arXiv:2302.02000v1 [math.DG] 3 Feb 2023

有限子群 SL(2,ℂ) 的 Cheeger-Chern-Simons 类表示与有理双重点奇点的谱

JOSE ANTONIO ARCINIEGA-NEVAREZ、JOSE LUIS CISNEROS-MOLINA、和 AGUSTIN ROMANO-VELAZQUEZ

Abstract. 设 L 为一个紧致定向三维流形，且 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个表示。将 ρ 的 Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_{\rho,k} \in H^{2k-1}(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 在同调类 $\nu \in H_{2k-1}(L;\mathbb{Z})$ 上取值，我们得到称为 ρ的 k 阶 CCS 数的特征数。在定理 3.3 中，我们证明了：如果 ρ 是一个拓扑平凡表示，则第二 CCS 数 $\widehat{c}_{\rho,2}([L])$——其中 $[L]$ 是 L的基本类——由 ρ扭曲的 L的狄拉克算子 D 的不变量 $\xi_\rho(D)$给出；该不变量由 Atiyah、Patodi 和 Singer [5]定义。如果 L 是一个有理同调球面，我们还给出了任意表示 ρ 的 $\widehat{c}_{\rho,2}([L])$ 关于 D的 ξ-不变量的公式。给定一个拓扑平凡表示 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，我们在 $K_3(\mathbb{C})$ 中构造了一个元素 $\langle L,\rho\rangle$，即复数的第三代数 K- 理论群。当 L 是一个整数同调球时，我们证明 $\langle L,\rho\rangle$ 与 Jones 和 Westbury 在 [24]中构造的 $K_3(\mathbb{C})$ 中的元素重合，并且定理 3.3 推广了 [24, 定理 A]。对于形如 $L=\mathbb{S}^3/\Gamma$ 的有理同调球面（其中 Γ 是 SU(2) 的有限子群），我们计算了 Γ的所有不可约表示的第一和第二 CCS 数，这些数相对于 $H_{2k-1}(L;\mathbb{Z})$ 的生成元，且 $i=1$为 2。利用这些 CCS 数，我们恢复了所有有理双重点奇点的谱；该谱是 Steenbrink 在 [47]中定义的超曲面奇点不变量。受此结果启发，我们为有理曲面奇点和 Gorenstein奇点定义了拓扑谱。给定一个正规曲面奇点 (X,x)，其链接 L 是一个有理同调球面，我们展示了如何通过 (X,x) 的解消或平滑化，计算 L 的狄拉克算子的 不变量 $\xi_\rho(D)$。

1. Introduction

Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_k(E,\nabla) \in H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 是带有平坦联络∇的光滑流形 M 上向量丛 E 的次特征类，由 Cheeger 和 Simons 于 [12] 年定义。给定基本群 M的一个表示 $\rho\colon M \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，存在一个相伴平坦向量丛$V_\rho$，其具有典范平坦联络 ∇_ρ。按照 [12, §8]，表示 ρ的 Cheeger-Chern-Simons 类定义为 $\widehat{c}_{\rho,\,k} = \widehat{c}_k(V_\rho,\nabla_\rho) \in H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$。

2010年数学主题分类。主要分类：13C14、13H10、14E16、32S25、32S05。1

将 $\widehat{c}_{\rho,\ k}$ 作用于同调类 $\nu \in H_{2k-1}(M;\ \mathbb{Z})$，可得到特征数$\widehat{c}_{\rho,\ k}(\nu)$，我们称之为 CCS 数。

本文将讨论范围限定在紧致定向三维流形 L 的情形。利用 Atiyah、Patodi 和 Singer 关于平坦丛的指标定理 $[5,\ (5.3)]$，我们在定理 3.3 中证明，对于拓扑平凡表示 $\rho\colon\ \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，第二 CCS 数 $\widehat{c}_{\rho,\ 2}([L])$（其中 $[L] \in H_3(L;\ \mathbb{Z})$ 是 L 的基本~类）与狄拉克算子 D 在表示 ρ 扭曲下的 $\xi_\rho(D)$ 不变量相符；该不变量亦在 $[5,\ (3.2)]$ 中定义。对于 L 为有理同调三维球面的情形，我们还给出了任意表示 ρ 的第二 CCS 数 $\widehat{c}_{\rho,\ 2}([L])$ 的公式。

