arXiv:2302.01993v3 [physics.plasm-ph] 9 Sep 2023

ALLIANCE：动理等离子体湍流谱求解器

Evgeny A. Gorbunov[a],Bogdan Teaca[b]

[a] *Coventry University, Priory street, CV1 5FB, Coventry, United Kingdom*
[b] *University of Craiova, 3 A.I. Cuza Street, Craiova, 200585, Romania*

摘要

ALLIANCE[1] 代码旨在求解板条几何下的一组新型四维电磁漂移动理学方程 [1]。这些非线性方程适用于研究尺度与离子回旋半径相当或更大的磁化等离子体系统。具体而言，该代码适合研究天体物理等离子体中的动理学湍流级联，同时能够保留流体-动理学转变处的有限拉莫尔半径效应。求解的方程采用傅里叶-拉盖尔-埃尔米特形式，非线性项采用伪谱方法处理，并且代码支持沿多个方向进行并行计算。介绍代码后，文中展示了验证计算结果，并给出了串行和并行计算的基准测试。

关键词：　漂移动理学 方程、等离子体湍流、伪谱　　求解器

1. 引言

在强磁化等离子体中，陀螺动理学（GK）形式体系 [2] 用于研究实验室中的聚变 [3, 4] ，以及天体物理条件下的动理学阿尔芬波湍流 [5, 6, 7]。该形式体系由麦克斯韦-弗拉索夫动理学方程系统 [8], 推导而来，其基本假设之一是，可以将带电粒子的快速回旋运动从运动方程中消去，从而将问题的维度由六维降至五维。快速回旋运动引起的极化效应通过回旋平均算子加以考虑；在傅里叶空间中，这些算子可表示为与贝塞尔函数相乘。回旋平均操作的物理意义在于考虑回旋粒子的有限拉莫尔半径（FLR）。

陀螺动理学（GK）形式体系已被有效用于研究特征尺度（$\ell \sim 1/k$）与离子回旋半径（即 $k_\perp \rho_i \approx 1$）相当及更小尺度上的天体物理等离子体湍流。在这些尺度上，等离子体完全处于动理学状态，流体描述不足以捕捉相关的线性和非线性相混合。然而，由于在大于离子回旋半径的尺度上，速度结构的非线性混合会变弱，因此，考虑到所求解的相关物理过程，陀螺动理学方程的计算成本正变得越来越高。于是，人们提出了简化模型 [9, 10, 11, 12] ，用于描述远大于离子回旋半径的尺度（$k_\perp \rho_i \gg 1$），以期理解天体物理条件下有效的流体-动理系统。太阳风就是一个例子，其平行与垂直特征尺度之比 $l_\parallel / l_\perp$ 很大（ [13] ，其中 $l_\parallel \approx 1$ AU， $l_\perp = \rho_i \approx 10^2$ km [14]），这也使得这种方法得以应用。此外，太阳风原位观测 [15, 16, 17] 和数值模拟 [18, 19, 20] 均显示存在所谓的谱“膝点”，其特征是不同物理量在 $k_\perp \rho_i \approx 1$ 尺度处出现谱断裂，因此，人们也希望能建立一组简化方程，至少在定性上描述这一转变。

离子拉莫尔半径转变的确切机制仍在研究之中，需要一种模型，使我们能够详细研究这一转变及流体-动理学转变，同时比陀螺动理学计算效率更高。为了有意义地研究 $k_\perp \rho_i \approx 1$ 以上的尺度，并尽可能减少限制性假设，可以采用傅里叶-拉盖尔-厄米分解 [21], keep

[1]ALLIANCE - 动理等离子体湍流谱求解器*Email addresses:* gorbunove@uni.coventry.ac.uk (Evgeny A. Gorbunov), bteaca@gmail.com (Bogdan Teaca)

通过考虑回旋动理学分布函数的前两个（第 0 阶和第 1 阶）拉盖尔矩，保留在 $k_\perp \rho_i \approx 1$ 处变得重要的有限拉莫尔半径动力学，然后才应用漂移动理学极限 $k_\perp \rho_i \ll 1$。由此得到的电磁漂移动理学方程组是四维的，包含三个空间方向和一个平行速度维度。作者在 [1]中推导出了这组新的板条几何四维电磁漂移动理学方程，它考虑了有限拉莫尔半径效应。

为了求解这一漂移动理学系统，我们开发了新的代码 ALLIANCE，并在此进行介绍。ALLIANCE 随时间演化 GK 分布函数的前两个拉盖尔矩；对于空间方向，采用伪谱方法求解非线性项，而平行速度方向则通过厄米分解进行刻画。这种谱表达使我们能够研究空间方向上的动理学湍流级联，同时考虑平行速度混合，从而建立流体湍流与动理学湍流之间的联系。

本文组织如下：第 2 节介绍以数值求解形式给出的漂移动理学方程，并说明所有必要的预备信息，以帮助读者清晰理解物理系统。接着，第 3 节讨论方程的数值实现，包括并行化和数值格式。第 4 节展示初始模拟结果以及若干用于验证代码的数值测试。第 5 节给出单处理器和多处理器基准测试。最后，第 6 节讨论结果，并提出代码的可能用途以及进一步的发展方向。

2. 等离子体漂移动理学模型

本节介绍 ALLIANCE 所求解的方程。这里不提供方程的完整推导，相关内容可参见 [1], ，仅列出理解所用模型所需的最少信息。首先，考虑一种等离子体，其中包含物种 s 的粒子，并受到沿 z 方向作用的强直线磁引导场的影响：$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$。对于陀螺动理学系统，物种 s 的粒子扰动分布函数可表示为 $\delta f_s = -q_s \phi F_s / T_s + h_s$，其中 $h_s(\mathbf{R}, v_\parallel, \mu)$ 是陀螺动理学分布函数的非绝热部分。采用谱表达 [21], ，可将其表示为拉盖尔–厄米特矩 $h^m_{l,s}$，即 $h_s(\mathbf{k}, v_\parallel, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \psi^l(\mu B_0) \xi^m(v_\parallel) h^m_{l,s}(\mathbf{k})$，其中 ψ^l 和 ξ^m 分别为拉盖尔函数和厄米特函数 [21]。对于漂移动理学趋势（此处表示为 $k_\perp \rho_i < 1$ ，而非严格的极限条件 $k_\perp \rho_i \ll 1$），所有高阶拉盖尔矩$l \geq 2$ 均可忽略，因为它们小到可以忽略不计。这种简化保留了有限拉莫尔半径（FLR）效应，同时显著简化了陀螺动理学系统 [1]。陀螺动理学分布函数矩与回旋中心分布函数矩之间的关系为

$$g^m_{l,s}(\mathbf{k}) = h^m_{l,s}(\mathbf{k}) - \frac{q_s}{T_s}(\chi^\phi_s + \chi^B_s)\delta_{m0}\delta_{l0} - \frac{q_s}{T_s}\sqrt{\frac{1}{2}}\chi^A_s \delta_{m1}\delta_{l0} - \frac{q_s}{T_s}\chi^B_s \delta_{m0}\delta_{l1}. \tag{1}$$

g_s 与 h_s 之间的区别如下： g_s 描述点状粒子的导引中心，而 h_s 是带电环的分布函数（参见 [11]中的 C.5）。关系式 (1) 涉及陀螺动力学势函数，

$$\chi^\phi_s(\mathbf{k}) = \mathcal{J}_{s00}\phi(\mathbf{k}), \tag{2}$$

$$\chi^B_s(\mathbf{k}) = \frac{T}{qB_0}\tilde{\mathcal{J}}_{s10}B_\parallel(\mathbf{k}), \tag{3}$$

$$\chi^A_s(\mathbf{k}) = -v_{T_s}\mathcal{J}_{s00}A_\parallel(\mathbf{k}), \tag{4}$$

这些函数通过电磁场计算得出。电磁场由静电势 $\phi(\mathbf{k})$、平行磁场 $B_{\parallel}(\mathbf{k})$以及矢势的平行分量 $A_{\parallel}(\mathbf{k})$表示，如下所示：

$$\phi(\mathbf{k}) = \sum_s q_s n_s \mathcal{J}_{s00} h^0_{0,s} \Big/ \sum_s \frac{q_s^2 n_s}{T_s}, \tag{5}$$

$$B_{\parallel}(\mathbf{k}) = -\frac{\beta}{2} \sum_s \frac{n_s T_s}{B_0} \tilde{\mathcal{J}}_{s10} \left(h^0_{0,s} + h^0_{1,s} \right), \tag{6}$$

$$A_{\parallel}(\mathbf{k}) = \frac{\beta}{2k_\perp^2} \sum_s q_s n_s v_{T_s} \sqrt{\frac{1}{2}} \mathcal{J}_{s00} h^1_{0,s}. \tag{7}$$

就$g^m_{l,s}$而言，电磁场方程变得更加繁复，

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{2bI_\phi(g) - \beta c I_B(g)}{2ab + \beta c^2}, \tag{8}$$

$$B_{\parallel}(\mathbf{k}) = -\beta \frac{aI_B(g) + cI_\phi(g)}{2ab + \beta c^2}. \tag{9}$$

这里，我们引入了若干参数，以简化记号，

$$I_\phi(g) = \sum_s q_s n_s \mathcal{J}_{s00} g^0_{0,s}, \tag{10}$$

$$I_B(g) = \sum_s \frac{n_s T_s}{B_0} \tilde{\mathcal{J}}_{s10} \left(g^0_{0,s} + g^0_{1,s} \right), \tag{11}$$

$$a = \sum_s \frac{q_s^2 n_s}{T_s} (1 - \mathcal{J}^2_{s00}), \tag{12}$$

$$b = 1 + \beta \sum_s \frac{n_s T_s}{B_0^2} \tilde{\mathcal{J}}^2_{s10}, \tag{13}$$

$$c = \sum_s \frac{q_s n_s}{B_0} \tilde{\mathcal{J}}_{s10} \mathcal{J}_{s00}. \tag{14}$$

$A_{\parallel}$ 的关系式也有所修改，现在表示为 $g^1_{0,s}$:

$$A_{\parallel}(\mathbf{k}) = \frac{\beta}{2} \frac{\sum_s q_s n_s v_{Ts} \mathcal{J}_{s00} \sqrt{\frac{1}{2}} g^1_{0,s}}{k_\perp^2 + \frac{\beta}{4} \sum_s \frac{q_s^2 n_s v_{Ts}^2}{T_s} \mathcal{J}^2_{s00}}. \tag{15}$$

式 (2)–(15) 中的有限拉莫尔半径效应通过贝塞尔函数矩加以考虑，

$$\mathcal{J}_{s00} = e^{-b_s/2}, \tag{16}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_{s10} = \left[\left(1 - e^{-b_s/2} \right) \frac{2}{b_s} \right], \tag{17}$$

