牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子与天体力学——结果总结

Richard Durran、Andrew Neate、Aubrey Truman

数学系、计算铸造厂，斯旺西大学 Bay 校区，Fabian Way，斯旺西，SA1 8EN，英国

电子邮箱：a.truman@swansea.ac.uk

arXiv:2302.01992v1 [gr-qc] 3 Feb 2023

摘要。

我们讨论开普勒问题中牛顿量子引力半经典渐近行为的主导项。对于处于恒星或大质量行星引力场中的暗物质、冰或尘埃粒子，考察相关薛定谔波函数的半经典渐近方程，尤其是 Lena、Delande 和 Gay 的原子椭圆态，可以解释行星或环系统为何能够快速形成。我们在定理 3.2 中总结了这方面的结果。我们将这一处理方法扩展到二维和三维的各向同性谐振子势，并求得显式解，这些结果对特洛伊小行星有重要应用。关于限制性三体问题的更详细结果将在后续论文中发表。此外，在二维情况下，我们求得了牛顿理论中相应旋进轨道的显式解，并以此解释行星近日点进动。我们利用柯西特征曲线给出求解方程的一般隐式方法，并提出解存在唯一性的充要条件。借助此方法，我们在本框架下求解了二维幂律问题。我们的方法有助于洞察经典轨道邻域中的半经典轨道行为，揭示复运动常数如何从 SO(4) 对称群中涌现，以及不同中心势下圆形螺旋所需的粒子密度。这些常数在旋进轨道中发挥着重要作用。此外，它们以及上述密度可能会在行星环系统的早期演化过程中产生可观测效应。我们认为，与经典开普勒椭圆轨道相关的量子螺旋，可以解释星系如何从螺旋形演变为椭圆形，其中心有一颗中子星或一个黑洞。在此方面，我们简要介绍一些关于量子曲率、挠率以及反重力和螺旋分裂的最新结果；这些都是检验我们观点的关键。

1. 引言

在我们之前的论文中，我们已经看到，在薛定谔量子力学中，若定态波函数为 $\psi \sim \exp\left(\frac{R+iS}{\epsilon^2}\right)$ as $\epsilon^2 = \hbar \sim 0$，对于势 V，一则实值的 R 和 S 必须满足，

$$\boldsymbol{\nabla} R.\boldsymbol{\nabla} S = 0, \qquad 2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla} S|^2 - |\boldsymbol{\nabla} R|^2) + V = E \text{ and } S\rceil_{C_0} = S_0, \qquad (*)$$

其中 C_0 是对应的经典轨道， $\boldsymbol{\nabla} R]_{C_0} = \mathbf{0}$ 和 S_0 是对应的哈密顿-雅可比函数， E 为能量。

这些半经典方程及其求解方法将是本文关注的重点。在开普勒-库仑问题中，这些方程给出了牛顿量子引力半经典渐近行为的主导项，因此可用于模拟太阳系早期历史中冰、尘埃或暗物质粒子的行为。特别是，它们揭示了行星和环系统能够以多快的速度形成。（参考文献： [1],[5],[6],[7],[8],[15],[16],[17]）。此外，我们认为，星系演化在一定程度上受椭圆轨道开普勒问题的初量子化以及我们的方程所支配。我们将在第（2）节和第（3）节概述一些主要思想和结果。

尽管这些方程具有非线性，它们仍允许解的线性叠加 R 和 S。在我们的处理中，对数密度 $\binom{2R}{\epsilon^2}$ 起驱动作用，叠加两个态会导致相应弱相互作用大质量粒子星云中的螺旋结构分裂（见第 9、48 页）。

在这种受约束哈密顿系统中，轨道由 $t \to \mathbf{X}_t^0$， $t \in \mathbb{R}_+$ 给出，其中 为时间， $\mathbf{X}_t^0 \in \mathbb{R}^d$ 是 d 维空间，其中

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_t^0 = (\boldsymbol{\nabla} S + \boldsymbol{\nabla} R)(\mathbf{X}_t^0).$$

由于

$$\frac{d}{dt}R(\mathbf{X}_t^0) = (\boldsymbol{\nabla} S + \boldsymbol{\nabla} R)(\mathbf{X}_t^0).\boldsymbol{\nabla} R(\mathbf{X}_t^0) = |\boldsymbol{\nabla} R|^2(\mathbf{X}_t^0) \geq 0,$$

R 随着沿轨道运动，随时间单调递增，因此 $R(\mathbf{X}_t^0) \nearrow R_{\max}$，即 R 的最大值。如果如你所预期，这个最大值 R 是在 C_0 上取得的，也就是经典轨道，那么在无限时间极限下，轨道将收敛到 C_0 上的经典运动；这种收敛源自玻姆势 $-|\boldsymbol{\nabla} R|^2$，因为

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla} S|^2 + |\boldsymbol{\nabla} R|^2) + V - |\boldsymbol{\nabla} R|^2 = E.$$

Lena、Delande和Gay的原子椭圆态 ψ 是一个绝佳的例子。ψ 局域于经典开普勒椭圆上（力中心位于一个焦点），并使相关的 SO(4)角动量不确定关系达到最小值。（参考文献[5],[9],[12],[15],[17]）。在这种情况下，经典开普勒椭圆为 C_0，而在无限时间极限下，相应的轨道遵循开普勒定律，其势为$V = -\dfrac{\mu}{r}$， μ 引力质量位于焦点 O，维数 d 为 3。因此，在这种牛顿引力的半经典量子力学中，如果我们将由制备状态完全相同的冰、尘埃粒子或暗物质弱相互作用大质量粒子组成的云团作为薛¨定格集合，就会得到一个简单的螺旋

用于解释行星或环系统形成的模型。此外，我们可以通过估算 t（ s 的下确界）来了解形成一个环需要多长时间，使得

$$R_{\max} - R_0 = \int_0^s |\boldsymbol{\nabla} R|^2(\mathbf{X}_u^0) du.$$

在这样的模型中，例如，气态巨行星（如木星）可能在数百万年内形成，这符合当前行星形成理论的要求，这是合理的。列维-奇维塔变换可快速应用于此：$(x+iy) \to (x+iy)^2,$，再加上从物理时间 t 到虚拟时间 s的时间变换，便得到与椭圆上的运动相对应的椭圆轨道（力中心位于椭圆中心，而非焦点），其势为 $V = \omega^2 r^2/2$。如果物质整体处于稳定的、由引力作用的粒子构成的均匀云中，这样的势便与之相关。下一节将给出其详细内容（这都是平方反比力定律所带来的奇妙结果）。（参考文献 [12]）。在此背景下，我们研究特洛伊小行星的形成问题，揭示其与各向同性振子的联系，并进一步发现线性化限制性三体问题中两个新的运动常数。

有了这些例子作为基础，本文接下来将尝试扩展可使我们的方程得到解析解的势的类别。这里我们重点讨论二维情形，针对 $V_0 = -\dfrac{\mu}{r}$，以及针对 $V = V_0 + \dfrac{C}{r^2}$，$r^2 = x^2 + y^2$。在后一种情况下，我们通过考察某些复运动常数，重新发现了牛顿旋转轨道。作为应用，我们讨论广义相对论势中的水星近日点进动，结果与观测相符。这是第（4）节的内容。

在第（5）节中，我们直接运用柯西特征线法来处理方程。作为一个说明性例子，我们求解二维幂律势的方程，$-\kappa r^p$，p 表示幂次，以及二维中的广义 LCKS 变换。（参见 [14]。）更重要的是，我们详细给出了开普勒运动在 C_0 上经典轨道邻域内的一系列结果。复运动常数再次自然地出现，与牛顿旋转轨道的方法相呼应。通过将偏微分方程转化为常微分方程，我们给出了解的唯一性和存在性的充要条件。

为确保内容完整，并帮助不太熟悉天体力学的读者理解，我们在此附上一张简单示意图（图 1），说明为什么对于经典轨迹 $t \to \mathbf{X}_t^0 = \mathbf{r}(t)$，在相应偏近点角为 v 的经典开普勒椭圆上，

$$\left(\frac{d^3}{dv^3} + \frac{d}{dv}\right)\mathbf{r} = 0,$$

其中 v 满足物理时间 t的开普勒方程，

$$v - e\sin v = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t,$$

e 为轨道偏心率， a 为轨道的半长轴， μ 为力中心处的引力质量。令人惊讶的是，这一结果无需像列维-奇维塔变换所要求的那样改变因变量坐标，只需改变时间。网上有几位作者将这一结果及相关结果称为开普勒问题的深层谜团。我们的示意图和简单的三角恒等式揭开了这个谜团。这里， t 是从近心点（即轨道最接近力中心的点）起算的物理时间， $\mathbf{i} = \hat{\mathbf{r}}(0)$， $\mathbf{j} = \hat{\mathbf{r}}(0)$，且如果 $\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathrm{SP}}$，

$$\mathbf{r} = (a\cos v - ae)\mathbf{i} + \sqrt{1-e^2}a\sin v\mathbf{j}.$$

令 $\mathbf{R} = \mathbf{r} + ae\mathbf{i}$ 且 $(') = \dfrac{d}{dv}$， 可得

$$\mathbf{R}'' = -\mathbf{R} \quad \text{and so} \quad \mathbf{r}''' + \mathbf{r}' = 0.$$

由于 $\mathbf{R}(v) = \mathbf{R}(0)\cos v + \mathbf{R}'(0)\sin v$，因此得到

$$\mathbf{r}(v) = (\mathbf{r}(0) + ae\mathbf{i})\cos v + \mathbf{r}'(0)\sin v\mathbf{j} - ae\mathbf{i},$$

对于 $v \geq 0$。这些结果对于理解我们的开普勒坐标至关重要，其本身也具有重要意义。

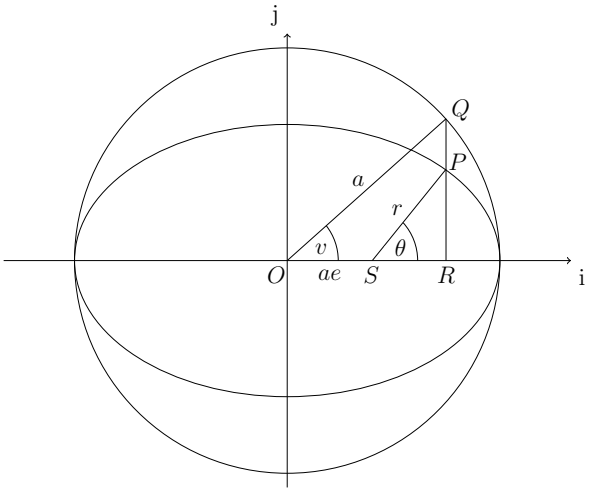


图 1。

$$r = a(1 - e\cos v), \qquad \tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}, \qquad PR = \sqrt{1-e^2}QR.$$

2. 牛顿引力与天体力学的半经典渐近

2.1. 从原子椭圆态到天文椭圆态

在本节中，我们使用天体力学中的一些标准工具，以帮助揭示源自开普勒问题的 SO(4) 对称群的晦涩代数表达式所蕴含的一些奥秘。我们的基本要素是 Lena、Delande和Gay 的优美定态，即 $\psi_{n,\ e}$**(r)**，原子椭圆态，

$$\psi_{n,e}(\mathbf{r}) = C\exp\left(-\frac{n\mu r}{\lambda^2}\right) L_{n-1}(n\nu(\mathbf{r})),$$

$L_n,\ n = 0,$ **1**，**2 .....**，它是一个拉盖尔多项式，$\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$**,** $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$**,**

$$\nu(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{\lambda^2}\left(r - \frac{x}{e} - \frac{iy\sqrt{1-e^2}}{e}\right).$$

这里，我们的椭圆 $\mathcal{E}_K$ 的偏心率为 e**,** $0 < e < 1$，半长轴为 $a = \lambda^2$，半通径为 $\ell = a(1-e^2)$，位于平面 $z = 0$内，且半长轴平行于 **x**轴，其极坐标方程为:

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta, \qquad \ell = \frac{h^2}{\mu}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2h^2E}{\mu^2}}, \qquad \text{the constants}$$

$E < 0$ 为能量，h 为绕 **z** 轴的角动量，μ 为位于椭圆 $\mathcal{E}_K$焦点处的引力质量。最重要的是，若 H表示量子力学哈密顿量，$H = 2^{-1}|\mathbf{P}|^2 - |\mu\mathbf{Q}|$，则

$$H\psi_{n,e} = E_n\psi_{n,e}, \qquad E_n = -\frac{\mu^2}{2\hbar^2n^2}, \qquad \lambda = n\hbar, \qquad \hbar = \epsilon^2.$$

我们定义 $\mathbf{Z}_{n,e}$**(r)** $= i^{-}\hbar\nabla\ln\psi_{n,e} \to (\nabla S - i\nabla R)$**(r)** $\overset{\text{def}}{=} \mathbf{Z}$**(r)**。对于固定的 λ，我们取玻尔对应极限 $n \nearrow \infty$**,** $\epsilon \searrow 0$，即能量 $E < 0$ 固定。（参考文献 [2],[4],[5],[17],[23]）。在此前的一篇论文中，我们用笛卡尔坐标证明了

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \frac{i\mu}{2\lambda}(1+\gamma)\frac{r}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mu}{2\lambda e}(1-\gamma)\left(i,\ -\sqrt{1-e^2}, 0\right),$$

其中

$$\gamma(\mathbf{r}) = 1 - \lim_{n\nearrow\infty,\ \epsilon\searrow 0}\frac{L'_{n-1}(n\nu(\mathbf{r}))}{L_n(n\nu(\mathbf{r}))} = \sqrt{1 - \frac{4}{\nu(\mathbf{r})}}.$$

牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子与天体力学——结果总结 6 这给出了半经典态 ψ_{sc},

$$\psi_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) = \nu(\mathbf{r})^{\frac{\lambda}{\hbar}}(1+\gamma(\mathbf{r}))^{\frac{2\lambda}{\hbar}}\exp\left(-\frac{\mu}{2\lambda\hbar}|\mathbf{r}| + \frac{\lambda}{2\hbar}(1-\gamma(\mathbf{r}))\nu(\mathbf{r})\right),$$

因此，除一个由拉普拉斯原理和通常的归一化确定的加法常数外,

$$(R+iS)(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{\lambda}r + \frac{\lambda\nu(\mathbf{r})}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{\nu(\mathbf{r})}}\right) - \lambda\ln\nu(\mathbf{r}) - 2\lambda\ln\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{\nu(\mathbf{r})}}\right),$$

ν above.

（参考文献 [5],[6],[7],[8],[15],[16],[17]）。

很难看出最后一个方程与上文详述的开普勒椭圆有何联系。关键在于椭圆上一点 P 的偏近点角 v。

定义

对于长轴平行于 x轴的椭圆 $\mathcal{E}$，椭圆 $\mathcal{E}$ 上一点 P 的偏近点角 v，是从 $\mathcal{E}$ 的中心测得的极角；该角对应于 $\mathcal{E}$外接圆上的点 Q，其中 Q 是 P 在平行投影到 y轴下的像；在 $\mathcal{E}$ 上亦即，对于原点位于右焦点的笛卡尔坐标（x, y），

$$x = a(\cos v - e), \qquad y = a\sqrt{1-e^2}\sin v, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} = a(1-e\cos v),$$

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2},$$

（r, θ）是从焦点量起的 $\mathcal{E}$ 上 P 的极坐标。

2.2. 关于 $\mathcal{E}_K$ 的重要公式

$$\nu = -\frac{(1-e\mathrm{e}^{iv})^2}{e\mathrm{e}^{iv}}, \qquad \gamma = \sqrt{1-\frac{4}{\nu}} = \frac{(1+e\mathrm{e}^{iv})}{(1-e\mathrm{e}^{iv})} = \alpha+i\beta;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

where $1-\gamma = -\dfrac{2e\mathrm{e}^{iv}}{(1-e\mathrm{e}^{iv})}$ and $\dfrac{\nu}{2}(1-\gamma) = (1-e\mathrm{e}^{iv})$.

这给出了我们椭圆上的 $\mathcal{E}_K$:

$$R+iS = -\frac{\mu}{\lambda}r + \lambda(1-e\mathrm{e}^{iv}) - 2\lambda\ln 2 - \lambda\ln(-e\mathrm{e}^{iv}).$$

因此在 $\mathcal{E}_K$ 上，由于此处的 $r = a(1 - e\cos\ v)$,

$$R = -\frac{\mu}{\lambda}r + \lambda(1 - e\cos v) - 2\lambda\ln 2 - \lambda\ln e,$$

e 是 $\mathcal{E}_K$ 的偏心率。因此，在加法常数意义下， $\mathcal{E}_K$

$$R = -2\lambda\ln 2 - \lambda\ln e, \qquad S = -\lambda(v + e\sin v),$$

v 是偏近点角。这证明了相应经典轨道上的半经典态的密度函数为常数。

我们将方程（$*$）的证明留作向量代数练习。

备注

事实上，如果 R 在 $\mathcal{E}_K$ 上达到其全局最大值，且 R 的初值为 R（$\mathbf{x}_0$），其中$\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}^0_{t=0}$, 对所有 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$，从 $\mathbf{x}_0$ 到 $\mathcal{E}_K$ 的通过时间 τ（$\mathbf{x}_0, \mathcal{E}_K$），是满足以下条件的时间 s 的最小值

$$R_{\max} - R(\mathbf{x}_0) = \int_0^s |\boldsymbol{\nabla} R|^2(\mathbf{X}^0_u)du.$$

这一结果因奇点 Σ of $(R+iS)$, $\Sigma = \{\nu \in \mathbb{C} : \mathcal{I}\nu = 0, 0 < \mathcal{R}\nu < 4\}$而失效 .