表示 $\rho\colon\ \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是拓扑平凡的，当且仅当它经过 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 因子化。因此，它诱导出一个映射 $f_n\colon\ L \to \mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d$，连接 L与赋予离散拓扑的 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的分类空间，并诱导出同调上的同态 $(f_n)_*\colon\ H_3(L;\ \mathbb{Z}) \to H_3(\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d;\ \mathbb{Z})$。$L$ 的基本类的像给出一个元素 $\langle L,\rho\rangle = f_*([L]) \in H_3(\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d;\ \mathbb{Z})$。$\rho$的第二 Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_\rho$,2 是由 f_n 拉回一个类 $\widehat{\widehat{c}}_2 \in H^3(\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d;\ \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 得到的（即万有 Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_2 \in H^3(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d;\ \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 的 k 次类在 $\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d$ 上的限制，见注 2.4）；因此，在 $\langle L,\rho\rangle$ 上计算 $\widehat{\widehat{c}}_2$，即可得到~第二 CCS 数 $\widehat{c}_\rho$,2$([L]) = \xi_\rho(D)$。通过同构 $K_3(\mathbb{C}) = H_3(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d;\ \mathbb{Z})$，我们可以将元素 $\langle L,\rho\rangle$ 视为复数的第三代数 K 理论群中的一个元素，其中 $n \geq 3$。另一方面，给定一个整数同调球 Σ 和一个表示 $\rho\colon\ \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，Jones 和 Westbury 在 $[24]$ 中构造了一个元素 $[\Sigma,\rho] \in K_3(\mathbb{C})$，它在调节子同态~ $e\colon\ K_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 下的像给出不变量 $\xi_\rho(D)$。我们证明，对于整数同调球 Σ，有 $\langle\Sigma,\rho\rangle = [\Sigma,\rho] \in K_3(\mathbb{C})$，并且定理 3.3 是 $[24,$ 定理 A$]$的推广。

接下来，我们聚焦于形如 $L = \mathbb{S}^3/\Gamma$ 的有理同调 3-球，其中 Γ是 SU(2) 的有限子群。我们分别计算 Γ 的所有不可约表示相对于 $H_1(L;\mathbb{Z})$ 的生成元以及基本类 $[L]$ 的第一和第二 CCS 数。

引用阿诺德在 $[1]$ 中的话：“可微映射的奇点理论取得的许多进展都基于经验数据。其中一些经验事实后来会成为定理。”我们的下一个结果是关于有理双重点奇点的一条经验事实，我们希望它最终能成为定理。有理双点奇点是如下形式的商奇点：$(\mathbb{C}^2/\Gamma,\ 0)$，其中 Γ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的有限子群。它的链接是上文提到的有理同调球 $L = \mathbb{S}^3/\Gamma$。在 $[47]$ 中，Steenbrink 利用米尔诺纤维上同调的混合霍奇结构及单值化，为超曲面奇点定义了一个不变量。它称为谱，是一个由有理数组成的集合（这些数不一定各不相同）。在定理 6.8 中

我们给出一种方法，根据 Γ 的不可约表示的第一 CCS 数，以及一个新不变量 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,X)$，来恢复有理双点奇点的谱。该新不变量是自然表示的第二 CCS 数的一个倍数，其系数由该奇点极小解消的基本循环给出。受定理 6.8 的启发，我们为有理曲面奇点和 Gorenstein 奇点定义了一个新不变量——拓扑谱；定义中分别使用其链接基本群的特殊 [49] 表示和上同调特殊[18]表示的 Cheeger-Chern-Simons 类。

