群上随机游走的命中时间与覆盖时间公式

Christopher Zhang

导师：Ramon van Handel

2017年5月9日

摘要

利用 Ding、Lee、Peres 的研究成果 [3], ，我们推导出用于计算群上随机游走的命中时间和覆盖时间的公式。我们根据群的不可约表示，得到了命中时间的显式公式。我们还提出了一种根据这些命中时间计算覆盖时间的方法。这项计算基于一个我们发现并称为体积增长函数的量。我们认为，要理解覆盖时间，体积增长函数正是值得研究的对象。

1 引言

马尔可夫链的命中时间，是指马尔可夫链到达某个特定状态所需的时间。这类数值长期以来一直受到研究，例如赌徒破产问题。近年来，人们开始关注覆盖时间，即有限马尔可夫链遍历所有状态所需的时间。计算覆盖时间在马尔可夫链算法中有诸多应用，例如 PageRank。本文关注一族马尔可夫链的覆盖时间渐近行为，其中状态空间的规模趋于无穷大。

Matthews [6] 揭示了覆盖时间与一个自然的研究对象——最大命中时间——之间的关系。对于状态空间为 Ω 的马尔可夫链，Matthews上下界相差一个 log |Ω| 因子。环和超立方体就是分别达到 Matthews 上界和下界的例子（见例 4.14 和 4.16）。

Ding、Lee 和 Peres [3] 的论文是该理论的一项重大突破，表明图上随机游走的覆盖时间渐近等于相应高斯过程的期望最大值。他们的结果可能比马修斯界更精确，因为它们涵盖了所有命中时间的信息，而不仅仅是最大命中时间。然而，在一般情况下，计算该高斯过程的最大值并不容易。例如，可以借助 Talagrand主控测度理论 [4]来计算。

我们考虑一个具有许多对称性的情形：群上的随机游走。这使我们能够明确计算命中时间和覆盖时间。我们根据群的不可约表示，推导出群上随机游走的命中时间显式公式。这种方法的优势在于精确且通用。这些公式适用于群上的任何随机游走，而传统的命中时间计算方法仅适用于转移概率经过精心选择的随机游走。不过，这种方法的缺点是，公式通常难以手工计算或估界，但可以用计算机高精度计算。

对于覆盖时间，Ding、Lee、Peres 相关的高斯过程也具有许多对称性。形式上，它是一个平稳高斯过程。在这种情况下，可以使用更简单的论证来计算该高斯过程的最大值。最终，这使我们能够将覆盖时间计算为一个重要量的积分，我们称之为体积增长函数。我们可以

利用我们关于命中时间的公式计算这个函数。我们认为，要理解覆盖时间，体积增长函数是需要研究的正确量，并且该函数需要根据具体情况逐一计算。这种方法极其通用，但也面临着计算非常困难的问题，因为要理解体积增长函数，就需要掌握所有命中时间的行为。

2 背景

我们回顾群上的随机游走以及有限群上的傅里叶变换的基础知识，后续章节将会用到这些内容。

2.1 群上的随机游走

这些是本文所需的关于群上的随机游走的基本事实。更深入的讨论请参见 [5] 。

定义 2.1. 设 G 是一个群。设 p 是 G上的一个概率测度。由 p 生成的群上的随机游走G 是一个状态空间为 G 的马尔可夫链，其转移概率如下。对于$g, h \in G$，从 g 转移到 h 的概率为

$$P(g, h) = p(hg^{-1})$$

我们注意到这个定义中的对称性

$$P(g, hg) = P(e, h) = p(h) \tag{2.1}$$

若该随机游走是不可约/可逆马尔可夫链，则称其为不可约/可逆的。注意，当且仅当 p 的支撑生成 G 时，该随机游走是可逆的。

引理 2.2。 群 G 上不可约随机游走的平稳分布 π 是均匀分布。

证明。对于 $g \in G$,

$$\sum_{h \in G} P(h, g)\frac{1}{|G|} = \sum_{h \in G} P(h^{-1}g, g)\frac{1}{|G|} = \frac{1}{|G|}\sum_{h \in G} p(h) = \frac{1}{|G|}$$

□

定义 2.3。 对于离散时间马尔可夫链 $(X_t)_{t \geq 0}$，令

$$\tau_x = \min\{t \geq 0 : X_t = x\}$$

为命中时间。我们也将称

$$\mathbf{E}_y[\tau_x]$$

为命中时间。对于 $\tau_x^+ = \min\{t > 0 : X_t = x\}$，我们称

$$\mathbf{E}_x[\tau_x^+]$$

该首次返回时间。

推论 2.4。 对于群 G 上的不可约随机游走。群上随机游走的首次返回时间$\mathbf{E}_e[\tau_e^+]$ 为 $|G|$。

证明。 如果 π 是平稳分布，那么

$$\mathbf{E}_e[\tau_e^+] = \frac{1}{\pi(e)}$$

（见 [5] 第 1.5 节）。 □

引理 2.5。 由分布 p 生成的群 G 上的随机游走可逆，当且仅当 $p(g) = p(g^{-1})$对所有 $g \in G$均成立。

证明。 令 π 为平稳分布。马尔可夫链可逆，当且仅当对所有 g, h

$$\pi(g)p(g,h) = \pi(h)p(h,g)$$

根据引理 2.2，这等价于

$$\frac{1}{|G|}p(hg^{-1}) = \frac{1}{|G|}p(gh^{-1})$$

当且仅当对所有 $g \in G$， $p(g) = p(g^{-1})$。 □

注 2.6。 群 G 上的可逆随机游走是凯莱图上的随机游走，其边权重由 p给出。（对于非可逆随机游走，这一结论适用于有向凯莱图。）

2.2 有限群上的傅里叶变换

我们回顾有限群上傅里叶变换的基础知识，这些内容将在下一节中使用。证明从略，但可参见 [2]。

定理 2.7 (傅里叶变换**)**。 设 G 是一个有限群，且 $f\colon G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。则定义ˆ傅里叶变换 f 为一个函数，它将 G 的表示 ρ 映射为复矩阵，定义公式如下

