作为相对论悖论的经典阿哈罗诺夫–玻姆相互作用

Timothy H. Boyer

纽约市立大学城市学院物理系，纽约州纽约市 10031，美国

arXiv:2302.01937v1 [physics.class-ph] 3 Feb 2023

摘要

带电粒子沿着对称轴穿过磁环形线圈的情形构成了一个相对论悖论；不同惯性系会因系统未受扰动而得出电荷和环形线圈受到不同力的结论。我们回顾了电荷–环形线圈相互作用，并指出，人们之所以误解磁性阿哈罗诺夫–玻姆情形，是因为不熟悉达尔文拉格朗日量所导出的加速度场，而近期的经典电磁学教科书对此只字未提。

I. 引言

A. 阿哈罗诺夫–玻姆情形

涉及电子经过长螺线管的磁性阿哈罗诺夫–玻姆相移备受关注，因为有人声称，这是一种由矢势引起的效应，经过的电子不受任何力，且没有经典类比。[1][2] 这种对观测现象的解释在物理学文献中广泛流传。[3][4][5] 与此类观点相反，本文认为，带电粒子与螺线管之间的经典电磁相互作用应被视为又一个相对论悖论的例子：在一个惯性系中，结果很容易理解，而在另一个惯性系中，却被掩盖了。

B. 相对论悖论

任何讲授过狭义相对论的教师都熟悉相对论悖论的出现。也许最著名的例子是杆与谷仓悖论：谷仓有一扇敞开的门和一堵坚固的后墙。[7] 在谷仓的惯性系中，描述十分清楚。农夫声称，快速移动的杆会发生洛伦兹收缩，因此在他关上门之前，杆很容易就能完全放进谷仓里。杆的静止系中的说法则具有误导性，因为该系中的物理学要求存在一些新力，而对杆和谷仓未受扰运动的原始描述并未提及这些力。类似地，阿哈罗诺夫–玻姆情形涉及两个彼此相对运动的未受扰系统，在此情形下，它们是一个点电荷和一个螺线管。在螺线管静止的惯性系中，这种描述具有误导性。在该惯性系中，能量守恒要求存在由粒子加速度引起的力，而对运动电荷和恒定电流螺线管未受扰运动的原始描述并未提及这些力。

C. 阿哈罗诺夫–玻姆情形作为相对论悖论

经典的阿哈罗诺夫–玻姆情形涉及带电粒子与磁体在相对论性 $1/c^2$ 层面的电磁相互作用，尽管文献中很少提及这一相对论层面。在近似中，假设带电粒子与螺线管在相互作用期间各自继续保持未受扰动时的运动状态，据此计算它们之间的相互作用

。在带电粒子静止、螺线管运动的惯性系中，这种相互作用更容易理解，因为在该惯性系中，物理学不需要引入任何新力，只需考虑相互作用系统中各部分未受扰动时的原始描述所涉及的力。事实上，在电荷静止的这个惯性系中，很容易验证能量守恒定律：未受扰动的电荷和螺线管彼此施加大小相等、方向相反的电力。另一方面，在螺线管静止的惯性系中，除非引入额外的粒子加速度或未受扰动的螺线管中原本不存在的外力，否则能量守恒就会被违反。如果允许螺线管的电荷加速，它们就会对电子产生反作用（法拉第）力，而这些力并未包含在对未受扰动螺线管的原始描述中。另一种做法是引入外力，使螺线管粒子保持恒定速度；这些外力能够解释能量所需的变化，但在最初将带电粒子与螺线管描述为未受扰动系统时，并未包含此类外力。

D. 涉及粒子与磁体相互作用的悖论

电荷与磁体的相互作用发生在能量和动量的相对论 $1/c^2$层次。由于经典电动力学中对相对论层次上电荷与磁体相互作用的理解并不充分，因此产生了一整类“悖论”，包括阿哈罗诺夫-玻姆相移[1] 、阿哈罗诺夫–卡西尔相移[8]、肖克利-詹姆斯悖论[9] 、“磁体中的隐动量”[10] ，以及曼苏里普尔的错误主张[11] 。所有这些效应都涉及相对论相互作用；在这些情况下，我们对非相对论力学、静电学或静磁学的熟悉经验可能并不适用。所有这些相互作用都可以在达尔文拉格朗日量[12]的层次上处理；它描述的是不包含辐射的准静态经典电动力学。

