涉图样的偏转角形式都相同；当光通过双孔掩模其中一个孔后方的一片玻璃时，也会观察到这种偏转。

6. 偏转方向

尽管经典理论和量子理论中的偏转角 θ 大小相同，但对偏转方向的预测可能不同。若尝试仅根据环形线圈与经过的电荷之间重叠磁能变化所涉及的滞后效应进行解释，就会预测出一种滞后，因此得出的偏转角方向与本文所述方向相反。与少数愿意从量子理论角度推测偏转方向的物理学家交谈后发现，他们认为量子偏转方向与当前经典电磁分析所要求的方向相反。[11]

VI. 电荷与磁体的电动力学相互作用讨论

A. 电荷与磁体的问题

阿哈罗诺夫–玻姆相移是涉及电荷与磁体相互作用的一类问题中的一个例子，这类问题长期以来一直困扰着物理学家。这类问题包括：

除了阿哈罗诺夫–玻姆相移，[3] 阿哈罗诺夫–卡西尔相移，[19] 肖克利-詹姆斯悖论，[20]“磁体中的隐性机械动量”这一概念，[21]以及Mansuripur关于狭义相对论不一致的错误主张[22] 。

B. 环形线圈对称轴上的矢势

螺线管和环形线圈构成了有趣的经典电磁系统，因为电流载流子的磁场以一种倾向于将磁场限制在系统内部的方式叠加。然而，尽管静磁场被限制在内部，变化电流仍会在螺线管和环形线圈外部产生电磁场。

确实，值得注意的是，对于上文讨论的环形线圈，可以通过类比半径为 R 的圆形电流环轴线上的磁场，轻松求得环形线圈轴线上的矢势 $\mathbf{A}$（利用类比关系 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 以及 $\nabla \times \mathbf{B} = (4\pi/c)\,\mathbf{J}$ $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$），即

$$\mathbf{A}_T(z) = \widehat{z}\frac{c}{4\pi}\frac{2\pi R^2(B_T\pi b^2)}{c\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}. \tag{43}$$

在环形线圈静止、电荷 e 以速度 $\mathbf{v}$ 运动的惯性系中，可以利用这个磁矢势计算上文所述的磁能。另一方面，在带电粒子静止、环形线圈具有一圈电偶极矩 $-(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{m}$ 的惯性系中，则可以利用静电势计算电能。

C. 环形线圈与沿对称轴电路的互感

我们可以考虑环形线圈与这样一个电路的耦合：该电路的一根导线沿环形线圈的对称轴铺设，并在距离环形线圈很远处闭合。尽管恒定电流下，环形线圈的绕组外部没有磁场，但环形线圈与线电流电路之间存在互感，其表达式为

$$M = \frac{4\pi}{c^2}n\pi b^2. \tag{44}$$

我们注意到，这个互感与环形线圈的平均半径 R 无关，但取决于单位长度匝数 n 以及横截面

面积 πb^2。这些因素与环形线圈中的磁通量有关。如果我们沿环形线圈的对称轴（ z轴）对矢势进行积分，就会得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \mathbf{A}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{c}{4\pi} \frac{2\pi R^2 (B_T \pi b^2)}{c\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} = B_T \pi b^2, \tag{45}$$

它是环形线圈中的磁通量。

D. 局域脉冲与均匀电流

虽然电路之间的互感在经典电磁学中广为人知，但互感近似假设电流 I 在每个电路中处处均匀。与这种情况相反，在运动电荷 e 与环形线圈（或螺线管）相互作用的经典分析中，局域瞬态脉冲这一特性十分陌生。相互作用的奇特性质容易引出奇特的说法。

VII. 一些历史评论

A. 阿哈罗诺夫–玻姆相移

1959年，Aharonov and Bohm[3] 提出，与经典电动力学相比，电磁势在量子理论中发挥着一种新的作用。在量子理论中，电磁势具有了新的实在性；而在经典物理学中，它们仅仅是产力场 E 和 B 的辅助工具，地位从属。关于磁通量会改变涉及电子的干涉图样这一观点，Chambers[23] 于1960年使用磁须进行了实验检验，随后 Moellenstedt 和 Bayh[1][2] 于1962年使用载流螺线管进行了检验。Moellenstedt 及其同事改变微型螺线管中的电流，并表明掠过的电子的双缝干涉图样会随着螺线管中的电流连续移动。螺线管中磁通量变化所引起的电子干涉图样偏移被认为令人惊讶，因为一根长而未受扰动的螺线管外部没有磁场。

