arXiv:2302.01980v1 [math.CV] 3 Feb 2023

单位圆盘上的子 Bergman 希尔伯特空间 III

罗帅兵和朱克和

摘要。对于单位圆盘上的有界解析函数 φ $\mathbb{D}$，满足$\|\varphi\|_\infty \le 1$，我们分别考察加权 Bergman 空间 A^2_α上 Toeplitz 算子 T_φ 和 $T_{\overline{\varphi}}$的缺陷算子 D_φ 和 $D_{\overline{\varphi}}$。D_φ 和 $D_{\overline{\varphi}}$的值域记为 $\mathcal{H}(\varphi)$ 和$\mathcal{L}\mathcal{H}(\varphi)$，并赋予适当的内积，称为子Bergman空间。

本文证明以下三个结果：对于 $-1 < \alpha \le 0$，空间 $\mathcal{H}(\varphi)$具有完备的 Nevanlinna-Pick 核，当且仅当 φ 是一个 Möbius 映射；对于 $\alpha > -1$，有 $\mathcal{H}(\varphi) = \mathcal{H}(\overline{\varphi}) = A^2_{\alpha-1}$，当且仅当缺陷算子 D_φ 和 $D_{\overline{\varphi}}$ 是紧算子；对于 $\alpha > -1$，有 $D^2_\varphi(A^2_\alpha) = D^2_{\overline{\varphi}}(A^2_\alpha) = A^2_{\alpha-2}$，当且仅当 φ 是有限 Blaschke 乘积。从某种意义上说，我们在此对 α 所作的限制已是最佳的。

1. 引言

设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，$B(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子构成的空间。若 $T \in B(\mathcal{H})$ 是一个压缩算子，我们用 $\mathcal{H}(T)$ 表示缺陷算子 $(I - TT^*)^{1/2}$ 的值域空间。众所周知，$\mathcal{H}(T)$ 是一个希尔伯特空间，其内积为

$$\langle (I - TT^*)^{1/2}x, (I - TT^*)^{1/2}y\rangle_{\mathcal{H}(T)} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}},$$

其中 $x, y \in \mathcal{H} \ominus \ker(I - TT^*)^{1/2}$。文献中已对 $\mathcal{H}(T)$ 这类空间进行了广泛研究，主要是将其与算子模型联系起来。

有两种特别值得关注的特殊情形。首先，若 $\mathcal{H} = H^2$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的经典 Hardy 空间，且 $T = T_\varphi$ 是由单位球 H^∞_1 中的一个函数 φ 所诱导的解析 Toeplitz 算子（乘法算子），那么 $\mathcal{H}(T_\varphi)$ 称为子 Hardy 空间（或 de Branges-Rovnyak 空间）。de Branges 在研究 Bieberbach 猜想时的工作中 [11] 曾提及这类空间，随后 Sarason 在其专著 [16]中对其进行了系统研究。另请参阅近期的专著 [12]。

2020 年数学主题分类。主要分类：30H15、30H10、30H05、47B35；次要分类：30H45、30H25、30H30、47B07。关键词和短语：Bergman空间、Nevanlinna-Pick 核、Toeplitz 算子、缺陷算子、子 Bergman 空间、Dirichlet 空间、Bloch 空间、de Branges-Rovnyak 空间。Luo 的研究得到了国家自然科学基金（编号：12271149）的资助。Zhu 的研究得到了国家自然科学基金（编号：12271328）的资助。1

其次，若 $\mathcal{H} = A^2$ 是单位圆盘上的经典 Bergman空间，且 $T = T_\varphi$ 是 A^2 上由某个 $\varphi \in H^\infty_1$ 诱导的解析 Toeplitz 算子（乘法算子），那么 $H(T_\varphi)$ 自然称为子Bergman空间。文献中已有多位作者研究这类空间，始于[20, 21] ，并包括 [1, 8, 9, 10, 13, 17, 18]。

本文重点研究加权情形下的子Bergman空间。更具体地说，我们将考察一族“广义 Bergman 空间”A^2_α。我们还将考察由 $\mathcal{M}_1(A^2_\alpha)$中的函数诱导的乘法算子 $T_\varphi = T^\alpha_\varphi : A^2_\alpha \to A^2_\alpha$，其中 $\mathcal{M}_1(A^2_\alpha)$是 A^2_α的乘子代数 $\mathcal{M}(A^2_\alpha)$的闭单位球。自然地，我们用记号 $H^\alpha(\varphi)$表示空间 $H(T_\varphi)$。类似地，当 T 是伴随算子 $T^*_\varphi : A^2_\alpha \to A^2_\alpha$时，我们将用 $H^\alpha(\varphi)$ 表示空间 H(T)。注意，对于 $\alpha \geq -1$ ，我们有$\mathcal{M}(A^2_\alpha) = H^\infty$。

受 [21, 10], 中主要结果的启发，我们将研究以下三个问题：

(a) 何时 $H^\alpha(\varphi)$具有完全 Nevanlinna-Pick 核？对于 $-1 < \alpha \leq 0$ ，我们证明 $H^\alpha(\varphi)$具有完全 Nevanlinna-Pick 核，当且仅当 φ 是一个 Möbius 映射。当 $-2 < \alpha < -1$时，我们还得到了一个（更微妙的）刻画。上界 0 和下界–2 对于 α 似乎是自然的障碍。这里，即使是 $\alpha = 0$ 情形下的结果也是新的。 $\alpha = -1$ 情形已在 [10]中研究过。

(b) 何时有

$$H^\alpha(\varphi) = H^\alpha(\overline{\varphi}) = A^2_{\alpha-1}?$$

对于 $\alpha > -1$ ，我们证明，上述恒等式成立当且仅当 φ 是有限 Blaschke 乘积；这也等价于相应的缺陷算子是紧算子。我们的方法在很大程度上依赖假设 $\alpha > -1$ 。特别是，当 $\alpha = -1$ （Hardy 空间情形）时，我们的主要结果肯定不再成立。关于这个问题，我们的主要结果的一些特殊情形可见 [21, 17, 1, 8, 9, 13]。

(c) 何时有

$$(I - T_\varphi T_{\overline{\varphi}})(A^2_\alpha) = (I - T_{\overline{\varphi}} T_\varphi)(A^2_\alpha) = A^2_{\alpha-2}?$$

我们证明，对于 $\alpha > -1$，上述恒等式成立当且仅当 φ 是有限 Blaschke 乘积。特殊情形 $\alpha = 0$ 已在 [21] 中证明。这里，假设 $\alpha > -1$ 再次起着关键作用。

广义 Bergman 空间 A^2_α 的定义留待下一节介绍，这里先提及以下特例：$A^2_0 = A^2$ 是普通 Bergman 空间，$A^2_{-1} = H^2$ 是 Hardy 空间，而 $A^2_{-2} = \mathcal{D}$ 是 Dirichlet 空间。

2. 广义 Bergman 空间

对于任意实数 α，我们固定一个非负整数 k，使得 $2k+\alpha > -1$，并令 A^2_α 表示定义在 $\mathbb{D}$ 上、满足以下条件的解析函数 f 所构成的空间