$$\hat{f}(\rho) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$$

定义 2.8. 设 $f_1, f_2\colon G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 G 是一个有限群。则卷积 为

$$(f_1 * f_2)(h) := \sum_{g \in G} f_1(hg^{-1})f_2(g)$$

注 2.9。 注意，对于转移概率为 P 、初始分布为 Q的群上的随机游走，其在时刻一的分布为 $P * Q$。

注 2.10。 一般而言，卷积是非交换的。

与标准的傅里叶分析一样，傅里叶变换将卷积映射为乘积。

引理 2.11。

$$\widehat{f_1 * f_2}(\rho) = \hat{f}_1(\rho)\hat{f}_2(\rho)$$

定理 2.12 (傅里叶反演**)**。 设 $f\colon G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 G 是一个有限群。设 $\rho_1, \ldots, \rho_r$ 是 G的不可约表示。设 d_i 是 ρ_i的次数。那么对于 $g \in G$,

$$f(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{r} d_i \operatorname{Tr}(\rho_i(g^{-1})\hat{f}(\rho_i))$$

ˆ注 2.13。 傅里叶反演公式表明， f 由 f 在不可约表示上的作用所决定。

定理 2.14。 考虑由概率分布 p生成的群 G 上的随机游走。设P 为转移矩阵。那么

$$P = \phi^{-1}D^*\phi$$

其中 D 是分块对角矩阵，其分块的形式为 ˆ$p(\rho_i)$ ，而 ϕ 是变换到傅里叶基的换基矩阵。

有关该定理及其证明的更详细陈述，请参见 [2] 的第 3E 节。

下面是我们将在下一节中用到的一个表示论引理。为避免打断下一节的行文，我们在此给出该引理。

引理 2.15。设 ρ 是有限群 G 在向量空间 V 上的一个非平凡不可约表示。那么，

$$\sum_{g\in G}\rho(g)=0$$

证明。设 $A=\sum_{g\in G}\rho(g)$ 是 V 上的一个自同态。那么 $\rho(g)A=A=A\rho(g)$，因此根据舒尔引理，$A=\lambda I$ 是恒等算子的倍数。根据特征标正交关系，$\operatorname{Tr}A=\sum_{g\in G}\chi(g)=0$，所以 $A=0$。

□

3 命中时间

我们将利用傅里叶变换证明以下关于群上随机游走的命中时间（定义 2.3）的公式。我们的主要思路是，傅里叶基“几乎将群的矩阵对角化”，因此是计算命中时间矩阵的自然基。

定理 3.1. 设 G 为阿贝尔群，$\rho_1,\ldots,\rho_r$ 为不可约表示，其中 ρ_1 为平凡表示。设 p 为 G 上的概率分布，并考虑由 p 生成的 G 上的随机游走。那么，

$$\mathbf{E}_e[\tau_g]=\sum_{i=2}^{r}\frac{1-\rho_i(g^{-1})}{1-\hat{p}(\rho_i)}$$

我们将证明一个适用于不一定是阿贝尔群的更一般公式。设 G 为具有 $|G|=n$ 的群。考虑由概率 p 生成的 G 上的随机游走。

引理 3.2. 命中时间满足以下线性方程组

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_e[\tau_e]&=0\\ \mathbf{E}_e[\tau_g]&=1+\sum_{s\in S}\mathbf{E}_s[\tau_g]P(e,s),\quad g\neq e\end{aligned}\tag{3.1}$$

证明。根据定义 $\mathbf{E}_e[\tau_e]=0$。设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为由 p 生成的 G 上的随机游走，满足 $X_0=e$，其概率分布为 $\mathbf{P}$。那么

$$\mathbf{E}_e[\tau_g]=\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\tau_g]=\sum_{s\in G}P(e,s)\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\tau_g\mid X_1=s]=\sum_{s\in G}P(e,s)\mathbf{E}_s[\tau_g]$$

□

为分析方程 (3.1)，我们采用以下简化记法。对于 $g,h\in G$ 以及 e 这个单位元，命中时间为

$$h(g):=\mathbf{E}_e[\tau_g]=\mathbf{E}_h[\tau_{gh}]$$

因此，我们将这两个量视为向量，而不是矩阵。

Writi方程 tion (3.1) in the ab$^{\text{ove no}}$ tati$^{\text{on we ge}}$ t

$$\begin{aligned}h(e)&=0\\ h(g)&=1+\sum_{s\in S}h(gs^{-1})p(s),\quad g\neq e\end{aligned}\tag{3.2}$$

这个方程组看起来与卷积非常相似。为了使这一点成立，我们将方程 $h(e) = 0$ 改写为。我们计算

$$1 + \sum_{s \in S} h(es^{-1})p(s)$$

即$\mathbf{E}_s[\tau_e^+]$ 首次返回时间。由引理 2.4,

$$\mathbf{E}_e[\tau_e^+] = \frac{1}{\pi(e)} = n$$

现在我们可以将方程 (3.2) 写成

$$\begin{aligned} h(e) &= 1 - n + \sum_{s \in S} h(es^{-1})p(s) \\ h(g) &= 1 + \sum_{s \in S} h(gs^{-1})p(s), \quad g \neq e \end{aligned} \tag{3.3}$$

我们取上述方程组中的常数项，并构造一个函数

$$k(g) = \begin{cases} 1 - n, & g = e \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