定理2.1. $(R + iS)(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu}{\lambda}r + \lambda\underline{f}(\nu)$，其中

$$f(\nu) = \frac{\nu}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\nu}}\right) - \ln\nu - 2\ln\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\nu}}\right).$$

因此，在复平面上，f有一条割线 $\{\nu \in \mathbb{C} : \mathcal{I}\nu = 0, 0 < \mathcal{R}\nu < 4\} = \Sigma$，跨过这条割线时$\sqrt{\zeta}$, $\zeta = 1 - \frac{}{4}$ 会改变符号。事实上ν

$$f(\nu) = \frac{2}{(1 + \sqrt{\zeta})} - \ln\left(\frac{1 - \sqrt{\zeta}}{1 + \sqrt{\zeta}}\right) - \ln 4.$$

令 $M(\Sigma) = \max_{\mathbf{r}\in\Sigma} R(\boldsymbol{r})$，则上述评述对 $\boldsymbol{x}_0$,有效，只要 $R(\boldsymbol{x}_0) > M(\Sigma)$。

引理 2.2。

$$M(\Sigma) = \lambda\left(2\left(\frac{1 - e}{1 + e}\right) - \ln 4\right).$$

牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子与天体力学——结果总结 8证明。

$$\Sigma = \{\nu = \nu_r + i\nu_i : \nu_i = 0, 0 < \nu_r < 4\}.$$

关于 $0 < \nu_r < 4$、 $y = 0$ 和 $r = \sqrt{x^2 + z^2}$的推导

$$R = -\frac{\mu}{\lambda} r + \frac{\mu}{2\lambda}\left(r - \frac{x}{e}\right) - \lambda \ln 4 = R_0 - \lambda \ln 4,$$

其中 $R_0 = -\frac{\mu}{2\lambda}\left(r - \frac{x}{e}\right)$。 R_0 关于 z 对称，因此不失一般性，我们可以假设 $z > 0$。此外，对于 $z > 0$ ，有 $\frac{\partial R_0}{\partial z} < 0$ ，因此 R_0 在$z = 0$ 时达到最大值，即当 $r = |x|$、 $x < 0$ 和 $0 < \nu_r < 4$ 时，也就是在 $x = -\frac{4\lambda^2 e}{\mu\ 1 + e}$ 处（ ）。在此点处计算 R，即可得到所需结果。

□

定理 2.3. 天文椭圆态的半经典力学，
$\psi \sim exp\ \left(\frac{R+iS}{\hbar}\right)$ 当 $\hbar \sim 0$时，即

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}_t^0 = (\boldsymbol{\nabla} R + \boldsymbol{\nabla} S)(\boldsymbol{X}_t^0),\ \ t \geq 0,$$

定义良好，当且仅当 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{X}_{t=0}^0$ 满足

$$2\lambda\left(\frac{1-e}{1+e}\right) \leq R(\boldsymbol{x}_0) + \lambda \ln 4 \leq -\lambda \ln e,$$

其中， ψ 对应偏心率 e、半长轴 a 和 $\lambda = \sqrt{\mu a}$， μ 为力中心 O 处的引力质量。此外

$$\ddot{\boldsymbol{X}}_t^0 = -\boldsymbol{\nabla} V_{eff}(\boldsymbol{X}_t^0),$$

with

$$V_{eff} = V - |\boldsymbol{\nabla} R|^2, \quad V = -\frac{\mu}{r}.$$

$|\boldsymbol{\nabla} R|^2$ 是由态 ψ产生的一阶量子修正，因此轨道的量子曲率可写为

$$\kappa_q = \pm \frac{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}(V - |\boldsymbol{\nabla} R|^2)}{(|\boldsymbol{\nabla} R|^2 + |\boldsymbol{\nabla} S|^2)},$$

$|\boldsymbol{\nabla} R|^2$ 在经典轨道上为零，$\boldsymbol{n}$ 是$\boldsymbol{X}_t^0$ 处轨道的单位法向量：

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{X}_t^{0''}}{|\boldsymbol{X}_t^{0''}|}$$

$$(') = \frac{d}{ds} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\frac{d}{dt}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} R + \boldsymbol{\nabla} S.$$

（参见参考文献 [28]，了解一般化形式）。

证明。对我们的能量方程取梯度，利用 $\boldsymbol{\nabla}(2^{-1}\mathbf{a}^2) = (\mathbf{a}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times$ 旋度$\mathbf{a}$，其中 $\mathbf{a}$ 是任意向量场。

□

我们的理论不可避免地继承了薛定谔量子力学的一些结构，尤其是 Ed Nelson 在随机力学中的表述（参见参考文献 [18]）。其中最显著的一点是，尽管我们的 R 和 S 方程是非线性的，但我们的解仍存在一种由渐近行为产生的底层线性叠加原理。考虑两个波函数 ϕ_1 和 ϕ_2的叠加最能说明这一点，这两个波函数可能具有不同的能量，并满足我们的方程；也就是说，考虑 $\phi = \phi_1 + \phi_2$，其中

$$\phi_{\mathrm{j}} \sim \exp\left(\frac{R_{\mathrm{j}} + iS_{\mathrm{j}}}{\epsilon^2}\right), \ \mathrm{j} = 1, 2 \ \text{ and } \ \phi \sim \exp\left(\frac{R + iS}{\epsilon^2}\right)$$

其中 $\epsilon^2 = \frac{\hbar}{m} \sim 0$, m 为弱相互作用大质量粒子质量。

按照 Nelson 的方法，很容易证明这个精确公式，

$$2R = \epsilon^2 \ln 2 + (R_1 + R_2) \ln\left[\cosh\left(\frac{R_1 - R_2}{\epsilon^2}\right) + \cos\left(\frac{S_1 - S_2}{\epsilon^2}\right)\right],$$

以及关于 S 的类似公式。令 $\epsilon \sim 0$，我们得到

$$\phi \sim \frac{\rho_1\phi_1 + \rho_2\phi_2}{\rho_1 + \rho_2}, \ \rho_{\mathrm{j}} = \exp\left(\frac{2R_{\mathrm{j}}}{\epsilon^2}\right), \ \mathrm{j} = 1, 2.$$

因此，如果 $R_{\mathrm{M}} = \max(R_1, R_2)$，并且只保留 ϵ 的一阶项，

$$R \sim R_{\mathrm{M}}$$

因此 $\phi = \left(c_1\chi_{R_1>R_2}\phi_1 + c_2\chi_{R_2>R_1}\phi_2\right)$，在归一化后有 $c_{\mathrm{j}} \geq 0$、$c_1^2 + c_2^2 = 1$。当 ϕ_{j} 对应一个天文椭圆态时，$\mathrm{j} = 1, 2$，根据质量守恒，c_{j}^2就是弱相互作用大质量粒子最终落入 j^{th} 环的概率。不言而喻，倾向于

根据 Nelson（参考文献 [19] ——《量子涨落》第 90 页），可知当 $R_{\mathrm{M}} = R_{\mathrm{j}}$ 时，对于上述 M，存在某个 j，

$\boldsymbol{\nabla} R = \boldsymbol{\nabla} R_{\mathrm{M}}$，　$\boldsymbol{\nabla} S = \boldsymbol{\nabla} S_{\mathrm{M}}$ 且 $S = S_{\mathrm{M}}$，由此得到新的解，（$R_{\mathrm{M}} + iS_{\mathrm{M}}$）。

因此，我们的叠加原理其实就是取 R_{j} 中的最大值及其对应的 S_{j}，这正如你在对应极限中所预期的那样。

2.3. 二维开普勒椭圆坐标

平面 $z = 0$ 上椭圆的极坐标方程，其偏心率为 $\tilde{e}$ 、半通径为 $\tilde{\ell}$，焦点位于原点 O，长轴平行于 x轴，可写为

$$\frac{\tilde{\ell}}{r} = 1 + \tilde{e}\cos\theta,$$

可写为

$$\frac{\tilde{\ell}^2}{(1-\tilde{e}^2)} = x^2 + \frac{2\tilde{\ell}\tilde{e}x}{(1-\tilde{e}^2)} + \frac{y^2}{(1-\tilde{e}^2)}$$

i.e.

$$(x + \tilde{a}\tilde{e})^2 + \frac{y^2}{(1-\tilde{e}^2)} = \tilde{a}^2 = \frac{\tilde{\ell}^2}{(1-\tilde{e}^2)^2}.$$

因此，将坐标 v 定义为

$$x + \tilde{a}\tilde{e} = \tilde{a}\cos v, \qquad y = \tilde{a}\sqrt{1-\tilde{e}^2}\sin v$$

并将坐标 u 定义为 $u = \tilde{e}$，若设 $\tilde{a} = \frac{2ae}{(e+u)}$，则可得

$$x = \frac{2ae}{(e+u)}(\cos v - u), \qquad y = \frac{2ae}{(e+u)}\sqrt{1-u^2}\sin v.$$

简单计算可得

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2ae}{(e+u)}(1 - u\cos v).$$

因此，v 是椭圆上点 P 的偏近点角，该椭圆的方程如上，其中 $\tilde{\ell} = \frac{2ae}{(e+u)}(e+u)(1-u^2)$ ~~$\tilde{e} = u$~~.

以下引理与定理 3.2 一起确保了所需的收敛性，即收敛到开普勒椭圆上的经典运动。

引理 2.4.

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial z}=0 \quad \Rightarrow z=0.$$

证明。 利用定理2.1，很容易证明 $\frac{\partial R}{\partial z}=0 \Rightarrow z=0$ or $\alpha=\mathcal{R}\sqrt{1-\frac{4}{\nu}}=-1$。若 $\alpha=-1, \frac{\partial R}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{1}{e}=0$，则产生矛盾，由此即可得出结论。

□

注意。 在开普勒坐标 (u,v) 中，限制 $-e<u<1$ 时，我们假设了$r<2a$，因此 $u=$ 常数等高线是偏心率为 u 的椭圆， $0<u<1$,$v=$ 为该椭圆上的偏近点角。当 $r>2a$ 时，情况会发生变化，因为此处 $u<0$，因此该区域内椭圆的偏心率为 $|u|$，且 $v=\pi$ –为偏近点角。

现在，我们可以用 (u,v) 来重写运动方程： $\ddot{\mathbf{X}}_t^0=(\boldsymbol{\nabla}R+\boldsymbol{\nabla}S)(\mathbf{X}_t^0)$， $\mathbf{X}_t^0=(x,y)$:

$$\dot{u}=b_u(u,v), \qquad \dot{v}=b_v(u,v).$$

我们得到 $c=\cos v$和 $s=\sin v$

$$b_u=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\left(\frac{e+u}{2e}\right)^2\frac{\sqrt{1-u^2}\left(\sqrt{1-u^2}(e+c-s)-\sqrt{1-e^2}(u+c-s)\right)}{(1-uc)((e+u)c+eu+1)},$$

$$b_v=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{(e+u)}{4e^2}\frac{\left(e^2(u+c-s)+2e(1+uc)+u+c+s-\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-e^2}(e+c+s)\right)}{(1-uc)((e+u)c+eu+1)}.$$

注意，在开普勒坐标方程中令 $u=e$ ，我们便得到该问题原有的开普勒椭圆。注意，令 $u=e$ 可得 $b_u=0$ 以及

$$\dot{v}=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{1}{1-e\cos v}$$

即偏近点角的开普勒方程,

$$v-e\sin v=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}t.$$

当 $z=0$ 时，坐标 u 和 v 可使我们简化二维情况下变量 α 和 β在（x,y）中的表达式,

$$\alpha+i\beta=\sqrt{1-\frac{4}{\nu}},\qquad \nu=\frac{\mu}{\lambda^2}\left(r-\frac{x}{e}-\frac{iy\sqrt{1-e^2}}{e}\right),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\alpha=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(er-x-\frac{4\lambda^2e}{\mu}\right)^2+(1-e^2)y^2}{(er-x)^2+(1-e^2)y^2}}+\frac{1}{2}\frac{\left(er-x-\frac{2\lambda^2e}{\mu}\right)^2+(1-e^2)y^2-\frac{4\lambda^4e^2}{\mu^2}}{(er-x)^2+(1-e^2)y^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta=-\frac{2\lambda^2e\sqrt{1-e^2}y}{\alpha\mu((er-x)^2+(1-e^2)y^2)}:$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{(1-u^2)(1-e^2)}}{(1+eu-(e+u)\cos v)},\qquad \beta=-\frac{(e+u)\sin v}{(1+eu-(e+u)\cos v)}.$$

写作 $\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha_1}+\alpha_2)}$，如果我们问 α_1 何时是一个完全平方数，就会发现 α_1 在极坐标方程为 $\bar{\mathcal{E}}_u$ 的椭圆上是一个完全平方数

$$r=\frac{2ae}{(e+u)}(1-u\cos v),\quad -e<u<1,$$

焦点位于原点 O，对于固定的 u，$\mathcal{E}_u$ 的偏心率为 $0\le v\le 2\pi$；当 $u<0$ 时，根据上述限定条件可得偏近点角。因此我们选择 $\tilde{a}=\frac{2ae}{(e+u)}$。 ———

3. Levi-Civita、库斯塔海莫-施蒂费尔（LCKS）变换

3.1. 经典力学中的 *LCKS* 变换

考虑 $\zeta=\zeta(t)\in\mathbb{C}$ 的开普勒问题，其中 t 为物理时间，

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-\mu|\zeta|^{-3}\zeta,\qquad t\ge 0.$$

定义 $w\in\mathbb{C}$ 为 $\zeta=w^2$，并用 $\frac{ds}{dt}=|\zeta(t)|^{-1}$ 定义一个新的时间变量 s。经过简单计算可得能量守恒方程

$$2^{-1}\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|^2-\frac{\mu}{|\zeta|}=E,\qquad E<0$$

这里的一个常数，化简为

$$2^{-1}\left|\frac{dw}{ds}\right|^2-\frac{E}{4}|w|^2=\frac{\mu}{4}$$

并稍微多做一些工作，以得到常数 ω

$$\frac{d^2w(s)}{ds^2}+\omega^2w(s)=0.$$

这是 Levi-Civita 得出的原始结果：能量为 $E'=\frac{\mu}{4}$、圆频率为 $\omega=\sqrt{-\frac{E}{4}}$ 的二维各向同性振子的能量守恒和运动方程。这里我们研究变换 $(x+iy)\to(x+iy)^2$ 或针对 $(x+iy)=re^{i\theta}$, $r\to r^2$, $\theta\to2\theta$ 以及时间变换，$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{dv}{dt}$, v 分别为 $\mathcal{E}_K$ 上的偏近点角、虚时间 s 和物理时间 t （参考文献 [25]）。

引理 3.1. 在 *LCKS* 变换下，焦点位于原点的开普勒椭圆 O

$$\frac{\ell}{r}=1+e\cos\theta,\qquad 0<e<1,\qquad \ell>0,$$

即 $r=a(1-e$余弦 $v)$，变换为中心位于原点的椭圆

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1,\qquad p^2=\frac{\ell}{(1+e)},\qquad q^2=\frac{\ell}{(1-e)}.$$

$$(x,y)=a(\cos v-e,\sqrt{1-e^2}\sin v)\to\left(\sqrt{a(1-e)}\cos\left(\frac{v}{2}\right),\sqrt{a(1+e)}\sin\left(\frac{v}{2}\right)\right).$$

注意：变换后椭圆的长轴平行于 y 轴。

三维中不存在 LCKS 变换；使用四元数时，四维中存在这种变换，但本文讨论的是二维。这里，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $\nu=\frac{\mu}{\lambda^2}\left(r-\frac{x}{e}-\frac{iy\sqrt{1-e^2}}{e}\right)$，针对我们的二维开普勒-库仑问题。我们假定角动量守恒将运动平面固定为$z=0$，其笛卡尔坐标为（x，y）。我们对天文椭圆态 $\psi_{\rm sc}$（对应开普勒椭圆 $\mathcal{E}_K$）进行半经典分析所得的主要结果，其极坐标方程为

偏心率为 e, $0<e<1$，半长轴为 $a=\frac{\lambda^2}{}$，半通径为$\mu\ell=a(1-e^2)$，位于平面 $z=0$ 内，半长轴平行于 x轴，极坐标方程为：