本文仅讨论点电荷与环形线圈相互作用中的能量守恒问题。关于点电荷与磁体之间相互作用的更完整描述，将另行发表。[13]

II. 相互　　作用：点电荷与磁矩

A. 磁偶极矩

从最基本的层面来看，经典阿哈罗诺夫–玻姆情形涉及磁矩 $\mathbf{m}$ 与点电荷 e 之间的相互作用。我们将磁矩设想为在其自身 $S_{\mathbf{m}}$ 静止系中一个半径为 b、电流为 I 的电中性圆形电流环。该电流环的磁矩（以高斯单位制表示）为

$$\mathbf{m} = \mathbf{n}\pi b^2 I/c, \tag{1}$$

其中，方向 $\mathbf{n}$ 垂直于电流环所在平面，并根据右手定则与电流方向 I 相关联。若电流环的中心位于 $\mathbf{r_m}$，我们假设位于 $\mathbf{r}_e$ 的点电荷 e 距离足够远，使两者间距远大于半径 b，$b << |\mathbf{r}_e - \mathbf{r_m}|$，因此磁偶极近似是适用的。

B. 磁矩静止的惯性系中的相互作用

在磁矩静止且电荷 e 以恒定速度 $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}$ 运动的 $S_{\mathbf{m}}$ 惯性系中，电荷 e（保留至 $1/c^2$ 阶）同时具有电场

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) = e\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|\, c}\right)^2\right] \tag{2}$$

和磁场

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{r}, t) = e\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3}, \tag{3}$$

因此，电荷 e 与磁矩之间的相互作用能由磁场能[14]给出

$$\Delta U^{(B)} = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(\mathbf{r_m}, t) \approx -\mathbf{m}\cdot\left[e\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \frac{(\mathbf{r_m} - \mathbf{r}_e)}{|\mathbf{r_m} - \mathbf{r}_e|^3}\right]. \tag{4}$$

I在这个惯性系中，磁矩受到磁力作用

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{on\mathbf{m}}^{(B)} &= -\nabla_{\mathbf{m}}\left[-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}},t\right)\right]=\nabla_{\mathbf{m}}\left\{\mathbf{m}\cdot\left[e\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right)}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^3}\right]\right\}\\ &=\nabla_{\mathbf{m}}\left\{\left[\mathbf{m}\times e\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right]\cdot\frac{\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right)}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^3}\right\}\\ &=\left[\mathbf{m}\times e\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right]\cdot\nabla_{\mathbf{m}}\left(\frac{\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right)}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^3}\right)\\ &=\frac{-3\left[\mathbf{m}\times e\left(\mathbf{v}/c\right)\right]\cdot\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right)\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right)}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^5}+\frac{\left[\mathbf{m}\times e\left(\mathbf{v}/c\right)\right]}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^3},\end{aligned}\tag{5}$$

而电荷 e 则受到磁偶极子施加的（偏转）磁力

$$\mathbf{F}_{on\mathbf{e}}^{(B)}=e\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{r}_e,t\right)=e\frac{\mathbf{v}}{c}\times\left[\frac{3\mathbf{m}\cdot\left(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right)\left(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right)}{\left|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right|^5}-\frac{\mathbf{m}}{\left|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right|^3}\right].\tag{6}$$

在这个惯性系中，磁矩与电荷之间的力大小并不相等、方向也不相反；式（5）包含一个沿 $(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e)$ 方向的项，而式（6）包含一个沿 $\mathbf{v}\times(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}})$ 方向的项。

C. 电荷 e 静止时的惯性系中的相互作用

另一方面，在电荷粒子 e 静止、磁矩以速度 $\mathbf{v}_{\mathbf{m}}=-\mathbf{v}$ 运动的 S_e 惯性系中，电荷与磁矩之间的相互作用涉及电场中的能量，因为在这个运动的参考系中，磁矩具有电偶极矩[15]

$$\mathbf{p}_{\mathbf{m}}\approxeq\left(\frac{-\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{m}.\tag{7}$$