方程 (3.3) 变为

$$h(g) = k(g) + (h * p)(g) \tag{3.4}$$

设 $\rho_1, \ldots, \rho_r$ 为 G 的不可约表示。现在我们可以取傅里叶变换，得到

$$\hat{h}(\rho_i) = \hat{k}(\rho_i) + \hat{h}(\rho_i)\hat{p}(\rho_i) \tag{3.5}$$

或者等价地

$$\hat{h}(\rho_i)(I - \hat{p}(\rho_i)) = \hat{k}(\rho_i) \tag{3.6}$$

其中， I 是适当维数的单位矩阵。

我们计算

$$1 - \hat{p}(\rho_1) = 1 - \sum_{g \in G} p(g)\rho_1(g) = 1 - \sum_{g \in G} p(g) = 0$$

ˆ ˆ，因此我们无法用这个方程求出 $h(\rho_1)$。不过，对于所有 $i \neq 1$，我们都可以用这个方程求出 h (ρ_i)。

引理 3.3。 考虑由分布 p生成的群 G 上的随机游走。若该随机游走不可约，则对所有非平凡不可约表示，$I - \hat{p}(\rho_i)$ 均可逆。

证明。 设 P 为转移概率矩阵。方程 $v(I - P) = 0$ 的解 v 是平稳分布的倍数。该分布是唯一的，因为马尔可夫链是不可约的。因此， $I - P$ 的零空间维数为 1，所以该矩阵的秩为 $n - 1$。

根据引理 2.14， $I - P = \phi^{-1}D^*\phi$，其中 D 是以 $I - \hat{p}(\rho_i)$ 为对角块的分块对角矩阵，而 ϕ 是非奇异矩阵。由于 $I - P$ 的秩为 $n - 1$， D 的秩必为 $n - 1$。由于 $1 - \hat{p}(\rho_1) = 0$，其余的块必定是非奇异的。 □

因此，由等式 (3.6) 可得

$$\hat{h}(\rho_i) = \hat{k}(\rho_i)(I - \hat{p}(\rho_i))^{-1}, \quad i \neq 1 \tag{3.7}$$

引理 3.4。 设 ρ_i 是一个非平凡表示。则，

$$\hat{k}(\rho_i) = -nI$$

证明。 根据引理 2.15，

$$\hat{k}(\rho_i) = \sum_{g\in G} k(g)\rho_i(g) = \sum \rho_i(g) - n\rho_i(e) = -nI$$

□

由方程（3.7），我们得到方程

$$\hat{h}(\rho_i) = -n(I - \hat{p}(\rho_i))^{-1}, \quad i \neq 1 \tag{3.8}$$

ˆ现在我们可以计算 $h(\rho_1)$。根据傅里叶反演，我们有

$$0 = h(e) = \sum_{i=1}^{r} d_i \operatorname{Tr}(\hat{h}(\rho_i))$$

so

$$\hat{h}(\rho_1) = -\sum_{i=2}^{r} d_i \operatorname{Tr}(\hat{h}(\rho_i))$$

我们在下面的定理中总结结果。

定理 3.5。 设 G 是有限群上的不可约随机游走。令 h 为命中时间

$$h(g) := \mathbf{E}_e[\tau_g] = \mathbf{E}_h[\tau_{gh}]$$

ˆ我们得到了 h 的傅里叶变换公式，因此可以通过傅里叶反演计算 h 。令 ρ_1、.....、 ρ_r 为 G 的不可约表示，其中 ρ_1 是平凡表示。公式为

$$\hat{h}(\rho_i) = -n(I - \hat{p}(\rho_i))^{-1}, \quad i \neq 1$$
$$\hat{h}(\rho_1) = -\sum_{i=2}^{r} d_i \operatorname{Tr}(\hat{h}(\rho_i))$$

Theo注 3.6. 设 G 是一个阿贝尔群。使用上述定理中的相同记号 ，

$$h(g) = \sum_{i=2}^{r} \frac{1 - \rho_i(g^{-1})}{1 - \hat{p}(\rho_i)}$$

证明。 阿贝尔群具有一维表示，因此

$$\hat{h}(\rho_1) = -\sum_{i=2}^{r} \hat{h}(\rho_i)$$

其中

$$\hat{h}(\rho_i) = -\frac{n}{1 - \hat{p}(\rho_i)}$$

将其代入傅里叶反演公式即可得到所需的方程。 □

例3.7（环）。我们计算由概率分布 p 生成的、定义在 $\mathbb{Z}_n$、 $n \geq 2$ 上的随机游走的命中时间，其中该概率分布将概率 $1/2$ 赋予**1**，$n-1 \in \mathbb{Z}_n$。（我们也可以通过将概率**1**赋予 $1 \in \mathbb{Z}_2$来定义 $\mathbb{Z}_2$ 上的随机游走。在这种情况下，我们推导出的公式仍然成立。）这是一个不可约的马尔可夫链。我们将证明命中时间

$$h(k) = k(n-k)$$

关于这一事实的另一种证明，见 [5]。 $\mathbb{Z}_n$ 的表示适用于 $0 \leq j \leq n-1$,

$$\rho_j(k) = e^{2\pi ijk/n}$$

So

$$\hat{p}(\rho_j) = \sum_{k=1}^{n} \rho_j(k)p(k) = \frac{e^{\frac{2\pi ij}{n}} + e^{\frac{-2\pi ij}{n}}}{2} = \cos\frac{2\pi j}{n}$$

根据定理 3.1,

$$h(k) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - e^{-2\pi ijk/n}}{1 - \cos\frac{2\pi j}{n}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \cos\frac{-2\pi jk}{n} + i\sin\frac{-2\pi jk}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi j}{n}}$$

由于 $h(k)$ 是实数，我们可以忽略虚部

$$h(k) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \cos\frac{-2\pi jk}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi j}{n}}$$