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{2k} |f^{(k)}(z)|^2 \, dA_\alpha(z) < \infty, \tag{1}$$

其中

$$dA_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z).$$

这里，dA 是 $\mathbb{D}$ 上的归一化面积测度。当且仅当 $\alpha > -1$ 时，加权面积测度 dA_α 有限；在这种情况下，我们将对 dA_α 进行归一化，使得 $A_\alpha(\mathbb{D}) = 1$。

众所周知，空间 A^2_α 与（1）中所用整数 k 的选择无关。值得一提的两个特例是 $A^2_{-1} = H^2$ 和 $A^2_{-2} = \mathcal{D}$，它们分别是 Hardy 空间和 Dirichlet 空间。关于“广义加权 Bergman 空间”A^p_α 的更多信息，请参见 [19]。

每个空间 A^2_α 在适当选取内积后都是一个希尔伯特空间。例如，若 $\alpha > -1$，我们可以在（1）中取 $k = 0$，并直接使用 $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ 中的自然内积作为 A^2_α 的内积：

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} \, dA_\alpha(z).$$

更一般地，对于任意 $\alpha > -2$，很容易证明，解析函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 属于 A^2_α 当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(n+1)^{\alpha+1}} < \infty.$$

由于

$$\frac{n!}{\Gamma(n+2+\alpha)} \sim \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}$$

当 $n \to \infty$ 时，我们看到

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} a_n \overline{b}_n, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

在 A^2_α 上定义了一个内积。对于此内积，函数

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\,\Gamma(2+\alpha)}} \, z^n, \qquad n \geq 0,$$

构成 A^2_α 的标准正交基，由此得到 A^2_α 的再生核如下：

$$K(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z)\overline{e_n(w)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\,\Gamma(2+\alpha)}(z\overline{w})^n=\frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}. \tag{2}$$

尽管所有空间 A^2_α（当 $\alpha>-2$ 时）都具有式（2）所给出的同类型再生核，但它们的乘子代数在很大程度上取决于 α。众所周知，对于 $\alpha\geq -1$，$\mathcal{M}(\mathrm{A}^2_\alpha)=\mathrm{H}^\infty$。当 $\alpha<-1$ 时，$\mathcal{M}(\mathrm{A}^2_\alpha)$ 是 H^∞ 的真子代数。

我们将考察缺陷算子

$$D_\varphi=D^\alpha_\varphi=\left(I-T_\varphi T^*_\varphi\right)^{1/2},\qquad D_{\overline{\varphi}}=D^\alpha_{\overline{\varphi}}=\left(I-T^*_\varphi T_\varphi\right)^{1/2},$$

以及相关算子

$$E_\varphi=E^\alpha_\varphi=I-T_\varphi T^*_\varphi,\qquad E_{\overline{\varphi}}=E^\alpha_{\overline{\varphi}}=I-T^*_\varphi T_\varphi,$$

其中 $\varphi\in\mathcal{M}_1(\mathrm{A}^2_\alpha)$，且 $\mathrm{T}_\varphi:\mathrm{A}^2_\alpha\to\mathrm{A}^2_\alpha$ 是（压缩的）乘法算子。

回忆

$$H^\alpha(\varphi)=H(T_\varphi),\qquad H^\alpha(\overline{\varphi})=H(T^*_\varphi),$$

它们是在引言中定义的广义子 Bergman 希尔伯特空间。对于任意 $\alpha>-2$，与无权情形 $\alpha=0$ 一样，$\mathrm{H}^\alpha(\varphi)$ 是一个再生核希尔伯特空间，其核函数由下式给出

$$K^{\alpha,\varphi}(z,w)=K^{\alpha,\varphi}_w(z)=\frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}. \tag{3}$$

类似地，$\mathrm{H}^\alpha(\overline{\varphi})$ 是一个再生核希尔伯特空间，其核函数由下式给出

$$K^{\alpha,\overline{\varphi}}(z,w)=K^{\alpha,\overline{\varphi}}_w(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{1-|\varphi(u)|^2}{(1-z\overline{u})^{2+\alpha}(1-u\overline{w})^{2+\alpha}}\,dA_\alpha(u). \tag{4}$$

空间 $\mathrm{H}^\alpha(\varphi)$ 和 $\mathrm{H}^\alpha(\overline{\varphi})$ 已由多位作者研究，主要是在 $\alpha\geq 0$ 的情形下。参见 [17, 9]。我们将把文献中的若干结果推广到满足 $\alpha>-1$ 的加权 Bergman 空间 A^2_α。

3. 完全 Nevanlinna-Pick 核

本节将准确判定再生核函数 K^φ_w in (3) 何时是完全 Nevanlinna–Pick（CNP）核。以下定义引自 [3] 中的定理 8.2。

定义 1. 设 K = K(z, w) = K_w(z) 是集合 Ω 上的不可约核函数。如果存在辅助希尔伯特空间 $\mathcal{L}$、函数 b : Ω → $\mathcal{L}$，以及 Ω 上处处不为零的函数 δ，使得

$$K_w(z) = \frac{\delta(z)\overline{\delta(w)}}{1 - \langle b(z), b(w)\rangle}, \qquad z, w \in \Omega.$$

若 K 是完全 Nevanlinna–Pick 核，则相应的、以核 K 为再生核的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$(K) 称为完全非负定空间。完全非负定空间与 Hardy 空间 H^2，有许多共同性质，并已在文献中得到广泛研究；有关最新进展，请参见例如 [2, 4, 5, 6, 7] 及其中的参考文献。2020年，Chu [10] 确定了哪些 de Branges-Rovnyak 空间（子 Hardy 空间）具有完全 Nevanlinna–Pick 核。我们将刻画哪些子 Bergman 空间具有完全 Nevanlinna–Pick 核。

Hardy 空间 H^2 的再生核为

$$K_w^{H^2}(z) = \frac{1}{1 - z\overline{w}}.$$

若 $\varphi \in H_1^\infty$ 不是常数，我们令

$$H(K^{H^2} \circ \varphi) = \{f \circ \varphi : f \in H^2\}.$$

Then

$$K^{H^2} \circ \varphi(z, w) = K^{H^2}(\varphi(z), \varphi(w)) = \frac{1}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}}$$

是一个核函数，且由 $C_\varphi f = f \circ \varphi$ 定义的 $C_\varphi : H^2 \to H(K^{H^2} \circ \varphi)$ 是一个酉算子；参见（[15, P 71]）。

给定一个 ∈ 𝔻，我们令

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

表示将点 0 和 a 互换的 M¨obius 映射。若取 a = φ(0)并定义

$$\psi(z) = \varphi_a(\varphi(z)), \qquad g(z) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \overline{a}\varphi(z)},$$

那么简单计算可得

$$K_w^{\alpha,\psi}(z) = g(z)\,\overline{g(w)}\,K_w^{\alpha,\varphi}(z). \tag{5}$$

例如参见 [14, P 18]。因此，$K_w^{\alpha,\varphi}$(z) 是完全 Nevanlinna–Pick 核，当且仅当 $K_w^{\alpha,\psi}$(z) 是完全 Nevanlinna–Pick 核。