在这个 S_e 惯性系中，电相互作用能为[16]

$$\Delta U^{(E)}=-\mathbf{p}_{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{E}_e\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}},t\right)=-\left[\frac{-\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{m}\right]\cdot\left(e\frac{\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right)}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^3}\right),\tag{8}$$

这与式（4）给出的磁能相同。因此，作用在磁矩上的电力为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{on\mathbf{m}}^{(E)} &= -\nabla_{\mathbf{m}}\left[-\mathbf{p}_{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{E}_e\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}},t\right)\right]=\left(\mathbf{p}_{\mathbf{m}}\cdot\nabla_{\mathbf{m}}\right)\mathbf{E}_e\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}},t\right)\\ &=\left\{\left[\frac{-\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{m}\right]\cdot\nabla_{\mathbf{m}}\right\}\left(e\frac{\left(\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right)}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^3}\right)\\ &=\frac{-3\left[\left(-\mathbf{v}/\mathbf{c}\right)\times\mathbf{m}\right]\cdot\left(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right)\left(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right)}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^5}+\frac{\left[\left(-\mathbf{v}/\mathbf{c}\right)\times\mathbf{m}\right]}{\left|\mathbf{r}_{\mathbf{m}}-\mathbf{r}_e\right|^3}.\end{aligned}\tag{9}$$

注意到叉积顺序变化所导致的符号反转，可以发现，式（9）中作用在磁偶极子上的电力与式（5）中出现的作用在磁偶极子上的磁力相同。此外，作用在电荷 e 上的电力恰好是该表达式的相反数，

$$\mathbf{F}_{on\mathbf{e}}^{(E)}=e\mathbf{E}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{r}_e,t\right)=e\left\{\frac{3\left[(-\mathbf{v}/\mathbf{c})\times\mathbf{m}\right]\cdot\left(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right)\left(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right)}{\left|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right|^5}-\frac{\left[(-\mathbf{v}/\mathbf{c})\times\mathbf{m}\right]}{\left|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_{\mathbf{m}}\right|^3}\right\}. \tag{10}$$

在此 S_e 惯性系中，保留到 $1/c^2$ 阶时，磁矩和电荷彼此施加的电力大小相等、方向相反。电场能的变化由电力 $\mathbf{F}_{on\mathbf{m}}^{(E)}$对运动中的磁矩所做的功来解释。

III. 过渡到点电荷和环形线圈

A. 由磁偶极子构成环形线圈

虽然我们列出的方程已经呈现了这一基本悖论，但如果设想许多磁矩排列成环形线圈，情况就会生动得多，计算上也更简单。事实上，环形线圈可以看作是弯成圆形的螺线管（由一叠电流环构成），这就引出了阿哈罗诺夫–玻姆情形：电子穿过一根长螺线管。

因此，我们设想磁矩（即半径为b的圆形电流环）以圆形方式排列，平均半径为 R，绕 z轴分布，从而形成一个沿 z轴、位于 z_T处的环形线圈。每个电流环都位于由z轴以及从 z轴到该电流环中心的位移所构成的平面内。假设共有 N 个电流环，每个电流环中的电流为 I，且环形线圈的平均半径 R 远大于每个电流环的半径 b，$b<<R$。环形线圈内部的平均磁场为

$$\mathbf{B}_T=\hat{\phi}\frac{4\pi}{c}\frac{NI}{2\pi R}=\hat{\phi}\frac{2NI}{cR}, \tag{11}$$

而穿过环形线圈每个电流环的磁通量为

$$\Phi=\pi b^2B_T=\frac{2\pi b^2NI}{cR}. \tag{12}$$

对于电中性的环形线圈情形，不存在环形线圈产生的电场，所有磁场都局限在环形线圈内部。

B. 电荷与环形线圈的相互作用

我们考虑一个带电粒子 e 以速度 $\mathbf{v}_e = \widehat{z}v$ 沿 z 轴运动，该轴是环形线圈的对称轴。我们想求出电荷 e 与环形线圈之间相互作用的最低非零近似。这个“最低非零相互作用”近似意味着，尽管环形线圈与电荷 e 相互作用，我们仍假设它们继续保持未受扰动的运动。因此，我们认为环形线圈中电荷载流子携带的电流保持不变。我们也认为电荷 e 的速度 $\mathbf{v}_e$ 保持不变。在这些假设下，我们希望求出截至 $1/c^2$阶，环形线圈和电荷 e 分别对电荷 e 和环形线圈施加的力。