现在我们来简化这个公式。

引理3.8。

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \cos\frac{-2\pi jk}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi j}{n}} = k(n-k)$$

证明。我们首先注意到，对于 k 不是 n的倍数,

$$\sum_{i=1}^{n-1} e^{2\pi ik/n} = -1$$

因此，取该方程的实部

$$\sum_{i=1}^{n-1} \cos(2\pi k/n) = -1$$

设 $z = e^{\pi i/n}$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \cos\frac{-2\pi jk}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi j}{n}} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{z^{2jk} + z^{-2jk}}{2}}{1 - \frac{z^{2j} + z^{-2j}}{2}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(z^{jk} - z^{-jk})^2}{(z^j - z^{-j})^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (z^{j(k-1)} + z^{j(k-3)} + \cdots + z^{-j(k-1)})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (z^{2j(k-1)} + z^{-2j(k-1)} + 2(z^{2j(k-2)} + z^{-2j(k-2)}) + \cdots + (k-1)(z^{2j} + z^{-2j}) + k) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (2\cos[2\pi j(k-1)] + 4\cos[2\pi j(k-2)] + \cdots + 2(k-1)\cos[2\pi j] + k) \\
&= -2 - 4 - \cdots - 2(k-1) + k(n-1) = k(n-k)
\end{aligned}$$

□

例 3.9 (超立方体)。 考虑由概率分布生成的群 $\mathbb{Z}_2^m$ 上的随机游走，该分布给每个元素 $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}_2^m$ 赋予概率 $1/m$。我们将证明，非平凡的命中时间都具有 2^m 的阶。

这个群的表示是 Walsh 函数，定义如下。对于元素 $x \in \mathbb{Z}_2^m$，令 x_i 为第 i 个分量。对于每个 $k \in \mathbb{Z}_2^m$，我们在 $x \in \mathbb{Z}_2^m$ 上定义一个表示 ρ_k，其定义为

$$\rho_k(x) = (-1)^{\sum_{i=1}^m x_i k_i}$$

注意，对于 $k = (0, \ldots\ldots, 0) =: \mathbf{0}$，这是平凡表示。对于 $x \in \mathbb{Z}_2^m$，令 $|x|$ 为非零项的数量。我们计算傅里叶变换

$$\hat{p}(\rho_k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^m} p(x)\rho_k(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (-1)^{k_i} = \frac{m - 2|k|}{m}$$

根据定理 3.1，命中时间为

$$h(x) = \sum_{k \neq \mathbf{0}} \frac{1 - (-1)^{-\sum_{i=1}^m x_i k_i}}{1 - \frac{m-2|k|}{m}} = m \sum_{k \neq \mathbf{0}} \frac{1 - (-1)^{-\sum_{i=1}^m x_i k_i}}{2|k|}$$

由于超立方体在坐标重新标记后具有对称性， $h(x)$ 仅取决于 $|x|$。令 $|x| = j$。只需计算 $x = (1, \ldots\ldots, 1, 0 \ldots\ldots, 0)$ 的命中时间，该元素由 j 个连续的 1，后接 $n - j$ 个连续的 0 组成。当 k 的前 j 个坐标中有奇数个 1 时，$(-1)^{-\sum_{i=1}^m x_i k_i} = -1$。因此，令 S 为 $\mathbb{Z}_2^m$ 的子集，使得前 j 个分量中有奇数个 1。于是，

$$h(x) = m \sum_{k \neq \mathbf{0}} \frac{1 - (-1)^{-\sum_{i=1}^m x_i k_i}}{2|k|} = m \sum_{k \in S} \frac{1}{|k|}$$

我们计算 $k \in S$ 的数量。在 k 的前 j 个分量中，1 的个数必须是奇数 i。对于固定的 i，有 $\binom{j}{i}$ 种选取这些 1 的方法。对于固定的 l，在最后 $m - j$ 个元素中选取这些 1 有 $\binom{m-j}{l}$ 种方法。这样的 S 元素有 $|k| = i + l$，共有 $\binom{j}{i}\binom{m-j}{l}$ 个。因此，命中时间为

$$h(x) = m \sum_{i \text{ odd}} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{j}{i}\binom{m-j}{l}\frac{1}{l+i} \tag{3.9}$$

在某些情况下，我们可以计算出精确的命中时间。下面将使用引理

引理 3.10。

$$\frac{2^{m+1} - 1}{m+1} = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+1}\binom{m}{i}$$

证明。 我们有二项式公式

$$(x+1)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i$$

对两边取积分 $\int_0^x$，得到

$$\frac{1}{m+1}(x+1)^{m+1} - \frac{1}{m+1} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}\frac{x^{i+1}}{i+1}$$

我们代入 $x = 1$，得到恒等算子。 □

命题 3.11。设 $x \in \mathbb{Z}_2^m$。

If $|x| = 1$,

$$h(x) = 2^m - 1$$

如果 $|x| = 2$,

$$h(x) = \frac{m}{m-1}(2^m - 2)$$

（ $|x| = 1$ 情形用另一种方法在 *[7]* 中证明。）

证明。 </style}对于 $|x| = 1$，公式为

$$\begin{aligned} h(x) &= m \sum_{i \text{ odd}} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{1}{i} \binom{m-1}{l} \frac{1}{l+i} \\ &= m \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \frac{1}{l+1} \\ &= 2^m - 1 \end{aligned}$$

最后一步，我们可以对 $|x| = 2$ 进行类似的计算。

$$\begin{aligned} h(x) &= m \sum_{i \text{ odd}} \sum_{l=0}^{m-2} \binom{2}{i} \binom{m-2}{l} \frac{1}{l+i} \\ &= 2m \sum_{l=0}^{m-2} \binom{m-2}{l} \frac{1}{l+1} \\ &= \frac{m}{m-1}(2^m - 2) \end{aligned}$$