式 (17) 中使用波浪号记号，以便清楚地区分一阶贝塞尔函数 $J_0(\sqrt{2\mu B_0 b_s}) = \sum_l \psi_l \mathcal{J}_{s0l}$ 的零阶拉盖尔矩与函数$2J_1(\sqrt{2\mu B_0 b_s})/\sqrt{2\mu B_0 b_s} = \sum_l \psi_l \tilde{\mathcal{J}}_{s1l}$ 的零阶拉盖尔矩（详情参见 [1] ）。贝塞尔函数矩 (16)、(17) 取决于乘积 $b_s = (k_\perp \rho_s)^2$, ，其中 ρ_s 是物种 s中粒子的回旋半径。现在，利用式 (1)–(17) 中的关系，可以通过自洽的方式根据$g^m_{l,s}$ ($h^m_{l,s}$)计算出 $h^m_{l,s}$ ($g^m_{l,s}$)，如方案 1 所示。

建立了$g^m_{l,s}$与 $h^m_{l,s}$ 矩之间的联系后，我们现在可以介绍漂移动理学极限下的演化方程。虽然可以随时间推进陀螺动理学

分布函数 $h_l^m{}_{,s}$的矩，但从数值计算角度而言，求解关于 $g_l^m{}_{,s}$ 的方程更为方便——这也是其他依赖陀螺动理学展开 [22]的代码所倾向的选择。在漂移动理学极限下，具有$m=0$， M个埃尔米特矩和 $l=\{0,1\}$ 个拉盖尔矩的 $g_l^m{}_{,s}(\mathbf{k})$的演化由以下 $M\times 2$ 方程组支配

$$\frac{\partial g_{0,s}^m}{\partial t} = \mathcal{N}_{0,s}^m[h] + \mathcal{L}_{0,s}^m[h] + \mathcal{C}_{0,s}^m[g] \tag{18}$$

$$\frac{\partial g_{1,s}^m}{\partial t} = \mathcal{N}_{1,s}^m[h] + \mathcal{L}_{1,s}^m[h] + \mathcal{C}_{1,s}^m[g] \tag{19}$$

线性项描述 $h_l^m{}_{,s}$的埃尔米特矩之间的局部耦合，其中包括热速度 $v_{Ts}=\sqrt{2T_s/m_s}$:

$$L_{l,s}^m[h] = -ik_z v_{T_s}\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}}h_{l,s}^{m+1} + \sqrt{\frac{m}{2}}h_{l,s}^{m-1}\right), \tag{20}$$

并决定沿未扰动磁导引场 $k_\parallel = k_z$ 的平行动力学，同时也促使线性相位混合在$v_\parallel$ 方向 [23]上发展。非线性相互作用的形式如下，

$$\mathcal{N}_{0,s}^m[h] = -\frac{1}{B_0}\left[\left\{\chi_s^\phi+\chi_s^B, h_{0,s}^m\right\} + \sqrt{\frac{m+1}{2}}\left\{\chi_s^A, h_{0,s}^{m+1}\right\} + \sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\chi_s^A, h_{0,s}^{m-1}\right\} + \left\{\chi_s^B, h_{1,s}^m\right\}\right], \tag{21}$$

$$\mathcal{N}_{1,s}^m[h] = -\frac{1}{B_0}\left[\left\{\chi_s^\phi+\chi_s^B, h_{1,s}^m\right\} + \sqrt{\frac{m+1}{2}}\left\{\chi_s^A, h_{1,s}^{m+1}\right\} + \sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\chi_s^A, h_{1,s}^{m-1}\right\} + \left\{\chi_s^B, h_{0,s}^m\right\} + 2\left\{\chi_s^B, h_{1,s}^m\right\}\right], \tag{22}$$

并以泊松括号表示，

$$\{\mathcal{A},\mathcal{B}\} = \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}, \tag{23}$$

描述系统的垂直动力学，$\mathbf{k}_\perp = \{k_x, k_y\}$。在此，非线性相互作用由电磁场介导，并以陀螺动理学势的形式进入非线性项。

最后，ALLIANCE 纳入了一个简单的碰撞项，其唯一目的是从小尺度移除能量。其形式为

$$\mathcal{C}_{l,s}^m[g] = -\left(\nu_{k_\perp}k_\perp^{2\gamma_{k_\perp}} + \nu_{k_\parallel}k_z^{2\gamma_{k_\parallel}} + \nu_m m^{\gamma_m}\right) g_{l,s}^m(\mathbf{k}). \tag{24}$$

$k_\perp$， $k_\parallel$和 m方向上的碰撞频率由 $\nu_{k_\perp}$， $\nu_{k_\parallel}$， ν_m设定。参数 $\gamma_{k_\perp}$， $\gamma_{k_\parallel}$， γ_m由用户提供，用于确定耗散区的位置，以及 $k_\perp = \left(k_x^2+k_y^2\right)^{1/2}$。该

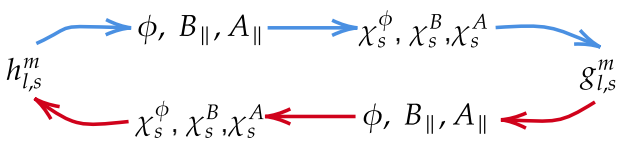

图 1：从 $g_l^m{}_{,s}$ 转换到 $h_l^m{}_{,s}$。首先，使用 g_{ls}^m （分别为 $h_l^m{}_{,s}$）计算电磁场，然后根据场计算陀螺动理学势，最后使用关系式 (1) 计算 $h_l^m{}_{,s}$ （分别为 $g_l^m{}_{,s}$）。初始条件可以用 $g_l^m{}_{,s}$ 或 $h_l^m{}_{,s}$给出；然而，方程是以 $g_l^m{}_{,s}$为变量随时间积分的。

此前的研究中已使用过所选的碰撞算子（或类似算子） [24, 25, 26]。需要注意的是，当 $\gamma_m = 1$ 时，厄米空间中的碰撞等效于 Lenard-Bernstein碰撞算子。正如 [27], 所示，这种碰撞算子会显著影响系统的动力学。未来可根据需要实现其他碰撞算子，例如研究 [28, 29, 30], 中使用的算子；也可以考虑反常耗散模型（即针对非线性项的亚网格尺度模型） [31, 32]。

需要注意的是，由于碰撞算子可能会根据其具体形式引入速度空间混合效应，尤其是在碰撞频率有限的情况下（即碰撞项的强度与其他线性项和非线性项相当），必须确保任何此类模型（例如 [28, 29, 30]）都与推导整套漂移动理学方程时所采用的近似一致。如果特定项目所需的碰撞项违反了所作的近似，则可能需要采用陀螺动理学或全动理学形式 [33] ，而在这种情况下，ALLIANCE 并不适用。

3. 数值实现

接下来，我们介绍漂移动理学系统的数值实现。陀螺动理学分布函数以及回旋中心分布函数矩在内存中均以六维数组表示， $g(k_x, k_y, k_z, m, l, s)$ 和 $h(k_x, k_y, k_z, m, l, s)$。请注意，除三个波数空间坐标（$k_x, k_y, k_z$）和厄米特坐标（$m$）外（这些坐标的取值范围都可以任意大），拉盖尔坐标在代码中硬编码为最多两个元素（即 $l = 0$ 和 $l = 1$），这是漂移动理学模型所需的数量。此外，物种索引 s 通常追踪电子和单一离子物种等离子体。数组的数据管理充分考虑了这些特点。电磁场为三维，仅包含波数空间坐标（k_x, k_y, k_z）；陀螺动理学势 $\chi(k_x, k_y, k_z, s)$ 为四维。模拟数据使用分层数据格式（HDF）[34]存储在磁盘上。

空间离散化的选择将在下一小节中讨论。空间方向采用周期边界，从而得到波数空间表示；而平行速度方向则采用厄米特多项式表示进行离散化。

3.1. 空间离散化

给定模拟空间盒边界 $\{L_x, L_y, L_z\}$ 和空间分辨率 $\{N_x, N_y, N_z\}$，波数空间采用最小波数 $\{\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z\} = \{\frac{2\pi}{L_x}, \frac{2\pi}{L_y}, \frac{2\pi}{L_z}\}$进行离散化。第 i 个波数随后计算为 — —

$$k_x^i = i_x \Delta k_x,\ i_x = \left(-\frac{N_x}{2} + 1, ..., \frac{N_x}{2}\right), \tag{25}$$

$$k_y^i = i_y \Delta k_y,\ i_y = \left(-\frac{N_y}{2} + 1, ..., \frac{N_y}{2}\right), \tag{26}$$

$$k_z^i = i_z \Delta k_z,\ i_z = \left(0, ..., \frac{N_z}{2}\right). \tag{27}$$

在 k_z 方向上考虑实数条件 $f(\mathbf{k}) = f^*(-\mathbf{k})$，这样只需对 $k_z \geq 0$ 平面上方的数据进行计算。函数$f(\mathbf{r})$ 的实数离散正向和逆向傅里叶变换为

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{28}$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{\mathbf{k}} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{29}$$

3.1.1. 快速傅里叶变换

非线性项 (21)、(22) 在实空间中计算，因此需要进行 ($2 \times N_m \times N_s$) 次、规模为 ($N_x \times N_y \times N_z/2$) 的快速傅里叶变换。非线性项采用 2/3 规则进行去混叠，初始化系统尺寸时必须考虑这一点。也就是说，在尺寸为 (N_x, N_y, N_z) 的网格上，在实空间中计算非线性项。随后在 (k_x, k_y, k_z) 空间中进行去混叠，其中 $k_{x_{max}} = 2\pi N_x/3L_x, k_{y_{max}} = 2\pi N_y/3L_y, k_{z_{max}} = 2\pi N_z/3L_z$。快速傅里叶变换由并行 FFTW 库[35], 使用 fft mpi many 实数 FFT 例程处理。为节省设备内存和计算时间，变换采用原位方式进行，输出为转置后的实数数据（(y, x, z)，而不是 (x, y, z)）。ALLIANCE 中的快速傅里叶变换适用于六维分布函数矩、电磁场和陀螺动理学势。ALLIANCE 中快速傅里叶变换的另一项用途是将实数数据保存到磁盘。

3.2. 时间积分

3.2.1. 四阶龙格-库塔法

方程 (18)-(19) 使用简单的四阶显式龙格-库塔格式进行时间推进。将时间 τ 时 (18)-(19) 的右端项记为 $\mathcal{R}_l^m[g(\tau)\ h(\tau)]$，下面回顾通用算法：

$$K_1 = \mathcal{R}_l^m[g(\tau), h(\tau)]\,, \tag{30}$$

$$K_2 = \mathcal{R}_l^m\left[g(\tau) + \Delta t\frac{K_1}{2}, h(\tau) + \Delta t\frac{K_1}{2}\right]\,, \tag{31}$$

$$K_3 = \mathcal{R}_l^m\left[g(\tau) + \Delta t\frac{K_2}{2}, h(\tau) + \Delta t\frac{K_2}{2}\right]\,, \tag{32}$$

$$K_4 = \mathcal{R}_l^m\left[g(\tau) + \Delta t K_3, h(\tau) + \Delta t K_3\right]\,, \tag{33}$$

$$g(\tau + \Delta t) = g(\tau) + \frac{1}{6}\left(K_1 + K_2 + K_3 + K_4\right)\,, \tag{34}$$

$$\tau = \tau + \Delta t\,. \tag{35}$$

在线性模拟中，时间步长 Δt在整个运行过程中保持不变。模拟稳定并收敛所需的条件是：线性算子 (20) 的所有特征值，以及在存在碰撞算子 (24) 时其所有特征值，都必须位于数值方法的稳定域内，即 $|1+\lambda\Delta t+\frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2+\frac{1}{6}(\lambda\Delta t)^3+\frac{1}{24}(\lambda\Delta t)^4| \leq 1$，其中 λ是线性算子或碰撞算子的特征值。用户可以预先进行特征值分析。估算线性时间步长约束的一种可行方法是使用格尔什戈林圆盘定理。对于由式 (20) 给出的线性算子，系统中某个特征值 λ_{max} 的最大绝对值可估算为 $|\lambda_{max}| \leq \max(k_z)\max(v_{Ts})\left[\sqrt{(N_m+1)/2}+\sqrt{N_m/2}\right]$。根据所选数值方法的稳定域约束，可由此推导出$\Delta t$。