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta,$$

$\ell = a(1-e^2)$, $e = \sqrt{1+\frac{2h^2E}{\mu^2}}$、 $0 < e < 1$、 a 为与x–轴平行的半长轴， e为轨道偏心率， h、 E和 μ分别为通常所指的类弱相互作用大质量粒子单位质量的角动量、能量，以及 μ 在$\mathcal{E}_K$的力中心处的引力质量（ae，0），相对于椭圆原点 O 的中心而言。

定理 3.2。 对于上文定义的开普勒坐标（u、 v），转换为极坐标（r、 θ）： $x = r$余弦 θ、 $y = r$正弦 θ，可得:

$$u = u(r,\theta), \qquad \tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\tan\frac{\theta}{2}.$$

u（r、 θ）是一个简单二次方程的解。

此外，如上文所定义，对于

$$\nu = \frac{\mu}{\lambda^2}\left(r - \frac{x}{e} - \frac{iy\sqrt{1-e^2}}{e}\right), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \alpha + i\beta = \sqrt{1-\frac{4}{\nu}},$$

$$|\boldsymbol{\nabla} R|^2 = \frac{\mu^2(1+e\cos v)(1-eu-\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-e^2})}{2\lambda^2 e^2(1-u\cos v)}.$$

因此， $|\boldsymbol{\nabla} R$（x、 y）$| = 0$ 当且仅当（x、 y）$\in \mathcal{E}_K$，并且正如预期， R（$\boldsymbol{X}_t^0$）$\nearrow R_{max}$，因为 $t \nearrow \infty$保证了只要 R（$\boldsymbol{x}_0$）$> M$（Σ），就能收敛到经典开普勒椭圆。b_u 和 b_v 的公式如上文所给出。

证明。 我们提醒读者，本证明中的简化在很大程度上依赖于列维-奇维塔变换。将这一变换与开普勒坐标的定义（u， v）结合起来，可以推导出 u 满足二次方程,

$$(r\cos\theta + 2ae)u^2 + (er\cos\theta + r)u + (r-2a)e = 0,$$

其中 $a = \frac{\lambda^2}{\mu}$。解这个方程可得 u（r， θ），而 v 的公式则由（u， v）的定义得出。

在二维情况下， $\boldsymbol{\nabla} R$ 由下式给出

$$\boldsymbol{\nabla} R = -\frac{\mu}{2\lambda}\left((1+\alpha)\frac{x}{r} + \frac{(1-\alpha)}{e}, (1+\alpha)\frac{y}{r} + \frac{\beta}{e}\sqrt{1-e^2}\right).$$

经过直接但冗长的代数运算，可得表达式 $|\boldsymbol{\nabla} R|^2$。注意到 $|\boldsymbol{\nabla} R(x,y)| = 0$ 当且仅当 $u = e$， 证明即告完成。

□

3.2. 量子谐振子

接下来需要指出，二维椭圆谐振子的态为

$$\psi_n^{\mathrm{HO}} = \exp\left(-\frac{n\omega r^2}{2\tilde{\lambda}}\right) H_n(\sqrt{n}\tilde{u}), \qquad n = 1, 2\ldots,$$

where $\tilde{u} = \sqrt{\frac{\omega}{\tilde{\lambda}}\left((1-\alpha)\frac{x^2}{2} + (1+\alpha)\frac{y^2}{2} - i\beta xy\right)}$, $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, for potential $V(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$, H_n 一个厄米多项式（参考文献 [12]）。

对于量子哈密顿量

$$H = 2^{-1}\mathbf{P}^2 + V(\mathbf{Q}),$$

$$H\psi_n^{\mathrm{HO}} = \omega\hbar(n+1)\psi_n^{\mathrm{HO}}, \qquad \tilde{\lambda} = n\hbar = n\epsilon^2,$$

$\tilde{\lambda}$ 在取极限 $\epsilon \searrow 0$, $n \nearrow \infty$时保持固定，因此此处的极限能量为 $\lambda\omega$。我们需要用到如下结果：对于固定的 λ,

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{H_n'(\sqrt{n}u)}{\sqrt{n}H_n(\sqrt{n}u)} = u - \sqrt{u^2-2},$$

得到 $\psi_n^{\mathrm{HO}} \cong \exp\left(\frac{\tilde{R} + i\tilde{S}}{\epsilon^2}\right)$ 当 $n \sim \infty$ 时，其中

$$(\tilde{R} + i\tilde{S})(x,y) = -\frac{1}{2}\omega r^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\tilde{u}^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\tilde{u}^2}}\right) + \tilde{\lambda}\ln\left(\tilde{u} + \tilde{u}\sqrt{1 - \frac{2}{\tilde{u}^2}}\right).$$

定理 3.3。 在 *LCKS* 变换下：

$$\nu(x,y) \to \frac{\mu}{\lambda^2}\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{e}(x^2 - y^2) - \frac{2ixy\sqrt{1-e^2}}{e}\right).$$

因此，定义 ω 为 $\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{\omega}{\tilde{\lambda}}$，若 $\frac{C\omega}{2} = \frac{\mu}{\lambda}$ 和 $C\tilde{\lambda} = 2\lambda$，简单计算可得，在 *LCKS* 变换下

$$(R + iS)(x,y) \to C(\tilde{R} + i\tilde{S})(x,y),$$

C 这里是时间尺度的变化。不言而喻，在二维中

牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子与天体力学——结果总结16

$$\boldsymbol{\nabla}\tilde{R}.\boldsymbol{\nabla}\tilde{S}=0, \qquad 2^{-1}\left(|\boldsymbol{\nabla}\tilde{S}|^2-|\boldsymbol{\nabla}\tilde{R}|^2\right)+V=\tilde{\lambda}\omega,$$

其中 $V=\frac{1}{2}\omega^2 r^2$。

二维中的列维-奇维塔-库斯塔安海莫-施蒂费尔变换提示了三维中的以下结果。

定理 3.4. 各向同性谐振子的椭圆态，除归一化因子外，为

$$\psi_n^{\mathrm{HO}}=exp\left(-\frac{\omega r^2}{2\tilde{\lambda}}\right)H_n(\sqrt{n}\tilde{u}),$$

$where\ r^2=x^2+y^2+z^2,\ \tilde{u}=\sqrt{\frac{\omega}{\tilde{\lambda}}\left((1-\alpha)\frac{x^2}{2}+(1+\alpha)\frac{y^2}{2}-i\beta xy\right)},\ \alpha=\frac{1}{e},$ $\beta=\sqrt{1-e^2}$、 $\alpha^2-\beta^2=1$、 e 为方程e所表示的椭圆的偏心率

$$z=0, \qquad \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1,$$

如上所述。 H_n 为厄米多项式。

对于量子哈密顿量 $H=2^{-1}\boldsymbol{P}^2+2^{-1}\omega^2\boldsymbol{Q}^2$,

$$H\psi_n^{\mathrm{HO}}=\omega\left(\tilde{\lambda}+\frac{3}{2}\hbar\right)\psi_n^{\mathrm{HO}}, \qquad \tilde{\lambda}=n\hbar=n\epsilon^2.$$

证明。 首先， $\psi_1(z)=\exp\left(-\frac{\omega z^2}{2\tilde{\lambda}}\right)$ 是单维简谐振子的基态，并且如果

$$\psi_2(x,y)=\exp\left(-\frac{\omega(x^2+y^2)}{2\tilde{\lambda}}\right)H_n(\sqrt{n}\tilde{u}),$$

$$\boldsymbol{\nabla}\psi_1.\boldsymbol{\nabla}\psi_2=0, \ \text{ so } \ \Delta(\psi_1\psi_2)=\psi_1(\Delta\psi_2)+(\Delta\psi_1)\psi_2.$$

进一步 $\Delta\tilde{u}=0$，因此 $\Delta H_n(\sqrt{n}\tilde{u})=nH_n''(\sqrt{n}\tilde{u})|\boldsymbol{\nabla}\tilde{u}|^2$。此外，

$$\begin{aligned}\Delta\psi_2&=\Delta\left(\exp\left(-\frac{\omega(x^2+y^2)}{2\tilde{\lambda}}\right)H_n(\sqrt{n}\tilde{u})\right)\\&=\exp\left(-\tfrac{\omega(x^2+y^2)}{2\tilde{\lambda}}\right)\Delta H_n(\sqrt{n}\tilde{u})+H_n(\sqrt{n}\tilde{u})\Delta\exp\left(-\tfrac{\omega(x^2+y^2)}{2\tilde{\lambda}}\right)\\&\qquad+2\boldsymbol{\nabla}\left(\exp\left(-\tfrac{\omega(x^2+y^2)}{2\tilde{\lambda}}\right)\right).\boldsymbol{\nabla}H_n(\sqrt{n}\tilde{u}).\end{aligned}$$

利用厄米多项式的性质进行计算，可得结果

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi_n^{\mathrm{HO}}+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2)\psi_n^{\mathrm{HO}}=\omega\left(\tilde{\lambda}+\frac{3}{2}\hbar\right)\psi_n^{\mathrm{HO}},\qquad \tilde{\lambda}=n\hbar.$$

□

作为一项应用，我们详细说明它与特洛伊小行星的限制性三体问题之间的联系，并在通常的线性化问题中发现了两个新的运动常数/积分。下一节将隐含地假定，在太阳—木星二体问题中，小行星处于旋转坐标系时的量子哈密顿量 H，经量子化后就是雅可比积分。这是因为，若 U 表示变换到旋转坐标系的酉变换，则

$$U^\dagger\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\omega\hat{L}_3,\qquad \text{(HJI)},$$

其中 ω 是坐标轴的角速度， L_3 是垂直于轨道平面的角动量算符。你将看到， H 中出现的最后一项将小行星的笛卡尔坐标耦合起来。参见 Whittaker（参考文献 [29]）。

3.3. 特洛伊小行星

众所周知，对于太阳（S）/木星（J）系统，三体问题的拉格朗日正三角形解给出了两个稳定平衡点，$\mathscr{L}_{4,\,5}$，特洛伊小行星（A）位于木星前方或后方 60°，并与其共轨。这里，太阳和木星以角速度 ω绕其质心 O旋转，SAJ构成边长为 a_0的等边三角形。运动方程可由旋转坐标系中的哈密顿量推导得出，该哈密顿量通常称为 K雅可比积分，⌣对于 $OA=\ (\tilde{x},\ \tilde{y})$ 可写为：

$$\ddot{\tilde{x}}-2\omega\dot{\tilde{y}}-\omega^2\tilde{x}=-\frac{\mu_1(\tilde{x}+r_1)}{((\tilde{x}+r_1)^2+\tilde{y}^2)^{3/2}}-\frac{\mu_2(\tilde{x}-r_2)}{((\tilde{x}-r_2)^2+\tilde{y}^2)^{3/2}},$$

$$\ddot{\tilde{y}}+2\omega\dot{\tilde{x}}-\omega^2\tilde{y}=-\frac{\mu_1\tilde{y}}{((\tilde{x}+r_1)^2+\tilde{y}^2)^{3/2}}-\frac{\mu_2\tilde{y}}{((\tilde{x}-r_2)^2+\tilde{y}^2)^{3/2}},$$

⌢ ⌢$O\tilde{x}\parallel OJ$，其中 μ_1是太阳的引力质量， μ_2是木星的引力质量， r_1 是太阳到 O 的距离， r_2 是木星到 O的距离。$(\tilde{x},\ \tilde{y})$ 与 OA 的固定坐标系坐标⌣相关，其关系为

$$x=\tilde{x}\cos(\omega t)-\tilde{y}\sin(\omega t)\qquad ,\qquad y=\tilde{x}\sin(\omega t)+\tilde{y}\cos(\omega t)$$

牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子和天体力学—结果总结18 和 $\omega^2 = (\mu_1 + \mu_2)$ $(r_1 + r_2)^3$, $r_1 + r_2 = a_0$。这些方程存在一个不动点解,

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (c, d) = \left(\frac{r_2 - r_1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(r_1 + r_2) \right),$$

对于小行星平衡点 $\mathscr{L}_{4,\ 5}$。

研究 $\tilde{x} = c + \delta(t)$ 和 $\tilde{y} = d + \epsilon(t)$ 附近的稳定性，可得方程:

$$\ddot{\delta} - 2\omega\dot{\epsilon} - \frac{3}{4}\omega^2\delta - \Omega^2\epsilon = 0,$$

$$\ddot{\epsilon} + 2\omega\dot{\delta} - \frac{9}{4}\omega^2\epsilon - \Omega^2\delta = 0,$$

其中 $\Omega_2 = \dfrac{3\sqrt{3}(\mu_1 - \mu_2)}{4(r_1 + r_2)^3}$，已知 $\mu_1 \geq \mu_2$。

这些方程有一个与雅可比常数相关的运动常数,

$$\tilde{C} = \frac{1}{2}(\dot{\delta}^2 + \dot{\epsilon}^2) - \frac{3}{8}\omega^2(\delta^2 + 3\epsilon^2) - \Omega^2\epsilon\delta.$$

这表明我们应考虑进行坐标旋转：$(\delta,\ \epsilon) \to (X,\ Y)$，通过

$$\delta = X\cos\gamma - Y\sin\gamma \qquad ; \qquad \epsilon = X\sin\gamma + Y\cos\gamma.$$

使用 th 上面的常数以及要求 XY 项消失，得出条件:

$$\tan 2\gamma = -\frac{\sqrt{3}(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2},$$

以及在（$X,\ Y$）坐标中的一个运动常数,

$$C_0 = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \omega_X^2 X^2 - \omega_Y^2 Y^2,$$

其中

$$\omega_X^2 = \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{8} + \frac{2\Omega^4}{3\omega^4} \right) \cos 2\gamma \right) \omega^2,$$

$$\omega_Y^2 = \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{8} + \frac{2\Omega^4}{3\omega^4} \right) \cos 2\gamma \right) \omega^2.$$

We note here that $\omega_X^2+\omega_Y^2=\frac{3}{2}\omega^2$ and $\omega_X^2\omega_Y^2=\frac{27\mu_1\mu_2}{16(\mu_1+\mu_2)^2}\omega^4$.

此外， X 和 Y 满足

$$\ddot{X}-2\omega\dot{Y}-2\omega_X^2X=0 \qquad ; \qquad \ddot{Y}+2\omega\dot{X}-2\omega_Y^2Y=0.$$

假设解的形式为 $X=A\mathrm{e}^{\lambda t}$ 和 $Y=B\mathrm{e}^{\lambda t}$，可得

$$\lambda^4+\omega^2\lambda^2+4\omega_X^2\omega_Y^2=0,$$

解的形式为 $X=2\omega\lambda C\mathrm{e}^{\lambda t}$, $Y=(\lambda^2-2\omega_X^2)\mathrm{e}^{\lambda t}$，其中 C为常数。

鉴于 λ 有四个互异根， X 和 Y 的通解为

$$X=2\omega\sum_{\mathrm{i}=1}^{4}\lambda_{\mathrm{i}}C_{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{i}}t} \qquad ; \qquad Y=\sum_{\mathrm{i}=1}^{4}(\lambda_{\mathrm{i}}^2-2\omega_X^2)C_{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\lambda_{\mathrm{i}}t}$$

若进一步假设所有根都是虚数，即 $\lambda_1=\alpha i$, $\lambda_2=-\alpha i$, $\lambda_3=\beta i$和 $\lambda_4=-\beta i$，且 $\alpha\neq\beta$ 并满足适当的 C_i，则存在椭圆轨道解

$$X=4\omega\alpha C\sin\alpha t \qquad ; \qquad Y=2(\alpha^2+2\omega_X^2)C\cos\alpha t$$

以及对应的含有 β的解。这里注意， $\alpha^4-\omega^2\alpha^2+4\omega_X^2\omega_Y^2=0$，而 β也同样如此。还值得注意的是

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{27\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\omega \;\; ; \;\; \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1-\frac{27\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\omega,$$

前提是 $\frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}<\frac{1}{27}$，即所有解都是振荡的。太阳—木星系统满足这一条件。

目前我们只考虑这个椭圆轨道，它需要特殊的初始条件，稍后会谈到。显然，一看便知，

$$\ddot{X}=-\alpha^2X \qquad \text{and} \qquad \ddot{Y}=-\alpha^2Y$$

对于上述根 $\alpha > \beta$。因此，在这种情况下，我们有一个二维各向同性振子，其运动常数为，

$$2^{-1}\dot{X}^2 + 2^{-1}\alpha^2 X^2 = E_X \qquad , \qquad 2^{-1}\dot{Y}^2 + 2^{-1}\alpha^2 Y^2 = E_Y$$

以及方程为 $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$ 的椭圆轨道，其中 $A^2 = 4\omega^2\alpha^2 C^2$，

$B^2 = (\alpha^2 - 2\omega_X^2)^2 C^2$, C 必须足够小，例如 $C/r_2 = O(\mu_2/(\mu_1 + \mu_2))$。

该椭圆的偏心率 e 由下式给出，

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{\min(|A|, |B|)}{\max(|A|, |B|)}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}},$$