□

现在我们证明命中时间的紧确界。我们先给出一个引理

引理 3.12。

$$\sum_{i+l=s} \binom{j}{i} \binom{m-j}{l} = \binom{m}{s}$$

其中求和遍历所有满足 $i + l = s$ 的非负整数对(i, l)。

证明。 右边计算的是从 m 个弹珠中选出 s 个的方式数。我们可以用另一种方法来计算。将 j 个弹珠涂成红色，将 $m - j$ 个弹珠涂成蓝色。那么，选出 s 个弹珠的方式数，就是对所有 $i + l = s$ 求和，计算选出 i 个红色弹珠和 l 个蓝色弹珠的方式数。 □

命题 3.13。 存在非零常数 c, C，使得对于 $x \in \mathbb{Z}_2^m$,

$$c2^m \leq h(x) \leq C2^m$$

对于所有 $x \neq (0、0、\ldots、0)$。

证明。 首先，我们证明上界。

$$
\begin{aligned}
h(x) &= m \sum_{i \text{ odd}} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{j}{i} \binom{m-j}{l} \frac{1}{l+i} \\
&\le m \sum_{i=0}^{j} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{j}{i} \binom{m-j}{l} \frac{1}{l+i} \\
&\le m \sum_{s=1}^{m} \sum_{i+l=s} \binom{j}{i} \binom{m-j}{l} \frac{1}{s} && \text{重新排列求和式} \\
&= m \sum_{s=1}^{m} \binom{m}{s} \frac{1}{s} && \text{by lemma 3.12} \\
&\le 2m \sum_{s=1}^{m} \binom{m}{s} \frac{1}{s+1} \\
&= \frac{2m}{m+1}(2^{m+1}-1) && \text{by lemma 3.10}
\end{aligned}
$$

现在我们证明下界。

引理 3.14。 首先注意，对于 $i < j/2$, j 为奇数的情形，

$$3 \sum_{i \ odd} \binom{j}{i} \frac{1}{l+i} \ge \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{1}{l+i}$$

对于 $l \ge 1$ 和

$$3 \sum_{i \ odd} \binom{j}{i} \frac{1}{i} \ge \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \frac{1}{i}$$

证明。 首先注意，对于 $i < j/2, i+l \ge 2$,

$$\binom{j}{i} \frac{1}{l+i} \ge \binom{j}{i-1} \frac{1}{l+i-1} \Leftrightarrow \frac{j-i+1}{i} \ge \frac{i+l}{i+l-1} \Leftrightarrow il + l + i - 2 \ge 0$$

因此，对于 $l \ge 1$,

$$\sum_{i \text{ odd}, i<j/2} \binom{j}{i} \frac{1}{i+l} \ge \sum_{i \text{ even}, i<j/2} \binom{j}{i} \frac{1}{i+l} \tag{3.10}$$

同理，对于 $i < j/2$,

$$\binom{j}{i} \frac{1}{l+i} \ge \binom{j}{j-i} \frac{1}{l+j-i}$$

so

$$\sum_{i \text{ odd}, i<j/2} \binom{j}{i} \frac{1}{i+l} \ge \sum_{i \text{ even}, i \ge j/2} \binom{j}{i} \frac{1}{i+l} \tag{3.11}$$

利用方程（3.10）和（3.11），对于 j 奇数， $l \ge 1$，我们有，

$$3 \sum_{i \text{ odd}, i<j/2} \binom{j}{i} \frac{1}{i+l} + \sum_{i \text{ odd}, i>j/2} \binom{j}{i} \frac{1}{i+l} \ge \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{1}{i+l}$$

同样的论证也适用于 $l = 0$。 □

因此，根据该引理，我们计算出命中时间的下界。

$$
\begin{aligned}
h(x) &= m \sum_{i \text{ odd}} \sum_{l=0}^{m-j} \binom{j}{i}\binom{m-j}{l}\frac{1}{l+i} \\
&\geq \frac{m}{3} \sum_{i=1}^{j} \sum_{l \leq m-j, i+l \geq 1} \binom{j}{i}\binom{m-j}{l}\frac{1}{l+i} && \text{by lemma 3.14} \\
&\geq \frac{m}{3} \sum_{s=1}^{m} \sum_{i+l=s} \binom{j}{i}\binom{m-j}{l}\frac{1}{s} && \text{by lemma 3.12} \\
&\geq \frac{m}{3} \sum_{s=1}^{m} \sum_{i+l=s} \binom{j}{i}\binom{m-j}{l}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{m}{3} \sum_{s=1}^{m} \binom{m}{s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{m}{3}\frac{2^{m+1}-1}{m+1} - \frac{m}{3} && \text{由引理 3.10}
\end{aligned}
$$

□

4 覆盖时间

在本节中，我们将利用命中时间的计算结果来计算如下定义的覆盖时间

$$t_{cov} := \max_{h \in G} \mathbf{E}_h[\max_{g \in G} \tau_g] = \mathbf{E}_e \max_{g \in G}[\tau_g]$$