C. 环形线圈静止时

在环形线圈静止、电荷 e 以速度 $\mathbf{v}_e$=$\widehat{z}v$运动的 S_T 惯性系中，看起来，经过的电荷会对环形线圈的每个磁偶极矩（圆形电流环）施加磁力（对应于公式（5））。根据对称性，这些力的z分量相加，而径向分量相互抵消。电荷 e （假设为正电荷）的磁场与环形线圈的磁场呈相同的环形分布。对 $-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}$项取负导数，可得作用于环形线圈的总磁力

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{(B)}_{onT} &= -\widehat{z}\frac{\partial}{\partial z_T}\left(-N\frac{\pi b^2 I}{c}B_e(z_T,t)\right)\\ &= \widehat{z}\frac{\partial}{\partial z_T}\left(\left(\frac{N\pi b^2 I}{c}\right)e\frac{v}{c}\frac{R}{\left|\left(z_T-z_e\right)^2+R^2\right|^{3/2}}\right)\\ &= \widehat{z}\left(\frac{N\pi b^2 I}{c}\right)e\frac{v}{c}\frac{R\left[-3\left(z_T-z_e\right)\right]}{\left|\left(z_T-z_e\right)^2+R^2\right|^{5/2}}.\end{aligned} \tag{13}$$

由于环形线圈呈电中性，且其所有磁场都局限在线圈内部，因此看起来，未受扰动的环形线圈不会对电荷 e产生反作用力。

由于带电粒子 e 不受任何力的作用，其动能没有变化。由于环形线圈是电中性的，电荷e 与环形线圈相互作用时，电能没有变化。然而，与电荷的磁场和

环形线圈的磁场在环形线圈体积内的重叠相关的系
统磁能发生了变化，

$$\Delta U_{overlap}^{(B)}=\frac{1}{4\pi}\int d^3r\mathbf{B}_e\cdot\mathbf{B}_T=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{evR}{c\left[\left(z_T-z_e\right)^2+R^2\right]^{3/2}}\right)\left(\frac{2NI}{cR}\right)\left[2\pi R\pi b^2\right]. \tag{14}$$

在这个惯性系中，相对论能量守恒定律似乎遭到违反，因为显然没有力作用在运动电荷 e上，而且假定环形线圈的电流未受扰动。

D. 电荷 e 静止

另一方面，在电荷 e 静止、未受扰动的环形线圈以速度 $\mathbf{v}_T=-\widehat{z}v$运动的 S_e 惯性系中，带电粒子与环形线圈之间存在电力。在以速度 $-\mathbf{v}$ 运动的惯性系中，未受扰动的磁矩 $\mathbf{m}$ 具有电偶极矩 $\mathbf{p_m}=(-\mathbf{v}/c)\times\mathbf{m}$，如公式（7）所示。因此，在以速度 $-\mathbf{v}$ 运动的 S_e 惯性系中，未受扰动的环形线圈上有一圈电偶极子，它们对电荷 e 产生的净电力的 z 分量，是公式（10）中单个电偶极子所产生的力的 z 分量的 N 倍，

$$\mathbf{F}_{on\mathbf{e}}^{(E)}=e\mathbf{E}_T\left(\mathbf{r}_e,t\right)=\widehat{z}e\frac{N3R\left(z_T-z_e\right)}{c\left[\left(z_T-z_e\right)^2+R^2\right]^{5/2}}\left(\frac{v\pi b^2I}{c}\right). \tag{15}$$