以下结果可由 [15, 定理628]得到。

引理 2. 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 分别是定义在集合 Ω 上、再生核分别为 K_1 和 K_2, 的函数的再生核希尔伯特空间。设 $\mathcal{F}$ 是一个希尔伯特空间，且 $\Phi: \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ 是一个函数。则以下命题等价:

(i) Φ 是从 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{F}$ 到 $\mathcal{H}_2$的压缩乘子，(ii) $K_2(z,w) - K_1(z,w)\Phi(z)\Phi(w)^*$ 是正定的。

我们用 $\mathcal{M}_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ 表示从$\mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_2$的压缩乘子集合。当 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$时，我们将简化记号为 $\mathcal{M}_1(\mathcal{H})$。

引理 3. 设 $\varphi \in H_1^\infty$ 是一个非常值函数。则

$$\mathcal{M}_1(H(K^{H^2} \circ \varphi)) = \{f \circ \varphi : f \in \mathcal{M}_1(H^2)\}.$$

证明。由 $C_\varphi : H^2 \to H(K^{H^2} \circ \varphi)$ 是酉算子这一事实可轻易得出。□

下文中，我们使用记号 $K(z,w) \geq 0$ 或 $0 \leq K(z,w)$ 表示 $K(z,w)$ 是一个再生核，即 $K(z,w) = K(w,z)$，并且它在以下意义下是正定的:

$$\sum_{i,j=1}^{N} P(z_i, z_j) c_i \overline{c}_j \geq 0$$

对所有 $z_i \in \mathbb{D}$ 和 $c_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq N$，且 $N \geq 1$。我们将从普通 Bergman 空间的以下结果开始，它展示了本节所用的主要技巧。

定理 4。设 $\varphi \in H_1^\infty$ 和 $\alpha = 0$。那么，$K_w^\varphi(z) =: K^{0,\varphi}_{,w}(z)$ 是完全 Nevanlinna–Pick 核，当且仅当 φ 是一个莫比乌斯映射。

证明。若 φ 是一个莫比乌斯映射，设

$$\varphi = \zeta \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}, a \in \mathbb{D},$$

则易于验证

$$K_w^\varphi(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{w})} \frac{1}{1 - z\overline{w}},$$

这显然是一个完全 Nevanlinna–Pick 核。

反过来，假设 $K_w^\varphi(z)$ 是一个完全 Nevanlinna–Pick 核。如果 $a = \varphi(0) \neq 0$, 那么我们考虑 $\psi(z) = \varphi_a(\varphi(z))$。由 (5) 可知，$K_w^\psi(z)$ 是一个完全 Nevanlinna–Pick 核，且$\psi(0) = 0$。因此，我们将假设 φ 也满足 $\varphi(0) = 0$，这意味着对所有 $z \in \mathbb{D}$，$K_0^\varphi(z) = 1$。

众所周知，如果再生核函数 $K_w(z) = K(z, w)$ 在$\mathbb{D}$ 上满足对所有 $z \in \mathbb{D}$均有 $K(z, 0) = 1$，那么它是完全 Nevanlinna–Pick 核，当且仅当

$$1 - \frac{1}{K(z, w)} \geq 0.$$

例如 [3] 。由于

$$1 - \frac{1}{K_w^{\varphi}(z)} = 1 - \frac{(1 - z\overline{w})^2}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}} = \frac{2z\overline{w} - z^2\overline{w^2} - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}},$$

我们有

$$\frac{1 - \frac{z}{\sqrt{2}}\frac{\overline{w}}{\sqrt{2}} - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{2}z}\frac{\overline{\varphi(w)}}{\sqrt{2}\overline{w}}}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}} \geq 0.$$

由此及引理 2 可得

$$\Phi(z) = \left(\frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{\varphi(z)}{\sqrt{2}z}\right) \in \mathcal{M}_1\Big(H(K^{H^2} \circ \varphi) \otimes \mathbb{C}^2, H(K^{H^2} \circ \varphi)\Big). \tag{6}$$

Thus

$$\frac{z}{\sqrt{2}} \in \mathcal{M}_1(H(K^{H^2} \circ \varphi)), \quad \frac{\varphi(z)}{\sqrt{2}z} \in \mathcal{M}_1(H(K^{H^2} \circ \varphi)).$$

利用 $z/\sqrt{2} \in \mathcal{M}_1(H(K^{H^2} \circ \varphi))$ 和 $1 \in H(K^{H^2} \circ \varphi)$，我们可以找到一个函数 $h \in H^2$，使得

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{2}}(1) = h(\varphi(z)), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{7}$$

因此，φ 是单射，并且根据引理 3，$h \in \mathcal{M}_1(H^2) = H_1^\infty$ 且 $h(0) = 0$。类似地，由 $\varphi(z)/(\sqrt{2}z) \in \mathcal{M}_1(H(K^{H^2} \circ \varphi))$ 可推得 $z/(2h) \in H_1^\infty$。于是 (6) 表明

$$T := \left(h, \frac{z}{2h}\right) \in \mathrm{Mult}_1(H^2 \otimes \mathbb{C}^2, H^2).$$

由于

$$T^* \frac{1}{1 - \overline{\lambda}z} = \left(\overline{h(\lambda)}, \overline{\frac{z}{2h}(\lambda)}\right) \frac{1}{1 - \overline{\lambda}z},$$

我们得出

$$|h(\lambda)|^2 + \frac{|\lambda|^2}{4|h(\lambda)|^2} \leq 1, \qquad \lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

取边界极限后，我们得到

$$|h(\lambda)|^2 + \frac{1}{4|h(\lambda)|^2} \leq 1$$

对几乎所有的 $\lambda \in \mathbb{T}$ 都成立。因此，对于几乎所有的 $\lambda \in \mathbb{T}$，$\sqrt{2}h(\lambda)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$。于是，$\sqrt{2}h$ 是一个内函数。由施瓦茨引理，不等式 $\sqrt{2}|h(z)| \leq 1$

与 $h(0) = 0$ 一起蕴含 $\sqrt{2}|h(z)| \le |z|$ 在 $\mathbb{D}$ 上成立。结合 $z/(2h) \in H_1^\infty$，可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \left| \frac{\sqrt{2}\, h(z)}{z} \right| \le 1, \qquad z \in \mathbb{D},$$

这意味着内函数 $\sqrt{2}h(z)/z$ 在 $\mathbb{D}$ 内没有零点，也没有奇异因子。因此，对于某个 $\zeta \in \mathbb{T}$，有 $\sqrt{2}h(z) = \zeta z$。由此再根据 (11) 可得 $\varphi(z) = \zeta z$，从而完成定理的证明。□

不过，子 A_α^2 空间 $H^\alpha(\varphi)$ 的完全 Nevanlinna-Pick 核的刻画更为微妙。我们得到的结果取决于参数 α 的取值范围。

定理 5. 假设 $\varphi \in H_1^\infty$ 且 $-1 < \alpha \le 0$。那么，式 (3) 中 $H^\alpha(\varphi)$ 的再生核是完全 Nevanlinna–Pick 核，当且仅当 φ 是一个莫比乌斯映射。