我们将使用以下记号描述渐近界。

定义 4.1. 我们称

$$f(n) \lesssim g(n)$$

如果存在通用常数 C，使得 $f(n) \leq Cg(n)$。同样地，对于 $\gtrsim$ 也如此。如果 $f(n) \lesssim g(n)$ 且 $f(n) \gtrsim g(n)$，那么我们记作

$$f(n) \asymp g(n)$$

我们将使用 Ding、Lee、Peres 的一些结果 [3] 来计算覆盖时间，并在此概述。考虑由分布 p生成的群 G 上的随机游走。我们定义与该随机游走相关的如下高斯过程 $(\eta_g)_{g \in G}$，它基于往返时间 $\kappa(g, h) := \mathbf{E}_g[\tau_h] + \mathbf{E}_h[\tau_g]$。这是一个中心化高斯过程，其 $\eta_e = 0$，并且

$$\mathbf{E}[|\eta_g - \eta_h|^2] = \kappa(g, h)$$

这些统计量完全决定了该高斯过程。

定理 4.2 (Ding、Lee、Peres)。对于顶点集为 V 的群 G 上的随机游走，

$$t_{cov} \asymp \left(\mathbf{E} \max_{v \in V} \eta_v\right)^2$$

对于上文定义的相关高斯过程 η。

注 4.3. Ding、Lee、Peres 的研究结果是在更一般的电网络框架下提出的，而本文的结果不会用到这一框架。对于一个电网络，令 c_{gh} 表示从 g 到 h的电导。并且 $c_g = \sum c_{gh}$。总电导为 $\mathcal{C}$: $= \sum c_{gh}$。我们定义$h\in G$ $g,h\in G$转移概率为 $P(g,h) = \frac{c_{gh}}{c_g}$。

Ding、Lee、Peres 定义 $\mathbf{E}[|\eta_g - \eta_h|^2] = R_{eff} = \kappa(g,h)\,\mathcal{C}$(见[2])。于是，

$$t_{cov} \asymp \mathcal{C}\left(\mathbf{E}\max_{v\in V}\eta_v\right)^2$$

将所有电导按比例缩放，不会改变随机游走的转移概率，因此 $\mathcal{C}$会改变，但 t_{cov} 保持不变。我们也可以从下方定理 4.12 的公式中看出这一点。

在我们的情形中，令电导为 $c(g,\ h) = \frac{1}{|G|}p(hg^{-1})$。该网络的总电导为 $\mathcal{C}:=\sum c_{gh} = 1$ $g,\ h\in G$

群上的随机游走比图上的一般随机游走简单得多。这将大大简化计算。

定义 4.4。对于高斯过程 $(\eta_t)_{t\in T}$, $d(t,\ s) = \mathbf{E}[|\eta_t - \eta_s|^2]^{1/2}$ 是由该过程诱导的 T上的距离。

在我们考虑的带有关联高斯过程的群上随机游走的情形中，可以验证这个距离是一个度量。往返时间满足三角不等式，因为对于所有 $s,\ t,\ u \in G$,

$$\mathbf{E}_t[\tau_s] \le \mathbf{E}_t[\tau_u] + \mathbf{E}_u[\tau_s]$$

Thus

$$d(t,s) = \mathbf{E}[|\eta_t - \eta_s|^2]^{1/2} = \sqrt{\kappa(t,s)} \le \sqrt{\kappa(t,u)+\kappa(u,s)} \le \sqrt{\kappa(t,u)} + \sqrt{\kappa(u,s)} = d(t,u) + d(u,s)$$

定义 4.5。一个高斯过程 $(\eta_t)_{t\in T}$ 平稳，如果存在一个传递群作用 $G \curvearrowright T$，使得对于 $g \in G$,

$$d(g\cdot t, g\cdot s) = d(t,s)$$

引理 4.6。设 G 是群上的随机游走。相应的高斯过程是平稳的。也就是说，相应的度量 d（g,h）在 G 中元素的右乘作用下保持不变。

证明。回顾一下，高斯过程定义为对于 $t,\ s \in G$,

$$d(t,s) = \mathbf{E}[|\eta_t - \eta_s|^2]^{1/2} = \sqrt{\kappa(t,s)}$$

群 G h 作为对自身的传递作用，右乘保持 $\kappa(t,\ s)$ 不变，因为对于 $g \in G$,

$$\kappa(g\cdot t, g\cdot s) = \mathbf{E}_{tg}[\tau_{sg}] + \mathbf{E}_{sg}[\tau_{tg}] = \mathbf{E}_t[\tau_s] + \mathbf{E}_s[\tau_t] = \kappa(t,s)$$

因此， $d(t,s)$ 在此作用下保持不变。 □

定义 4.7。设 d 是集合 T 上的任意度量。定义 $N(T,\ d,\ \epsilon)$ 为满足以下条件的点的最大数量：t_1，.....，$t_N \in T$，使得对所有 $i \ne j$， $d(t_i,\ t_j) > \epsilon$。

定理 4.8 (Fernique)。设（η_t）$_{t\in T}$ 是指标集有限的平稳高斯过程。 n

$$\mathbf{E}\left[\max_{t\in T} X_t\right] \asymp \int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\epsilon)}\,d\epsilon$$

（证明见 *[4]*。）

考虑群 G 上的随机游走。结合定理 4.2 和 4.8，我们有

$$t_{cov} \asymp \left(\int_0^\infty \sqrt{\log N(G,d,\epsilon)} d\epsilon \right)^2 \tag{4.1}$$

其中 $d(g,h) = \sqrt{\kappa(s,t)}$。现在我们想要理解量 $N(G,d,\epsilon)$。

引理 4.9. 设 G 是一个带有度量 d 的群。令 $B_g(\epsilon) = \{h \in G : d(g,h) \leq \epsilon\}$ 为以 g 为中心、半径为 ϵ 的闭球。则 $|B_g(\epsilon)|$ 与 g 无关。我们定义量 $V_d(\epsilon) := |B_g(\epsilon)|$ 为体积增长函数。

证明. 我们将证明，对于任意 $g,h \in G$，都有 $|B_g(\epsilon)| = |B_h(\epsilon)|$。令 $k \in B_g(\epsilon)$。于是根据引理 4.6，

$$d(g,k) = d(h, kg^{-1}h) \leq \epsilon$$

右乘 $g^{-1}h$ 是单射，因此它将 $B_g(\epsilon)$ 映入 $B_h(\epsilon)$。类似地，右乘 $h^{-1}g$ 将 $B_h(\epsilon)$ 映入 $B_g(\epsilon)$。