新的实验结果以及阿哈罗诺夫和玻姆所提供的解释，受到了 Feynman 的热烈赞同。他在《费曼讲义》中以其特有的清晰风格阐述了这一情形。[4] 遗憾的是，Feynman 对两者都作了错误的解读。

的相移以及一个所提出的经典类比，因为他表示，发生偏移的是整个电子干涉图样，而不仅仅是保持不变的单缝包络内的双缝电子图样。当有人指出这些错误时，Feynman 承认自己犯了错，并表示如果当时意识到这一点，他本会在编写《费曼讲义》时加以改正。《费曼讲义》至今仍未经任何修改而再版，现在还可以在互联网上免费阅读。然而，第二卷第 15.5 节仍然包含同样的错误。

关于阿哈罗诺夫–玻姆相移的文献浩如烟海。Olarius 和 Popescu[24] 以及 Batelaan 和 Tonomura[25] 撰写的综述文章阐述了主流观点。如今，大多数量子理论教科书[7][8]都会讨论这一效应。

B. 对主流解释的异议

尽管阿哈罗诺夫和玻姆提出的解释如今已深入主流物理学文献，但一直存在一股微弱的异议暗流。Benjamin Liebowitz[26] 于 1965 年提出，观测到的相移可能是由新的（非电磁）力引入的滞后效应所致。此后，人们重新分析了点电荷与螺线管相互作用的经典电动力学方面。[27] 还有人指出，[28] 如果螺线管中的电流保持恒定，那么当带电粒子掠过螺线管时，电荷与螺线管的电磁场会相互重叠，因此电磁能和电磁动量会发生变化。若以掠过的电子的机械能和动量变化来平衡这些电磁能和电磁动量的变化，那么观测到的相移大小便可用经典滞后效应来解释。[13] 因此，观测到的相移或许可以理解为源于经典电动力学相互作用。为反驳这一观点，人们在微型螺线管周围加装了导电套筒，以屏蔽掠过的电荷产生的电磁场。尽管加有导电屏蔽层，磁相移依然存在。然而，有人指出，磁速度场的屏蔽方式与电磁波的屏蔽方式截然不同，[29][30] 因此，在螺线管周围加装导电套筒并不能排除基于滞后效应的解释。[31][32]

随着人们对相移的兴趣持续升温，有人指出，存在一种静电类比

磁性情形下能量变化的静电类比：用一列电偶极子取代螺线管（一列磁偶极子）。[15] 在静电情况下，明确存在静电力，会产生经典滞后效应，其形式与观测到的磁相移相同。电子绕过这列电偶极子时产生的相移，已由 Matteucci 和 Pozzi 通过实验予以证实。[33]

C. 与观测到的相移的光学类比

有人强调，磁性阿哈罗诺夫–玻姆相移的经典滞后解释，类似于在双缝掩模的其中一条狭缝后放置一片玻璃时产生的光学相移；该掩模会形成双缝干涉图样。[15]电磁波通过玻璃片时速度减慢，因而会产生滞后，进而使双缝干涉图样偏移，而单缝包络则不发生位移；这与观测到的电子磁相移完全类似。

关于磁性阿哈罗诺夫–玻姆相移具有经典滞后基础的观点，常常遭到主流物理学期刊的审稿人和编辑否决。审稿人和编辑都看不出掠过的电子受到的力有什么经典电磁学基础；在找到这种力之前，所有关于滞后的解释都无法被接受。尽管已有一些线索指向产生滞后之力的基础，但螺线管是一个多粒子系统，似乎很难分析。[34] 关于滞后的观点发表在对非主流看法更为宽容的期刊上。