证明. $\alpha = 0$ 的情形涉及普通 Bergman 空间，这就是定理 4。因此，在本证明余下部分中，我们假设 $-1 < \alpha < 0$。

首先假设 φ 是一个莫比乌斯映射，例如 $\varphi(z) = \zeta \frac{a-z}{1-az}$，其中 $\zeta \in \mathbb{T}$ 且 $a \in \mathbb{D}$。那么，经过简单计算可知，$H^\alpha(\varphi)$ 的再生核可写为

$$K(z,w) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{w})} \frac{1}{(1-z\overline{w})^{1+\alpha}},$$

众所周知，这是一个完全 Nevanlinna–Pick 核。参见 [3]。

接下来，我们假设式 (3) 中 $H^\alpha(\varphi)$ 的核是一个完全 Nevanlinna–Pick 核。同样，通过考虑 $\psi(z) = \varphi_a \circ \varphi(z)$，其中 $a = \varphi(0)$，并使用式 (5)，我们可以假设 $\varphi(0) = 0$。

当 $\varphi(0) = 0$ 时，对于所有 $z \in \mathbb{D}$，都有 $K_0^{\alpha,\varphi}(z) = 1$。此时，已知核 $K_w^{\alpha,\varphi}(z)$ 是完全 Nevanlinna–Pick 核，当且仅当 $1 - [1/K_w^{\alpha,\varphi}(z)] \ge 0$；例如参见 [3]。由于

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{K_w^{\alpha,\varphi}(z)} &= 1 - \frac{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}} \\ &= \left[sz\overline{w} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)} z^n \overline{w}^n - \varphi(z)\overline{\varphi(w)} \right] \frac{1}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}, \end{aligned}$$

其中 $s = \alpha + 2 \in (1,2)$，我们必有

$$\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(s-1)\,\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)} z^{n-1} \overline{w}^{n-1} - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{s}z} \frac{\overline{\varphi(w)}}{\sqrt{s}\overline{w}} \right] \frac{1}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}} \ge 0.$$

Let

$$\Phi(z)=\left(\frac{\varphi(z)}{\sqrt{s}z},\sqrt{\frac{s-1}{2!}}z,\cdots,\sqrt{\frac{(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}}z^{n-1},\cdots\right).$$

由引理 2 可得

$$\Phi\in\mathcal{M}_1\Big(H(K^{H^2}\circ\varphi)\otimes l^2,H(K^{H^2}\circ\varphi)\Big). \tag{8}$$

Thus

$$\frac{\varphi(z)}{\sqrt{s}z},\quad \sqrt{\frac{(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}}z^{n-1}\in\mathcal{M}_1\Big(H(K^{H^2}\circ\varphi)\Big),\qquad n\geq 2.$$

由此可得

$$\sqrt{\frac{s-1}{2!}}z\in\mathcal{M}_1\Big(H(K^{H^2}\circ\varphi\Big),\quad 1\in H(K^{H^2}\circ\varphi),$$

因此，存在某个函数 $\mathrm{h}\in\mathrm{H}^2$ 使得

$$\sqrt{\frac{s-1}{2!}}z=\sqrt{\frac{s-1}{2!}}h(\varphi(z)),\qquad z\in\mathbb{D}. \tag{9}$$

因此，φ 是单射，并由引理 3 可得，

$$\sqrt{\frac{s-1}{2!}}h\in\mathcal{M}_1(H^2)=H_1^\infty$$

其中 $\mathrm{h}(0)=0$。那么我们还有

$$\sqrt{\frac{(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}}z^{n-1}=\sqrt{\frac{(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}}h(\varphi(z))^{n-1},\qquad n\geq 2.$$

类似地，由 $\varphi(\mathrm{z})/\sqrt{\mathrm{s}\bar{\mathrm{z}}}\in\mathcal{M}_1(\mathrm{H}(\mathrm{K}^{H^2}\circ\varphi))$ 可得 $\mathrm{z}/\sqrt{\mathrm{sh}}\in\bar{\mathrm{H}}_1^\infty$。

根据（8），我们必有

$$T(z):=\left(\frac{z}{\sqrt{s}h},\sqrt{\frac{s-1}{2!}}h,\cdots,\sqrt{\frac{s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}}h^{n-1},\cdots\right)$$
$$\in\mathcal{M}_1(H^2\otimes l^2,H^2).$$

注意，

$$T^*\frac{1}{1-\overline{\lambda}z}=$$
$$\left(\overline{\frac{z}{\sqrt{s}h}}(\lambda),\sqrt{\frac{s-1}{2!}}\overline{h(\lambda)},\cdots,\sqrt{\frac{(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}}\overline{h^{n-1}(\lambda)}\right)\frac{1}{1-\overline{\lambda}z}.$$

由此可得,

$$\frac{|\lambda|^2}{s|h(\lambda)|^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(s-1)\Gamma(n-2)}{n!\,\Gamma(2-s)}\,|h(\lambda)|^{2n-2}\le 1,\qquad \lambda\in\mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

取径向极限，我们得到

$$\frac{1}{s|h(\lambda)|^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}\,|h(\lambda)|^{2}\le 1$$

or

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{s(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}\,|h(\lambda)|^{2n}\le s|h(\lambda)|^{2}$$

对几乎所有的 $\lambda\in\mathbb{T}$。我们必有 $|\mathrm{h}(\lambda)|^2\le 1$。将上述不等式与经典的泰勒级数

$$(1-x)^s=1-sx+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{s(s-1)\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(2-s)}\,x^n,\qquad x\in(-1,1),$$

比较可得，对几乎所有的 $\lambda\in\mathbb{T}$，$(1-|\mathrm{h}(\lambda)|^2)^s\le 0$，因此 h 是一个内函数。结合 $\mathrm{z}/\sqrt{\mathrm{sh}}\in\mathrm{H}_1^\infty$，可知 $\mathrm{h}(\mathrm{z})=\zeta\mathrm{z}$，其中 $\zeta\in\mathbb{T}$ 为某个常数。由 (9) 得 $\varphi(\mathrm{z})=\zeta\mathrm{z}$。定理得证。□

注意，当 $\alpha=-1$ 时，文献 [10] 给出了 $\varphi\in\mathrm{H}_1^\infty$ 的刻画，以使核

$$K(z,w)=\frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}=\frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{1-z\overline{w}}$$

成为 CNP。φ 的充要条件如下：存在一个函数 $\mathrm{h}\in\mathrm{H}_1^\infty$，使得 $\psi(\mathrm{z})=\mathrm{zh}(\psi(\mathrm{z}))$，其中 $\psi(\mathrm{z})=\varphi_a(\varphi(\mathrm{z}))$，且 $\mathrm{a}=\varphi(0)$。

当 $-2<\alpha<-1$ 时，我们有如下结果。

定理6。假设 $-2<\alpha<-1$ 且 $\varphi\in\mathcal{M}_1(\mathrm{A}_\alpha^2)$。令 $\mathrm{a}=\varphi(0)$ 且$\psi=\varphi_a\circ\varphi$。那么函数

$$K_w^{\alpha,\varphi}(z)=\frac{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}$$

是完全 Nevanlinna–Pick 核，当且仅当存在

$$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n,\cdots)\in\mathcal{M}_1(H^2,H^2\otimes l^2)$$