最后，给定一个正规曲面奇点（X,x），其链接 L 是一个有理同调球，利用 Atiyah、Patodi 和 Singer 的结果 [4, pp. 415]，我们说明如何通过（X,x）的解消或平滑化，计算 $\xi_\rho(D)$ 上的狄拉克算子的 $\tilde{}$ L 。

2. Characteristic classes of representations

本节回顾分类空间的基础知识，给出 Atiyah 在 [8] 中提出的表示的陈类定义，并定义流形基本群表示的陈类和 Cheeger-Chern-Simons 类。我们假设读者熟悉群同调、表示论、纤维丛和 Chern–Weil 理论，更多详情见 [9, 21, 13] 。

2.1. 主（平坦）丛。本节回顾主丛的一些基本结果，详情见 [21, 第 4] 章。对于任意拓扑群 G，都存在空间（在同伦意义下唯一）EG 和 BG，以及一个映射（在同伦意义下唯一） p: E$G \to$ BG。空间 EG 可缩，映射 p 是一个 G-主丛，也就是说，EG 具有一个自由的 G作用，因此我们可以将 BG 视为轨道空间 EG/G ，并将 p 视为投影。因此，由长正合同伦序列可得 $\pi_{n+1}(\mathrm{B}G) \cong \pi_n(G)$。空间 B$G$ 称为 G的分类空间，而主 G-丛 p称为万有主 G-丛，因为仿紧空间 X 上的任意主G-丛都是通过分类映射$X \to$BG对 p 的拉回。 BG 的构造关于 G是函子性的。

因此， X 上的主 GL($n,\mathbb{C}$)-丛的同构类集合 $\mathrm{Prin}^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}(X)$ 与从 X 到 BGL($n,\mathbb{C}$) 的映射的同伦类集合 $[X,\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})]$ 之间存在一一对应关系：

$$\mathrm{Prin}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}(X) \Longleftrightarrow [X,\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})].$$

主 GL($n,\mathbb{C}$)-丛与 X 上秩为 n 的复向量丛之间也存在一一对应关系：每个主 GL($n,\mathbb{C}$)-丛都对应于由 GL($n,\mathbb{C}$) 在 $\mathbb{C}^n$ 上的标准作用所确定的复向量丛；而给定一个秩为 n 的复向量丛，其标架丛是一个主 GL($n,\mathbb{C}$)-丛。因此，若将 $\mathrm{Vect}_{n,\mathbb{C}}(X)$ 记为复向量丛同构类的集合，

向量丛 则可将前述对应关系写为:

$$\mathrm{Vect}_{n,\mathbb{C}}(X) \Longleftrightarrow [X, \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})]. \tag{1}$$

我们用 G^d 表示赋予离散拓扑的同一个群 G。注意，BG^d 是一个 Eilenberg-MacLane 空间，类型为 $K(G^d, 1)$。由恒等映射给出的自然连续映射ι: $G^d \to G$，在分类空间之间诱导出自然映射ι: B$G^d \to$ BG。设 M 为紧流形。若主 G- 丛 $G \to P \to M^-$ 的分类映射为 f: $M \to$ BG，且 f 在同伦意义下可分解为

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{B}G^d \\ & \overset{f}{\nearrow} & \big\downarrow \iota \\ M & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathrm{B}G. \end{array} \tag{2}$$

这种分解使丛的结构群约化为离散群，因此任何伴随向量丛都有平坦联络，即曲率为零，参见 [41, §4]。因此，若我们用 Flat Prin$^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}(M)$（分别用 Flat Vect$_{n,\mathbb{C}}(M)$）表示 X 上平坦主丛（平坦秩为 n 的复向量丛）的同构类集合，则有如下的一一对应关系

$$\begin{aligned} \text{Flat } \mathrm{Prin}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}(M) &\Longleftrightarrow [M, \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d], \\ \text{Flat } \mathrm{Vect}_{n,\mathbb{C}}(M) &\Longleftrightarrow [M, \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d] \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}\,(\pi_1(M), \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})^d). \end{aligned} \tag{3}$$