□

注记 4.10。“体积增长函数”这一术语已见于文献 [8]。此处我们在比现有用法更一般的语境中使用该术语。 [8]用“体积增长函数”指距离 d 为词长这一特定情形。我们将研究群上的另一种距离。

引理 4.11。 设 G 是一个带度量 d的群，

$$N(G,d,\epsilon) V_d(\epsilon/3) \leq |G|$$

and

$$N(G,d,\epsilon) V_d(\epsilon) \geq |G|$$

证明。 首先证明上界。设 $S \subset G$ 是一个集合，其中有 $N(G,d,\epsilon)$ 个元素，使得 $d(s,t) \geq \epsilon$ 对$s,t \in S$成立。那么，对于 $s \in S$，球 $B_s(\epsilon/3)$ 两两不相交。

现在证明下界。设 S 如上所述。我们断言 $B_s(\epsilon)$ 覆盖 G。若此断言成立，则不等式成立。反设 $g \in G$ 不属于任何 $B_s(\epsilon)$，其中 $s \in S$任意，则 $d(g,s) > \epsilon$ 对所有$s \in S$成立，因此 $S' = S \cup \{g\}$ 满足 $d(s,t) > \epsilon$对所有 $s,t \in S'$成立，并且 $|S'| > N(G,d,\epsilon)$。然而，这与 $N(G,d,\epsilon)$ 的定义矛盾。 □

现在，我们可以用体积增长函数来理解覆盖时间。

定理 4.12。

$$t_{cov} \asymp \left(\int_0^\infty \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2$$

证明。 由等式 (4.1) 和引理 4.11，

$$t_{cov} \asymp \left(\int_0^\infty \sqrt{\log N(G,d,\epsilon)} d\epsilon \right)^2 \gtrsim \left(\int_0^\infty \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2$$

类似地，我们可以得到上界

$$t_{cov} \asymp \left(\int_0^\infty \sqrt{\log N(G,d,\epsilon)} d\epsilon \right)^2 \lesssim \left(\int_0^\infty \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon/3)}} d\epsilon \right)^2 = \left(3\int_0^\infty \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2$$

□

推论 4.13 (马修斯界 [6])。 设 $M = \max_{g_1,\ g_2 \in G} \kappa(g_1,\ g_2) = \max_{g \in G} \kappa(e,\ g)$，则

$$M \lesssim t_{cov} \lesssim M \log |G|$$

注意， $M \asymp$ 最大值$_{g \in G} \mathbf{E}_e[\tau_g]$ 即为最大命中时间。

证明。最大距离为 $d(s,t) = \sqrt{M}$，对于 $s, t \in T$。因此，对于 $\epsilon \geq \sqrt{M}$， $V_d(\epsilon) = |G|$，所以

$$\int_0^\infty \log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)} d\epsilon = \int_0^{\sqrt{M}} \log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)} d\epsilon$$

由于 $V_d(\epsilon) \geq 1$,

$$t_{cov} \lesssim \left(\int_0^{\sqrt{M}} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2 \leq \left(\int_0^{\sqrt{M}} \sqrt{\log |G|} d\epsilon \right)^2 = M \log |G|$$

对于下界，令 s, t 满足 $d(s,t) = M$。则 $B_s(M/3)$ 与 $B_t(M/3)$ 不相交，因此$V_d(M/3) \leq |G|/2$。

$$t_{cov} \asymp \left(\int_0^\infty \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2 \geq \left(\int_0^{\sqrt{M}/3} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2 \geq \left(\int_0^{\sqrt{M}/3} \sqrt{\log 2} d\epsilon \right)^2 \gtrsim M$$

□

下面的例子表明，上界和下界都可以达到。

例 4.14 (环)。 我们考虑由分布 $\mathbb{Z}_n$ 生成的随机游走，该分布以概率 $1/2$ 赋予每个 ± 1。我们将证明

$$t_{cov} \asymp n^2$$

这是马修斯界的下界，因此我们只需证明上界。利用例3.7， $d(0,k) = \sqrt{2k(n-k)}$ 对于 $k \in \mathbb{Z}_n$。因此，对于 $k < n/2$,

$$\sqrt{2k(n-k)} \leq \epsilon < \sqrt{2(k+1)(n-k-1)} \tag{4.2}$$

推出 $V_d(\epsilon) = 2k+1$。当 $k = \lfloor n/2 \rfloor$ 时， d 取得最大值。因此，对于 $\epsilon \geq \sqrt{n^2/2} = n/\sqrt{2}$， $V_d(\epsilon) = n$，所以 $\log V_n(\epsilon) = 0$。因此，

$$t_{cov} \asymp \left(\int_0^\infty \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2 = \left(\int_0^{3\sqrt{n}} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon + \int_{3\sqrt{n}}^{n/\sqrt{2}} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2$$

我们对第一个加项进行估计

$$\int_0^{3\sqrt{n}} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \leq \int_0^{3\sqrt{n}} \sqrt{\log n} d\epsilon = 3\sqrt{n \log n}$$

因此，只需证明

$$\int_{3\sqrt{n}}^{n/\sqrt{2}} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \lesssim n$$