在我们的情形下。因此，已知 C （摄动强度）后，上述定理便能为这个线性化问题明确给出∇R 和 ∇S ，从而保证半经典螺旋轨道在此情形下按预期收敛到上述椭圆轨道。当然，我们也可以选择 β 而不是 α ，但目前我们更愿意专注于 α，即太阳—木星系统的近共振解，

$$\alpha = 0.996758\,\omega \qquad , \qquad \beta = 0.080464\,\omega.$$

如果我们将 Z 问题线性化，对于较小的 Z，也可得到，

$$\ddot{Z} = -\omega^2 Z$$

so f或者，对于上述 C 和 α的选择，在 $\mu_2/$（$\mu_1 + \mu_2$）的一阶近似下，形式上 ，

$$\ddot{X} \cong -\omega^2 X \qquad , \qquad \ddot{Y} \cong -\omega^2 Y \qquad , \qquad \ddot{Z} \cong -\omega^2 Z$$

也就是说，这是一个三维各向同性振子，我们同样能够明确知道 R 和 S 。毋庸置疑，对于一阶近似解，我们拥有完整的 SU(3) 对称性，其中有 8 个运动常数，对应于 SU(3)生成元、3 个能量、3 个角动量分量以及另外 2 个常数（参考文献 [24]）。这促使我们一般性地为线性化的特洛伊小行星问题寻找更多运动常数。

定理3.5。 （隐藏常数）

对于该系统

$$\ddot{X} - 2\omega\dot{Y} - 2\omega_X^2 X = 0 \qquad ; \qquad \ddot{Y} + 2\omega\dot{X} - 2\omega_Y^2 Y = 0,$$

其中 $\omega_X^2+\omega_Y^2=\frac{3}{2}\omega^2$ 和 $\omega_X^2\omega_Y^2=\frac{27\mu_1\mu_2}{16(\mu_1+\mu_2)^2}\omega^4$，除雅可比常数外，$\frac{1}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)-\omega_X^2X^2-\omega_Y^2Y^2=C_0$，还有两个运动常数：

$$\omega_Y^2\{(\alpha^2+2\omega_X^2)\dot{X}-2\omega\alpha^2Y\}^2+\alpha^2\omega_X^2\{2\omega\dot{Y}+(\alpha^2+2\omega_X^2)X\}^2=D_0$$

对于 β 也同样如此； α、 β 是 $\alpha^4-\omega^2\alpha^2+4\omega_X^2\omega_Y^2=0$ 的实根，条件是

$$\frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}<\frac{1}{27}.$$

证明。（概要）对于上述定义的系统， X 和 Y 的解及其时间导数可表示为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}X\\ \dot{X}\\ Y\\ \dot{Y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\omega\lambda_1 & 2\omega\lambda_2 & 2\omega\lambda_3 & 2\omega\lambda_4\\ 2\omega\lambda_1^2 & 2\omega\lambda_2^2 & 2\omega\lambda_3^2 & 2\omega\lambda_4^2\\ \lambda_1^2-2\omega_X^2 & \lambda_2^2-2\omega_X^2 & \lambda_3^2-2\omega_X^2 & \lambda_4^2-2\omega_X^2\\ \lambda_1(\lambda_1^2-2\omega_X^2) & \lambda_2(\lambda_2^2-2\omega_X^2) & \lambda_3(\lambda_3^2-2\omega_X^2) & \lambda_4(\lambda_4^2-2\omega_X^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\ C_3\mathrm{e}^{\lambda_3 t}\\ C_4\mathrm{e}^{\lambda_4 t}\end{pmatrix}.$$

对该矩阵方程求逆，可得 $\mathrm{e}^{\lambda_i t}$，$\mathrm{i}=1,2,3,4$ 关于 X、$\dot{X}$、Y 和 $\dot{Y}$ 的表达式。当 $\frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}<\frac{1}{27}$、 $\lambda_1=\alpha i$、 $\lambda_2=-\alpha i$、 $\lambda_3=\beta i$ 和 $\lambda_4=-\beta i$ 时，其中 α 和 β 是 $\alpha^4-\omega^2\alpha^2+4\omega_X^2\omega_Y^2=0$ 的实根。假设 $\omega_X(\alpha^2-\beta^2)\neq 0$，由 $\mathrm{e}^{i\alpha t}\mathrm{e}^{-i\alpha t}=1$ 这一事实可得运动常数， β 也同理。

□

更多详情请参见（参考文献 [28]），其中还包括对三体问题中拉格朗日等边三角形解的推广，以及展示粒子向以拉格朗日点为中心区域收敛的半经典分析[5]。很难想象，位于上述轨道上的小行星不会与处于与木星3:2共振状态的希尔达小行星发生相互作用，尤其是在希尔达小行星的轨道偏心率为 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}-1$ 且其位于木星轨道附近的远日点时。

α-各向同性条件，即圆频率为 α 的二维各向同性，并始终假设 $\omega_X(\alpha^2-\beta^2)\neq 0$ 可简化为：

$$\beta(\alpha^2+2\omega_X^2)\dot{X}_0-2\omega\alpha^2\beta Y_0+2\omega_X^2(2\omega\dot{Y}_0+(\alpha^2+2\omega_X^2)X_0)=0,$$

对于 β-各向同性，替换 α 为 β可得到类似结果。对于 α-各向同性，能量和角动量对应的运动常数为

$$E = E_X + E_Y = \frac{\alpha^2}{2}(A^2 + B^2) = Q_1,\ \ L^2 = \alpha^2 A^2 B^2,\ \ E_X - E_Y = \frac{\alpha^2}{2}(B^2 - A^2) = Q_0,$$

以及 $Q_{XY} = \alpha^2 XY + p_X p_Y = 0$；对于其余的 $Q's$，也有类似结果。

毋庸置疑，上述分析也适用于其他物理问题，例如傅科摆。

4. 牛顿旋转轨道

基于前几节的结果，我们现在讨论由给定中心势 V_0 定义、并附加反立方径向力的半经典系统。具体而言，我们将考虑由 $V_K = V_0 + (1-k^2)\dfrac{L^2}{2r^2}$, $k \in \mathbb{R}$（$V_0 = -\dfrac{\mu}{r}$时）以及 $V_0 = \dfrac{1}{2}\omega^2 r^2$, $r^2 = x^2 + y^2$ 定义的系统。 L是由 V_0定义的系统的角动量。牛顿早已熟知这一系统（参考文献 [3]），林登-贝尔也对此作了详细讨论（参考文献 [13]）。从本质上说，经典运动所得出的结果是：若$r(\theta)$描述了在 V_0 下的轨道，那么 $r\begin{pmatrix}\theta \\ k\end{pmatrix}$ 就定义了在 V_K 下的轨道。我们的半经典分析将以哈密顿量和一个复运动常数（文献中似乎很少有人关注它），再结合简单的平面变换为关键。随后我们将看到，如上所述，在椭圆情形下，半经典运动会优美地收敛于经典运动。

4.1. 运动常数

考虑一个在（X, Y）平面内运动、质量为单位质量的粒子，其运动受哈密顿量支配

$$H = 2^{-1}\mathbf{P}^2 + V_0(\mathbf{Q}).$$

使用极坐标（ρ, ϕ），并定义 $\mathbf{P} = (P_X, P_Y) = (X, Y)$，可以证明上述系统具有随时间定义的运动常数，分别为：-

$$V_0 = -\frac{\mu}{\rho}: \qquad \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2) - \frac{\mu}{\rho} = E, \qquad E < 0,$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) P_X + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) P_Y - i\sqrt{-2E}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) P_Y - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) P_X - i\sqrt{-2E}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} = -i\frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}}.$$

$E = -\dfrac{\mu^2}{2\lambda^2}$，是能量， $0 < e < 1$ 是偏心率。

$$V_0 = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2: \qquad \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2) + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 = E, \qquad E > 0,$$

$$\frac{P_X - i\omega X}{P_Y - i\omega Y} = -\frac{a}{b}i, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

$E = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\omega^2$，是角频率为 ω 时的能量。

这两个系统通过 LCKS 变换以及相应的二维时间变换相连接，如第 3 节所述。

现在，我们通过变换$X = r\cos\left(\frac{\theta}{k}\right)$和 $Y = r\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)$，转到（$x$，$y$）平面和极坐标（$r$，$\theta$）。如果我们令 $\mathbf{p} = (p_x, p_y) = (\dot{x}, \dot{y})$，不难证明

$$P_X = \frac{1}{r}(xp_x + yp_y)\cos\left(\frac{\theta}{k}\right) - \frac{L}{r}\sin\left(\frac{\theta}{k}\right),$$
$$P_Y = \frac{1}{r}(xp_x + yp_y)\sin\left(\frac{\theta}{k}\right) + \frac{L}{r}\cos\left(\frac{\theta}{k}\right),$$

其中 L 是底层系统的角动量，定义为 $V_0(\rho)$。我们注意到，对于 $V_0 = -\frac{\mu}{\rho}$，$L = \lambda\sqrt{1-e^2}$；对于 $\overline{V_0} = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2$，$\overline{L} = ab\omega$。利用这一变换，上述运动常数变为

$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{\mu}{r} + \frac{(1-k^2)L^2}{2r^2} = E,$$

$$\frac{(xp_x + yp_y)\cos\left(\frac{\theta}{2k}\right) - L\sin\left(\frac{\theta}{2k}\right) - i\sqrt{-2E}r\cos\left(\frac{\theta}{2k}\right)}{(xp_x + yp_y)\sin\left(\frac{\theta}{2k}\right) + L\cos\left(\frac{\theta}{2k}\right) - i\sqrt{-2E}r\sin\left(\frac{\theta}{2k}\right)} = -i\frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}}$$

and

$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{(1-k^2)L^2}{2r^2} = E,$$

$$\frac{(xp_x + yp_y)\cos\left(\frac{\theta}{k}\right) - L\sin\left(\frac{\theta}{k}\right) - i\omega r^2\cos\left(\frac{\theta}{k}\right)}{(xp_x + yp_y)\sin\left(\frac{\theta}{k}\right) + L\cos\left(\frac{\theta}{k}\right) - i\omega r^2\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)} = -\frac{a}{b}i,$$

分别。
注意到每组联立方程都可以求解 $(p_x, p_y) \in \mathbb{C}^2$，因此自然可以定义 $\mathbf{Z} = (Z_x, Z_y) \in \mathbb{C}^2$，并在上述方程中用 $\mathbf{Z}$ 替换 $\mathbf{p}$。求解每组方程后可得

$$Z_x = (\alpha + i\beta)\frac{x}{r^2} - \frac{y}{r^2}\sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2r^2(E - V_0(r)) - (1-k^2)L^2 - 2\alpha\beta i},$$

$$Z_y = (\alpha + i\beta)\frac{y}{r^2} + \frac{x}{r^2}\sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2r^2(E - V_0(r)) - (1-k^2)L^2 - 2\alpha\beta i},$$

其中，对于：-

$$V_0 = -\frac{\mu}{r},\ \alpha = \frac{eL\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)}{1 + e\cos\left(\frac{\theta}{k}\right)},\ \beta = \frac{1}{\lambda}\left(\mu r - \frac{L^2}{1 + e\cos\left(\frac{\theta}{k}\right)}\right),\ L = \lambda\sqrt{1-e^2},\ E = -\frac{\mu^2}{2\lambda^2},$$

以及对于

$$V_0 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2,\ \alpha = \frac{(b^2-a^2)L\sin\left(\frac{2\theta}{k}\right)}{(a^2+b^2) + (b^2-a^2)\cos\left(\frac{2\theta}{k}\right)},\ \beta = \omega r^2 - \frac{2abL}{(a^2+b^2) + (b^2-a^2)\cos\left(\frac{2\theta}{k}\right)},$$

$L = ab\omega$ and $E = \frac{1}{2}(a^2+b^2)\omega^2$.

此外，如果我们像前几节那样定义 $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\nabla} S - i\boldsymbol{\nabla} R$，就可以提取出 $\boldsymbol{\nabla} S$和 $\boldsymbol{\nabla} R$。在每种情况下，对于适当的 V_0、 E、 L、 α 和 β，

$$\boldsymbol{\nabla} S = \left(\frac{1}{r^2}(\alpha x - \tilde{u}y), \frac{1}{r^2}(\alpha y + \tilde{u}x)\right),$$

$$\boldsymbol{\nabla} R = \left(-\frac{1}{r^2}(\beta x - \tilde{v}y), -\frac{1}{r^2}(\beta y + \tilde{v}x)\right),$$

其中 $\tilde{u} + i\tilde{v} = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2r^2(E - V_0(r)) - (1-k^2)L^2 - 2\alpha\beta i}$。具体而言

$$\tilde{u} = \left\{\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2 + 2r^2(E - V_0(r)) - (1-k^2)L^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2 + 2r^2(E - V_0(r)) - (1-k^2)L^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\tilde{v} = -\frac{\alpha\beta}{\tilde{u}}$$

$$\tilde{v} = \left\{-\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2 + 2r^2(E - V_0(r)) - (1-k^2)L^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2 + 2r^2(E - V_0(r)) - (1-k^2)L^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

无需多言，很容易证明，在每种情况下，

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla} S|^2 - |\boldsymbol{\nabla} R|^2) + V = E, \qquad \boldsymbol{\nabla} R.\boldsymbol{\nabla} S = 0,$$

也就是说，我们已经找到了至关重要的“半经典”方程（$*$）的解。

4.2. 半经典轨道与经典轨道

如前所述，这些系统的半经典轨道由动力学方程支配

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_t^0 = (\boldsymbol{\nabla} S + \boldsymbol{\nabla} R)(\mathbf{X}_t^0).$$

我们也看到，由于其构造方式，当 R 达到最大值时，经典轨道会在无限时间极限下形成，此时 $\boldsymbol{\nabla} R = \mathbf{0}$。使用上文给出的 $\boldsymbol{\nabla} R$ 表达式，这发生在

$$\beta x - \tilde{v} y = 0 \text{ and } \beta y + \tilde{v} x = 0.$$

假设 x 和 y 不同时为 0，即轨道不会在有限时间内到达原点，则当 $\beta^2 + \tilde{v}^2 = 0 \implies \beta = 0$和$\tilde{v} = 0$ 同时成立时，可以确保这一点。

在 $V_0 = -\frac{\mu}{r}$的情况下，

$$\beta = 0 \implies \frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\left(\frac{\theta}{k}\right),$$

其中 $\ell = \frac{L^2}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu}(1 - e^2)$。

在 $V_0 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ 的情况下，

$$\beta = 0 \implies r^2 = \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2) + (b^2 - a^2)\cos\left(\frac{2\theta}{k}\right)}$$

利用 $\tilde{v}$ 的表达式，我们还可以看到，当 $\beta = 0$ 时，$\tilde{v} = 0$，也就是说，在经典轨道上。这些结果清晰地展示了牛顿的结论：如果 $r(\theta)$ 描述了在 V_0 下的轨道，那么 $r\begin{pmatrix}\theta \\ k\end{pmatrix}$ 就定义了在 V_K 下的轨道。

4.3. u *and* α 的意义

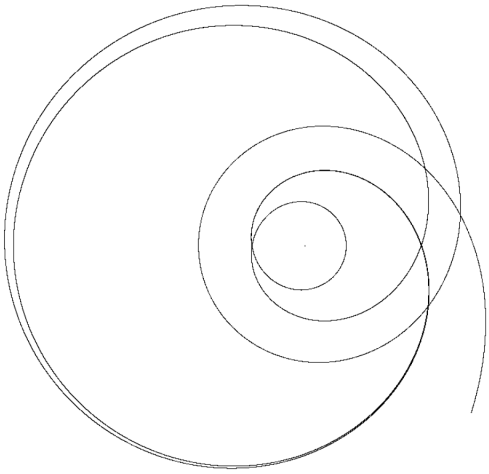
利用动力学方程可知，极坐标（r，θ）满足特别简单的方程：

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha - \beta}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\tilde{u} - \tilde{v}}{r^2}.$$

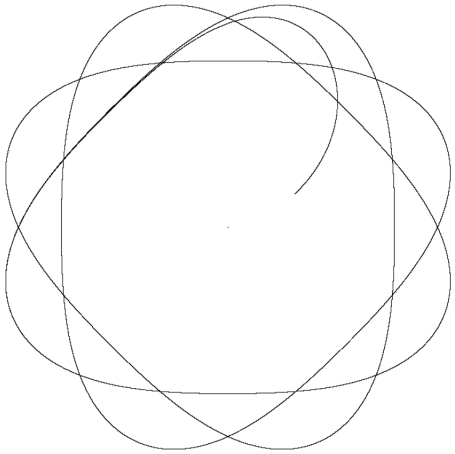
在经典轨道（β，$\tilde{v}$）上，$= (0, 0)$。此外，$\tilde{u} = kL$，因此

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{kL}{r^2} \implies r^2 \frac{d\theta}{dt} = kL$$

角动量。由此我们推断出 $\begin{matrix} kL & dr \\ r & d\theta \end{matrix} = \alpha$，这一点很容易在上述两种情况下得到验证。



$$V_0 = -\frac{\mu}{r} \quad : \quad k = 3$$



$$V_0 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \quad : \quad k = \frac{3}{4}$$