注 2.1. 设 V$_n(\mathbb{C}^K)$ 为 $\mathbb{C}^K$ 中由 n 个标架组成的 Stiefel 流形，G$_n(\mathbb{C}^K)$ 为 $\mathbb{C}^K$ 中由 n 维子空间组成的 Grassmann 流形。令 V$_n$ =V$_n(\mathbb{C}^\infty)$ =lim⟶V$_n(\mathbb{C}^K)$，G$_n$ = G$_n(\mathbb{C}^\infty)$ =lim⟶G$_n(\mathbb{C}^K)$。对于 G =GL$(n,\mathbb{C})$，分类空间 BG 为 G$_n$，泛主 G-丛为 Stiefel 丛 V$_n$ →G$_n$。泛向量丛是 G$_n$ [21, 上秩为 n 的典范复丛 γ^n （定理 8-6.1，定理 3-7.2]）。

备注 2.2. 在定理 Narasimhan 和 Ramanan 中，他们证明 Stiefel 丛 V$_n(\mathbb{C}^K)$ → G$_n$($\mathbb{C}^K$) 具有一个联络 ϑ，使其成为一个 m-分类的主 GL$(n,\mathbb{C})$-丛，当 K =$(m+1)$($2m+1)n^2$ 时；也就是说，任意一个定义在流形 M 上、带有联络 θ 且满足 dim $M \le m$ 的主 G-丛，都存在一个保持联络的丛映射到 V$_n(\mathbb{C}^K)$；并且对于任意两个这样的保持联络的丛态射，相应的映射 f_1, f_2: $M \to$ G$_n(\mathbb{C}^K)$ 都是光滑同伦的。具有不同 K 的 Stiefel 丛上的联络彼此相容，因此我们在普适丛 V$_n$ → G$_n$ 中得到一个泛联络 ϑ。这在普适向量丛 γ^n →G$_n$ 上定义了一个泛联络 ∇_{univ}。我们将其记为 (γ^n, BGL$(n,\mathbb{C})$ ∇_{univ})。因此，通过映射 ι: BGL$(n,\mathbb{C})^d \to$ BGL$(n,\mathbb{C})$ = G$_n$ 对 γ^n 的拉回（带联络）是一个带有泛联络的泛平坦向量丛。我们将其记为 (γ_d^n, BGL$(n,\mathbb{C})^d$, ∇_{univ}^d) = ($\iota^*\gamma^n$, BGL$(n,\mathbb{C})^d$, $\iota^*\nabla_{\mathrm{univ}}$)。

2.2. 表示的陈类。设 Γ 为一个离散群。设 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个表示。这样的表示在分类空间之间诱导出一个映射

$$\mathrm{B}\rho\colon \mathrm{B}\Gamma \to \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C}),$$

由 (1) 可诱导出一个复向量丛 $V_\rho = \mathrm{E}\Gamma \times_\rho \mathbb{C}^n \to \mathrm{B}\Gamma$，其中 $\mathrm{E}\Gamma \times_\rho \mathbb{C}^n$ 是 $\mathrm{E}\Gamma \times \mathbb{C}^n$ 在 Γ 的右作用下的商空间，该作用定义为 $(e,v)g = (eg, \rho(g)^{-1}v)$。

ρ 的 k 阶陈类是向量丛 V_ρ 的 k 阶陈类，也就是说，

$$c_k(\rho) = c_k(V_\rho) \in H^{2k}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z}),$$

（有限情形见 [7]；一般情形见 [8]，。）

对于 Γ 有限群，表示 ρ 的陈类由以下三个性质刻画（参见 [32][33,定理 5]）：

- 若 $h\colon \Gamma' \to \Gamma$ 是一个群态射，则
$$c_k(h^!\rho) = h^* c_k(\rho),$$
其中 $h^!$ 和 h^* 分别是表示论和上同调中的自然拉回映射。