重新整理公式（4.2），可得

$$2(k+1) \geq \frac{\epsilon^2}{n-k-1} \geq \frac{\epsilon^2}{3n}$$

因此，对于 $3\sqrt{n} \leq \epsilon \leq \sqrt{2\lfloor n/2 \rfloor^2}$，$V_d(\epsilon) \geq \frac{\epsilon^2}{3n-1} \geq \frac{\epsilon^2}{6n}$，且我们可以手动验证 $\sqrt{2\lfloor n/2 \rfloor^2} \leq \epsilon \leq n/\sqrt{2}$ 的这个不等式。因此，

$$\begin{aligned}
\int_{3\sqrt{n}}^{n/\sqrt{2}} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon &\leq \int_{3\sqrt{n}}^{n/\sqrt{2}} \sqrt{\log \frac{6n^2}{\epsilon^2}} d\epsilon \leq \int_{3\sqrt{n}}^{n/\sqrt{2}} \log \frac{6n^2}{\epsilon^2} d\epsilon \\
&= (n/\sqrt{2} - 3\sqrt{n}) \log 6 + 2(n/\sqrt{2} - 3\sqrt{n}) \log n - 2(x \log x - x) \Big|_{3\sqrt{n}}^{n/\sqrt{2}} \\
&= n \frac{\log 6}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} n \log n - \sqrt{2} n \log(n/\sqrt{2}) + \sqrt{2} n + o(n) \asymp n
\end{aligned}$$

因此，

$$t_{cov} \asymp n^2$$

其他示例的覆盖时间可以通过以下命题计算。

命题 4.15. 设 f 为固定函数。考虑群 G 上的一个随机游走，其满足 $|G| = N$，使得 $h(g) \asymp f(N)$ 对所有 $g \neq e$ 均成立。那么，

$$t_{cov} \asymp f(N) \log N$$

证明。 最大命中时间为 $\asymp f(n)$，因此这是马修斯上界。只需证明一个下界。

最小距离 $\alpha := \min_{g \neq e} d(e, g) \asymp \sqrt{f(n)}$。那么对于 $\epsilon < \alpha$, $V_d(\epsilon) = 1$。因此，

$$t_{cov} \asymp \left(\int_0^{\infty} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2 \geq \left(\int_0^{\alpha} \sqrt{\log \frac{|G|}{V_d(\epsilon)}} d\epsilon \right)^2 = \left(\int_0^{\alpha} \sqrt{\log |G|} d\epsilon \right)^2 = \alpha^2 \log |G| \asymp f(n) \log n$$

□

例 4.16 (超立方体)。 根据命题 3.13，对于所有 $g \neq e$，$\mathbf{E}_e[\tau_g] \asymp 2^m$，因此由上述命题可知，超立方体的覆盖时间 $\mathbb{Z}_2^m$ 为

$$t_{cov} \asymp m 2^m$$

例 4.17 (有限维环面)。 我们考虑环面 $\mathbb{Z}_n^m$ 上的随机游走。对于 $n = 2$，我们得到例 3.9 中讨论的超立方体。对于 $n > 2$，该随机游走由分布 p 生成，该分布给每个元素 $\{0, \ldots, 0, \pm 1, 0 \ldots, 0\}$ 赋予概率 $1/2m$。我们考虑 m 固定而 n 增大的情形。Levin、Peres、Wilmer 在第 10.4 节中使用电网络方法计算了该随机游走的命中时间 [5]。他们证明，对于 $m \geq 3$，

$$\mathbf{E}_e[\tau_x] \asymp n^m$$

因此根据命题 4.15，

$$t_{cov} \asymp n^m \log n$$

5 进一步方向

我们的方法为表示已知的任意有限群上的随机游走给出了命中时间的显式公式，其中包括所有有限阿贝尔群。然而，我们只能分析并理解少数几个简单情形下的这些公式。对所考虑情形的一种推广是环面 $\mathbb{Z}_n^m$，令 n 和 m 都增长。这一情形同时特化为超立方体（例 3.9）和有限维环面（例 4.17）的例子。在本文讨论的情形中，对于较大的 m，命中时间似乎都具有相同的阶，即群的阶。如果确实如此，命题 4.15 给出

$$t_{cov} \asymp mn^m \log n$$

对于这些情形。这个猜想可以推广到由概率分布 p生成的群 G 上的随机游走。在上述情形中， p 的支撑足够大，而且p 在支撑上是均匀的。在这些情形下，是否也会出现命中时间都处于 $|G|$量级的现象? 在这些支撑 p 较大的情形下，直观来看，即使随机游走从离目的地很近的地方出发，也很容易“迷失”，因此有理由相信这些命中时间都处于相同的量级。

另一个方向可能如下。我们所发展的表示论方法针对的是特定命中时间 $\tau_g = \{\min t \geq 0 : X_t = g\}$ 的期望值。因此，这些技巧也可能推广到某些情形，用于研究形式为 $\tau_A = \{\min t \geq 0 : X_t \in A\}$ 的命中时间，其中集合（如陪集）经过适当选择。此外，也可以选择初始分布 μ ，使得

$$\mathbf{E}_\mu[\tau_A]$$

可能更容易计算和理解 .

参考文献

[1] A. Chandra、P. Raghavan、W. Ruzzo、R. Smolensky 和 P. Tiwari（1996）。图的电阻刻画了其往返时间和覆盖时间，计算复杂性 6:312-340。[2] P. Diaconis（1988）。概率与统计中的群表示，数理统计学会，海沃德，加利福尼亚。[3] J. Ding、J. Lee、Y. Peres（2012）。覆盖时间、毯子时间与主导测度，数学年刊 175(3):1409–1471。[4] R. van Handel（2016）。高维概率，未发表的讲义。http://www.princeton.edu/∼rvan/APC550.pdf。[5] D. Levin、Y. Peres、E. Wilmer（2009）。马尔可夫链与混合时间，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[6] P. Matthews（1988）。马尔可夫链的覆盖问题，概率年刊 16(3):1215-1228。[7] S. Rao（2013）。求解各种图中的命中时间。《统计与概率快报》，83(9):2067-2072。[8] L. Saloff-Coste（2004）。有限群上的随机游走，载于离散结构上的概率，编者：H. Kesten，施普林格，伊萨卡，纽约。

我以荣誉起誓，在本次作业中我没有违反荣誉准则。-ChristopherZhang