此外，电荷 e 会对运动中的环形线圈的每个电偶极子施加电力，从而使环形线圈受到合力

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{onT}^{(E)}&=\widehat{z}\left\{N\widehat{z}\cdot\left[\left(\mathbf{p_m}\cdot\nabla_{\mathbf{m}}\right)\mathbf{E}_e\left(\mathbf{r_m},t\right)\right]\right\}\\&=\widehat{z}N\widehat{z}\cdot\left[\left(p_{\mathbf{m}}\frac{\partial}{\partial r}\right)e\frac{\widehat{r}r+\widehat{z}\left(z_T-z_e\right)}{\left[\left(z_T-z_e\right)^2+r^2\right]^{3/2}}\right]_{r=R}\\&=\widehat{z}N\left[p_{\mathbf{m}}e\frac{-3r\left(z_T-z_e\right)}{\left[\left(z_T-z_e\right)^2+r^2\right]^{5/2}}\right]_{r=R}\\&=\widehat{z}N\left[\left(\frac{v}{c}\frac{\pi b^2I}{c}\right)e\frac{-3R\left(z_T-z_e\right)}{\left[\left(z_T-z_e\right)^2+R^2\right]^{5/2}}\right].\end{aligned} \tag{16}$$

式（16）中环形线圈所受的电力，与前一个环形线圈静止、电荷e 运动的惯性系中式（13）所示的磁力完全相同。然而，在这里的 S_e 惯性系中，电荷 e 静止，而

环形线圈在运动，电荷 e 和环形线圈所受的电力大小相等、方向相反。

在相互作用过程中，磁场能没有变化，因为电荷 e 处于静止状态，因此没有磁场。然而，相互作用过程中，电场能发生了变化，其变化量为

$$\begin{aligned}\Delta U^{(E)} &= -N\mathbf{p_m}\cdot\mathbf{E}_e\left(\mathbf{r_m},t\right)\\ &= -N\left(\frac{v}{c}\frac{\pi b^2 I}{c}\right)E_{er}\left(\mathbf{r_m},t\right)\\ &= -N\left(\frac{v}{c}\frac{\pi b^2 I}{c}\right)e\frac{R}{\left[\left(z_T-z_e\right)^2+r^2\right]^{3/2}}.\end{aligned}\tag{17}$$

式（17）中的电能变化 $\Delta U^{(E)}$ 由作用在运动环形线圈上的电力 $\mathbf{F}_{onT}^{(E)}$ 所补偿，

$$\Delta U^{(E)} = -\int_{\infty}^{z_{\mathbf{m}}}\mathbf{F}_T^{(E)}\cdot\widehat{z}dz_T.\tag{18}$$

因此，在环形线圈以速度 $-\mathbf{v}$ 运动且电荷 e 静止的S_e 惯性系中，系统未受扰动部分的能量守恒确实成立。

另一方面，式（17）中的电能变化 $\Delta U^{(E)}$ 恰好等于式（14）中磁能变化 $\Delta U_{overlap}^{(B)}$ 的相反数；这一变化是由电荷 e 的磁场与环形线圈的磁场重叠造成的。

IV. 相对论悖论的讨论

A. 不同惯性系中的力之对比

因此，我们得到了相对论“悖论”。在两个惯性系中，所有的力都属于 $1/c^2$ 阶，因此从另一个惯性系观察时，这些力在 v/c 的主导阶上不会发生变化。然而，不同的惯性系却声称出现了不同的力。在环形线圈的 S_T 静止系中，环形线圈受到磁力，但运动电荷显然不受力 e。然而，在电荷的 S_e 静止系 e 中，电荷受到电力 e ，环形线圈也受到电力。事实上，在电荷的静止系 e 中，可以发现环形线圈受到的力（此时为电力）与其在环形线圈静止的惯性系中受到的磁力完全相同，而该惯性系中

环形线圈处于静止状态；但现在还可以发现其对应的另一股力：环形线圈对电荷施加的电力 e。

B. 描述不可靠的惯性系

正如杆与谷仓相对论悖论一样，我们必须做出选择：哪一种描述才值得信赖，能够代表准确的物理学？我们认为，在这两种情况下，准确的描述都涉及这样一个惯性系：在该系中，物理学无需引入原先关于未受扰动运动的描述中没有提及的外力和／或加速度。对于杆与谷仓悖论，不可靠的描述涉及谷仓在运动、因而发生洛伦兹收缩的惯性系；在谷仓门关闭之前，杆的前端撞上谷仓后墙时，这个惯性系需要引入新的力。[7] 这些外力改变了对杆未受扰动运动所作的描述。

在带电粒子与磁体发生经典阿哈罗诺夫–玻姆相互作用的情形中，情况涉及同一个基本概念。在哪个惯性系中，物理学需要引入原先对未受扰动运动的描述中没有提及的新力和／或加速度？答案是，S_T 环形线圈静止的惯性系不太令人信服；具体而言，与电荷的磁场 e 和环形线圈的磁场重叠相关的磁能变化，尚未得到令人满意的解释。