- 若总陈类为 $c(\rho) = 1 + c_1(\rho) + \cdots + c_n(\rho)$，则
$$c(\rho_1 \oplus \rho_2) = c(\rho_1)\cdot c(\rho_2).$$

- 同态
$$c_1\colon \mathrm{Hom}\,(\Gamma, U(1)) \to H^2(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z}), \qquad \rho \mapsto c_1(\rho),$$
是一个同构。

注 2.3. 对于任意表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，第一陈类满足

$$c_1(\rho) = c_1(\det(\rho)),$$

其中 $\det\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ 是行列式同态，且 $\det(\rho) = \det\circ\rho$（对于有限群，参见 [8, 附录 (7)]，；一般情形参见 [36]）。

2.3. Cheeger-Chern-Simons 类。设 M 为一个光滑流形。设 (E,M,∇) 为 M 上秩为 n 的向量丛，并带有联络 ∇，其曲率为 Θ。Chern–Weil 理论允许我们利用联络 [13] 的曲率构造该向量丛 E 的特征类。

设 $\Lambda = \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Q}$。令 $\Omega^k(M)$ 为 M 上取复值的光滑微分 k-形式群，$\Omega^k_{cl}(M)$ 为闭 k-形式子群，$\Omega^k_{cl}(M;\Lambda)$ 为周期属于 Λ 的闭 k-形式子群，即 $\Omega^k_{cl}(M;\Lambda) = \ker\big(\Omega^k_{cl}(M) \to H^k(M;\mathbb{C}/\Lambda)\big)$。令 $\mathcal{M}_n \cong \mathbb{C}^{n^2}$ 表示 $n\times n$ 矩阵空间。设 $P_k\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{C}$ 是一个系数属于 Λ、次数为 k 的对称齐次多项式，且为不变多项式，即对于所有 $A \in \mathcal{M}_n$ 和所有 $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，均有 $P_k(A) = P_k(gAg^{-1})$。记不变多项式集合为 $I^k(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$，并令 $I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} I^k(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$，它

是一个交换代数。在曲率 Θ 上计算 P_k，得到 $2k$-形式 $P_k(E,\nabla) := P_k(\Theta)$，它是闭形式，其德拉姆上同调类 $P_k(E) = [P_k(E,\nabla)] \in H^{2k}(M;\mathbb{C})$ 与联络 ∇ 的选取无关。这定义了 Weil 同态 $I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})) \to H^\bullet(M;\mathbb{C})$，它将一个不变多项式映射到 M 的一个上同调类。这是一个代数同态。

例如，利用由以下关系给出的 $C_k(A)$ 次不变对称齐次多项式

$$\det(A+tI) = \sum_{k=0}^{n} C_k(A) t^{n-k}, \tag{4}$$

可得到秩为 $0 \le k \le n =$ 的陈形式 $c_k(E,\nabla) = C_k(\Theta) \in \Omega^{2k}_{cl}(M;\mathbb{Z})$。其德拉姆上同调类 $c_k^{dR}(E) = [c_k(E,\nabla)] \in H^{2k}(M;\mathbb{C})$ 是正合列中 E 的第 k 陈类 $c_k(E)$ 的像

$$\begin{array}{c} \cdots \to H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{q} H^{2k}(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{r} H^{2k}(M;\mathbb{C}) \xrightarrow{p_{\mathbb{Z}}} \cdots \\ c_k(E) \mapsto c_k^{dR}(E) \end{array} \tag{5}$$