3.2.2. 自适应时间步进

对于非线性模拟，情况更为复杂，因此需要使用自适应时间步长。在这种情况下，我们采用广泛用于非线性模拟的库朗–弗里德里希–列维条件。为了使用 CFL 条件，我们首先将泊松括号改写为以下形式

$$\{A, B\} = \hat{e}_z \times \nabla A \cdot \nabla B, \tag{36}$$

因此，我们可以引入以下平流速度：

$$\mathbf{u}^A = \frac{1}{B_0}\hat{e}_z \times \nabla\chi^A, \tag{37}$$

$$\mathbf{u}^\phi = \frac{1}{B_0}\hat{e}_z \times \nabla\chi^\phi, \tag{38}$$

$$\mathbf{u}^B = \frac{1}{B_0}\hat{e}_z \times \nabla\chi^B, \tag{39}$$

现在，CFL 条件可以写成

$$\Delta t = \frac{C}{\max(|\mathbf{u}_x|)/\Delta x + \max(|\mathbf{u}_y|)/\Delta y}, \tag{40}$$

库朗数为 $C = 0.5$，最大漂移速度选为

$$|\mathbf{u}| = \max\left\{|\mathbf{u}^{\phi}|, |\mathbf{u}^{A}|, |\mathbf{u}^{B}|\right\}. \tag{41}$$

非线性或线性时间步长约束可能会根据物理参数而占主导地位。然而，对于 1 天文单位处的太阳风参数（$\beta = T_i/T_e = 1$），在质子-电子等离子体中，预计线性时间步长约束会占主导地位。

3.3. 数据并行化

在典型的模拟运行中，最多只求解两个拉盖尔矩。ALLIANCE 通过构造 DK 方程 [1]（即截断于 $l > 1$）将这一点硬编码，因此选择 l 轴作为并行化方向并不合适。然而，模型并未限制厄米矩的数量 m，模拟盒的空间分辨率也不受限制，因此这些轴更适合用于并行化。为保持并行化方案简单，数据仅沿 k_x（实数组为 y）和 m 方向进行并行化。未来应考虑沿物种以及 k_y 方向进行并行化。并行化通过创建二维拓扑实现，每个处理器都有自己的笛卡尔网格坐标 $\{i_x, i_m\}$（见图 2(a)）。为简化数据传输，使用两个独立的 MPI 通信器 mpi kx comm 和 mpi m comm，分别用于沿 k_x 方向进行数据交换以及沿 m 方向传输数据。场和陀螺动理学势仅沿 k_x 方向分布；具有相同 i_m 坐标的每个处理器存储相同的 k_x 部分场。

在模拟运行期间，有两个操作需要在处理器之间交换数据。第一个是计算线性项，这需要在埃尔米特方向交换边界单元。如果坐标为 $(i_x,\ i_m)$ 的处理器可以访问跨越埃尔米特矩 $M^i_{min},\ M^i_{max}$ 的数据切片，那么它会将分布函数切片 $g(\mathbf{k}\ M^i_{max},\ l,\ s)$ 发送给处理器 $\{i_x, (i+1)_m\}$，并将 $g(\mathbf{k}\ M^i_{min},\ l,\ s)$ 发送给处理器 $\{i_x, (i-1)_m\}$，以计算线性项。计算非线性项时也会进行相同的数据通信，以获得由 χ^A 引起的 m-空间交换贡献。快速傅里叶变换期间还会在 k_x 执行另一次数据交换，该操作由 FFTW 库处理。

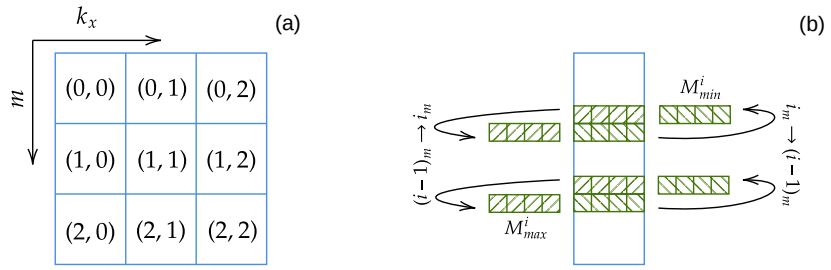

图 2：（a）在 ALLIANCE 中实现的二维笛卡尔 MPI 拓扑。厄米矩沿列分布，k_x 沿行分布。（b）同一列中处理器之间的边界厄米矩交换。对于坐标为 i_m 的处理器，最大厄米矩 M^i_{max} 被传输到 $(i+1)_m$ 处理器，最小厄米矩 M^i_{min} 被传输到 $(i-1)_m$ 处理器。

3.4. 能量注入

当碰撞项启用时，如果希望在整个模拟运行过程中补偿能量耗散，就需要一种“强迫”机制向系统注入能量。ALLIANCE 集成了一种简单的强迫机制，可确保在整个模拟运行过程中持续注入恒定功率 ϵ 。首先，我们按照 [1] 中的定义来定义自由能

$$W = \sum_s T_s n_s \sum_l \sum_k g^m_{l,s}(\mathbf{k}) \left(h^m_{l,s}(\mathbf{k})\right)^* \tag{42}$$

我们将强迫算子定义如下

$$\frac{\partial g^m_{l,s}(\mathbf{k})}{\partial t} = \mathcal{F}[h], \tag{43}$$

$$\mathcal{F}[h] = \begin{cases} \alpha h^m_{l,s}(\mathbf{k})\delta_{l,0}\delta_{m,m'}, & \text{if } k^f_{min} < |k_\perp| \leq k^f_{max} \\ \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{44}$$

这种形式的强迫只会激发壳层 k^f_{min}, k^f_{max} 内分布函数的零阶拉盖尔矩，以及埃尔米特矩 m'。代码的用户可以决定强迫壳层边界，以及希望施加外力的埃尔米特矩。不过，我们现在需要定义一个参数 α，即点 (k_x, k_y, k_z, m) 处的局部强迫振幅。为此，我们将式 (43) 乘以 $T_s n_s h^{m*}_{l\,s}$，对所有相空间坐标和物种求和，得到下式

$$\frac{dW(t)}{dt} = \alpha \sum_s T_s n_s \sum_l \sum_m \sum_k |h^m_{l,s}(\mathbf{k})|^2 \delta_{l,0}\delta_{m,m'} \tag{45}$$

利用关系式 (42)。现在，考虑恒定的功率注入

$$\frac{dW(t)}{dt} = \epsilon \tag{46}$$

我们得到局部强迫振幅的关系式

$$\alpha = \epsilon \left[\sum_s T_s n_s \sum_k |h^{m'}_{0,s}(\mathbf{k})|^2 \right]^{-1}. \tag{47}$$

用户自然也可以实现不同的驱动机制。

3.5. 自由能诊断

ALLIANCE 会输出分布函数矩的完整数据，以及电磁场在位置空间和波数空间中的数据。然而，存储六维数组和三个三维数组需要大量磁盘空间，因此频繁输出原始模拟数据并不可取。因此，ALLIANCE 实现了多种基于自由能分析的简化数据诊断，并在模拟运行期间实时计算。如文献 [5, 36, 37], 所述，自由能可由回旋动理学分布函数和电磁场计算得出：

$$W = \sum_{\mathbf{k}} \left[\sum_m W_h(\mathbf{k}, m) - W_\phi(\mathbf{k}) + W_{B_\parallel}(\mathbf{k}) + W_{B_\perp}(\mathbf{k}) \right], \tag{48}$$

其中包括自由能密度函数 $W_h(\mathbf{k}\ m) = \sum_s W_{h,\ s}(\mathbf{k}\ m)$ 以及如下定义的场的贡献：

$$W_{h,s}(\mathbf{k}, m) = T_s n_s \sum_l \frac{|h^m_{l,s}(\mathbf{k})|^2}{2}\,, \tag{49}$$

$$W_\phi(\mathbf{k}) = \sum_s \frac{q_s^2 n_s |\phi(\mathbf{k})|^2}{2T_s}\,, \tag{50}$$

$$W_{B_\parallel}(\mathbf{k}) = \frac{|B_\parallel(\mathbf{k})|^2}{8\pi}\,, \tag{51}$$

$$W_{B_\perp}(\mathbf{k}) = \frac{k_\perp^2 |A_\parallel(\mathbf{k})|^2}{8\pi}\,. \tag{52}$$

我们定义了若干自由能诊断量。

- 自由能 通道：我们根据自由能谱密度函数（49）— （52）计算自由能的各项贡献，分别为 $(W_h = \sum_{\mathbf{k}} \sum_m W_h(\mathbf{k}\ m),\ W_\phi = \sum_{\mathbf{k}} W_\phi(\mathbf{k}),\ W_{B_\perp} = \sum_{\mathbf{k}} W_{B_\perp}$。
- F自能 谱：我们还计算了 $k_\perp$中各项自由能贡献的谱量。每个

$$W^{spec}_{\phi,B_\parallel,B_\perp}(k_\perp) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{k}_{shell}} \frac{1}{N_{shell}} W_{\phi,B_\parallel,B_\perp}(\mathbf{k}), \tag{53}$$

$$\tag{54}$$

对于自由能中 $h^m_{ls}(\mathbf{k})$ 的熵贡献，二维谱是在 $(k_\perp, m)$ 空间中计算的，公式如下：

$$W^{spec}_h(k_\perp, m) = \sum_s T_s n_s \sum_l \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{k}_{shell}} \frac{1}{N_{shell}} \frac{|h^m_{l,s}(\mathbf{k})|^2}{2}, \tag{55}$$

$$\tag{56}$$

总自由能谱通过对各项贡献求和得到

$$W^{spec}(k_\perp) = \sum_m W^{spec}_h(k_\perp, m) - W^{spec}_\phi(k_\perp) + W^{spec}_{B_\parallel}(k_\perp) + W^{spec}_{B_\perp}(k_\perp) \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