D. 寻找宏观经典滞后

2007 年，Caprez、Barwick 和 Batelaan[35] 通过让电子经过宏观磁体，寻找经典滞后效应，但未发现任何效应。不过，有人提出，这次实验未能找到效应，可能是因为螺线管电阻较大，从而违背了滞后分析中的能量平衡观点。[36] 宏观螺线管绕组中显著的电阻可能导致能量吸收，其数值会超过利用式（40）得到滞后结果所涉及的电磁能变化。尽管本文提出的滞后解释与观测到的干涉图样偏移相符

对于微型螺线管和环形线圈，迄今尚未使用宏观螺线管或环形线圈测得时间延迟。

E. 相关电荷-磁体问题

1967年，肖克利和詹姆斯[20] 提出了一个涉及磁体和电荷的悖论，科尔曼和范弗莱克[37][38] 对此进行了探讨。科尔曼和范弗莱克得出结论：当磁体外部存在一个静止电荷时，磁体中会有隐藏动量。他们在脚注中举了一个机械隐藏动量的例子。

1984年，阿哈罗诺夫和卡舍尔[19] 提出了他们所称的磁相移的“对偶”。他们交换了电荷与磁矩的位置。他们提出，即使将运动电荷扩展为线电荷，并将螺线管缩小为一个磁偶极子，仍会观测到相移。阿哈罗诺夫-卡舍尔效应的相移于1989年经实验观测到[39]。阿哈罗诺夫和卡舍尔采用的磁偶极子模型由两个磁荷构成；当它经过线电荷时，确实不受净经典力作用。然而，当磁矩被建模为电流环时，磁矩显然会受到经典力的作用，这足以将观测到的相移解释为经典滞后效应。[40] 阿哈罗诺夫、珀尔和魏德曼[41] 承认，将磁矩视为电流环时，它会受到经典力作用，但他们主张，磁矩仍以恒定速度运动（仿佛没有受到力作用），这是因为“磁体中的隐性机械动量”。于是，“磁体中的隐性机械动量”这一概念在物理学文献中声名鹊起。[21]

2012年，Mansuripur[22] 声称提出了“无可辩驳的理论证据，证明洛伦兹 [力] 定律与狭义相对论的基本原则不相容”。再一次，问题涉及点电荷与磁体之间的相互作用，并引发了有关角动量守恒的问题。至少有六篇文章回应了Mansuripur的主张，其中大多数援引了隐性机械动量的概念。[42]

F. 区分瞬态问题与稳态问题

显然，带电粒子与磁体之间的相互作用涉及一个复杂的问题，多年来一直困扰着物理学家。笔者认为，关于阿哈罗诺夫–玻姆相移及相关悖论的文献中充斥着不准确之处。尤其是，在一个包含许多彼此紧密排列的电荷的电磁系统中，“磁体中的隐性机械动量”这一概念似乎荒谬至极。应当记住，螺线管中电流载流子的机械能与巨大的电磁能相比微不足道。事实上，在经典电磁学教材中，与螺线管中的磁能相比，电流载流子微小的机械动能根本不会被提及。

将阿哈罗诺夫-玻姆和阿哈罗诺夫-卡西尔相移涉及的瞬态相互作用，与肖克利-詹姆斯悖论、“隐藏机械动量”概念及 Mansuripur 的建议中本质上属于稳态情况的情形区分开来，似乎很重要。在稳态情况下，磁体中可以存在内部动量，但它与电磁场有关，而不是与“机械”动量有关；后者与电磁动量相比微不足道。[38]

另一方面，阿哈罗诺夫–玻姆情形中的瞬态效应似乎与一种自感值 L 很大的 L/R 电路中的瞬态有些类似。其关键在于反向（法拉第）加速度场，它们倾向于阻碍改变磁体电流载流子速度的尝试。如果瞬态持续时间很短 $\Delta t << L/R$，那么电流载流子会短暂加速，产生反向（法拉第）电场，以平衡磁能变化；但与磁体相关的电流变化很小。阿哈罗诺夫–玻姆情形中令人陌生之处在于，使电流载流子加速的作用源被局限在单个电荷 e 上。在这种缺乏高对称性的情形下，很难套用熟知的、针对高度对称螺线管中变化磁场的计算方法。如果本文关于相移基础的观点确实正确，那么这些观点表明，可以进一步开展实验检验，同时改变螺线管以及阿哈罗诺夫–玻姆干涉图样偏移中使用的 L/R比值。