由系数短正合列所诱导

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to 0. \tag{6}$$

更一般地，可以用形如 $P = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$ 的不变幂级数代替不变多项式，其中每个 P_k 都是不变齐次多项式，次数为 k。例如，不变形式幂级数

$$ch(A) = \mathrm{Tr}(e^{A/2\pi i}), \tag{7}$$

其中 Tr 表示迹，给出 $ch(E,\nabla) \in \Omega^{\mathrm{even}}(M)$，表示陈特征$ch(E) \in H^{\mathrm{even}}(M;\mathbb{Q})$，它可以用 E 的陈类表示为

$$ch(E) = n + c_1(E) + \frac{1}{2}\big(c_1(E)^2 - 2c_2(E)\big) + \frac{1}{6}\big(c_1(E)^3 - 3c_1(E)c_2(E) + 3c_3(E)\big) + \cdots.$$

在 [12] Cheeger 和 Simons 定义了 M 的微分特征标环，并构造了 Weil 同态的一个提升，以得到次特征类。

设 $C_k(M;\mathbb{Z}) \supset Z_k(M;\mathbb{Z})$ 分别为 M 中光滑奇异 k-链群和 ∂ 中的圈群，且 C_k: $M(\mathbb{Z};$ $\to C_{k+1})$ $M(\mathbb{Z};)$ 为边界算子。

次数为[1] k 的微分特征标群定义为

$$\widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\Lambda) = \left\{ \psi \in \mathrm{Hom}\left(Z_{k-1}(M;\mathbb{Z}),\mathbb{C}/\Lambda\right) \,\middle|\, \psi(\partial(a)) = \int_a \omega_\psi \mod \Lambda \right\}.$$

[1]与原始定义 [12相比，将次数平移 $+1$ 是方便的].

形式 ω_ψ 由 ψ 唯一确定，我们有 $\omega_\psi \in \Omega^k_{cl}(M;\Lambda)$。令 r 为自然映射 $r\colon\ H^k(M;\Lambda) \to H^k(M;\mathbb{C})$，并且对于给定的 $\omega \in \Omega^k_{cl}(M;\Lambda)$，用 $[\omega]$ 表示其德拉姆上同调类。令

$$R^k(M;\Lambda) = \{(\omega, u) \in \Omega^k_{cl}(M;\Lambda) \times H^k(M;\Lambda) \mid r(u) = [\omega]\}.$$

存在自然的正合列（见 [12, 定理 1.1]）：

$$0 \to H^{k-1}(M;\mathbb{C}/\Lambda) \to \widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\delta_1} \Omega^k_{cl}(M;\Lambda) \to 0, \tag{8}$$

$$0 \to \Omega^{k-1}(M)/\Omega^{k-1}_{cl}(M;\Lambda) \to \widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\delta_2} H^k(M;\Lambda) \to 0. \tag{9}$$

$$0 \to H^{k-1}(M;\mathbb{C})/r(H^k(M;\Lambda)) \to \widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{(\delta_1,\delta_2)} R^k(M;\Lambda) \to 0. \tag{10}$$

给定 $\psi \in \widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\Lambda)$，我们有 $r(\delta_2(\psi)) = [\delta_1(\psi)]$。特别地，由 (10) 可知，若 $H^{k-1}(M;\mathbb{C}) = 0$，则 ψ 由 $(\delta_1(\psi)\ \delta_2(\psi))$ 唯一确定。在 [12] 中，$\widehat{H}^\bullet(M;\mathbb{C}/\Lambda) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\Lambda)$ 上定义了分次环结构，使得 δ_1 和 δ_2 是环同态。