图 3。

上图展示了一些半经典轨道的模拟，清楚地显示了它们向经典路径的收敛。

我们以广义相对论中的一个旋进轨道应用作为本节的结尾。在这里，对牛顿力定律作简单修正，便可解释一颗行星（例如水星）绕恒星运行时的近日点进动。最简单的模型给出的修正势为 $V(r) = -\frac{\mu}{r} - \frac{3\mu^2}{c^2 r^2}$，其中 c 是光速。我们可以将其视为一个旋进轨道，其中 $k = \sqrt{1 + \frac{6\mu^2}{c^2 L^2}}$。由此很容易推得，轨道的近日点在每绕行一周后大约进动 $\frac{6\pi\mu^2}{c^2 L^2}$ 角度。在半经典旋进轨道的框架下，这类轨道的收敛过程如下面的图 4 所示。

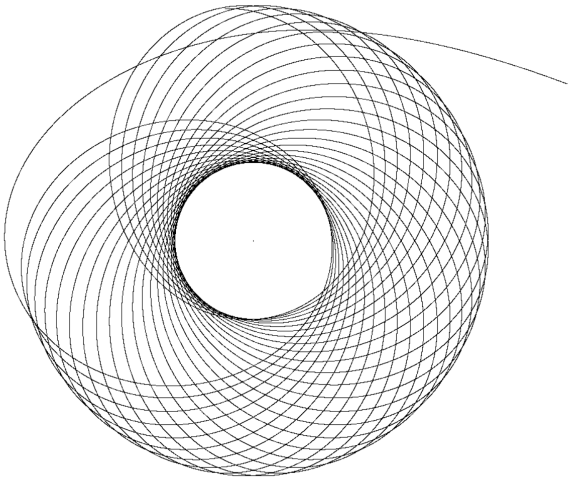


图 4。

5. 柯西特征线法与二维广义 LCKS 变换

这里我们关注 R 和 S的等值曲线的正交性,

$$\boldsymbol{\nabla} R.\boldsymbol{\nabla} S = 0,$$

假设 R 已知（精确或近似），且 $S(x,y) = S_0(x,y)$, 对于 $(x,y) \in \mathbb{C}_0$，经典轨道的曲线， S_0 哈密顿-雅可比函数。

5.1. 特征线法

假设 $\dfrac{\partial R}{\partial x} \neq 0$ ，那么我们需要

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\dfrac{\partial S}{\partial y}\dfrac{\partial R}{\partial y}}{\dfrac{\partial R}{\partial x}} = 0,$$

因此，如果 $y = y(x)$ 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y)}{\dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y)}, \qquad \frac{d}{dx}S(x,y(x)) = 0.$$

因此，对于每个点 $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}_0$，按上述方式定义 $\dfrac{dy}{dx}(x;\, x_0,y_0)$，其中

$$\frac{dy}{dx}(x;x_0,y_0) = -\frac{\partial S_0}{\partial x}(x_0,y_0) \Big/ \frac{\partial S_0}{\partial y}(x_0,y_0)$$

且 $y(x_0; x_0,y_0) = y_0, (x_0,y_0) \in \mathbb{C}_0,$ 那么

$$S(x,y(x;x_0,y_0)) = S_0(x_0,y_0) \text{ for each } (x_0,y_0) \in \mathbb{C}_0.$$

由此必然可得:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + y'\frac{\partial S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{1}{y'}\frac{\partial R}{\partial y} = 0,$$

因此

$$|\boldsymbol{\nabla} S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 (1+y'^2), \qquad |\boldsymbol{\nabla} R|^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 \left(1+\frac{1}{y'^2}\right).$$

能量守恒于是化简为

$$(S_y)^2\left(1+\frac{R_y^2}{R_x^2}\right)-(R_y)^2\left(1+\frac{S_y^2}{R_x^2}\right)=2(E-V),$$

$R_x=\frac{\partial R}{\partial x}$ 等等。在这种情况下，我们得到方程(∗)的一个隐式解。消去 V，得到：-

引理 **5.1.** 半经典方程(∗)存在解的一个必要条件是

$$\left(1+\frac{S_y^2}{R_x^2}\right)|\boldsymbol{\nabla}R|^2=\left(1+\frac{R_y^2}{S_x^2}\right)|\boldsymbol{\nabla}S|^2$$

并且，在对 R 和 S作出一些温和的正则性假设后，必要且充分条件还包括：

$$2(E-V)=|\boldsymbol{\nabla}R|^2\left(\frac{S_y^2}{R_x^2}-1\right).$$

备注

1. 充分的正则性条件可从 Nagumo 的结果（参考文献 [10]）中推导出来 .

2. 上述结果揭示了 R 和 S 在 C_0 邻域内的等值曲线结构；在该邻域内，已知 R 取最大值，且 S_0 的值近似已知。我们稍后会回到这一主题。

3. 很容易验证，本文中的所有例子都满足上述条件。

4. 对于显式解，我们需要一个更有力的结果。

5.2. 二维中的显式解

当势 V 为中心势时，经典角动量守恒，因此产生的运动可以假定局限于平面 $z=0$。我们在 $\mathcal{N}$中开展研究，该区域是 C_0（经典轨道）的一条弧的二维邻域，并假定该邻域是单连通的。具体而言， $\mathcal{N}=\bigcup N((r_0(\theta)\ \theta)\ \delta(\theta))$，在$\theta\in I,\ \delta(\theta)>0$

极坐标，其中 $r_0(\theta)$ θ 为中心， $\delta(\theta)>0$ 为 N 的半径，$(r_0(\theta)\ \theta)\in C_0$，而 $\theta\in I$ 为一个实区间。我们假设量子粒子态密度 ψ,

满足 $\rho(x,\ y) \sim C\exp\left(\frac{2R(x,y)}{\epsilon^2}\right)$，当 $\epsilon^2 \sim 0$ 时，实值 R 在 C_0 上达到其全局最大值，其中 $\boldsymbol{\nabla} R = 0$ 和 $R = R_{\max}$。

为满足方程（$*$），我们写作 $\boldsymbol{\nabla} S(x,y) = \lambda(x,y)\left(-\frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x}\right)$，其中 $\lambda(x,y) \sim O(|\boldsymbol{\nabla} R|^{-1})$，如（$x,y$）$\sim (x_0,y_0) \in C_0$。假设在 C_0 弧上的所有点处，都有连续转动的切线 $\mathbf{t}(C_0)$，且 $|\mathbf{t}(C_0)| = 1$，则必须满足

$$\boldsymbol{\nabla} S(x,y) \sim \lambda(x,y)|\boldsymbol{\nabla} R|(x,y)\mathbf{t}(C_0)(x_0,y_0)$$

如（x,y）$\sim (x_0,y_0)$。无论如何

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \lambda\frac{\partial R}{\partial x}$$

并假设 C^2 的行为

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial y} - \lambda\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial x} + \lambda\frac{\partial^2 R}{\partial x^2},$$

也就是说，λ 必须满足（R,V）方程：

$$\lambda \Delta R = -\boldsymbol{\nabla}\lambda.\boldsymbol{\nabla} R$$

并根据能量守恒，$\lambda = \pm\sqrt{\left(1 + \frac{2(E-V)}{|\boldsymbol{\nabla} R|^2}\right)}$。

定义从 $\mathbf{r}_0 \in C_0$ 到 $\mathbf{r} \in \mathcal{N}$ 的 $C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ 简单曲线，其线积分为，

$$S(x,y) - S(x_0,y_0) = \int_{C(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} \left(-\lambda\frac{\partial R}{\partial y}, \lambda\frac{\partial R}{\partial x}\right).d\mathbf{r}$$

基于满足 $\lambda(R,\ V)$ 方程，可得一个唯一的 S，其定义于 $\mathcal{N}$，且

$$\boldsymbol{\nabla} S = \pm\sqrt{|\boldsymbol{\nabla} R|^2 + 2(E-V)}(\widehat{\boldsymbol{\nabla} R^{\perp}}),\ \text{off}\ C_0,$$

其中 $\boldsymbol{\nabla} R^{\perp} = \left(-\frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x}\right)$，$(\widehat{\boldsymbol{\nabla} R^{\perp}})$ 是经典轨道上的 $\mathbf{t}(C_0)$。

显然，正如所需，$S\rceil_{C_0} = S_0$，即经典哈密顿-雅可比函数。

我们已经证明，在满足一些温和的正则性条件的情况下：

定理 5.2. 假设， $\lambda = \pm\sqrt{\left(1 + \frac{2(E-V)}{|\nabla R|^2}\right)}$ 满足 (R, V) 方程

$$\lambda \Delta R = -\nabla\lambda.\nabla R,$$

也就是说，向量场为 $\lambda\nabla R$ 的流不可压缩，且没有源或汇，

对于给定的 R，我们在二维中方程 $(*)$ 的解为

$$\nabla S = \pm\sqrt{|\nabla R|^2 + 2(E-V)}(\widehat{\nabla R^{\perp}}).$$

I特别是在 C_0 的邻域内，等值面上的经典轨道，

$$R = R_0 = \Big\{(r,\theta) : r = r_0(\theta) + r_1(\theta),\ \frac{r_1^2}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0,\theta_0) = R_0 - R_{\max},$$
$$C : r = r_0(\theta), \theta \in (0, 2\pi),\ \text{say } as\ R \sim R_{\max}\ \Big\},$$

我们得到主导项，

$$\nabla S \sim \pm\sqrt{2(E-V)}\left(1 + \frac{|\nabla R|^2}{4(E-V)}\right)\mathbf{t}(R = R_0),\ \text{as } R \sim R_{\max},$$

$\mathbf{t}(R = R_0)$ 是等值面（等高线）的单位切向量， $R = R_0$，并且当 $R_0 = R_{\max}$ 时与 C_0 相切。

这给出了包含 C_0 的窄条带中半经典极限行为的详细信息，其行为以 R 表示；我们假设至少已知 $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0, \theta), \theta \in (0, 2\pi)$ 和 $|\nabla R|^2$，其中 N。

引理 5.3. 设 $R(x,y) = R_0$ 是邻域 $\mathcal{N}$ 中 R 的等值面，该邻域包含经典轨道 C_0，其极坐标方程为 $r = r_0$, $0 < \theta \leq 2\pi$，则

$$R(x,y) \sim R_{max} + \frac{(r - r_0(\theta))^2}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0(\theta),\theta) + O\left((r - r_0(\theta))^3\right).$$

而 $|\nabla R|^2$ 的主导项为，

$$|\nabla R|^2 \sim 2(R_0 - R_{max})\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0,\theta)\left(1 + \frac{(r_0'(\theta))^2}{r^2}\right).$$

证明。 在满足充分正则性的条件下，

$$\frac{\partial R}{\partial r} \sim (r - r_0(\theta))\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0(\theta), \theta) + \frac{(r - r_0(\theta))^2}{2}\frac{\partial^3 R}{\partial r^3}(r_0(\theta), \theta)$$

and

$$\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta} \sim -\frac{(r - r_0)}{r}r_0'(\theta)\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0(\theta), \theta) + \frac{(r - r_0(\theta))^2}{2r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0(\theta), \theta)\right)$$

$$-\frac{(r - r_0(\theta))^2}{2r}r_0'(\theta)\frac{\partial^3 R}{\partial r^3}(r_0(\theta), \theta).$$

由于 $R = R_{\max}$ 在 C_0上，简单计算即可得出所需结果。 □

在二维中，$\boldsymbol{\nabla} S$的公式除显而易见的方向变化外，仅包含一个 $|\boldsymbol{\nabla} R|^2$ 项，其中 $V \to V - \frac{|\boldsymbol{\nabla} R|^2}{2}$ 和

$$-\frac{|\boldsymbol{\nabla} R|^2}{2} = \frac{(R_{\max} - R_0)}{r^2}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0, \theta)\left(r^2 + (r_0'(\theta))^2\right).$$

由于

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_t^0 = (\boldsymbol{\nabla} R + \boldsymbol{\nabla} S)(\mathbf{X}_t^0),$$

我们看到，当 $R_0 \sim R_{\max}$ 在等值面 $R = R_0$上时，

$$h - h_0 \cong \frac{(R_{\max} - R_0)}{r}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}(r_0, \theta)\left(r^2 + (r_0'(\theta))^2\right) + \frac{\partial R}{\partial \theta}(r, \theta),$$

其中 $r_0'(\theta) = \frac{dr_0}{d\theta}$，这表明经典轨道 $r = r_0(\theta)$的形状如何影响角动量的量子修正，h_0 为经典角动量。不言而喻，对于中心势 V， h_0 是常数。

推论 5.3.1。 在满足(R, V) 方程且满足一些温和的正则性条件的前提下，一般而言，在经典轨道 C_0之外，

$$r^2\dot{\theta} = \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}(r, \theta) + r\sqrt{|\boldsymbol{\nabla} R|^2 + 2(E - V)}\left(|\boldsymbol{\nabla} R|^{-1}\frac{\partial R}{\partial r}\right)\right)\Bigg|_{R=R_0},$$

按照上述对 C_0 中括号内第二项的解释，我们再次强调，假设 R 已知。同样，

$$\dot{r} = \left(\frac{\partial R}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\sqrt{|\boldsymbol{\nabla} R|^2 + 2(E - V)}}{r}\left(|\boldsymbol{\nabla} R|^{-1}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)\right)\Bigg|_{R=R_0}.$$

我们以圆轨道的相关结果结束本节。

定理 5.4. 对于螺旋圆轨道 C_0，在任意中心势 V 中，求解极坐标(R,V)下的方程(r,θ)可得：-

$$R+iS=f(r)+ih\theta,$$

其中，对于$(')=\frac{d}{dr}$，

$$r^2f'^2(r)=4\int_a^r\rho^2\left(\frac{V'(\rho)}{2}+\frac{V(\rho)-E}{\rho}\right)d\rho,$$

其中$\frac{V'(a}{2}+V)(a)-E=0$，a为圆轨道的半径，而 E 和 h分别为能量和角动量。此外

$$(f''(a))^2=-\frac{d}{dr}\left(\frac{2(E-V(r))}{r}-V'(r)\right)\Big]_{r=a}=V''(a)+\frac{3h^2}{a^4},$$

因此，C_0上的粒子密度为，

$$\rho\sim C_\epsilon exp\left(\frac{1}{\epsilon^2}\left(2R_{max}-\left(V''(a)+\frac{3h^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}(r-a)^2\right)\right),$$

条件是 $V''(a)+\frac{3h^2}{a^4}>0$，即稳定圆轨道的经典条件。$C_\epsilon$ 由归一化确定。

证明。给定 $R+iS=f(r)+ih\theta,$，(R,V) 方程意味着

$$\frac{1}{r}(rf'(r))'+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\ln\left(1+\frac{2(E-V(r))}{f'^2(r)}\right).f'(r)\hat{\mathbf{r}}=0$$

i.e.

$$f''f'^3+f'^2\left(\frac{f'^2+2(E-V)}{r}-V'\right)=0$$

可用 $f'(a)=0$ 积分，得到

$$r^2f'^2(r)=4\int_a^r u^2\left(\frac{V'(u)}{2}+\frac{V(u)-E}{u}\right)du.$$

由于我们需要在 $r = a$ 处有一个重根，因此要求

$$\frac{V'(a)}{2} + \frac{V(a) - E}{a} = 0$$

以及经典条件 $\frac{d}{dr}\left(V + \frac{h^2}{2r^2}\right)\Big]_{r=a} = 0$，其中 h 是角动量。此外，对于 $f'(r) \neq 0$，

$$f'' = -\frac{\left(\frac{f'^2 + 2(E-V)}{r} - V'\right)}{f'}.$$

对 $r \to a$ 应用洛必达法则可得

$$(f''(a))^2 = -\frac{d}{dr}\left(\frac{2(E - V(r))}{r} - V'(r)\right)\Big]_{r=a} = V''(a) + \frac{3h^2}{a^4},$$

由此很容易得到粒子密度的结果。

□

上述情况的一个例子是，在以下势场中的运动

$$V(r) = -\frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{\omega\mu}{h}r$$

在二维情况下，取正值的 μ、ω 和 h。这对应于库仑势（中子星/黑洞）、简谐振子势和暗能量势。在这种情况下，我们方程（$*$）的精确解为

$$R + iS = f(r) + iS = -\frac{1}{2}\omega r^2 - \frac{\mu}{h}r + h\ln r + ih\theta.$$

容易验证，$f'(r) = 0$ 意味着在此处存在一条圆轨道

$$a = \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\omega h^3} - \mu}{2\omega h}$$

并且 $(f''(a))^2 = V''(a) + \frac{3h^2}{a^4} = \omega^2 + \frac{h^2 + 2\omega h a^2}{a^4} > 0$，从而形成稳定圆轨道。

相应的半经典运动的计算机模拟见本文末尾的图 6。

5.3. 二维零能量的幂律问题

最近，零能幂律问题引起了多位研究者的关注。A.J. Makovski 和 K.J. Gorska 的论文（参考文献[14]）对此作了出色的综述。在我们的设定中，该问题归结为求解方程 $(*)$，其中 $V(r) = -\kappa r^p$，最重要的是，

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla} S|^2 - |\boldsymbol{\nabla} R|^2) - \kappa r^p = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} R.\boldsymbol{\nabla} S = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

其中 $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}_z$, $z = x + iy$, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)} = |z|$. 我们通过变量代换 $\boldsymbol{\nabla}_Z$, $Z = X + iY$, $Z = (z)^{(p+2)/2}$ 将该问题线性化，随后 $f(z) = z^{(p+2)/2}$

$$|\boldsymbol{\nabla}_z f|^2 = |f'(z)|^2 |\boldsymbol{\nabla}_Z f|^2$$

得到

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla}_Z S|^2 - |\boldsymbol{\nabla}_Z R|^2) - \kappa |z|^p |f'(z)|^{-2} = 0$$

i.e.