C. 涉及磁能变化的问题

事实上，磁能变化往往会带来问题。它们正是当前悖论的基础。电能变化涉及电力直接做功，这一点在我们对电荷与磁体相互作用的第二种描述中显而易见：其中电荷 e 静止不动，而环形线圈在运动。与此相反，磁力不做功。因此，磁能变化需要由独立的电力或外力做功。在准静态系统中，磁能平衡要求存在与带电粒子速度变化所涉及的加速度相关联的电力。然而，未受扰动的环形线圈的描述中并未包含此类加速度。

D. 环形线圈静止时磁能变化的平衡

电荷 e 与环形线圈组成的系统，其能量平衡涉及三种不同的贡献：机械动能、电能和磁能

$$\Delta U = \Delta U^{(M)} + \Delta U^{(E)} + \Delta U^{(B)}.$$

一如既往，棘手之处在于磁能 $\Delta U^{(B)}$。尽管作用于环形线圈的 $1/c^2$- 力（见方程（13）和（16））在两个惯性系中完全相同，但方程（14）和（17）给出的系统 $1/c^2$-能量变化并不相同，实际上两者符号相反。这里的难点与讨论准静态系统的磁能变化时出现的问题相同。[17][18] 电能变化与磁能变化有显著区别。电能只涉及带电粒子之间的相对位置。然而，准静态磁能涉及运动电荷。因此，磁能变化可能涉及以下变化：1）载流子之间的相对位置，和/或 2）电荷载流子的速度。

对于我们讨论的电荷—环形线圈示例，在环形线圈静止而电荷 e 运动的 S_T 惯性系中，磁能变化的这两个方面都存在，

$$\Delta U^{(B)} = \Delta U^{(B)}_{overlap} + \Delta U^{(B)}_{toroid\ currents}.$$

与电荷 e 的磁场和环形线圈的磁场重叠相关的磁能变化为正 $\Delta U^{(B)}_{overlap}$。然而，电荷 e 的电场 e 会作用于环形线圈的载流子。电荷的零阶静电场 e 没有 emf，因此不会向环形线圈电流输送净能量。方程（2）中 v^2/c^2 阶的项确实会产生 emf，并向环形线圈电流输送净能量（或从中移除磁能）。环形线圈会像螺线管那样，对改变载流子速度 [19] 的作用作出响应。环形线圈中（大量）载流子的（微小）加速度会产生反向（法拉第）加速度电场，作用于导致最初 emf的施力者；在此情形下，该施力者是电荷 e。环形线圈电流变化所导致的磁能变化涉及 B_T^2，因此其大小是重叠磁能变化的两倍，且符号相反；后者只涉及 B_T的一次方。正是这些加速电荷载流子的反向（法拉第）加速度电场，在 S_T 惯性系中对电荷 e 施加力

在该参考系中，环形线圈静止而电荷 e在运动。能量平衡反作用力为 $1/c^2$阶。

在未受扰运动的讨论中，电荷 e 所受的电力会立即出现在 S_e 惯性系中；在该系中环形线圈正在运动，因此（根据对环形线圈未受扰运动的相对论描述）它具有电偶极矩。在环形线圈的 S_T 静止系中，电荷 e 所受反作用场的依据涉及粒子加速度，而这些加速度并非环形线圈未受扰运动描述的一部分。因此，环形线圈 S_T 静止系中的未受扰描述没有提及由载流子加速度产生的场，确实是对这一相对论悖论较不可靠的描述。

E. 近期教材中缺少准静态加速度项

反作用（法拉第）加速度场（在电荷 e 与环形线圈的相互作用中并不为人熟知）在电流增强的螺线管情形下却广为人知。电流增强时螺线管中出现的反作用 emf，正是由螺线管中加速运动的载流子所产生的同类反作用（法拉第）加速度场造成的。[19]然而，在当前的经典电磁学教材中，螺线管的反作用 emf是根据高度对称的螺线管中变化的磁通量计算得出的，而不是根据载流子的加速度计算得出的。