使得

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(2+\alpha)\Gamma(n-\alpha-2)}{n!\,\Gamma(-1-\alpha)}}\,z^n h_n(\psi(z))$$

关于 $\mathbb{D}$。

证明。回顾 (5)，$K_w^{\alpha,\varphi}(z)$ 是完全 Nevanlinna–Pick 核，当且仅当 $K_w^{\alpha,\psi}(z)$ 是完全 Nevanlinna–Pick 核。因此我们将假设 $\varphi(0) = 0$。在这种情况下，对于所有 $z \in \mathbb{D}$，我们有 $K_0^{\alpha,\varphi}(z) = 1$，且 $1 - [1/K_w^{\alpha,\varphi}(z)] \geq 0$。

令 $s = \alpha + 2$，并记

$$1 - \frac{1}{K_w^{\alpha,\varphi}(z)} = 1 - \frac{(1 - z\overline{w})^s}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(1-s)} z^n \overline{w}^n - \varphi(z)\overline{\varphi(w)} \right) \frac{1}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}}.$$

由于 $1/(1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)})$ 是一个完全 Nevanlinna–Pick 核，由[3] 的定理 8.57可知，$1 - [1/K_w^{\alpha,\varphi}(z)] \geq 0$ 当且仅当存在

$$\Phi = (\varphi_n) \in \mathcal{M}_1\Big(H(K^{H^2} \circ \varphi), H(K^{H^2} \circ \varphi) \otimes l^2\Big)$$

使得

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{s\Gamma(n-s)}{n!\,\Gamma(1-s)}}\, z^n \varphi_n(z).$$

由引理 3，存在 $h = (h_n) \subset H_1^\infty$，使得对所有 n，$\varphi_n(z) = h_n(\varphi(z))$，且 $h \in \mathrm{Mult}_1(H^2, H^2 \otimes l^2)$。这就证明了所需结果。□

下面给出一个完全 Nevanlinna–Pick 核 $K_w^{\alpha,\varphi}(z)$ 的例子。当 $-2 < \alpha < -1$ 时，任取正整数 n，并考虑

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{(2+\alpha)\Gamma(n-2-\alpha)}{n!\,\Gamma(-1-\alpha)}}\, z^n.$$

容易看出 $\varphi \in \mathcal{M}_1(A_\alpha^2)$，并且由上面的定理可知，$K_w^{\alpha,\varphi}(z)$ 是一个完全 Nevanlinna–Pick 核。

情形 $\alpha > 0$ 仍未解决。在这种情况下，恒等函数 $\varphi(z) = z$ 属于 $H_1^\infty = \mathcal{M}_1(A_\alpha^2)$，但是

$$K_w^{\alpha,\varphi}(z) = \frac{1 - z\overline{w}}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{1+\alpha}}$$

不是完全 Nevanlinna–Pick 核；参见 [3]。我们不知道是否存在某个 $\varphi \in H_1^\infty$，使得 $K_w^{\alpha,\varphi}(z)$ 是一个完全 Nevanlinna–Pick 核。

4. 缺陷算子的紧性

本节将刻画满足以下条件的函数 $\varphi \in H_1^\infty$：缺陷算子 D_φ^α 和 $D_{\overline{\varphi}}^\alpha$（其中 $\alpha > -1$）是紧算子。下面的结果由 [16] 中的 I-9 得出。

引理 7. 设 $\alpha > -1, \varphi \in H_1^\infty$，且 $M^\alpha(\varphi) = \varphi A_\alpha^2$。那么

$$H^\alpha(\varphi) \cap M^\alpha(\varphi) = \varphi H^\alpha(\overline{\varphi}).$$

以下结果已在 [17] 中针对 $\alpha \geq 0$证明。现在我们证明，可以将假设 $\alpha \geq 0$ 放宽为 $\alpha > -1$。

引理 8. 设 $\alpha > -1$ and $\varphi \in H_1^\infty$。若 φ 是有限 Blaschke 乘积，则

$$H^\alpha(\overline{\varphi}) = H^\alpha(\varphi) = A^2_{\alpha-1}.$$

证明。由于对于 $\alpha \geq 0$，该结论已为人所知，我们将假设$-1 < \alpha < 0$。

根据 $A^2_{\alpha-1}$ 的定义，不难看出，任何在闭单位圆盘上解析的函数都是 $A^2_{\alpha-1}$ 的乘子。特别地，T_φ 是 $A^2_{\alpha-1}$ 上的有界算子。若 $\|T_\varphi\|_{B(A^2_{\alpha-1})} = C < \infty$, 则

$$(I - T_\varphi T_\varphi^*/C^2)K_w^{\alpha-1}(z) = \frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}/C^2}{(1 - z\overline{w})^{1+\alpha}} \geq 0.$$

因此，由舒尔积定理（[15]），

$$(1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}/C^2)\frac{(1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)})}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} = \frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}/C^2}{(1 - z\overline{w})^{1+\alpha}}\frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}}{1 - z\overline{w}} \geq 0.$$

由此可知， φ/C 是 $H^\alpha(\varphi)$ 的压缩乘子。因此 $\varphi H^\alpha(\varphi) \subseteq H^\alpha(\varphi)$。将此与 $H^\alpha(\varphi) \subseteq A^2_\alpha$ 结合，我们得到

$$\varphi H^\alpha(\varphi) \subseteq H^\alpha(\varphi) \cap \varphi A^2_\alpha = H^\alpha(\varphi) \cap M^\alpha(\varphi).$$

根据引理 7，我们还有 $\varphi H^\alpha(\varphi) \subseteq \varphi H^\alpha(\varphi)$, 因此 $H^\alpha(\varphi) \subseteq H^\alpha(\overline{\varphi})$。

为完成证明，我们注意到 $H^\alpha(\varphi) = A^2_{\alpha-1}$ ([17])，并利用这样一个事实：一般而言，T_φ 的次正规性给出 $\overline{H}^\alpha(\varphi) \subseteq H^\alpha(\varphi)$。□

引理 9。设 φ 是 H_1^∞ 中的非常数函数。则以下条件等价。

(a) φ 是有限 Blaschke 乘积。(b) $1 - |\varphi(z)|^2 \to 0$ as $|z| \to 1^-$。
(c) $(1 - |\varphi(z)|^2)/(1 - |z|^2)$ 在 $\mathbb{D}$ 上有界，且上下界均有界。

证明。(a) 与 (c) 的等价性已在 [21] 中证明。(c) 蕴含 (b) 是显然的。

若 (b) 成立，则当 $|z| \to 1^-$ 时， $|\varphi(z)| \to 1$ 一致成立，因此 φ 是一个内函数。显然， φ 不可能有无穷多个零点。若 φ 含有一个奇异内因子 S，则至少存在一点 $\zeta \in \mathbb{T}$，使得当 z 沿径向趋近 ζ 时，S (z) $\to 0$，这与极限 $|\varphi(z)| \to 1$ （当 $|z| \to 1^-$ 时）矛盾。因此， φ 不可能含有任何奇异内因子。故 φ 必为有限 Blaschke 乘积。这表明 (b) 蕴含 (a)，并完成了引理的证明。□