VIII. 结论

本文再次提出这样一种可能性：实验观测到的阿哈罗诺夫–玻姆相移，是由螺线管的电荷载流子与经过的电荷所产生的电磁场之间的经典电磁相互作用引起的。这里我们着重讨论反向（法拉第）加速度电场，它们倾向于阻止紧密排列的带电粒子群改变运动状态，并对试图改变电流载流子速度的作用源施加力。首先，我们以点电荷环与单个电荷 e 相互作用为例，说明大电磁惯性效应。接下来，我们考察电偶极子环。最后，我们计算电荷穿过磁环形线圈时的经典滞后。磁环形线圈中的许多电荷载流子会经历（非常小的）加速度，速度变化也很小，但由此会产生作用于经过电荷的反向（法拉第）加速度场。本文的经典电动力学分析预言了阿哈罗诺夫–玻姆相移，其中双缝图样偏转角的大小与量子理论给出的相同。然而，经典分析在此明确给出的偏转方向可能与量子理论或实验结果不同。

---

[1] G. Moellenstedt 和 W. Bayh，《在无力场空间中，通过空气线圈的磁矢势测量电子波连续相移》，Naturwissenschaften 49, 81-82 (1962)。[2] W. Bayh，《在无力场空间中，通过钨丝螺旋线的磁矢势测量电子波连续相移》，Zeitschrift f¨ur Physik 169, 492-510 (1962)。[3] Y. Aharonov 和 D. Bohm，《电磁势在量子理论中的意义》，Phys. Rev. 115, 485-491 (1959)。[4] R. P. Feynman、R. B. Leighton 和 M. Sands，《费曼物理学讲义》（Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1964），第 II 卷，第 15-5 节。有关勘误，请参阅 T. H. Boyer 的《对阿哈罗诺夫–玻姆效应的误解》，《美国物理学杂志》40, 56-59（1972）。Feynman 承认，他在《讲义》中的描述有误。然而，Feynman 否定了滞后观点

本文再次提出。T. H. Boyer，私人通信。[5] A. Shadowitz，《电磁场》（Dover，纽约，1988），第197、208–209、517–522页。[6] A. Garg，《经典电磁学概要》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州08450，2012），第107–108页。[7] D. J. Griffiths，《量子力学导论》第2版（培生普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河，新泽西州，2005），第384–391页。[8] L. E. Balentine，《量子力学》（普伦蒂斯·霍尔，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州07632，1990），第220–223页。[9] T. H. Boyer，“关于加速点电荷的经典力、能量和势”，《美国物理学杂志》91，74（2023）。[10] T. H. Boyer，“作为相对论悖论的经典阿哈罗诺夫–玻姆相互作用”，已投稿发表。[11] T. H. Boyer，“关于阿哈罗诺夫–玻姆偏转的方向”，已投稿发表。[12] J. D. Jackson，《经典电动力学》第2版（John Wiley & Sons，纽约，1975），第593–595页。[13] T. H. Boyer，“与量子干涉图样偏移相关的经典电磁偏转和滞后效应：与阿哈罗诺夫–玻姆效应相关的考察”，《物理评论D》8，1679–1693（1973）。[14] 这些加速度项见于L. Page和N. I. Adams的著作《电动力学》（范·诺斯特兰德，纽约，1940），第175页；“运动电荷之间的作用与反作用”，《美国物理学杂志》13，141–147（1945）。[15] T. H. Boyer，“作为经典电磁滞后效应的阿哈罗诺夫–玻姆效应：一种静电类比及可能的实验检验”，《新物理学》100，685–701（1987）。[16] J. D. Jackson，《经典电动力学》（John Wiley & Sons，纽约，1962），第389页，习题11.9。[17] D. J. Griffiths，《电动力学导论》第4版（培生，纽约，2013），第571–572页，习题12.64。[18] 参见参考文献 [4]中的《美国物理学杂志》文章。[19] Y. Aharonov和A. Casher，“中性粒子的拓扑量子效应”，《物理评论快报》53，319–321（1984）。