ALLIANCE 中有两种谱壳层初始化方式。第一种采用等距壳层，其壳层边界 k^i_{shell} 和壳层中心 k^i_{center} 的计算公式如下：

$$k^i_{shell} = k_0 \cdot i, \quad i \in \{0, N_{shells}\}, \tag{59}$$

$$k^i_{center} = \frac{1}{2}\left(k^i_{shell} + k^{i+1}_{shell}\right), \tag{60}$$

然后计算落在每个壳层内的波矢数量。对于这种选择，单位壳层的大小 k_0 由用户提供，壳层数量 N_{shells} 则根据模拟盒的大小自动计算。第二种选择采用对数间隔壳层，每个壳层均依据黄金比例关系计算。

$$k^i_{shell} = \varphi^{\frac{i}{2}} \cdot k_0, \quad i \in \{0, N_{shells}\} \tag{61}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{62}$$

$$\tag{63}$$

对于这种壳层间距，用户也只需提供单位壳层的大小 k_0。

• 非线性通量谱：非线性通量谱采用与代码中其他谱计算相同的波数空间壳层离散方式。实际上，自由能通过尺度 k_c的非线性通量计算如下

$$\Pi(k_c) = \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_s T_s n_s \sum_l \sum_m \sum_{\mathbf{k}} N^m_{l,s} [h][h^{m*}_{l,s}]^{\leq}_{k^c_\perp}(\mathbf{k}) \tag{64}$$

算子 $[*]^{\leq}_{k^c_\perp}$ 表示对截止波数 $k^c_\perp$进行锐截止低通滤波 [36] 。为了获得非线性通量，ALLIANCE 在函数调用期间仅计算一次非线性项，然后对 $[h^m_{l,s}]^{\leq}_{k^c_\perp}(\mathbf{k})$ 进行多次计算。不过需要注意的是，也可以像文献 [36] 中那样，在位置空间计算非线性通量。

• 耗散尺度和积分尺度：我们计算耗散尺度和积分长度尺度 a s

$$L_{int} = 2\pi \frac{\sum_{\mathbf{k}} 1/k_\perp W^{spec}(k_\perp)}{\sum_{\mathbf{k}} W^{spec}(k_\perp)}, \tag{65}$$

$$L_{dis} = 2\pi \frac{\sum_{\mathbf{k}} k_\perp^{2\gamma_\perp - 1} W^{spec}(k_\perp)}{\sum_{\mathbf{k}} k_\perp^{2\gamma_\perp} W^{spec}(k_\perp)}. \tag{66}$$

这类估算有助于推测系统的最大长度尺度，以及耗散开始显著出现的尺度。

4. 代码验证

本节将介绍代码的数值验证，例如数值求解器的收敛性。在此阶段，我们不研究任何特定的物理效应，这部分内容将在其他地方探讨。不过，我们将展示 ALLIANCE 能够描述相关的等离子体现象，例如线性相混合和湍流级联。我们还进行了有关自由能守恒的必要测试。在改变$\mathbf{k}$ 和 m 方向的数值盒分辨率时，模拟中有几个参数保持不变： $m_e/m_i = 0.01$, $T_e/T_i = |q_e|/q_i = n_e/n_i = \beta = 1$, $L_x = L_y = 20\pi$, $L_z = 200\pi$。

4.1. 线性模拟中的能量守恒

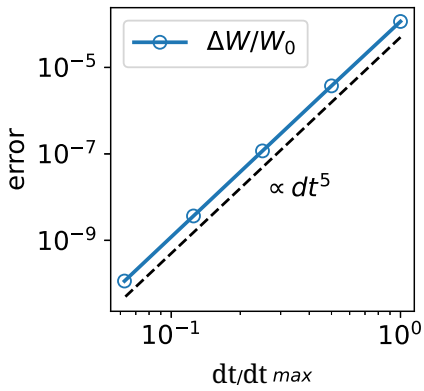

图 3：不同时间步长下的自由能误差。随着时间步长减小，自由能逐渐收敛。误差的缩放关系由虚线表示（$\propto dt^5$）

为了检查线性解的收敛性，我们针对具有 $N_m = 128$ 的系统进行了多次模拟，且不施加外力或碰撞。由于线性模拟中不存在非线性相互作用，系统的空间尺寸并不重要，可以任意设定。每次模拟采用不同的时间步长 $dt = \{dt_{max}, \frac{dt_{max}}{2}, \frac{dt_{max}}{4}, \frac{dt_{max}}{8}, \frac{dt_{max}}{16}\}$，其中 dt_{max} 取为四阶龙格-库塔法对该系统变得不稳定时的时间步长的一半。每次模拟均运行至总模拟时间 $t_{total} = 10^3 dt_{max}$，并测量自由能的方差 $\Delta W = W_{t_{max}} - W_0$。图 3 证明，四阶龙格-库塔法在线性模拟中具有收敛性，自由能误差按 $\propto dt^5$缩放。

4.2. 非线性模拟能量误差与自适应时间步进

为检验非线性实现，我们进行了一系列纯非线性模拟。在这些模拟中，方程 (18)–(19) 的右端项忽略了除 (21)–(22) 之外的所有其他项（即线性项），并跟踪自由能误差的演变。尺寸为 $(N_x, N_y, N_z, N_m) = (64, 64, 64, 2)$ 的系统从随机初始条件出发演化了 10^3 步，每 10 步测量一次自由能。图 4 显示，时间步长 (dt) 在有界范围内振荡；这使我们在实际计算中能够每隔一定数量的时间步（此处为每 10 次迭代）更新其数值（使用第 3 节所述的算法）。如图 4 所示，模拟结束时的自由能损失比例仅为 $\Delta W/W_0 \approx 10^{-5}$。

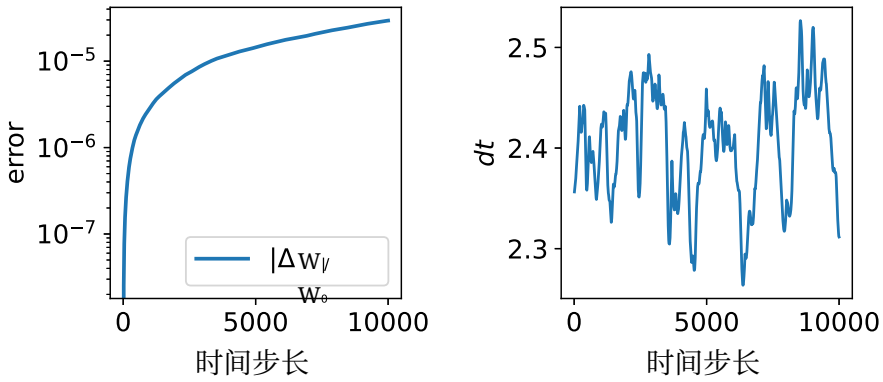

图 4：(a) 非线性模拟的自由能误差演化。(b) 时间步长变化

4.3. 能量平衡运行

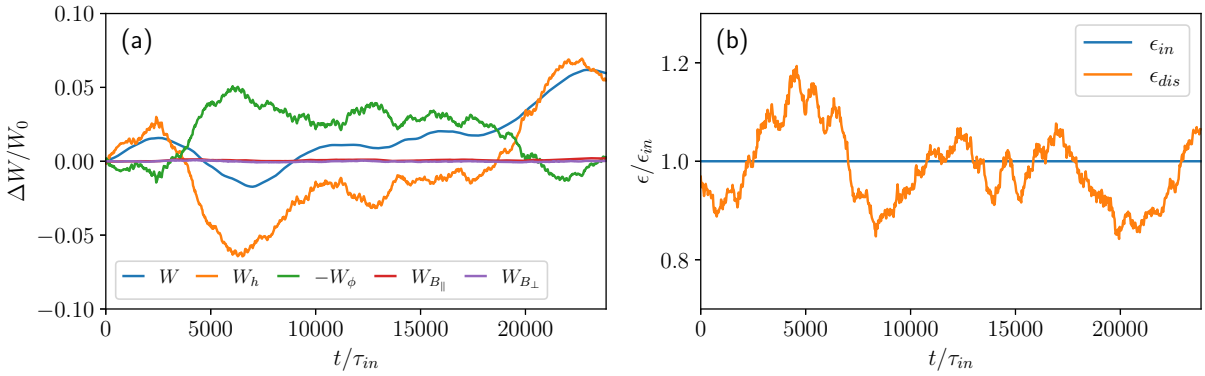

图 5: （a） 自由能通道随时间的变化。（b）能量平衡：注入功率（蓝线）和耗散功率（橙色曲线 对于统计平衡，耗散功率值围绕注入功率值振荡 .

为检验系统能否在由 (43) 给出的外部强迫和如 (24) 所示的耗散作用下达到统计平衡，我们对尺寸为 (N_x，N_y，N_z，N_m) =(48，48，48，6) 的系统进行了小规模电磁运行。功率注入 ϵ_{in} 的取值是任意的，因为在统计平衡情况下，能量注入应与碰撞达到平衡。为进行统计分析，我们引入特征注入时间 $\tau_{in} = (\frac{2\pi^2 m_i}{k_{in}^2 \epsilon_{in}})^{1/3}$，其中 k_{in} 为能量注入系统时对应的波数，并在 τ_{in}的多个倍数时间内检验平衡状态。我们让系统持续运行，直到注入功率与耗散功率达到平衡，并测量自由能通道的变化；这一过程耗时 8 小时，使用了 32 个处理器。并行化拓扑设置为沿 k_x 方向使用 16 个处理器，沿 m 方向使用 2 个处理器。运行结果如图 5 所示。在统计平衡情况下，总自由能的变化不超过 10%，而耗散功率与注入功率的偏差最高可达 20%。

4.4. 线性相混合

为了检验代码能否捕捉线性相位混合（即简单的 k_z 空间扰动会产生越来越精细的$v_\parallel$ 结构），我们进行了一次简单的线性模拟。我们设置了简单的初始条件h_l^m，$_s(t = 0) = q_s cos(z)cos(y)cos(x)\delta_{m0}\delta_{l0}$。这样的初始条件会在($z$，$v_\parallel$)方向产生简单的扰动。为克服陀螺动理学标度排序的限制，我们激发了 $k_x = k_y = 1$ 模（即需要$k_\perp < k_\parallel$，而考虑 $k_\perp = 0$ 时这一关系会被打破）。为了尽可能简化测试，我们仅进行静电系统模拟 $\beta = 0$。模拟使用$N_m = 1024$完成。埃尔米特矩的数量不会改变结果。由于本次模拟中没有碰撞，大量埃尔米特矩使系统能够继续演化，直到因模拟域有限而出现复现现象 [30]。在 16 个核心上完成整个模拟约耗时 40 分钟。图 6 展示了初始扰动的演化过程。