引理 10. 设 $\alpha > -1$，且 $T : A^2_\alpha \to A^2_\alpha$ 是一个有界线性算子。若 T 的值域包含于某个 $\gamma < \alpha$ 的 A^2_γ 中，则对所有 $p > 2/(\alpha - \gamma)$，T 都属于 Schatten 类 S_p。

证明。众所周知，若 $\gamma < \alpha$，则 $A^2_\gamma \subset A^2_\alpha$，且包含映射 $i : A^2_\gamma \to A^2_\alpha$ 有界。若 T 将 A^2_α 映射到 A^2_γ，那么根据闭图定理，存在常数 $C > 0$，使得对所有 $f \in A^2_\alpha$，都有 $\|Tf\|_{A^2_\gamma} \le C\|f\|_{A^2_\alpha}$；也就是说，可以将 T 视为从 A^2_α 到 A^2_γ 的有界线性算子。于是可以写作 $T = iT$，且 $T^*T = T^*(i^*i)T$。

算子 $i^*i : A^2_\gamma \to A^2_\gamma$ 是正的。相对于第 2 节中的单项式标准正交基 $\{e_n = c_n z^n\}$ A^2_γ，算子 i^*i 是对角的，其对应特征值为

$$\langle i^*ie_n, e_n\rangle_{A^2_\gamma} = c_n^2\langle z^n, z^n\rangle_{A^2_\alpha} = \frac{\Gamma(n+2+\gamma)}{n!\,\Gamma(2+\gamma)}\,\frac{n!\,\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \sim \frac{1}{(n+1)^{\alpha-\gamma}}$$

当 $n \to \infty$ 时。这说明 i^*i 属于 A^2_γ 的 Schatten 类 S_p，对所有满足 $p(\alpha - \gamma) > 1$ 的 p 都成立。因此，只要 $p > 2/(\alpha - \gamma)$，T 就属于 A^2_α 的 Schatten 类 S_p。□

请注意，即使参数 α 和 γ 小于 -1，上述结果仍然成立，尽管证明需要作相应修改。细节从略。接下来，我们将在以下两个定理中证明本节的主要结果。

回忆一下，

$$D^\alpha_\varphi = \left(I - T_\varphi T^*_\varphi\right)^{1/2}, \qquad D^\alpha_{\overline{\varphi}} = \left(I - T^*_\varphi T_\varphi\right)^{1/2}$$

它们是缺陷算子，并且

$$E^\alpha_\varphi = I - T_\varphi T^*_\varphi, \qquad E^\alpha_{\overline{\varphi}} = I - T^*_\varphi T_\varphi.$$

定理 11. 假设 $\alpha > -1$ 和 $\varphi \in H^\infty_1$。则以下条件等价。

(a) 缺陷算子 D^α_φ 在 A^2_α 上是紧的。(b) 函数 φ 是有限 Blaschke 乘积。(c) 空间 $H^\alpha(\varphi)$ 等于 $A^2_{\alpha-1}$。(d) 空间 $H^\alpha(\varphi)$ 包含于 $A^2_{\alpha-1}$。

证明。为证明 (a) 蕴含 (b)，我们考虑归一化的再生核

$$k_a(z) = \frac{K_a(z)}{\|K_a\|} = \frac{K(z,a)}{\sqrt{K(a,a)}} = \frac{(1-|a|^2)^{(2+\alpha)/2}}{(1-z\overline{a})^{2+\alpha}}$$

对于 A^2_α。显然，$k_a \to 0$ 在 A^2_α 中弱收敛于 $|a| \to 1^-$。若 D^α_φ 是紧的，则 E^α_φ也是紧的，这意味着 $\langle E^\alpha_\varphi k_a, k_a\rangle \to 0$ 收敛于 $|a| \to 1^-$。它

显然，$T_\varphi^* k_a = \varphi(a)$ 收敛于 $\overline{k_a}$，因此我们有

$$\langle E_\varphi^\alpha k_a, k_a\rangle = \langle (I - T_\varphi T_\varphi^*)k_a, k_a\rangle = 1 - \langle T_\varphi^* k_a, T_\varphi^* k_z\rangle = 1 - |\varphi(a)|^2. \quad (10)$$

因此，D_φ^α 的紧性意味着 $1 - |\varphi(a)|^2 \to 0$ 当 $|a| \to 1^-$，根据引理 9，这表明 φ 是一个有限 Blaschke 乘积。这就证明了 (a) 推出 (b)。

引理 8 表明 (b) 推出 (c)。(c) 推出 (d) 显然成立。由引理 10 可知 (d) 推出 (a)。定理得证。□

定理 12. 设 $\alpha > -1$ 和 $\varphi \in H_1^\infty$。则以下条件等价。

(a) 缺陷算子 $D_{\overline{\varphi}}^\alpha$ 在 A_α^2 上是紧算子。(b) 函数 φ 是有限 Blaschke 乘积。(c) 空间 $H^\alpha(\varphi)$ 等于 $A_{\alpha-1}^2$。(d) 空间 $H^\alpha(\varphi)$ 包含于 $A_{\alpha-1}^2$。

证明。首先假设条件 (a) 成立。将 $D_{\overline{\varphi}}^\alpha$ 平方，可知 Toeplitz 算子 $T_{1-|\varphi|^2}$（其符号非负）在 A_α^2 上是紧的。由 [22] 的推论 7.9 可知，对于任意正数 $r > 0$，有

$$\lim_{|a|\to 1^-} \frac{1}{A_\alpha(D(a,r))} \int_{D(a,r)} (1 - |\varphi(z)|^2)\, dA_\alpha(z) = 0,$$

其中，$D(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \beta(z, a) < r\}$ 是以 a 为中心、半径为 r 的 Bergman 度量球，而 $A_\alpha(D(a, r))$ 是 $D(a, r)$ 的 dA_α 测度。等价地，

$$\lim_{|a|\to 1^-} \frac{1}{A_\alpha(D(a,r))} \int_{D(a,r)} |\varphi(z)|^2\, dA_\alpha(z) = 1. \quad (11)$$

我们断言这意味着 $|\varphi(z)|^2 \to 1$ 一致地趋于 $|z| \to 1^-$。事实上，若此结论不成立，则存在常数 $\sigma \in (0, 1)$ 和一个序列 $\{a_n\}$ in $\mathbb{D}$，使得 $|a_n| \to 1$ 当 $n \to \infty$ 时成立，并且对所有 $n \geq 1$，都有 $|\varphi(a_n)| < \sigma$。

若 $z \in D(a_n, r)$，则由 [22],的定理 5.5 可知

$$|\varphi(z)| \leq |\varphi(z) - \varphi(a_n)| + |\varphi(a_n)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \beta(z, a_n) + \sigma < \|\varphi\|_{\mathcal{B}} r + \sigma,$$

其中

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|\varphi'(z)|$$

φ 的 Bloch 半范数（请回忆，H^∞ 中的每个函数都属于 Bloch 空间）。如果我们取一个充分小的半径 r，使得常数 $\delta = \|\varphi\|_{\mathcal{B}} r + \sigma < 1$，那么

$$\frac{1}{A_\alpha(D(a_n,r))} \int_{D(a_n,r)} |\varphi(z)|^2\, dA_\alpha(z) \leq \delta^2 < 1$$