加速度电场可直接从达尔文拉格朗日量中得出。因此，在准静态的 $1/c^2$ 阶，正在加速的电荷 e 所产生的电场并非如式（2）中恒定速度电荷 e 的电场那样，而是还包含与加速度有关的附加项，[20][21]

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)=&\sum\nolimits_a\frac{q_a\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right|^3}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_a}{c}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_a\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right|c}\right)^2\right]\\&-\sum\nolimits_a\frac{q_a}{2c^2}\left[\frac{\ddot{\mathbf{r}}_a}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right|}+\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)\left[\ddot{\mathbf{r}}_a\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)\right]}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right|^3}\right].\end{aligned}\tag{19}$$

然而，尽管达尔文拉格朗日量在近期的经典电磁学教材中几乎未被提及，式（19）中加速电荷的局域（法拉第）加速度场却从未被提及。由加速电荷产生的场只会在讨论辐射、推导拉莫尔公式的章节中出现。

F. 阿哈罗诺夫-玻姆效应的经典对应

带电粒子与磁体之间的相互作用是一种最低阶为$1/c^2$ 的相对论效应。因此，达尔文拉格朗日量足以描述这种相互作用；它在 $1/c^2$ 阶以内再现了经典电动力学，但不包括辐射。我们预计，在完整的经典电动力学中，这种基本相互作用仍然成立，只是还需考虑迟滞时间和（极微弱的）辐射效应。

人们似乎普遍接受这样一种观点："阿哈罗诺夫-玻姆效应不存在经典类比。"这类表述出现在许多量子理论教科书中[22] 以及一些经典电磁学教科书中[4][5] 。这种否定经典类比的观点通常指出，在电流恒定的极长螺线管或环形线圈外部，磁场为零，因而断定通过其附近的带电粒子不受力。然而，这种基于静磁学的简单看法并未充分体现经典电动力学的微妙之处。由于物理学家并不熟悉准静态加速电荷会产生与 emf相关的电场这一概念，与经典阿哈罗诺夫–玻姆情形相关的论断很少受到质疑[23]。

V. 致谢

本文对带电粒子与磁体之间经典相互作用的重新分析，源于 Hanno Ess´en 博士的一篇手稿："超越试探粒子近似时，会出现经典阿哈罗诺夫–玻姆效应。"感谢 Ess´en 博士提醒我注意参考文献 21 中所收录的工作，

---

[1] Y. Aharonov 和 D. Bohm，《量子理论中电磁势的重要性》，Phys. Rev. 115，485–491（1959）。[2] 关于阿哈罗诺夫-玻姆相移的综述，例如参见 S. Olariu 和 I. Iovitzu Popescu，《电磁通量的量子效应》，Rev. Mod. Phys. 57，339–436

（1985 年），以及 H. Batelaan 和 A. Tonomura 的《电磁通量的阿哈罗诺夫-玻姆效应》，《今日物理》，2009 年 9 月，第 38–43 页。[3] R. P. Feynman、R. B. Leighton 和 M. Sands，《费曼物理学讲义》（Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1964 年），第二卷，第 15-5 节。关于一处更正，参见 T. H. Boyer，“对阿哈罗诺夫-玻姆效应的误解”，《美国物理学杂志》40，56–59 页（1972 年）。Feynman 同意《讲义》中的描述有误。T. H. Boyer，私人通信。《讲义》现已可在互联网上免费阅读。然而，该书出版时未作任何改动，因此第 15.5 节仍然包含同样的错误。[4] A. Shadowitz，《电磁场》（Dover，纽约，1988 年），第 197、208–209、517–522 页。[5] A. Garg，《经典电磁学简明教程》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州 08450，2012 年），第 107–108 页。[6] T. H. Boyer 提出了一种异议观点，见“与量子干涉图样偏移相关的经典电磁偏转和延迟效应：与阿哈罗诺夫-玻姆效应有关的考察”，《物理评论》D 8，1679–1693 页（1973 年）；“阿哈罗诺夫-玻姆效应作为经典电磁延迟效应：静电类比及可能的实验检验”，《Il Nuovo Cimento》100，685–701 页（1987 年）；“阿哈罗诺夫-玻姆效应是否存在？”《Foundations of Physics》30，893–905 页（2000 年）；“经典电磁学与阿哈罗诺夫-玻姆相移”，《Foundations of Physics》30，907–932 页（2000 年）；“点电荷与磁体相互作用的达尔文-拉格朗日分析：与阿哈罗诺夫–玻姆相移和阿哈罗诺夫–卡西尔相移争议有关的考察”，《J. Phys. A: Math. Gen.》39，3455–3477 页（2006 年）。[7] 例如参见 D. J. Griffiths，《电动力学导论》第 4 版（Pearson，纽约，2013 年），第 516–517 页；或 B. F. Schutz，《广义相对论入门》（剑桥大学出版社，1986 年），第 34 页；或 E. F. Taylor 和 J. A. Wheeler，《时空物理学：狭义相对论导论》第 2 版（Freeman，纽约，1992 年），第 166 页。如果某个时空事件在一个惯性系中发生，那么该时空事件也会在任何其他惯性系中发生。只有具有类空分离的时空事件，其时间先后顺序才可能在两个不同的惯性系中有所不同。[8] Y. Aharonov 和 A. Casher，“中性粒子的拓扑量子效应”，《物理评论快报》53，319–321 页（1984 年）。[9] W. Shockley 和 R. P. James，“‘从最简单的情况入手’发现‘磁流’上的‘隐动量’力”，《物理评论快报》18，876–879 页（1967 年）。