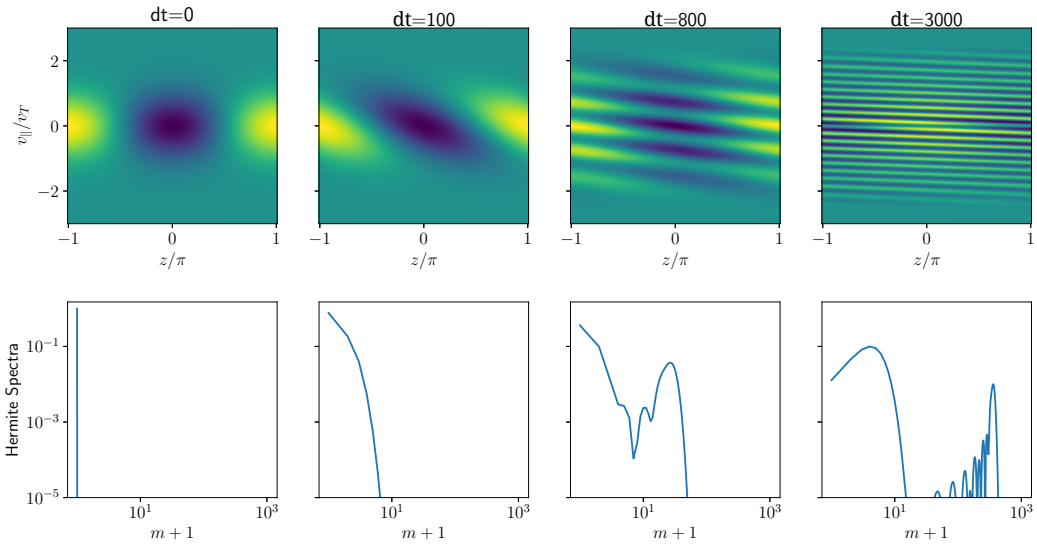

图6：上部面板 ：沿 (z,$v_\parallel$) 方向的线性相混合。下部：厄米谱演化。小于 10^{-5} 的值未显示。T 在整个模拟运行过程中，谱始终非负。

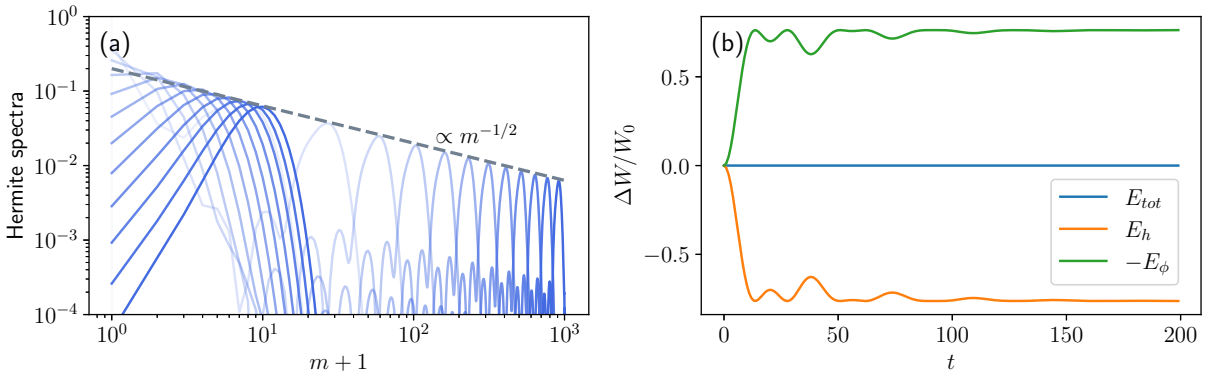

图7：（a）初始条件扰动在厄米空间中的演化。颜色越深的曲线对应的模拟时间越晚。（b）线性相混合情况下的自由能演化。

图 7 展示了厄米谱随时间的演化，以及不同能量通道的演化。我们观察到，自由能以 $m^{-1/2}$ 斜率在 m 空间中级联，这符合纯线性混合的预期。模拟在达到系统有限尺寸的影响之前停止，此时能量从最大的 m 反射至最小的 m 会成为问题。正如预期，静电能W_ϕ 与 W_h相互转换，而总自由能保持不变，因为静电涨落的衰减会在$v_\parallel$ 方向产生精细结构。

对于相同的模拟设置，我们还研究了复现时间 t_{rec} 对埃尔米特矩数量 N_m的依赖关系。如 [30], 所示，由于厄米空间中的系统尺寸有限，可以预期初始扰动会从边界反射并返回，从而导致回归现象，其发生时间估计为 $t_{rec} = 2\sqrt{2}N_m/k_\parallel v_{T_s}$。我们观察了图 8 中零阶厄米矩 $W_h(m = 0)$处熵能 (49) 振幅的变化。在复现

时间 t_{rec}，可以观察到振幅急剧增加，因为初始扰动从高阶矩返回到低阶矩。复现发生的时间与理论 [30]完全吻合。

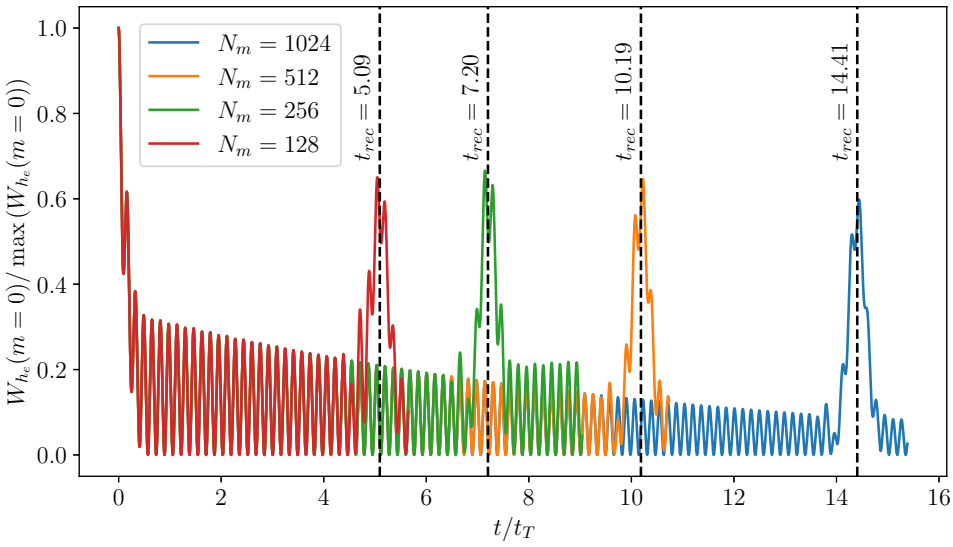

图 8 49 $m = 0$ $N_m =: \{128, 256, 512, 1024\}$ $t_{rec} = 2\sqrt{2N_m}/k_\parallel v_{T_e}$
尺寸为 的系统中， 处电子熵能（ ）振幅的演化。在 处（由竖直虚线标出）发生复现。时间已按 $t_T = 2\pi/k_\parallel v_{T_e}$ 归一化。

4.5. 线性色散关系

为了检验 Alfv´en 波的线性物理，我们以与 [22] 中相同的方式进行了一次简单的类似运行。首先，施加平行天线电流 A_{ant} 激发 Alfv´en 波，其波矢为 $\mathbf{k}_0 = (k_{\perp 0},\ k_{\parallel 0})$，频率为 ω_0，振幅为 A_0，

$$A_{ant} = A_0 e^{-i\omega_0 t - i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}. \tag{67}$$

天线势按如下方式修正安培定律 (7)、(15)

$$A_\parallel(\mathbf{k}) + A_{ant}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} = \frac{\beta}{2k_\perp^2}\sum_s q_s n_s v_{T_s}\sqrt{\frac{1}{2}}\mathcal{J}_{s00}h^1_{0,s}, \tag{68}$$

$$A_\parallel(\mathbf{k}) = \frac{\beta}{2}\frac{\sum_s q_s n_s v_{Ts}\mathcal{J}_{s00}\sqrt{\frac{1}{2}}g^1_{0,s}}{k_\perp^2 + \frac{\beta}{4}\sum_s \frac{q_s^2 n_s v_{Ts}^2}{T_s}\mathcal{J}_{s00}^2} - \frac{A_{ant}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}}{1 + \frac{\beta}{4k_\perp^2}\sum_s \frac{q_s^2 n_s v_{Ts}^2}{T_s}\mathcal{J}_{s00}^2}. \tag{69}$$

式 (18) 的形式为

$$\frac{\partial g^m_{0,s}}{\partial t} = \mathcal{L}^m_{0,s}[h] + \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{\partial \chi_{ant}}{\partial t}\delta_{m,1}, \tag{70}$$

其中，我们将陀螺平均陀螺动理学天线势定义为

$$\chi_{ant} = -v_{T_s}J_{s00}A_{ant}. \tag{71}$$

为了测量 $A_\parallel$ 对天线激励的响应，我们固定 $k_{\parallel 0}=1$ ，并将天线设置为与阿尔芬频率 ω_A 略微失谐，具体为 $\omega_0=0.9\omega_A$；随后在$0.1<k_{\perp 0}\rho_i<1$范围内的不同 $k_{\perp 0}$ 激发阿尔芬波。通过使用陀螺动力学的傅里叶-拉普拉斯解 [22], 拟合 $A_\parallel$ 场响应，我们得到了阿尔芬波的频率 $\omega=\omega_r+i\gamma$。在这些模拟运行中，平行磁场分量被强制设为零， $B_\parallel=0$；采用了真实的质量比 $m_i/m_e\approx 1836$、 $T_i/T_e=n_i/n_e=1$和 $\beta=1$。为了消除回归现象带来的影响，我们在 m 方向加入了少量耗散。这些模拟使用了 $N_m=256$ 个厄米矩。一次典型的模拟运行约需 10 分钟完成。图 9 展示了得到的线性色散结果，以及陀螺动力学（GK）和漂移动理学（DK）的理论色散关系。对于漂移动理学，线性色散关系的求法与 GK 相同 [5], , 只需将 μ中的积分替换为本研究所用贝塞尔函数矩的适当近似（详见附录 A）。在较高波数下，由于高频振荡，测量结果开始与理论预测略有偏离。可以看出，ALLIANCE 能够正确捕捉线性动理学阿尔芬波物理。

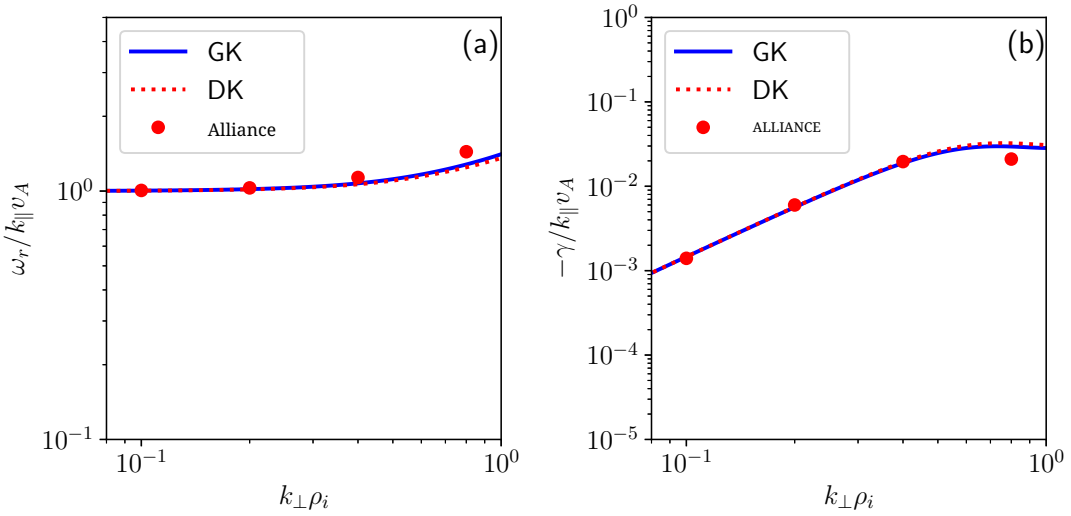

图 9: （a）通过陀螺动理学色散关系（蓝色实线）和漂移动理学方程（红色虚线）解析得到的实频率，以及（b）阻尼率；以及从 `ALLIANCE` 测得的结果（红点）。在较高波数下，解析结果与测量结果之间的差异源于高频振荡的存在。