对所有 n ≥ 1都成立。这与（11）矛盾。

因此，我们必须有 $|\varphi(z)|^2 \to 1$ 一致成立，当 $|z| \to 1^-$ 时。由引理 9 可知，φ 是一个有限 Blaschke 乘积。这证明了 (a) 蕴含 (b)。

由引理 8 可知，(b) 蕴含 (c)。(c) 蕴含 (d) 显然。(d) 蕴含 (a) 则由引理 10 得出。□

由上述定理的证明可知，对于 $\alpha > -1$、$k > 0$ 和 $\varphi \in H^\infty_1$，Toeplitz 算子 $T_{(1-|\varphi|^2)^k}$ 在 A^2_α 上是紧的，当且仅当φ 是一个有限 Blaschke 乘积。

5. The range of $I - T_\varphi T_\varphi^*$ and $I - T_\varphi^* T_\varphi$

本节研究算子 E^α_φ 和 $E^\alpha_{\overline{\varphi}}$ 的值域。特殊情形 $\alpha = 0$ 已在 [21]中讨论过。显然，D^α_φ 在 A^2_α 上紧，当且仅当 E^α_φ 在 A^2_α上紧。同样，$D^\alpha_{\overline{\varphi}}$ 在 A^2_α 上紧，当且仅当 $E^\alpha_{\overline{\varphi}}$ 在 A^2_α上紧。

命题 13. 设 $\alpha > -1$ 和 φ 是有限 Blaschke 乘积。则

$$A^2_{\alpha-1} = \left\{ f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}\, g(w)\, dA_\alpha(w) : g \in A^2_{\alpha+1} \right\} \tag{12}$$

$$= \left\{ f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}\, g(w)\, dA_\alpha(w) : g \in L^2(\mathbb{D}, dA_{\alpha+1}) \right\}. \tag{13}$$

证明。令

$$dA_{\varphi,\alpha}(z) = (1-|\varphi(z)|^2)\, dA_\alpha(z)$$

并令 $A^2_{\varphi,\alpha}$ 表示 $L^2(\mathbb{D}, dA_{\varphi,\alpha})$ 中解析函数构成的空间。由引理 9 可知

$$L^2(\mathbb{D}, dA_{\varphi,\alpha}) = L^2(\mathbb{D}, dA_{\alpha+1}), \qquad A^2_{\varphi,\alpha} = A^2_{\alpha+1},$$

其范数等价。考虑算子 $S_\varphi : A^2_{\varphi,\alpha} \to A^2_\alpha$，定义如下：

$$S_\varphi f(z) = P_\alpha[(1-|\varphi|^2)f](z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}\, f(w)\, dA_\alpha(w), \tag{14}$$

其中 $P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to A^2_\alpha$ 是正交投影。显然，S_φ就是将算子 $E^\alpha_{\overline{\varphi}}$ 的定义域扩展到更大的空间 $A^2_{\varphi,\alpha}$后得到的算子。

现在，第一个所需等式 (12) 可逐字逐句地由 [20], 中命题 3.5 的证明推出，再结合上一节中的事实 $H^\infty(\varphi) = A^2_{\alpha-1}$。第二个等式 (13) 则可通过同样的论证得到，只需将上面的算子 S_φ 替换为其延拓 $S_\varphi : L^2(\mathbb{D}, dA_{\varphi,\alpha}) \to A^2_\alpha$，后者仍由 (14) 定义。常规的细节留给有兴趣的读者。

□

引理 14. 如果 $\alpha > -1$ 且 φ 是有限 Blaschke 乘积，那么

$$E_{\varphi}^{\alpha}(A_{\alpha}^2) = E_{\overline{\varphi}}^{\alpha}(A_{\alpha}^2) = A_{\alpha-2}^2.$$

证明。作为作用于 A_{α}^2 上的 Toeplitz 算子，我们可以写成

$$E_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} f(w)\, dA_{\alpha}(w), \qquad f \in A_{\alpha}^2.$$

由此可得

$$(E_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f)'(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\Phi(w)}{(1-z\overline{w})^{3+\alpha}} f(w)\, dA_{\alpha+1}(w) = P_{\alpha+1}(\Phi f)(z),$$

其中，$P_{\alpha+1} : L^2(\mathbb{D}, dA_{\alpha+1}) \to A_{\alpha+1}^2$ 是正交投影，并且

$$\Phi(w) = \frac{(\alpha+1)\overline{w}(1-|\varphi(w)|^2)}{1-|w|^2}.$$

根据引理 9，$\Phi \in L^{\infty}(\mathbb{D})$。由 [22] 的定理 3.11 可知，$P_{\alpha+1}$ 将 $L^2(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$ 有界地映到 A_{α}^2。因此，$f \in A_{\alpha}^2$ 蕴含 $(E_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f)' \in A_{\alpha}^2$，这显然等价于 $E_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f \in A_{\alpha-2}^2$。这证明了 $E_{\overline{\varphi}}^{\alpha}$ 将 A_{α}^2 映入 $A_{\alpha-2}^2$。

为了证明映射 $E_{\overline{\varphi}}^{\alpha} : A_{\alpha}^2 \to A_{\alpha-2}^2$ 是满射，我们将普通导数 $(E_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f)'$ 换成一个特定的分数阶径向微分算子 R ($= R^{2+\alpha,\,1}$ 使用 [19] 中的记号)，其阶数为 1：

$$RE_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{3+\alpha}} f(w)\, dA_{\alpha}(w)$$

仍然有：$E_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f \in A_{\alpha-2}^2$ 当且仅当 $RE_{\overline{\varphi}}^{\alpha} f \in A_{\alpha}^2$。参见 [19]。

任取函数 $g \in A_{\alpha-2}^2$。则函数 Rg 属于 A_{α}^2。由命题 13 可知，将 (12) 和 (13) 中的 α 替换为 $\alpha+1$，存在函数 $h \in L^2(\mathbb{D}, dA_{\alpha+2})$，使得

$$Rg(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{3+\alpha}} h(w)\, dA_{\alpha+1}(w).$$

对等式两边应用 R 的逆算子，得到

$$g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} h(w)\, dA_{\alpha+1}(w).$$

令 $\widetilde{h}(w) = (1-|w|^2)h(w)$。则 $\widetilde{h} \in L^2(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$，且

$$g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \widetilde{h}(w)\, dA_{\alpha}(w).$$

再次根据命题 13，存在一个函数 $f \in A^2_\alpha$，使得

$$g = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\varphi(w)|^2}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} f(w)\, dA_\alpha(w),$$

或 $g = E^\alpha_{\overline{\varphi}} f$。因此我们已证明 $E^\alpha_{\overline{\varphi}}(A^2_\alpha) = A^2_{\alpha-2}$。

接下来我们证明 $E^\alpha_\varphi(A^2_\alpha) = A^2_{\alpha-2}$。注意，$T_\varphi$ 是一个 Fredholm算子。因此φA^2_α 在 A^2_α中是闭的，$\ker(T^*_\varphi) = A^2_\alpha \ominus \varphi A^2_\alpha$，且 $A^2_\alpha = (A^2_\alpha \ominus \varphi A^2_\alpha) \oplus \varphi A^2_\alpha$。由于

$$(I - T_\varphi T^*_\varphi)\varphi f = \varphi(I - T^*_\varphi T_\varphi) f, \quad f \in A^2_\alpha,$$