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla}_Z S|^2 - |\boldsymbol{\nabla}_Z R|^2) - \kappa |z|^p \left(\frac{p+2}{2}\right)^{-2} |z|^{-p} = 0$$

i.e.

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla}_Z S|^2 - |\boldsymbol{\nabla}_Z R|^2) = \frac{4\kappa}{(p+2)^2}$$

令 $R = \dfrac{\beta\tilde{\mu}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\beta Y + \alpha X)$ $S = \dfrac{\alpha\tilde{\mu}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(-\beta X + \alpha Y)$，其中常数为 α，β，$\tilde{\mu}$，

对于笛卡尔坐标 X 和 Y，

$$\boldsymbol{\nabla} R = \frac{\beta\tilde{\mu}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\alpha, \beta), \qquad \boldsymbol{\nabla} S = \frac{\alpha\tilde{\mu}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(-\beta, \alpha)$$

因此，如果 $\tilde{\mu} = \sqrt{2}\sqrt{2\kappa/(p+2)}$ $\alpha^2 - \beta^2 = 1$,

$$\boldsymbol{\nabla} R.\boldsymbol{\nabla} S = 0, \qquad 2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla} S|^2 - |\boldsymbol{\nabla} R|^2) = 2^{-1}\tilde{\mu}^2(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{4\kappa}{(p+2)^2}$$

因此，在原始变量（x，y）=（r 余弦 θ，r 正弦 θ），

$$X = r^{(p+2)/2}\cos\left(\frac{(p+2)}{2}\theta\right), \qquad Y = r^{(p+2)/2}\sin\left(\frac{(p+2)}{2}\theta\right)$$

and

$$R = \frac{\beta\tilde{\mu}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\beta Y + \alpha X), \qquad S = \frac{\alpha\tilde{\mu}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\beta X + \alpha Y),$$

求解方程（$*$）。最后一个例子启发了下一节。

5.4. 半经典 *LCKS* 变换的全纯变量变换

假设 $\omega = \xi + i\eta = f(x+iy)$、 $z = x + iy$、 f 关于 $z \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 全纯且可逆； ξ， η， x， $y \in \mathbb{R}$. 记作：- $x = x(\xi,\ \eta)$ $y = y(\xi,\ \eta)$； $\xi = \xi(x,\ y)$ $\eta = \eta(x,\ y)$,

and assume $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\nabla}_z(R+S) = \begin{pmatrix}\partial_x(R+S)\\ \partial_y(R+S)\end{pmatrix}$.

对任意 C^1 函数 $g(x,\ y)$、$(x,\ y) \to (\xi,\ \eta)$ 作变量变换,

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial \xi}\\ \frac{\partial g}{\partial \eta}\end{pmatrix}$$

i.e.

$$\boldsymbol{\nabla}_z g = \begin{pmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}_w g.$$

根据柯西-黎曼方程

$$\boldsymbol{\nabla}_z g.\boldsymbol{\nabla}_z h = |f'(z)|^2 \boldsymbol{\nabla}_w g.\boldsymbol{\nabla}_w h,$$

对于任意 C^1 函数 $g,\ h$。因此，对于我们的函数 $R,\ S$,

$$\boldsymbol{\nabla}_z R.\boldsymbol{\nabla}_z S = |f'(z)|^2 \boldsymbol{\nabla}_w R.\boldsymbol{\nabla}_w S$$

and

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla}_z S|^2 - |\boldsymbol{\nabla}_z R|^2) + (V-E) = 2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla}_w S|^2 - |\boldsymbol{\nabla}_w R|^2)|f'(z)|^2 + (V-E).$$

因此，假设 $f'(z) \neq 0$,

$$\boldsymbol{\nabla}_w R.\boldsymbol{\nabla}_w S = 0, \qquad 2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla}_w S|^2 - |\boldsymbol{\nabla}_w R|^2) + |f'(z)|^{-2}(V-E) = 0.$$

现在，如果 $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\nabla}_z(R+S)$，$\dot{(\cdot)} = \frac{d}{dt}$，$t$ 为时间，因为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}_w(R+S).$$

根据柯西-黎曼方程

$$\begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix} = |f'(z)|^2\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}(R+S)\\ \frac{\partial}{\partial \eta}(R+S)\end{pmatrix},$$

因此，如果 $ds = dt|f'(z(t))|^2$ 是时间变换，且 $\begin{pmatrix}\xi(s)\\ \eta(s)\end{pmatrix}$ 继承相应的初始条件，即 $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}, \frac{d}{ds} = \dot{(\cdot)}$，我们得到

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} = \boldsymbol{\nabla}_w(R+S),$$

这正如预期。这可由关于 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$（一个开单连通集）的显然定理得出。

定理 5.5. 如果 $f(z)$ 是关于 $z \in \mathbb{D}$ 的全纯可逆函数，且 $|f'(z)| \neq 0$ 属于 $\mathbb{D}$，则变换 $\omega = f(z)$ 将二维薛定谔方程变换为，

$$-2^{-1}\hbar^2\Delta_z\psi + (V-E)\psi = 0, \qquad z \in \mathbb{D},$$

to

$$-2^{-1}\hbar^2\Delta_w\psi + (V-E)|f'|^{-2}\psi = 0, \qquad w \in f(\mathbb{D}).$$

证明。 柯西-黎曼方程。 □

推论 5.5.1。 （半经典 *LCKS* 变换）

在满足上述关于 f, $w = f(z)$ 的假设时，可将方程（$*$）变换为：

$$2^{-1}(|\boldsymbol{\nabla}_w S|^2 - |\boldsymbol{\nabla}_w R|^2) + |f'(z)|^{-2}(V-E) = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}_w R.\boldsymbol{\nabla}_w S = 0$$

牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子与天体力学——结果总结37且如果 s 是上述时间变换，$\frac{d}{ds}=(')$，

$$\xi'=\frac{\partial}{\partial\xi}(R+S),\qquad \eta'=\frac{\partial}{\partial\eta}(R+S),$$

在适当的初始条件下。

此外，若在 C_0 上 $R(x,y)=R_{\max}$，且在 C_0 上 $|\nabla R|=0$，则变换后的 R 具有相同的性质，从而保证其收敛到相应的经典轨道 $f(C_0)$，因为

$$\frac{d}{ds}R(\xi,\eta)=\nabla_w(R+S).\nabla_w R=|\nabla R|^2\geq 0,$$

而且，若经典轨道是周期的，则时间变换有效，因为到达 $f(C_0)$ 将需要无限长的时间s 。

备注

1. (ξ,η) 是正交坐标。我们可以将新的势能函数视为$W=|f'|^{-2}(V-E)$，而新的能量为 0。因此，我们可以研究新势 W 的零能极限。

2. 现在很容易验证，$\omega=f(z)$ 将受约束的哈密顿系统$H=\mathbf{p}_2^2+V_{\text{eff}}(q)$，$(\mathbf{p}-\nabla R).\nabla R=0$, $V_{\text{eff}}=V-|\nabla R|^2$，变换为与上述系统相对应的系统。

6. 牛顿量子引力与开普勒运动偏差

本节的结果在很大程度上依赖于我们在参考文献 [15], [16] 和 [17]中关于约束哈密顿量的研究，该研究构成了渐近分析的基础。这些结果可由对原子椭圆态 $\psi_{n,e}$, $\psi_{n,e}\sim\psi_{\text{sc}}=\exp\left(\frac{R+iS}{\epsilon^2}\right)$ as $\epsilon\sim 0$取最终的玻尔对应极限而简单得出。其前提是，R 在平面 $z=0$上的开普勒椭圆 $\mathcal{E}_K$处达到全局最大值，其极坐标方程为：

$$\frac{a\,(1-e^2)}{r}=1+e\cos\theta,$$

a 为 t　椭圆轨道的半长轴与 x轴平行，e 其偏心率：

$$e=\sqrt{1+\frac{2L^2E}{\mu^2}},$$

其中 L 为轨道角动量， $E < 0$为总能量， μ 为力中心 O 处的引力质量。（参见参考文献 [6]）。为简化结果，我们需要假设初始条件：

$$R\left(\mathbf{X}_{t=0}^{0}\right) \geqslant M(\Sigma) = \lambda\left(2\left(\frac{1-e}{1+e}\right) - \ln 4\right), \qquad \lambda = (\mu a)^{1/2}.$$

6.1. 收敛到平面 $z = 0$

回顾一下，

$$\frac{\dot{z}}{z} = \frac{-\mu(\alpha+\beta+1)}{2\lambda r}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

由于 $\dot{z} = 0$ 当 $z = 0$时，轨道运动粒子需要无限长时间才能到达平面$z = 0$，因此我们试图理解这一无限时间极限下的运动，此时 $u \to e$并且

$$\alpha \to \frac{(1-e^2)}{(1+e^2-2e\cos v)}, \qquad \beta \to -\frac{2e\sin v}{(1+e^2-2e\cos v)},$$

其中 $v \nearrow \infty$、 v 为椭圆 $\mathcal{E}_K$上的偏近点角，且

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{1}{(1-e\cos v)}$$

and

$$\tan^2\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{(1-e)}{(1+e)}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

其中 θ 为轨道运动粒子的极角。因此，我们得到

$$\frac{dz}{dt} \to -\frac{1}{2}\frac{(2-e^2+2e\sin v)}{(1+e^2-2e\cos v)} \qquad \text{as} \qquad v \nearrow \infty,$$

其中我们假设 $z(0) > 0$，从而得到以下形式的收敛速率：

定理 6.1。

$$z(v) \to C\left(1+e^2-2e\cos v\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(2-e^2)}{(1-e^2)}\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{1-e}\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right),$$

其中 C 为某个常数，当 $v \nearrow \infty$ 为 $0 < e < 1$时。

6.2. 三维中收敛到开普勒椭圆

在这种情况下，开普勒坐标 (u, v) 才真正发挥作用：

$$x = \frac{2ae(\cos v - u)}{(e+u)}, \qquad y = \frac{2ae\sqrt{(1-u^2)}\sin v}{(e+u)}, \qquad v \in \mathbb{R}.$$

开普勒椭圆 $\mathcal{E}_K$ 对应于 $u = e$，奇点 Σ 对应于 $u = 1$，而 $u = -e$ 是无穷远曲线。

$$\alpha = \frac{\sqrt{(1-u^2)\,(1-e^2)}}{(1+eu-(e+u)\cos v)}, \qquad \beta = -\frac{(e+u)\sin v}{(1+eu-(e+u)\sin v)},$$

$$b_x = \frac{\mu}{2\lambda e}\frac{\Big(eu-(e-u)\cos v-(e+u)\sin v+\sqrt{(1-e^2)\,(1-u^2)}-1\Big)}{(1-u\cos v)},$$

$$b_y = \frac{\mu}{2\lambda e}\frac{\big(\sqrt{1-u^2}(e\cos v - e\sin v+1)+\sqrt{1-e^2}(u\cos v+u\sin v-1)\big)}{(1-u\cos v)}$$

以及雅可比矩阵

$$\Delta = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{4a^2e^2}{(e+u)^3\sqrt{1-u^2}}(u\cos v-1)((e+u)\cos v+1+eu).$$

在无限时间极限下，我们可以将 v 取为开普勒椭圆上的偏近点角$\mathcal{E}_K$本身。在这一前提下，我们考虑常微分方程

$$\frac{du}{dv} = \frac{b_u(u,v)}{b_v(u,v)}, \qquad \frac{du}{dt} = b_u(u,v), \qquad \frac{dv}{dt} = b_v(u,v),$$

其中在极限下

$$b_v = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{1}{(1-e\cos v)},$$

b_u 如第 2.3 节所述。由此可得一个简单的结果：

定理6.2。 对于 $v > v_0$，$(v - v_0)$ 固定为 $v_0 \nearrow \infty$，

$$\frac{u(v)-e}{u(v_0)-e} \to \left(\frac{\cos v_0+\frac{1}{2}\left(e+e^{-1}\right)}{\cos v+\frac{1}{2}\left(e+e^{-1}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\left(f(v)-f(v_0)\right)\right),$$

其中 $f(v) = \frac{v}{2} + \text{正切}^{-1}\left(\frac{1-e}{1+e}\,\text{正切}\left(\frac{v}{2}\right)\right)$.

证明。 由于 $b_u(e,\ v) = 0$,

$$\frac{d}{dv}\ln(u(v)-e) = \frac{\frac{du}{dv}}{(u-e)} = \frac{b_u(u,v)}{b_v(u,v)(u-e)} \to \frac{\frac{\partial b_u}{\partial u}(e,v)}{b_v(e,v)},$$

得到

$$\frac{d}{dv}\ln(u(v)-e) \to -\frac{1}{2}\frac{(1+e\cos v - e\sin v)}{(\cos v + \frac{1}{2}(e+e^{-1}))},$$

由此即可得出结果。

□

6.3. 过渡到经典时期

内行会将上述结果称为“半个 Nelson”。对他们而言，重要的是重复上述论证，同时纳入来自随机力学的 Nelson 噪声（参考文献 [18],[19],[20],[21]）。在这一设定中，轨道运行粒子的质量为 m_0,$\epsilon^2 = \frac{\hbar}{m_0}$，我们寻求 $m_0 \nearrow \infty$ 时的极限。在这里，我们通过假设$\epsilon = \epsilon(u) \searrow 0$（当 $u \to e$ 时）来模拟这种情况，这一变化是质量吸积的结果。在上一节中， $u(v)$（上述常微分方程的解）对应于 u^ϵ （当 $\epsilon = 0$ 时），而在半经典时期的后期， u^ϵ 满足（当 $\epsilon \sim 0$ 时）：

$$du^\epsilon = b_u(u^\epsilon, v)dt + \epsilon dN_u(t),$$

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{1}{(1-e\cos v)}, \qquad N_u(t),\ \text{Nelson noise.}$$

因此，我们将 $u(v)$记作 $u^0(v)$。
简单计算可得，对于$\mathbf{r}_v^\perp = \begin{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial v}, & -\frac{\partial x}{\partial v}\end{pmatrix}$

$$dN_u(t) = \Delta^{-1}(\mathbf{X}_t^0)\mathbf{r}_v^\perp . d\mathbf{B}(t),$$

其中$\mathbf{B}(t) = (B_x,\ B_y)$，是一个 $\mathbf{BM}(\mathbb{R}^2)$ 过程。

对椭圆异常角进行简单的时间变换 v 可得

$$dN_u(v) = \frac{(1-e\cos v)^{1/2}}{a^2 e}\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{1/4}\frac{\left(a\sqrt{1-e^2}\cos v dB_x(v) + a\sin v dB_y(v)\right)}{(\cos v - e^{-1})(\cos v + \frac{1}{2}(e+e^{-1}))}.$$

 因此，对于 W，一个 BM($\mathbb{R}$) 过程，与 B_x 和 B_y相关，

$$du^\epsilon(v) = \frac{b_u}{b_v}dv + \frac{\epsilon(u^\epsilon)\sqrt{1-e^2}\sqrt{1+e\cos v)}}{(a\mu)^{1/4}(\cos v + \frac{1}{2}(e+e^{-1}))}dW(v).$$

假设 $\epsilon(u = e) = 0$，令 $v \nearrow \infty$，得到

$$d\ln\left(\frac{u^\epsilon - e}{u^0 - e}\right) = \frac{\epsilon'(e)\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e\cos v}}{(a\mu)^{1/4}(\cos v + \frac{1}{2}(e+e^{-1}))}dW(v).$$

因此，如果在这一时期，u^ϵ 和 u^0 最初一致，

$$u^\epsilon(v) = (u^0(v) - e)\exp\left(\frac{\epsilon'(e)\sqrt{1-e^2}}{(a\mu)^{1/4}}W(g(v))\right),$$

其中

$$g(v) = \int_{v_0}^{v}\frac{(1+e\cos v)}{(\cos v + \frac{1}{2}(e+e^{-1}))^2}dv.$$

对于较小的偏心率 $e \sim 0$，我们得到对数正态结果:

$$\ln\left(\frac{u^\epsilon - e}{u^0 - e}\right) \sim \frac{2e\epsilon'(e)}{(a\mu)^{1/4}}W(v) \qquad \text{as} \qquad v \sim \infty,$$