[10] 例如参见：D. J. Griffiths，《电动力学导论》第3版（Prentice-Hall，上萨德尔河，新泽西州，1999），第357、361、520–521页；J. D. Jackson，《经典电动力学》第3版（John Wiley & Sons，纽约，1999），第189、618页；A. Zangwill，《现代电动力学》（剑桥大学出版社，2013），第521–522页。另见 T. H. Boyer，“磁体与点电荷的经典相互作用：肖克利-詹姆斯悖论”，《物理评论E》91，013201(11)（2015）；“磁体与点电荷的相互作用：未被认识到的内部电磁动量”，《美国物理学杂志》83，433–442（2015）。[11] M. Mansuripur，“洛伦兹力定律的问题：与狭义相对论和动量守恒不相容”，《物理评论快报》108，193901（2012）。T. H. Boyer 对 Mansuripur 的一篇回应未诉诸隐动量，见“与相对论争议相关的示例与评论”，《美国物理学杂志》80，962–971（2012）。[12] J. D. Jackson，《经典电动力学》第2版（John Wiley & Sons，纽约，1975），第593–595页。[13] T. H. Boyer，“关于加速点电荷的经典力、能量和势”，《美国物理学杂志》，即将发表；以及“阿哈罗诺夫–玻姆相移的经典电磁学基础”，已提交发表。[14] 例如参见参考文献7中的 Griffiths，第291页。[15] J. D. Jackson，《经典电动力学》（John Wiley & Sons，纽约，1962），第389页。[16] 例如参见参考文献 [12], 第172页。[17] T. H. Boyer，“关于加速点电荷的经典力、能量和势”，《美国物理学杂志》91，74–78（2023）。[18] T. H. Boyer，“平行板电容器和扁平滑动接头螺线管中的电力、磁力及其能量”，《美国物理学杂志》69，1277–1279（2001）。[19] T. H. Boyer，“法拉第感应与电路中的载流子”，《美国物理学杂志》83，263–271（2015）。[20] 参见 L. Page 和 N. I. Adams 的早期著作《电动力学》（Van Nostrand，纽约，1940），第175页。另见 L. Page 和 N. I. Adams，“运动电荷之间的作用与反作用”，《美国物理学杂志》13，141–147（1945）。[21] 另见 B. Podolsky 和 K. S. Kunz，《电动力学基础》（Marcel Dekker，纽约，1969）；以及 H. Primakoff 和 T. Holstein，“原子与核系统中的多体相互作用”，《物理评论》1218–1234（1939）。

[22] 例如参见 D. J. Griffiths, 《量子力学导论》第2版（Pearson Prentice Hall，上萨德尔河，新泽西州，2005），第384–391页；或 L. E. Balentine, 《量子力学》（Prentice Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州 07632，1990），第220–223页。[23] 关于这些力和能量变化的完整讨论见参考文献 [13]。2月3日 AB-asParadox4.tex