由此可得

$$E^\alpha_\varphi(A^2_\alpha) = (A^2_\alpha \ominus \varphi A^2_\alpha) \oplus \varphi E^\alpha_{\overline{\varphi}}(A^2_\alpha) = (A^2_\alpha \ominus \varphi A^2_\alpha) \oplus \varphi A^2_{\alpha-2}.$$

由于 $A^2_\alpha \ominus \varphi A^2_\alpha$ 由 A^2_α中的再生核或再生核的导数组成，因此我们有 $A^2_\alpha \ominus \varphi A^2_\alpha \subseteq A^2_{\alpha-2}$。此外

$$\dim(A^2_\alpha \ominus \varphi A^2_\alpha) = \dim(A^2_{\alpha-2} \ominus \varphi A^2_{\alpha-2}).$$

因此我们得到

$$E^\alpha_\varphi(A^2_\alpha) = (A^2_{\alpha-2} \ominus \varphi A^2_{\alpha-2}) + \varphi A^2_{\alpha-2} = A^2_{\alpha-2},$$

从而完成了该引理的证明。 □

现在我们可以证明本节的主要结果，即接下来的两个定理。

定理 15。设 $\alpha > -1$ 和 $\varphi \in H^\infty_1$。则以下条件等价。

(a) 算子 E^α_φ 在 A^2_α上是紧的。(b) 函数 φ 是有限 Blaschke 乘积。(c) E^α_φ 的值域等于 $A^2_{\alpha-2}$。(d) E^α_φ 的值域包含于 $A^2_{\alpha-2}$。

证明。由于 $E^\alpha_\varphi = (D^\alpha_\varphi)^2$, , 算子 E^α_φ 是紧的当且仅当 D^α_φ 是紧的。因此，(a) 与 (b) 等价可由定理 11 得出。

引理 14 表明 (b) 蕴含 (c)。(c) 蕴含 (d) 显然。最后，(d) 蕴含 (a) 可由引理 10 得出。□

定理 16。设 $\alpha > -1$ 和 $\varphi \in H^\infty_1$。那么下列条件等价。

(a) 算子 $E^\alpha_{\overline{\varphi}}$ 在 A^2_α上是紧的。(b) 函数 φ 是有限 Blaschke 乘积。(c) $E^\alpha_{\overline{\varphi}}$ 的值域等于 $A^2_{\alpha-2}$。(d) $E^\alpha_{\overline{\varphi}}$ 的值域包含于 $A^2_{\alpha-2}$。

证明。其证明与定理 15 的证明类似。 □

最后，我们指出，本节和上一节的主要结果不能推广到 Hardy 空间 H^2（情形 $\alpha = -1$）。例如，在这种情形下，若 $\varphi(z) = z$，则 $I - T_{\overline{\varphi}}T_{\varphi} = 0$，且 $I - T_{\varphi}T_{\overline{\varphi}}$ 是一个秩一算子。更一般地，若 φ 是任意内函数，则 $I - T_{\overline{\varphi}}T_{\varphi} = 0$。

参考文献

[1] A. Abkar 和 B. Jafarzadeh，《单位圆盘中的加权子 Bergman 希尔伯特空间》，Czechoslovak Math. J. 60 (2010), 435-443.[2] J. Agler 和 J.E. McCarthy，《完全 Nevanlinna-Pick 核》，J. Funct. Anal. 175 (2000), 111-124.[3] J. Agler 和 J.E. McCarthy，《Pick 插值与希尔伯特函数空间》，数学研究生丛书第 44 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002.[4] A. Aleman、M. Hartz、J.E. McCarthy 和 S. Richter，《具有完全 Pick 性质的空间中的 Smirnov 类》，J. Lond. Math. Soc. (2) 96 (2017), 228-242.[5] A. Aleman、M. Hartz、J.E. McCarthy 和 S. Richter，《由完全 Nevanlinna-Pick 因子诱导的因子分解》，Adv. Math. 335 (2018), 372-404.[6] A. Aleman、M. Hartz、J.E. McCarthy 和 S. Richter，《具有完全 Pick 性质的空间中的插值序列》，IMRN 12 (2019), 3832-3854.[7] A. Aleman、M. Hartz、J.E. McCarthy 和 S. Richter，《完全 Pick 空间的弱乘积》，Indiana Univ. Math. J. 70 (2021), 325-352.[8] C. Chu，《子 Bergman 希尔伯特空间中多项式的稠密性》，J. Math. Anal. Appl. 467 (2018), 699-703.[9] C. Chu，《收缩包含于单位圆盘上加权 Bergman 空间中的希尔伯特空间》，J. Math. Anal. Appl. 472 (2019), 386-394.[10] C. Chu，《哪些 de Branges-Rovnyak 空间具有完全 Nevanlinna-Pick 性质？》，J. Funct. Anal. 279 (2020), no. 6, 108608, 15 pp.[11] L. de Branges，《Bieberbach 猜想的一个证明》，Acta Math. 154 (1985), 137-152.[12] E. Fricain 和 J. Mashreghi，《$\mathcal{H}(b)$ 空间理论》，第 1、2 卷，新数学专著第 20、21 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016.[13] C. Gu、I. S. Hwang、W.Y Lee 和 J. Park，《高阶 de Branges-Rovnyak 空间与子 Bergman 空间》，预印本.[14] S. Luo、C. Gu 和 S. Richter，《高阶局部 Dirichlet 积分与 de Branges-Rovnyak 空间》，Adv. Math. 385 (2021), 论文编号 107748，共 47 页.[15] V.I. Paulsen 和 M. Raghupathi，《再生核希尔伯特空间理论导论》，剑桥高等数学研究丛书第 152 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016.[16] D. Sarason，《单位圆盘中的子 Hardy 希尔伯特空间》，约翰·威立父子出版公司，纽约，1994.[17] S. Sultanic，《子 Bergman 希尔伯特空间》，J. Math. Anal. Appl. 324 (2006), 639-649.[18] F. Symesak，《$\mathbb{C}^n$单位球中的子 Bergman 空间》，Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 12, 4405-4411.[19] R. Zhao 和 K. Zhu，《$\mathbb{C}^n$ 单位球中的 Bergman 空间理论》，Mem. Soc. Math. France 115 (2008)。

[20] K. Zhu, 《单位圆盘上的子 Bergman 希尔伯特空间》, Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), 165-176.[21] K. Zhu, 《单位圆盘中的子 Bergman 希尔伯特空间 II》, J. Funct. Anal. 202 (2003), 327-341.[22] K. Zhu, 《函数空间中的算子理论》, 数学调查与专著第 138 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2007。罗帅兵, 湖南大学数学学院, 中国湖南长沙 410082 电子邮箱: sluo@hnu.edu.cn 朱克和, 纽约州立大学奥尔巴尼分校数学与统计学系, 美国纽约州奥尔巴尼 12222 电子邮箱: kzhu@albany.edu