其中 v 是开普勒椭圆 $\mathcal{E}_{u=e}$上的偏近点角。

更一般地，当 $v \sim \infty$时，

$$\ln\left(\frac{u^\epsilon(v) - e}{u^0(v) - e}\right) \sim \frac{2e\epsilon'(e)}{\sqrt{1-e^2}(a\mu)^{1/4}}W\left(\frac{2}{(1-e^2)}\tan^{-1}\left(\frac{1-e}{1+e}\tan\frac{v}{2}\right) + \frac{e\sin v}{(1+2e\cos v + e^2)}\right),$$

and

$$\left[\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(v^\epsilon(v) - v)\right]_\alpha^\beta \sim \int_\alpha^\beta \frac{\partial b_v}{\partial u}(e,v)(u^\epsilon(v) - e)(1 - e\cos v)dv,$$

其中，v^ϵ 是 $\mathcal{E}_{u^\epsilon}$上的偏近点角。

这些是关于Lena、Delande和Gay的原子椭圆态，在以开普勒坐标表示的经典轨道邻域内，对开普勒定律进行一阶近似所得的纳尔逊量子修正。我们希望对 $\epsilon = \epsilon(u) = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0}}$进行更全面的研究，其中 $m_0 = m_0(u) \sim \infty$ 为 $u \to e$, m_0 大到

牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子与天体力学——结果总结42$\epsilon(u=e) = O(\epsilon_0^2)$, 其中 $\epsilon_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_{00}}}$, m_{00} 为质量吸积开始前轨道运动粒子的初始质量。

6.4. 复运动常数

对于定态, $\psi_{n,\,e}$, 哈密顿量 $H = 2^{-1}\mathbf{P}^2 - \mu|\mathbf{Q}|^{-1}$ 是一个常数, $H = E$, $E < 0$ 为能量。此外, 若 $\tilde{\mathbf{A}} = (-2E)^{-1/2}\mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ 为汉密尔顿–伦茨–朗格矢量, 而 $\mathbf{L}$ 为轨道角动量, 则$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{L}$ 是生成动力学对称群 SO(4) 的量子运动常数。令 $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a_1}, \tilde{a_2}, \tilde{a_3})$, $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$分别等于$\mathbf{A}$和$\mathbf{L}$ 在笛卡尔坐标的玻尔极限下定义的玻尔对应极限,

$$\tilde{a_i} = \lim \psi_{n,e}^{-1}\tilde{A}_i\psi_{n,e}, \qquad \ell_i = \lim \psi_{n,e}^{-1}L_i\psi_{n,e}, \qquad i = 1,2,3,$$

其中 $\psi_{n,\,e} \neq 0$, 对于$\mathbf{Z} = \lim(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}\ln\psi_{n,\,e})$, $\mathbf{Z} = -i\boldsymbol{\nabla}R + \boldsymbol{\nabla}S$, 我们得到 $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{Z}(\mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \mathbf{Z} \wedge (\mathbf{Z} \wedge \mathbf{r}) - \mu r^{-1}\mathbf{r}$, 这些半经典变量继承了泡利恒等式对$\mathbf{L}$和$\mathbf{A}$的适用性。因此, 定义 $\tilde{\mathbf{a}} = (-2E)^{-1}\mathbf{a}$, 可得以下恒等式:

$$\begin{aligned}
\ell_3 + \tilde{a_1}\sin\theta &= \lambda \qquad (1)\\
\ell_1\cos\theta + i\ell_2 - \tilde{a_3}\sin\theta &= 0 \qquad (2)\\
\tilde{a_3}\cos\theta + \ell_1\sin\theta &= 0 \qquad (3)\\
\tilde{a_1}\cos\theta + i\tilde{a_2} - \ell_3\sin\theta &= 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

其中 $\sin\theta = e$, 即偏心率。（参见文献 [16],[17]）。这里 E 必须是经典能量。将关于 $\lambda = \mu(-2E)^{-1/2}$, 的方程结合起来

$$\begin{aligned}
(1)\times\sin\theta + (4)\times\cos\theta \qquad & \tilde{a_1} + i\tilde{a_2}\cos\theta = \lambda\sin\theta \qquad (\mathrm{i})\\
(2)\times\cos\theta + (3)\times\sin\theta \qquad & \ell_1 + i\ell_2\cos\theta = 0 \qquad (\mathrm{ii})
\end{aligned}$$

因此 $\ell_1 = -i\ell_2\cos\theta$, 代入式（3）得

$$\begin{aligned}
\tilde{a_3} - i\ell_2\sin\theta &= 0 \qquad (\mathrm{iii})\\
\ell_3 - i\tilde{a_2}\sin\theta &= \lambda\cos\theta \qquad (\mathrm{iv})
\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{r}} + i\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{i}}$, $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{r}} + i\tilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{i}}$, r 为实部, i 为虚部, 假设分母非零,

$$\frac{\ell_3^{\mathrm{i}}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}}} = -\frac{\tilde{a}_3^{\mathrm{r}}}{\ell_2^{\mathrm{i}}} = \frac{\tilde{a}_3^{\mathrm{i}}}{\ell_2^{\mathrm{r}}} = e, \qquad \frac{\ell_1^{\mathrm{i}}}{\ell_2^{\mathrm{r}}} = -\frac{\ell_1^{\mathrm{r}}}{\ell_2^{\mathrm{i}}} = \frac{\tilde{a}_1^{\mathrm{i}}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}}} = -\sqrt{1-e^2}.$$

这样便得到方程 (i) 和 (iv) 的实部, 其中 $\psi_{\mathrm{sc}} \neq 0$,

$$\cos\theta = \frac{\lambda\ell_3^{\mathrm{r}} + \tilde{a}_1^{\mathrm{r}}\tilde{a}_2^{\mathrm{i}}}{(\ell_3^{\mathrm{r}})^2 + (\tilde{a}_1^{\mathrm{r}})^2}, \qquad \sin\theta = \frac{\lambda\tilde{a}_1^{\mathrm{r}} - \ell_3^{\mathrm{r}}\tilde{a}_2^{\mathrm{i}}}{(\ell_3^{\mathrm{r}})^2 + (\tilde{a}_1^{\mathrm{r}})^2}; \qquad \sin\theta = e.$$

（参见 [22]）。

6.5. 开普勒问题中的 *0/0* 极限

最后两个恒等式是牛顿关于行星运动的结果的推广：

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\Lambda E}{\mu}}, \qquad \Lambda = \frac{(\ell_3^{\mathrm{r}})^2}{\mu},$$

Λ 为 $\mathcal{E}_K$（开普勒椭圆）的半通径。当 $z \to 0$ 趋近于 $\mathcal{E}_K$所在平面时，在 $\mathcal{E}_K$的三维邻域内，除 ℓ_3^{r}和$\tilde{a}_1^{\mathrm{r}}$外，上述可观测量在极限下为零或很小 $O(|\boldsymbol{\nabla} R|)$，其中 $|\boldsymbol{\nabla} R| \to 0$在我们趋近 $\mathcal{E}_K$时。

In f作用 $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{i}} = -(\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\nabla} R)$，$\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{r}} = (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\nabla} S)$，$\mathbf{a}^{\mathrm{i}} = -\boldsymbol{\nabla} S \wedge (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\nabla} R) - \boldsymbol{\nabla} R \wedge (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\nabla} S)$，
$\mathbf{a}^{\mathrm{r}} = -\boldsymbol{\nabla} S \wedge (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\nabla} S) - \boldsymbol{\nabla} R \wedge (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\nabla} R) - \dfrac{\mu}{|}\mathbf{x}|\mathbf{x}$当 $z = 0$、$\ell_1^{\mathrm{i}} = \ell_2^{\mathrm{i}} = \ell_1^{\mathrm{r}} = \ell_2^{\mathrm{r}} = 0$ 时，给出

$$\frac{\ell_3^{\mathrm{i}}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}}} \to \frac{\left(y\dfrac{\partial R}{\partial x} - x\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)\sqrt{-2E}}{r\left(\dfrac{\partial S}{\partial r}\dfrac{\partial R}{\partial y} + \dfrac{\partial S}{\partial y}\dfrac{\partial R}{\partial r}\right)},$$

$$\frac{\tilde{a}_1^{\mathrm{i}}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}}} \to \frac{\left(\dfrac{\partial S}{\partial r}\dfrac{\partial R}{\partial r} + \dfrac{\partial R}{\partial r}\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial S}{\partial r}\dfrac{\partial R}{\partial y} + \dfrac{\partial S}{\partial y}\dfrac{\partial R}{\partial r}\right)}.$$

由于上述是通过洛必达法则得到的 C^1 关于 u 的 $u \in$ 函数$(e, e + \delta e)$

$$\frac{\ell_3^{\mathrm{i}}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}}} \to \left.\frac{\dfrac{d}{du}\left(y\dfrac{\partial R}{\partial x} - x\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)\sqrt{-2E}}{r\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial S}{\partial r}\dfrac{\partial R}{\partial y} + \dfrac{\partial S}{\partial y}\dfrac{\partial R}{\partial r}\right)}\right|_{u=0} \qquad \text{as } u \to e,$$

牛顿量子引力、弱相互作用大质量粒子与天体力学——结果总结44，且对 $\begin{smallmatrix}\tilde{a}_1^{\mathrm{i}}\\ \tilde{a}_2^{\mathrm{r}}\end{smallmatrix}$ 也有类似结果。因此，对于 $\mathcal{E}_K$ 邻域内的二维运动，对恒等式 $\tilde{a}_1^{\mathrm{i}} + \sqrt{1-e^2}\tilde{a}_2^{\mathrm{r}} = 0$, $\ell_3^{\mathrm{i}} - e\tilde{a}_2^{\mathrm{r}} = 0$ 关于 u 求导，

$$\left.\frac{\tilde{a}_1^{\mathrm{i}\prime}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}\prime}}\right]_{u=e} = -\sqrt{1-e^2}, \qquad \left.\frac{\ell_3^{\mathrm{i}\prime}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}\prime}}\right]_{u=e} = e\sqrt{-2E}, \ \ \forall v,$$

i.e.

$$\frac{\tilde{a}_1^{\mathrm{i}}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}}} = -\sqrt{1-e^2}, \qquad \frac{\ell_3^{\mathrm{i}}}{\tilde{a}_2^{\mathrm{r}}} = e\sqrt{-2E}, \ \ \forall v,$$

因此，左侧各项在 $\mathcal{E}_K$ 上为常数

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{\lambda\ell_3^{\mathrm{r}} + \tilde{a}_1^{\mathrm{r}}\tilde{a}_2^{\mathrm{i}}}{(\ell_3^{\mathrm{r}})^2 + (\tilde{a}_1^{\mathrm{r}})^2}, \qquad e = \frac{\lambda\tilde{a}_1^{\mathrm{r}} - \ell_3^{\mathrm{r}}\tilde{a}_2^{\mathrm{i}}}{(\ell_3^{\mathrm{r}})^2 + (\tilde{a}_1^{\mathrm{r}})^2}.$$

这些结果源自 SO(4) 对称性。请注意，我们已经证明 $\begin{smallmatrix}\ell_3^{\mathrm{i}}\\ \tilde{a}_2^{\mathrm{r}}\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}\tilde{a}_1^{\mathrm{i}}\\ \tilde{a}_2^{\mathrm{r}}\end{smallmatrix}$ 在开普勒椭圆 $\mathcal{E}_K$ 上保持不变，并证明了 e 和 $\sqrt{1-e^2}$ 的最后两个表达式，尽管后两者只是牛顿的结果。本文讨论的各向同性振子也可以得到类似的结果。

7. 结论

我们已经看到，在玻尔对应极限下，暗物质粒子处于原子椭圆态时，牛顿引力的渐近行为为 $\psi_{n,\ e}$；对于开普勒问题（以及经 LCKS 变换后得到的各向同性简谐振子椭圆态），这一行为自然会使轨道收敛到其经典对应轨道。这有助于解释木星等行星如何能在数百万年内形成，以及土星环等行星环系统如何形成——仅靠随机碰撞无法解释这一现象。这些结果的典型例子是定理 3.2 及其前面的论证。此外，我们还看到，各向同性振子的渐近行为适用于特洛伊小行星及其可能形成过程中的线性化限制性三体问题，同时也更一般地给出了该运动的两个新常数。关于这一问题的量子曲率，还有一些新结果将在即将发表的工作中给出（参考文献 [28]）。

此外，在这一背景下，我们还看到，对于此处动力学对称群 SO(4) 和 SU(3) 的生成元，泡利方程的玻尔对应极限会导出 8 个恒等式，其中涉及空间函数 R 和 S，其中 $\psi \sim \exp\left(\frac{R+iS}{\epsilon^2}\right)$ as $\epsilon^2 = \frac{\hbar}{m} \to 0$， m 为粒子质量。这些恒等式体现了复运动常数，涉及半经典角动量和哈密顿-楞次-龙格矢量的实部与虚部。其中一条恒等式在这一半量子框架下，精确对应于牛顿在《自然哲学的数学原理》中关于旋进轨道的结果（参考文献 [3]）。

当然，这些结果中的一些揭示了开普勒定律的量子修正，可能为检验我们观点的有效性提供实验依据。因此，我们还更详细地说明了半经典暗物质粒子（例如弱相互作用大质量粒子）在其对应的经典开普勒椭圆轨道邻域内的运动。对于在中子星磁场中带有一定电荷的弱相互作用大质量粒子，这些结果仍然适用。（参见即将发表的论文，参考文献 [27]）。

此外，我们还研究了柯西特征线法如何用于这一框架，以证明定态情况下关于函数 R 和 S 的基本方程的存在唯一性定理。这里仅举一个例子，说明形式为 R 的量子粒子密度极限如何决定相应的函数S。我们展示了对于零能幂律，该极限如何给出二维空间中正确的极限轨道。不言而喻，鉴于角动量守恒意味着最终的运动是平面的，这类结果对于这一背景下所有中心力问题都具有参考意义。我们计划今后给出更多此类结果。

最后，我们以开普勒问题中出现的半经典轨道这一范例作结——半经典圆形螺旋轨道，我们称之为量子螺旋。它对应于半径为 a 、中心为 O、周期为 $2\pi a_1^{\frac{3}{2}}$ 的经典圆轨道，其中$\mu^2\mu$ 是位于 O处的引力点质量。在经典开普勒问题中从未出现螺旋结构，但初量子化开普勒问题中却充斥着螺旋结构。这是否可能是这样一种结果的成因之一：70%的星系是旋涡星系，不到30%是椭圆星系，而旋涡星系比椭圆星系年轻？在这里，我们可以设想，粒子构成的原星系星云处于这样一种状态：它是不同偏心率、不同大小的正交天文椭圆态的叠加，这些态分别局域于星系的不同区域。偏心率为零的情况很容易分析。

为简化表述，我们取长度单位为 a ，时间单位为 $2\pi a_1^{\frac{3}{2}}$ 。μ^2在这些假设下，令$\mathbf{X}_t^0 = (x_t, y_t, z_t)$，并设定 $r_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}$、 $z_t = r_t\cos(\theta_t)$以及 $\phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{y_t}{x_t}\right)$. R。 $\bar{S}$在参考文献 [8] 中给出了明确表达式，并证明了对于 r_t、 $t \geq 0$，其半经典方程为

$$\dot{r_t} = \frac{1}{r_t} - 1.$$

给定 $r_0 > 1$，对于 $r_t > 1, \dot{r_t} < 0$，我们有

$$r_t - 1 = T(t)\mathrm{e}^{-r_t},$$

其中，如果 $t > r_0 + \ln(r_0 - 1)$，则有 $T(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{r_0}(r_0 - 1) < 1$。对于足够大的 t，根据拉格朗日展开可得

$$r_t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(T(t))^n}{n!} D_a^{n-1}(\mathrm{e}^{-na})\rceil_{a=1}$$

i.e.

$$r_t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{n!} \mathrm{e}^{-nr_0}(r_0 - 1)^n(-n)^{n-1}\mathrm{e}^{-n} \to 1 \qquad \text{as} \qquad t \nearrow \infty.$$

我们还在同一篇参考文献中证明了

$$z_t = r_t \cos(\theta_t) = \frac{r_t}{r_0} \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{r_s^2}\right) z_0 \to \frac{r_t}{r_0} z_0 \mathrm{e}^{-t} \to 0 \qquad \text{as} \qquad t \nearrow \infty$$

而且，

$$r_t^2 \dot{\phi}_t \to 1 \qquad \text{as} \qquad t \nearrow \infty.$$

这是螺旋轨道在无限时间极限下收敛到偏心率为零的开普勒椭圆的最简单示例——见下文图 5。在我们的半经典处理中，对于偏心率为 e、$0 < e < 1$ 的任意开普勒椭圆，也能得到相同结果。

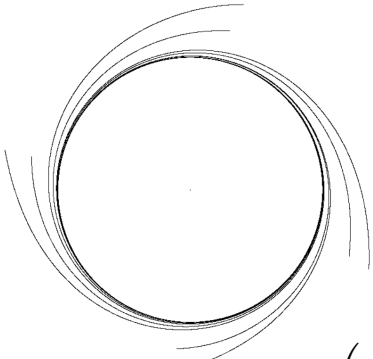


图 5。$\psi_{n,\ n-1,\ n-1}(x,\ y,\ z) = (x+iy)^{n-1}\exp\left(-(x^2+y^2+z^2)\right.$