4.6. 非线性模拟

这里展示较高分辨率非线性模拟的结果，$(N_x,\ N_y,\ N_z,\ N_m)=(192,\ 192,\ 192,\ 32)$，其初始状态取自 4.3 节所述的稳态模拟。系统演化了 $t=300\tau_{in}$，直至开始进入统计稳态。不过，已形成湍流的典型特征已经可以观察到。系统达到本节所示状态总共耗时 3 天，使用了 128 个处理器。

首先，我们展示回旋中心分布函数前几个矩的空间密度，这些矩正被许多陀螺流体模型研究 [38, 39]。考虑到所有归一化均已完成，陀螺流体矩与回旋中心分布函数的厄米特-拉盖尔矩之间的关系为 $(\delta n_s,\ \delta u_{\parallel,\ s},\ T_{\parallel,\ s},\ \delta T_{\perp,\ s})=(g^0_{0,\ s},\ \frac{1}{\sqrt{2}}g^1_{0,\ s},\ \sqrt{2}g^2_{0,\ s},\ g^0_{1,\ s})$，其中$\delta n_s$为回旋中心密度扰动， $\delta u_\parallel$ 为平行速度扰动，而 $\delta T_\perp$， $\delta T_\parallel$ 分别为垂直和平行温度扰动。这些量如图 10 所示，分别对应离子（上排）和电子（下排），并以给定 z-平面上的标准差进行归一化，即对于

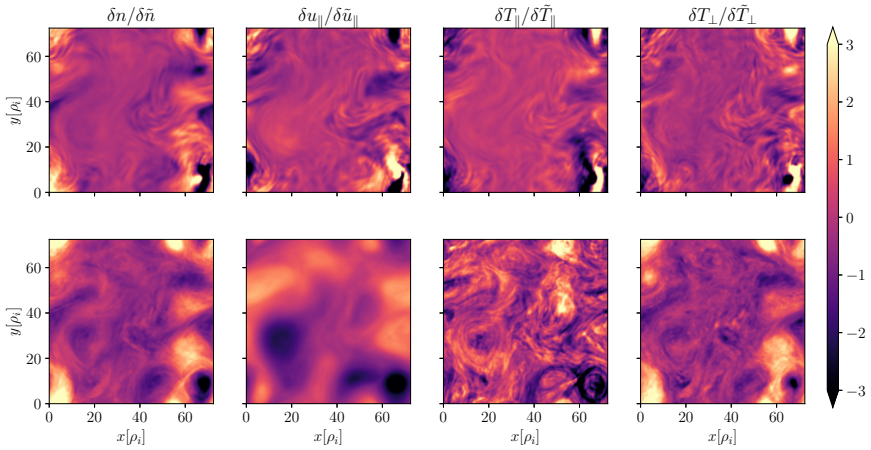

图 10：陀螺中心　分布函数矩，在 z 方向切片，并按其标准差归一化。上排：离子；下排行：电子。

任意函数 f:

$$\tilde{f} = \sqrt{\frac{1}{N_x N_y}\sum_{i_x=0}^{N_x}\sum_{i_y=0}^{N_y}\left[f(i_x,i_y,z)-\langle f\rangle\right]^2}, \tag{72}$$

$$\langle f\rangle = \frac{1}{N_x N_y}\sum_{i_x=0}^{N_x}\sum_{i_y=0}^{N_y} f(i_x,i_y,z). \tag{73}$$

此外，我们还在图 11 中展示了电磁场。

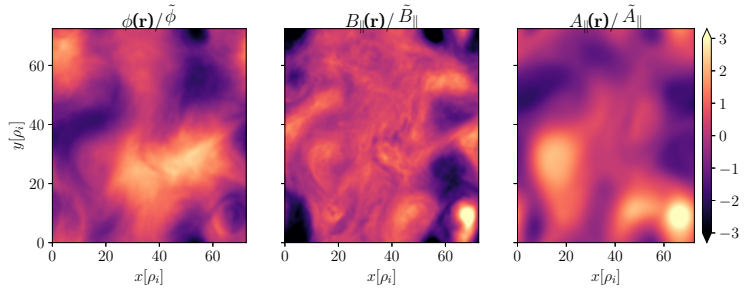

图 11：电磁场沿 z 方向的切片，并按其标准差归一化。 $B_\parallel$ 在所有场中形成最精细的结构，而 $A_\parallel$则倾向于形成最大的结构，因为所有最精细的结构都被式 (15) 中的$1/k_\perp^2$ 项阻尼。

湍流的特性之一，是在所谓的惯性区中存在级联；惯性区即注入能量的大尺度（积分尺度）与能量通过碰撞或其他机制热化的耗散尺度之间的波数范围。请注意，对于动理学等离子体，惯性区的定义有所改变，将线性相位混合（速度混合）也纳入其中。在图 12 中，我们绘制了自由能不同通道的谱，包括电磁

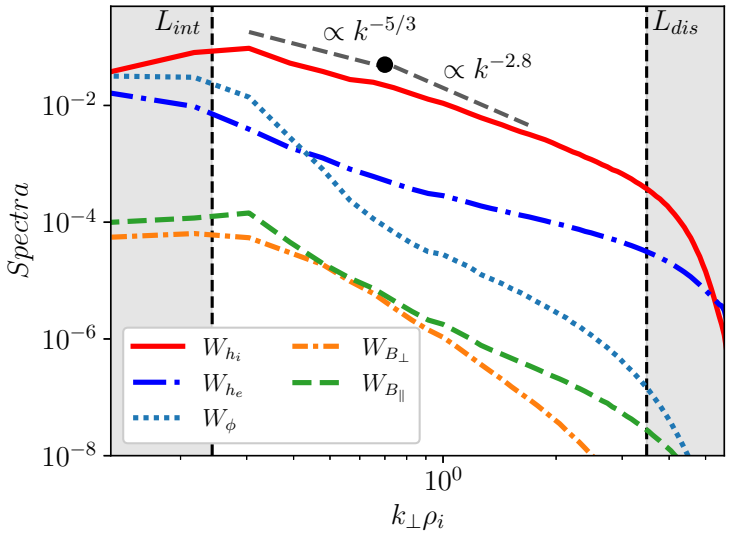

图 12：不同通道的谱，这些通道对总自由能 W有贡献。黑色虚线表示用于参照两种机制： 流体 $-5/3$ 和陀螺动理学 [19] -2.8。

场（50）—（52）和熵贡献（49）。我们不仅看到湍流特有的幂律谱，还看到谱指数在 $k_\perp \rho_i \sim 1$ 附近发生变化的趋势，这是磁化等离子体的特征。虽然这一结果令人鼓舞，但对于采用真实 m_e/m_i 质量比、且分辨率高得多以实现更好尺度分离的模拟，仍需仔细研究谱断裂背后的物理机制。

在图 13 中，通过观察两种物种的自由能波数通量，我们可以更清楚地看到，电子呈现出流体湍流中典型的尺度不变级联，而离子则在约 $k_\perp \rho_i \sim 1$ 处表现出级联性质的变化。

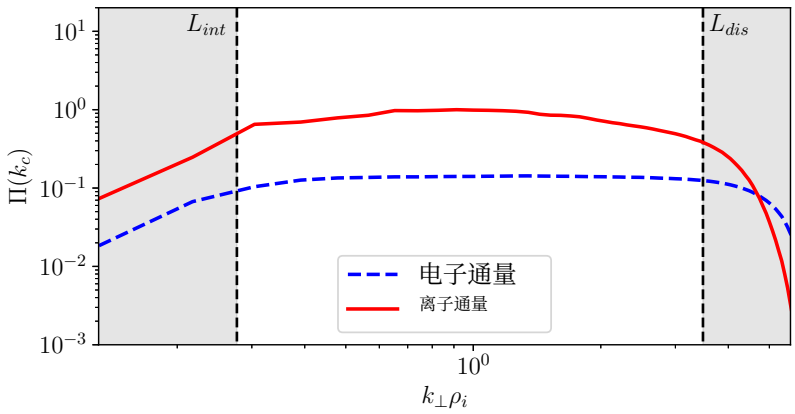

图 13：离子和电子的非线性通量。

除了沿 $k_\perp$ 方向的级联外，漂移动理学模型还可用于研究平行速度方向上的级联。图14展示了离子的式（49）二维（$k_\perp$， m）谱，图15展示了电子的相应结果。积分后的厄米谱以及 $k_\perp$ one，都显示在相应图的插图中。从这些图中可以明显看出线性混合的存在。

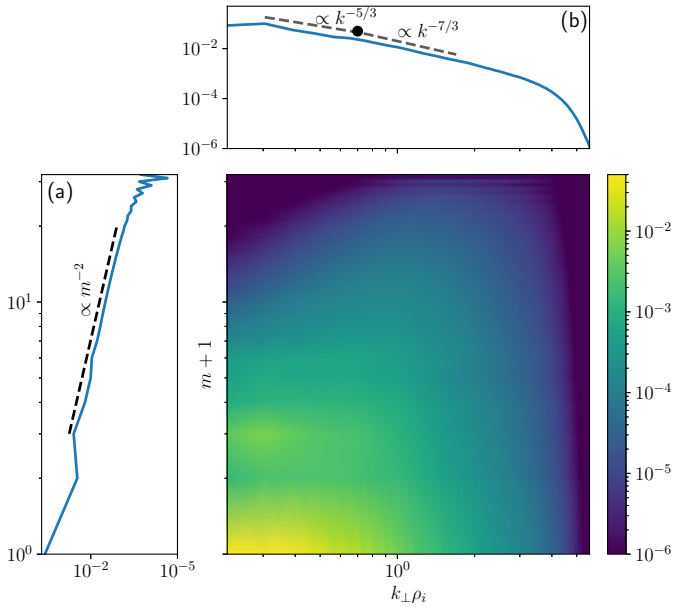

图14：傅里叶-厄米特 $W_{h,\ i}(k_\perp,\ m)$ 谱。(a) 对 $k_\perp$ 积分的 $W_{h,\ i}(k_\perp,\ m)$ 谱。(b) 对 m 积分的 $W_{h,\ i}(k_\perp,\ m)$ 谱。