[20] W. Shockley和R. P. James，“‘从最简单的情形入手’：发现作用于‘磁电流’的‘隐动量’力”，《物理评论快报》18，876–879（1967）。[21] 例如，参见D. J. Griffiths，《电动力学导论》第3版（Prentice-Hall，上萨德尔河，新泽西州，1999），第357、361、520–521页；J. D. Jackson，《经典电动力学》第3版（John Wiley & Sons，纽约，1999），第189、618页；A. Zangwill，《现代电动力学》（剑桥大学出版社，2013），第521–522页。[22] M. Mansuripur，“洛伦兹力定律的问题：与狭义相对论和动量守恒不相容”，《物理评论快报》108，193901（2012）。[23] R. G. Chambers，“包围的磁通量导致电子干涉图样偏移”，《物理评论快报》5，3–5（1960）。[24] S. Olariu和I. Iovitzu Popescu，“电磁通量的量子效应”，现代物理评论57，339–436（1985）。[25] H. Batelaan和A. Tonomura，“阿哈罗诺夫–玻姆效应：微妙主题的种种变化”，今日物理38–43（2009年9月）。[26] B. Liebowitz，《新物理学》38，932（1965）。[27] G. T. Trammel，“阿哈罗诺夫–玻姆悖论”，《物理评论》134，B1183（1964）。[28] T. H. Boyer，“带电粒子与恒定电流螺线管之间的经典电磁相互作用”，《物理评论D》8，1667–1679（1973）。[29] T. H. Boyer，“电磁速度场穿透有限厚度导电壁”，《物理评论E》53，6450–6459（1996）。[30] 参见参考文献 [12] 第337页。[31] T. H. Boyer，“理解电磁速度场穿透导体”，《美国物理学杂志》67，954–958（1999）。[32] T. H. Boyer，“阿哈罗诺夫–玻姆效应是否存在？”，基础物理学30，893–905（2000）；“经典电磁学与阿哈罗诺夫–玻姆相移”，基础物理学30，907–932（2000）。[33] G. Matteucci和G. Pozzi，“静电阿哈罗诺夫–玻姆效应的新衍射实验”，《物理评论快报》54，2469–2470（1985）。[34] T. H. Boyer，“点电荷与磁体相互作用的达尔文–拉格朗日分析：关于阿哈罗诺夫–玻姆和阿哈罗诺夫–卡西尔相移争议的考察”，J. Phys. A: Math. Gen. 39，3455–3477（2006）。

[35] A. Caprez、B. Barwick 和 H. Batelaan，《阿哈罗诺夫–玻姆效应的宏观检验》，《物理评论快报》99，210401(1-4)（2007）。[36] T. H. Boyer，《针对与阿哈罗诺夫–玻姆相移相关的悖论性力的实验检验提案》，《基础物理学快报》19，491-498（2006）。[37] S. Coleman 和 J. H. Van Vleck，《磁体上“隐动量力”的起源》，《物理评论》171，1370–1375（1968）。[38] T. H. Boyer，《磁体与点电荷的经典相互作用：肖克利-詹姆斯悖论》，《物理评论 E》91，013201(11)（2015）；《磁体与点电荷的相互作用：未被认识到的内部电磁动量》，《美国物理学杂志》83，433-442（2015）。[39] A. Cimmino、G. I. Opat、A. G. Klein、H. Kaiser、S. A. Werner、M. Arif 和 R. Clothier，《通过中子干涉测量观测拓扑阿哈罗诺夫-卡西尔相移》，《物理评论快报》63，380-383（1989）。[40] T. H. Boyer，《阿哈罗诺夫-卡西尔效应提案：经典滞后导致阿哈罗诺夫–玻姆效应的另一实例》，《物理评论 A》36，5083-5086（1987）。[41] Y. Aharonov、P. Pearle 和 L. Vaidman，《对“阿哈罗诺夫-卡西尔效应提案：经典滞后导致阿哈罗诺夫–玻姆效应的另一实例”的评论》，《物理评论》115，485-491（1988）。[42] T. H. Boyer 在《相对论争议相关的实例与评论》中给出了一个不援引隐动量的对 Mansuripur 的答复，《美国物理学杂志》80，962-971（2012）。