$\left.\epsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

上图展示了计算机模拟的过程：一个具有 4 条后随旋臂的旋涡星系，其结构转变为偏心率为零的椭圆星系。这一过程很容易推广，并表明可观测宇宙中存在大量暗物质及其他类似物质，其行为符合对开普勒问题进行初量子化所得的预测。因此，本研究探讨其渐近行为。我们认为，首先应在旋涡星系旋臂中的非相对论分子气体里寻找这些物质。要检验我们的想法，需要测量星系旋臂尾部粒子轨迹的量子曲率和挠率。对于圆形开普勒轨道

对于螺旋结构，可以计算轨道在三维中的量子曲率和量子挠率 $\mathbf{X}_t^0 = (x,\ y,\ z)$，即。

$$\kappa_q = \pm\frac{a^2(2(2z^2r^2+\rho^4)z^2\rho^2+(2ar^3-\rho^4)^2)^{\frac{1}{2}}}{(2a^2r^2-2a\rho^2r+\rho^4+\rho^2z^2)^{\frac{3}{2}}\rho},$$

$$\tau_q = \frac{(3\rho^8-a(\rho^4+z^4)r^3)z}{2(2z^2r^2+\rho^4)z^2\rho^2r^2+(2ar^3-\rho^4)^2r^2},$$

其中 $r^2 = x^2+y^2+z^2$、$\rho^2 = x^2+y^2$ 和 $a = \frac{\lambda^2}{\mu}$ 是相应经典圆轨道的半径。

这些测试可能不切实际，因此我们给出两个更简单的测试——反重力和螺旋分裂。

反重力

在无穷远处的椭圆上，其方程为 $u = -e$，对于任意偏心率 e、$0 < e < 1$、$b_u = b_v = 0$ $-$ T ，我们的半经典云粒子具有速度 $\sim \frac{a}{T}$；其中，$\sim \frac{a}{T}$ 是偏心率为 e的椭圆的周期，a 是半长轴。简单计算表明，有效势 $V_{\text{eff}} \sim \frac{\mu}{r} \sim \infty$，对应于任意 e下的反-r重力效应。事实上，对于上述平面 $z = 0$内的圆形螺旋，很容易验证这一点，其中

$$V_{\text{eff}} = \frac{\mu}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{\mu^2}{\lambda^2},\quad r > 0,\quad V'_{\text{eff}}(2a) = 0.$$

下图比较了 V（黑线）和 V_{eff}（红线）的图形。

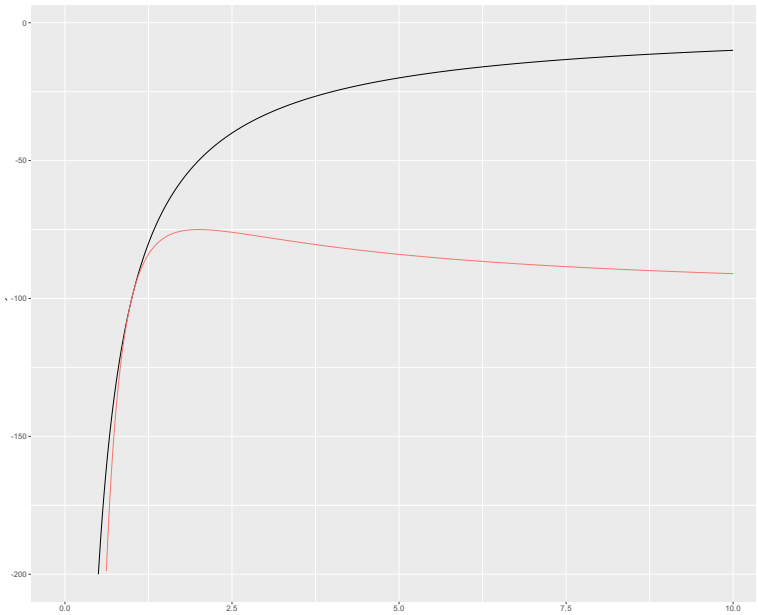


图 6。

因此，在这种情况下，类弱相互作用大质量粒子接近圆形轨道 $r = 2a$ 时会减速，之后则会加速。对于较小的偏心率 e，也有类似的结果。

当然，当 $e > 1$ 相应的双曲轨道（$E > 0$）可能会被误认为是反重力效应，以及星系中嵌入的惯性系之间存在排斥力。

叠加与螺旋分裂

将半经典方程的两个定态解叠加起来（它们的能量可能不同），$\phi = \phi_1 + \phi_2$，其中

$$\phi_j \sim \exp\left(\frac{R_j + iS_j}{\epsilon^2}\right), \quad j = 1, 2 \text{ and } \phi \sim \exp\left(\frac{R + iS}{\epsilon^2}\right) \text{ as } \epsilon \sim 0$$

得到

$$R \sim \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} R_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} R_2, \quad \rho_j = \exp\left(\frac{2R_j}{\epsilon^2}\right), \quad j = 1, 2.$$

因此，渐近行为的主导项给出了形式上的结果，

$$R \sim R_{\mathrm{M}}, \quad R_{\mathrm{M}}(r) = \max(R_1(r), R_2(r)),$$

$S \cong S_{\mathrm{M}}$, $R + iS \cong R_{\mathrm{M}} + iS_{\mathrm{M}}$, $\boldsymbol{\nabla} R \cong R_{\mathrm{M}}$, $\boldsymbol{\nabla} S \cong S_{\mathrm{M}}$，在形式极限 $\epsilon \sim 0$ 下。（参见 Kolokoltsov 和 Maslov，参考文献 [11]）。如果我们认真看待这一结论，并将其应用于两个圆形螺旋状态，那么它对天体力学中环系统的形成有何启示?

根据泰勒定理，对半径为 a_j, $j = 1$, 2 的情况，将 R_{j} 近似为，因为

$$R \sim -\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(r - a - a\ln\frac{r}{a}\right), \text{ so } \rho_j(r) \sim \exp\left(\frac{R_j''(a_j)}{\epsilon^2}(r - a_j)^2\right) \text{ as } \epsilon \sim 0, \text{ giving}$$

$$\rho_j(r) \sim \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{a_j^3}}\frac{(r - a_j)^2}{\epsilon^2}\right) \text{ as } \epsilon \sim 0,$$

对于我们的圆形螺旋结构。因此，如果我们询问何时 $R_1(r) = R_2(r)$，便得到两个圆 $r = r_{\pm}(a_1, a_2)$，其中

$$\frac{r - a_1}{a_2 - r} = \pm\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad 0 < r_- < a_1 < r_+ < a_2 < \infty.$$

这意味着，在这个相当粗略的极限下，圆周 $r = r_{\pm}$ 上会发生螺旋分裂；当然，$r = r_+$ 会最为显著，分裂角 θ_{12} 的值由下式给出

$$\cos\theta_{12} = \boldsymbol{\nabla}(\widehat{R_1 + S_1}).\boldsymbol{\nabla}(\widehat{R_2 + S_2})\rceil_{r=r_\pm}.$$

因此，我们可以对环系统的形成设想进行粗略而直接的检验。此外，这也给出了像我们自身这样的行星系统的波函数的半经典极限。

$_n$令 $\phi = \sum_{j=1} \chi_{(R_M=R_j)} c_j \phi_j$、 ϕ_j分别对应共面圆形螺旋轨道，其半径为a_j、 a_1， a_2，$\cdots$， a_n，并按升序排列；对其归一化，使得 $|\phi_j(a_j)| = 1$且$c_j > 0$，其中 c_j^2 表示圆形轨道上的弱相互作用大质量粒子最终落入第 j^{th} 个环的相对概率。我们知道，当 $|r - a_i|$足够小时， $R_{\text{M}}(r) = R_i(r)$。我们将 $\triangle^+ r_i$、$r = (a_i + \triangle^+ r_i)$、 $\triangle^+ r_i > 0$记作 $|r - a_i|$，其中 $|r - a_i|$ 是满足方程 $R_{\text{M}}(r) = R_i(r)$中的 i 发生变化（即 $R_i(r) = R_k(r)$）的最小值，对某个 k、 $0 < k \leq n$而言。

Corollary 7.0.1. *Potentially* $\triangle^+ r_i = \min_{i \neq j} \left(\dfrac{\pm \left(\dfrac{a_i}{a_j}\right)^{\frac{3}{4}}}{1 \pm \left(\dfrac{a_i}{a_j}\right)^{\frac{3}{4}}} (a_j - a_i) \right)$, *but only the*

加号是相关的，而其中只有最小值为正的那些才相关。

证明。只有加号给出 $\triangle^+ r_i > 0$，正如我们所见。令 $\alpha = \left(\dfrac{a_i}{a_j}\right)^{\frac{3}{4}}$，对于 $j > i$，$0 < \alpha < 1$；对于 $j < i$， $\alpha > 1.$。因此注意到，对于减号，当 $j > i$时，$a_j - a_i > 0$

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha}(a_j - a_i) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}(a_j - a_i) < 0$$

当 $j < i$时， $a_j - a_i < 0$，且 $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} < 0$。

□

类似地，我们定义 $\triangle^- r_i$为 $r = r_i - \triangle^- r_i, \triangle^- r_i > 0$，其中 $R_{\text{M}}(r) = R_i(r)$开关。

推论 7.0.2。

$$\triangle^- r_i = \min_{i \neq j} \left| \frac{\left(\dfrac{a_i}{a_j}\right)^{\frac{3}{4}}}{1 - \left(\dfrac{a_i}{a_j}\right)^{\frac{3}{4}}} (a_j - a_i) \right|.$$

这使我们能够反向推导出星云共面圆形组分的波函数，而这些组分随后会形成太阳系的一部分，例如我们自己的太阳系——金星、地球、火星、木星、土星、天王星和海王星。

到目前为止，我们尚未详细讨论方程中经典轨道之外的 S 项必须是梯度这一要求（参见第29页的（R，V）方程）。仔细研读Nelson关于随机力学的原始思想可知，当这一条件不成立时，以太必然存在某种潜在运动，从而使薛¨定式中所包含的牛顿 2^{nd} 定律的随机版本失效。在我们的定式中，在相应阶段（暂不考虑矢势的可能性），我们只能得出不存在满足我们要求的定态这一结论。鉴于我们用来检验这一薛¨定图景渐近行为的天文尺度长度，如果这种情况有时在此处发生，也并不令人意外。真正令我们惊叹的是，本文所研究状态的薛¨定波函数的渐近行为（尤其是Lena、Delande和Gay的天文椭圆态）似乎不仅能够解释大质量行星和太阳系本身环系统的迅速形成，还能够解释某些星系的演化。这些正是检验我们思想的实验室，正如我们未来的工作将展示的那样。

最后，我们加入一幅根据第（5）节末尾的分析绘制的示意图，展示受 Whittaker 启发的库仑势、简谐振子势和暗能量势（参见文献[29]）。（另见文献 [25]）。

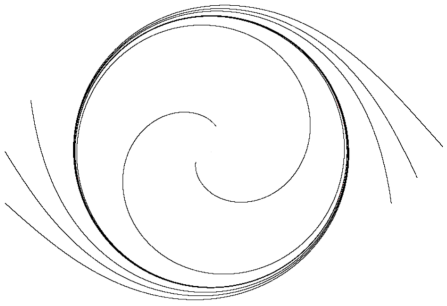


图 6。

我们的所有结果都引出了这样一个问题：我们的工作如何融入数理物理和广义相对论的更广阔背景，尤其是与木星的影响和马赫原理相关的部分。参考文献 [28] 讨论了这两方面；文中我们给出了拉格朗日等边三角形解在三体问题中的推广、经典情形下关于傅科摆的新结果，以及这些结果对量子情形的影响。在我们所讨论的牛顿绝对空间背景下，(HJI - Hamilton-Jacobi-Integral) 方程（第 17 页）解决了马赫原理可能带来的任何问题。尽管 2027年是牛顿逝世周年纪念日，我们仍相信牛顿依然活着。

献辞与致谢

谨以此作献给迈克尔·阿蒂亚爵士。他是我们其中一人的私人导师和朋友，也是激励我们所有人的榜样；我们深切怀念他。我们也很荣幸向我们的老师 G.B.S、G.R.S.、J.C.T. 和 D.W. 致谢。

参考文献

[1] Albeverio, S. Blanchard, P. 和 Høegh-Krohn, R.，《行星和卫星轨道的随机模型：对提丢斯-波得定则的一种解释》，《数学论述》1，365–373（1983）。[2] Bohr, N.，《关于量子理论在原子结构中的应用。I. 量子理论的基本假设》，《物理学杂志》13，117–165（1923）。[3] Chandrasekhar, S.，《面向普通读者的牛顿《原理》（克拉伦登出版社，牛津，1995）。[4] Dirac, P.A.M.，《量子力学讲义》（多佛出版社，纽约，1964）。[5] Durran, R.、Neate, A. 和 Truman, A.，《神圣发条装置：玻尔对应原理与原子椭圆态的纳尔逊随机力学》，《数学物理学杂志》49(3)，032102（2008）。[6] Durran, R.、Neate, A.、Truman, A. 和 Wang, F.-Y.，《论神圣发条装置：原子椭圆态的纳尔逊扩散生成元在对应极限下的谱隙》，《数学物理学杂志》49(10)，102103（2008）。[7] Durran, R.、Neate, A.、Truman, A. 和 Wang, F.-Y.，《原子椭圆态的对应极限》，《欧洲物理快报》84(3)，30003（2008）。[8] Durran, R. 和 Truman, A.，《微行星扩散》，载于《随机力学与随机过程》（斯旺西，1986），《数学讲义》第1325卷（施普林格，柏林，1988），第76–88页。[9] Gay, J. C.、Delande, D. 和 Bommier, A.，《在经典椭圆轨道上具有最大局域性的原子量子态》，《物理评论A辑》39，6587–6590（1989）。[10] Hille, E.，《常微分方程讲义》（艾迪生-韦斯利出版社，大不列颠，1969）。[11] Kolokoltsov, V.N.、Maslov, V.P.，《幂等分析及其应用》（施普林格，多德雷赫特，1997）。[12] Lena, C.、Delande, D. 和 Gay, J. C.，《原子椭圆态的波函数》，《欧洲物理快报》15(7)，697–702（1991）。[13] Lynden-Bell, D.，《推广至牛顿奇迹的哈密顿偏心率矢量》，《天文台》- 迪德科特。126(1192)，176–182（2006）。[14] Makowski, A.J. 和 Gorska, K.J.，《分数角动量和整数角动量波函数》，《物理学杂志A辑》40，11373–11383（2007）。[15] Neate, A. 和 Truman, A.，《一种用于行星环系统及木星和土星卫星形成的伯格斯-泽尔多维奇随机模型》，《数学物理学杂志》54(3)，033512（2013）。[16] Neate, A. 和 Truman, A.，《开普勒-库仑问题的半经典波函数与半经典动力学》，《物理学杂志A辑》47(22)，225302（2014）。[17] Neate, A. 和 Truman, A.，《库仑势的半经典随机力学及其在暗物质研究中的应用》，《数学物理学杂志》57(5)，052103（2016）。[18] Nelson, E.，《布朗运动的动力学理论》（普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1967）。[19] Nelson, E.，《量子涨落》（普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1985）。[20] Nelson, E.，《场论与随机力学的未来》，载于《经典与量子系统中的随机过程》（会议论文集，阿斯科纳，瑞士，1985），《物理学讲义》第262卷（施普林格，柏林，1986），第438–469页。[21] Nelson, E.，《随机力学综述》，《物理学杂志：会议系列》361(1)，012011（2012）。.[22] Pauli, W.，《从新量子力学的观点看氢光谱》，《物理学杂志》36，336–363（1926）。

[23] Rothe, H. J. 和 Rothe, K. D.，《受约束哈密顿系统的经典与量子动力学》，世界科学出版社《物理学讲义》（世界科学出版社，2010）。[24] Schiff, L.I.，《量子力学》（麦格劳-希尔，1968）[25] Silbergleit, A. 和 Chernin, A.，《暗能量存在下的开普勒问题与宇宙局域流》（施普林格物理学简明教程，2019）。[26] Stiefel, E.L. 和 Scheifele, G.，《线性与正则天体力学》（施普林格，纽约，1971）。[27] 《玩具中子星的赤道轨道导论》，编写中。[28] 《限制性三体问题的半经典分析》，编写中。[29] Whittaker, E.T.，《粒子与刚体解析动力学论》（剑桥大学出版社，1937）。

本研究完成时，我们收到了一篇论文的副本。该论文包含更完整的参考文献，也与纳尔逊随机力学有关：

Cresson, J.、Nottale, L. 和 Lehner, T.：《牛顿动力学的随机修正与诱导势——在旋涡星系和暗势中的应用》，《数学物理学杂志》62，072702（2021）。