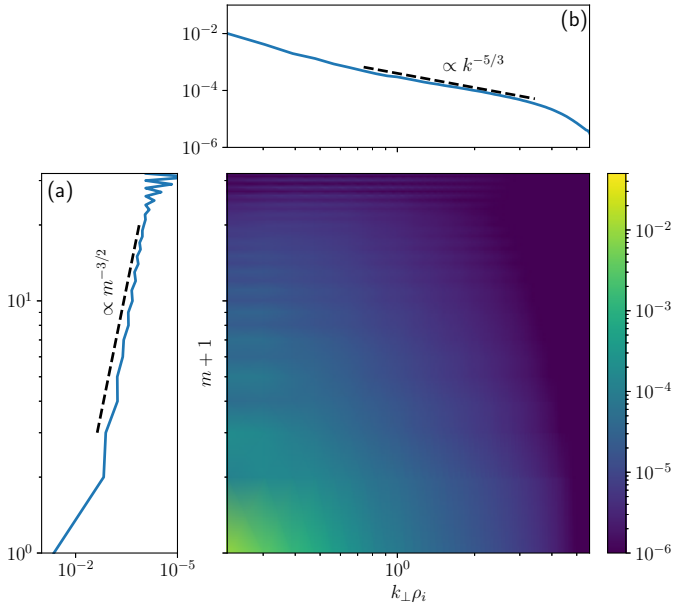

图15：傅里叶-厄米特 $W_{h,\ e}(k_\perp,\ m)$ 谱。(a) 对 $k_\perp$ 积分的 $W_{h,\ e}(k_\perp,\ m)$ 谱。(b) 对 m 积分的 $W_{h,\ e}(k_\perp,\ m)$ 谱。

5. 可扩展性

本节将考察 ALLIANCE代码的性能。我们测量单处理器上求解器完成一步积分所需的时间（每步时间），并进行弱扩展和强扩展测试，以衡量并行性能。所有数值测试均采用物理

参数与第 4 节相同。运行期间，能量被注入系统，同时也考虑了耗散。

5.1. 单处理器可扩展性

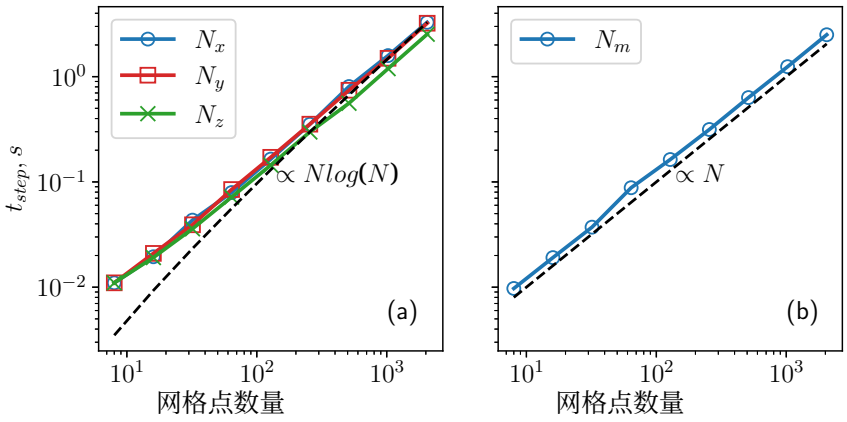

图 16：单个求解器步所需的时间随网格点数量的变化。(a) 在 x，y，z 方向上，网格点数量不同时每步时间的变化。渐近地实现了 $N\log(N)$ 标度。(b) 埃尔米特矩数量不同时每步时间的变化。实现了线性标度（$\propto N$）。

我们测试了系统不同维度增加时每步时间的扩展情况。测试在一台 Intel Xeon Gold 6140 2.30 Hz 处理器上进行，以消除处理器之间的通信时间。本次测试的初始系统尺寸为 (N_x, N_y, N_z, N_m) =(8,8,8,8)。每次运行时，将其中一个维度增加 2，直至达到 2048 个网格点。每次运行均测量每步时间。测试结果见图 16。正如预期，对于 (x, y, z) 维问题，每步时间按 $N\log N$ 扩展，这符合快速傅里叶变换的渐近行为。由于 Hermite 方向上网格点的增加会使问题尺寸线性增大，每步时间也会线性增长。因此，我们预计每步时间按 $t_{step} \propto (N_x \log N_x)(N_y \log N_y)(N_z \log N_z)(N_m)$ 扩展。

5.2. 并行可扩展性

ALLIANCE 的并行性能通过两项标准测试进行了测量：弱扩展和强扩展。两项测试均在考文垂大学的 EPYC 集群上进行，该集群由 AMD EPYC 7742 64 核处理器组成。测试中，处理器数量从 4 个增加到 256 个。

在强扩展测试中，模拟规模保持不变，同时增加处理器数量。初始问题的规模为 (N_x, N_y, N_z, N_m) =(128，128，128，128)。每次处理器数量翻倍时，都会交替分配 k_x 或 m 方向的并行化。模拟每步测得的墙钟时间如图 2(a) 所示。性能在处理器数量达到 64 个之前有所下降，而从 64 个增加到 256 个时则呈现近乎理想的扩展。我们认为，这种理想扩展得益于处理器间通信，因为每个 EPYC 处理器有 64 个核心。不同的系统配置并未显著改变弱扩展和强扩展的表现。

对于弱扩展，单处理器的问题规模选为 (N_x, N_y, N_z, N_m) =(32，128，128，32)。在这项测试中，k_x 和 m 维度交替加倍，结果见图2(b)。至于强扩展，由于处理器间通信增加，性能在处理器数量增至64时有所下降；但从64增至256，墙钟时间没有显著变化。

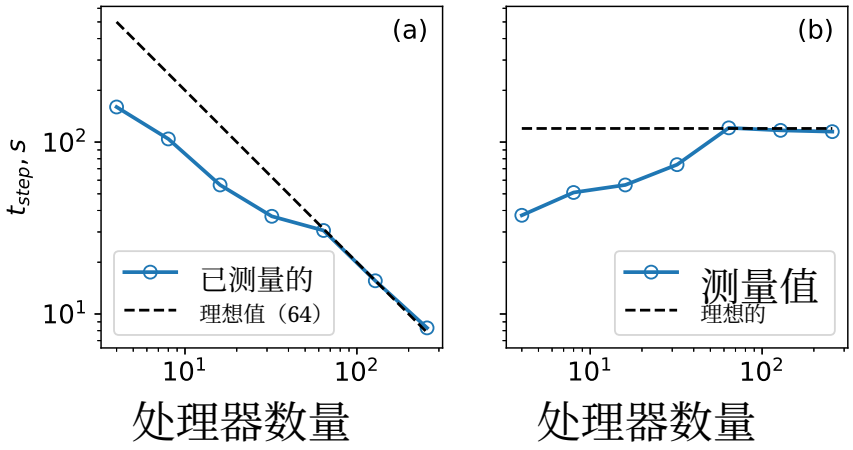

图 17: （a）强扩展测试。从 64 个处理器增加到 256 个处理器时，每步时间呈理想的扩展趋势，如 64 个处理器时的理想线性扩展所示。（b）弱扩展测试。从 64 个处理器增加到 256 个处理器时，每步时间没有增加。

6. 结论

本文介绍了新的伪谱代码 ALLIANCE。该代码对一组新的漂移动理学方程 [1] 进行数值积分。文中介绍了代码中实现的若干诊断量。为了便于研究湍流级联，文中介绍了代码中实现的简单外力和耗散机制。不过，代码结构允许根据需要轻松修改这些机制的形式。我们进行了初步的线性和非线性测试运行，结果表明，该模型能够捕捉线性相混合并实现湍流发展。

为求解这些方程，ALLIANCE 使用四阶显式龙格-库塔格式，使线性项和非线性项都具有出色的精度。对于线性模拟，误差按 $\propto dt^5$ 缩放。对于非线性项，则采用 CFL 条件以确保非线性模拟的数值稳定性。

该算法展现出理想的单处理器扩展性：对于所有维度，随着系统尺寸增大，其渐近行为符合预期。ALLIANCE 也展现出出色的并行性能，后续将考虑进一步优化。此外，ALLIANCE 未来可能的改进包括将核心功能移植到图形处理器上（与其他现代代码类似 [26], ），以及使用铅笔域分解进行快速傅里叶变换，以便在大型超级计算集群（$> 10^3$ 个处理器）上实现更好的可扩展性。不过，ALLIANCE 的一项优势在于其高度可移植，能够在各种机器上运行，从个人计算机到高性能超级计算集群。

ALLIANCE 核心所采用的方程专门设计用于衔接等离子体的动理学描述与流体描述，从而能够研究各种物理现象。将伪谱方法与平行速度方向上的厄米分解结合使用，可以研究动理学湍流级联及其与朗道阻尼等线性现象的相互作用；这也有助于开展类似于 [40, 19, 41, 42, 43], 的基础研究，从而深入了解磁化等离子体湍流的基本非线性结构，尤其是在某一特定尺度（即 $k_\perp \rho_i = 1$）具有显著非线性影响时。ALLIANCE代码还有助于揭示太阳风能谱中的膝点断裂；它可用于研究等离子体的大尺度动力学如何影响微观尺度，或大尺度上的流体约束如何影响等离子体的流体-动理学湍流转变（其表现为速度空间动力学开始变得重要的时刻）。

除此之外，此处建立的回旋流体矩与回旋动理学分布矩之间的联系，使得我们能够在为系统提供适当闭合关系的前提下，使用 ALLIANCE 对回旋流体系统进行建模。因此，使用 ALLIANCE 可以研究无需采用完整动理学描述的简化系统。由此，我们可以利用该代码研究三维重联，从而为

进一步推动该领域现有进展提供可能 [44]。

附录 A. 漂移动理学模型的 GK线性色散关系修改

要得到 ALLIANCE 所建模的漂移动理学形式的线性色散关系，只需替换 μ 空间中的积分（见 [5] 中的式 (C9)）：

$$\begin{aligned}\Gamma_0(b_s) &\approx J_{s00}^2(b_s),\\ \Gamma_1(b_s) &\approx \tilde{J}_{s10}(b_s)J_{s00}(b_s),\\ \Gamma_2(b_s) &\approx 2\Gamma(b_s).\end{aligned} \tag{A.1}$$

除积分（A.1）外，所得色散关系保持不变。

参考文献

[1] E. A. Gorbunov, B. Teaca, 漂移动力学极限下研究电磁等离子体湍流的四维方程, 《等离子体物理学杂志》88 (1) (2022) 905880117. doi:10.1017/S0022377822000083. [2] A. J. Brizard, T. S. Hahm, 非线性陀螺动理学理论基础, 《现代物理评论》 79 2007 421 468 doi:()-. 10.1103/RevModPhys.79.421. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.421 [3] A. Fasoli, S. Brunner, W. A. Cooper, J. P. Graves, P. Ricci, O. Sauter, L. Villard, 磁约束聚变物理中的计算挑战, 《自然·物理》12 (5) (2016) 411–423. doi:10.1038/nphys3744. [4] P. Helander, T. Bird, F. Jenko, R. Kleiber, G. Plunk, J. Proll, J. Riemann, P. Xanthopoulos, 仿星器陀螺动理学的进展, 《核聚变》 55 (5) (2015) 053030. doi:10.1088/0029-5515/55/5/053030. [5] G. G. Howes, S. C. Cowley, W. Dorland, G. W. Hammett, E. Quataert, A. A. Schekochihin, 天体物理陀螺动理学：基本方程与线性理论, 《天体物理学杂志》651 (2006) 590. doi:10.1086/506172. [6] C. H. K. Chen, S. Boldyrev, Q. Xia, J. C. Perez, 太阳风中亚质子尺度湍流的性质, 《物理评论快报》110 (2013) 225002. doi:10.1103/PhysRevLett.110.225002. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.225002 [7] A. B. n. Navarro, B. Teaca, D. Told, D. Groselj, P. Crandall, F. Jenko, 陀螺动理学阿尔芬湍流中的等离子体加热结构, 《物理评论快报》117 (2016) 245101. doi:10.1103/PhysRevLett.117.245101. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.245101 [8] G. L. Eyink, 近无碰撞等离子体湍流中的级联与耗散反常, 《物理评论X》8 (2018) 041020. doi:10.1103/PhysRevX.8.041020. [9] A. Zocco, A. A. Schekochihin, 低β等离子体中低频动力学、磁重联和电子加热的约化流体-动理学方程, 《等离子体物理学》18 (10) (2011) 102309. doi:10.1063/1.3628639. [10] D. R. Hatch, F. Jenko, V. Bratanov, A. B. Navarro, 梯度驱动的陀螺动理学湍流中自由能耗散的相空间尺度, 《等离子体物理学杂志》80 (4) (2014) 531–551. doi:10.1017/S0022377814000154. [11] M. Kunz, A. Schekochihin, C. Chen, I. Abel, S. Cowley, 压力各向异性天体物理等离子体中的惯性区动理学湍流, 《等离子体物理学杂志》81 (5) (2015) 325810501. doi:10.1017/S0022377815000811. [12] A. Brizard, 湍流磁化等离子体的非线性陀螺流体描述, 《流体物理学B：等离子体物理学》4 (5) (1992) 1213–1228. doi:10.1063/1.860129. [13] C. H. K. Chen, 太阳风观测揭示的天体物理等离子体湍流近期进展, 《等离子体物理学杂志》82 (6) (2016) 535820602. doi:10.1017/S0022377816001124. [14] K. H. Kiyani, K. T. Osman, S. C. Chapman, 太阳风湍流中的耗散与加热：从宏观尺度到微观尺度，再回到宏观尺度, 《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》373 (2041) (2015) 20140155. doi:10.1098/rsta.2014.0155. [15] O. Alexandrova, V. Carbone, P. Veltri, L. Sorriso-Valvo, 太阳风湍流的小尺度能量级联, 《天体物理学杂志》674 (2008) 1153. [16] O. Alexandrova, J. Saur, C. Lacombe, A. Mangeney, J. Mitchell, S. J. Schwartz, P. Robert, 从磁流体力学尺度到电子尺度的太阳风湍流谱普适性, 《物理评论快报》 103 2009 165003 doi:10.1103/PhysRevLett.103.()..165003 [17] D. Duan, T. A. Bowen, C. H. K. Chen, A. Mallet, J. He, S. D. Bale, D. Vech, J. C. Kasper, M. Pulupa, J. W. Bonnell, A. W. Case, T. D. de Wit, K. Goetz, P. R. Harvey, K. E. Korreck, D. Larson, R. Livi, R. J. MacDowall, D. M. Malaspina, M. Stevens, P. Whittlesey, PSP第2次遭遇期间慢太阳风中质子尺度磁谱断点的径向依赖性, 《天体物理学杂志增刊系列》246 (2) (2020) 55. doi:10.3847/1538-4365/ab672d. [18] T. Tatsuno, W. Dorland, A. A. Schekochihin, G. G. Plunk, M. Barnes, S. C. Cowley, G. G. Howes, 陀螺动理学等离子体湍流中的非线性相混合与熵的相空间级联, 《物理评论快报》 103 2009 15003 doi:()..10.1103/PhysRevLett.103.015003 [19] D. Told, F. Jenko, J. M. TenBarge, G. G. Howes, G. W. Hammett, 陀螺动理学模拟中阿尔芬湍流耗散区的多尺度特性, 《物理评论快报》115 (2015) 025003. doi:10.1103/PhysRevLett.115.025003.

[20] R. Meyrand, J. Squire, A. Schekochihin, W. Dorland, 关于空间等离子体中湍流零定律失效的问题，《等离子体物理学杂志》87 (3) (2021) 535870301. doi:10.1017/S0022377821000489. [21] N. R. Mandell, W. Dorland, M. Landreman, 陀螺动理学的拉盖尔–埃尔米特伪谱速度表述，《等离子体物理学杂志》84 (1) (2018) 905840108. doi:10.1017/S0022377818000041. [22] R. Numata, G. G. Howes, T. Tatsuno, M. Barnes, W. Dorland, AstroGK：天体物理陀螺动力学代码，《计算物理学杂志》229 (24) (2010) 9347–9372. doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.09.006. [23] A. A. Schekochihin, J. T. Parker, E. G. Highcock, P. J. Dellar, W. Dorland, G. W. Hammett, 漂移动力学等离子体湍流中的相位混合与非线性平流，《等离子体物理学杂志》 82 2 2016 905820212 doi:10.1017/( )( ). [24] S0022377816000374
J. T. Parker, P. J. Dellar, 弱碰撞极限下弗拉索夫–泊松系统的傅里叶–埃尔米特谱表示，《等离子体物理学杂志》81 (2) (2015) 305810203. doi:10.1017/S0022377814001287. [25] R. Meyrand, A. Kanekar, W. Dorland, A. A. Schekochihin, 无碰撞等离子体湍流的流体化，美国国家科学院院刊 116 4 2019 1185 1194 arXiv:https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.( )( )–., 1813913116 https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.1813913116 doi:10.1073/pnas.1813913116. URL [26] N. R. Mandell, W. Dorland, I. Abel, R. Gaur, P. Kim, M. Martin, T. Qian, Gx：用于托卡马克和仿星器设计的原生GPU陀螺动力学湍流代码 (2022). arXiv:2209.06731. [27] R. Jorge, P. Ricci, N. F. Loureiro, 任意碰撞性下漂移波不稳定性的理论，《物理评论快报》121 (2018) 165001. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.165001 doi:10.1103/PhysRevLett.121.165001. URL [28] R. Jorge, P. Ricci, N. F. Loureiro, 任意碰撞性下刮削层等离子体动力学的漂移动力学解析模型，《等离子体物理学杂志》83 (6) (2017) 905830606. doi:10.1017/S002237781700085X. [29] L. M. Perrone, R. Jorge, P. Ricci, 刮削层等离子体的四维漂移动力学模型，《等离子体物理学》 27 11 112502 11 2020 arXiv:https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0024968/16099478/( ), ( ). , . 112502_1_online.pdf https://doi.org/10.1063/5.0024968 doi:10.1063/5.0024968. URL [30] B. J. Frei, A. C. D. Hoffmann, P. Ricci, S. Brunner, Z. Tecchiolli, 磁通管线性陀螺动力学模型的基于矩的方法 (2022). arXiv:2210.05799. [31] A. Ba˜n´on Navarro, B. Teaca, F. Jenko, G. W. Hammett, T. Happel, A. U. Team, 大涡模拟方法在陀螺动理学湍流中的应用，《等离子体物理学》 21 3 032304 03 2014 arXiv:https://pubs.aip.org/aip/pop/( ), ( ). , . article-pdf/doi/10.1063/1.4868235/15680187/032304_1_online.pdf https://doi.org/10.1063/1.4868235 doi:10.1063/1.4868235. URL [32] B. Teaca, A. B. Navarro, F. Jenko, 陀螺动理学等离子体湍流中的尺度间能量耦合，《等离子体物理学》 21 7 072308 07 2014 arXiv:https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.4890127/15691923/( ), ( ). , . 072308_1_online.pdf https://doi.org/10.1063/1.4890127 doi:10.1063/1.4890127. URL [33] B. Frei, A. Hoffmann, P. Ricci, 离子温度梯度模的局域陀螺动理学碰撞理论，《等离子体物理学杂志》88 (3) (2022) 905880304. doi:10.1017/S0022377822000344. [34] HDF集团，分层数据格式，第5版，https://www.hdfgroup.org/HDF5/ (1997-2022)。[35] M. Frigo, S. G. Johnson, FFTW3的设计与实现，《IEEE会刊》93 (2) (2005) 216–231，专题“程序生成、优化与平台适配”。[36] B. Teaca, E. A. Gorbunov, D. Told, A. Ba˜n´on Navarro, F. Jenko, 磁化等离子体湍流中的亚网格尺度效应，《等离子体物理学杂志》87 (2) (2021) 905870209. doi:10.1017/S0022377821000180. [37] A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, W. Dorland, G. W. Hammett, G. G. Howes, G. G. Plunk, E. Quataert, T. Tatsuno, 陀螺动理学湍流：经由相空间耗散的非线性途径，《等离子体物理与受控聚变》50 (12) (2008) 124024. doi:10.1088/0741-3335/50/12/124024. [38] M. A. Beer, G. W. Hammett, 用于托卡马克湍流模拟的环形陀螺流体方程，《等离子体物理学》3 (11) (1996) 4046–4064. arXiv:https://doi.org/10.1063/1.871538, https://doi.org/10.1063/1.871538 doi:10.1063/1.871538. URL [39] E. Tassi, T. Passot, P. L. Sulem, 基于准静态闭合的哈密顿陀螺流体模型，《等离子体物理学杂志》86 (4) (2020) 835860402. doi:10.1017/S002237782000077X. [40] B. Teaca, A. B. n. Navarro, F. Jenko, S. Brunner, L. Villard, 陀螺动理学湍流中的局域性与普适性，《物理评论快报》109 (2012) 235003. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.235003 doi:10.1103/PhysRevLett.109.235003. URL [41] A. Banon Navarro, B. Teaca, D. Told, D. Groselj, P. Crandall, F. Jenko, 陀螺动理学阿尔芬湍流中的等离子体加热结构，《物理评论快报》117 (2016) 245101. doi:10.1103/PhysRevLett.117.245101. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.245101 [42] B. Teaca, F. Jenko, D. Told, 陀螺动理学湍流：理想化估算与非线性能量传递详细分析之间，《新物理学杂志》19 (4) (2017) 045001. doi:10.1088/1367-2630/aa6998. URL https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/aa6998 [43] B. Teaca, A. B. Navarro, D. Told, T. Gorler, G. Plunk, D. R. Hatch, F. Jenko, 探究磁化等离子体湍流中的相空间间歇性，《天体物理学杂志》886 (1) (2019) 65. doi:10.3847/1538-4357/ab4a02. URL https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab4a02 [44] C. Granier, D. Borgogno, D. Grasso, E. Tassi, 碰撞无关重联中电子效应的陀螺流体分析，《等离子体物理学杂志》88 (1) (2022) 905880111. doi:10.1017/S0022377822000010.