设 $(\gamma^n, \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})\ \nabla_{\mathrm{univ}})$ 是带有泛联络 ∇_{univ} 的泛向量丛（见备注 2.2）。设 P_k 是不变多项式，且 $P_k(\gamma^n, \nabla_{\mathrm{univ}}) \in \Omega^{2k}_{cl}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C});\Lambda)$ 是一个周期属于 Λ、代表特征类 $P_k(\gamma^n) \in H^{2k}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C});\Lambda)$ 的形式。由于 $H^{\mathrm{odd}}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C});\mathbb{C}) = 0$，考虑 $\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})$ 上的 (10)，元素 $(P_k(\gamma^n, \nabla_{\mathrm{univ}})\ P_k(\gamma^n)) \in R^{2k}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C});\Lambda)$ 唯一确定一个微分特征 $\widehat{P}_k = \widehat{P}_k(\gamma^n, \nabla_{\mathrm{univ}}) \in \widehat{H}^{2k}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C});\mathbb{C}/\Lambda)$，我们称之为由 P_k 定义的泛微分特征。设 (E, M, ∇) 是带有联络 ∇ 的向量丛。设 $f\colon M \to \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})$ 是 (E, M, ∇) 的带联络分类映射。则 $\widehat{P}_k(E,\nabla) = f^*(\widehat{P}_k) \in \widehat{H}^{2k}(M;\mathbb{C}/\Lambda)$ 是一个自然的微分特征，并且满足

$$\delta_1(\widehat{P}_k(E,\nabla)) = P_k(E,\nabla), \qquad \delta_2(\widehat{P}_k(E,\nabla)) = P_k(E). \tag{11}$$

注意，类 $P_k(E,\nabla)$ 取决于联络 ∇。如果 ∇_0 和 ∇_1 是 E 上的两个联络，则有

$$\delta_2(\widehat{P}_k(E,\nabla_1) - \widehat{P}_k(E,\nabla_0)) = \delta_2(\widehat{P}_k(E,\nabla_1)) - \delta_2(\widehat{P}_k(E,\nabla_0)) = 0,$$

因此，根据 (9)，特征标之差必为微分形式 $TP_k(\nabla_1,\nabla_0) \in \Omega^{k-1}(M)$ 模 Λ 的约化。此形式可通过陈-西蒙斯构造 [14] 计算。设 ∇_t 是连接 ∇_0 与 ∇_1 的一条光滑联络曲线（例如 $\nabla_t = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0$）。那么 ∇_t 在丛 $E \times I$ 上定义了一个联络 $\widetilde{\nabla}$。设 Θ 为 ∇ 的曲率。我们可以构造特征形式 $P_k(E \times I, \widetilde{\nabla}) = P_k(\widetilde{\Theta}) \in \Omega^{2k}(M \times I)$ 以及次级陈–西蒙斯形式

$$TP_k(\nabla_1,\nabla_0) = \pi_*(P_k(E \times I, \widetilde{\nabla})) \in \Omega^{2k-1}(M), \tag{12}$$

其中 $\pi\colon M\times I\to M$ 是投影，而 $\pi_*\colon \Omega^{2k}(M\times I)\to\Omega^{2k-1}(M)$ 是沿纤维积分（见 [21, 备注 19-1.8]）。因此

$$\big(\widehat{P}_k(E,\nabla_1)-\widehat{P}_k(E,\nabla_0)\big)(a)=\int_a TP_k(\nabla_1,\nabla_0)\mod\Lambda,\quad a\in Z_{k-1}(M;\mathbb{Z}).$$

由于 $TP_k(\nabla_1,\nabla_0)$ 是闭的，我们得到一个类 $[TP_k(\nabla_1,\nabla_0)]\in H^{2k-1}(M;\mathbb{C})$，它与所选的联络路径 ∇_t 无关。如果两个联络 ∇_0 和 ∇_1都是平坦的，根据 (8)，$\widehat{P}_k(E,\nabla_0)$ $\widehat{P}_k(E,\nabla_1)\in H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\Lambda)$，在这种情况下我们有

$$\widehat{P}_k(E,\nabla_1)-\widehat{P}_k(E,\nabla_0)=p_\Lambda\big([TP_k(\nabla_1,\nabla_0)]\big),\tag{13}$$

其中 $p_\Lambda\colon H^{2k-1}(M;\mathbb{C})\to H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\Lambda)$ 是自然同态。

取 P_k 为由 (4) 定义的多项式 C_k，我们得到陈微分特征标 $\widehat{c}_k(E,\nabla)\in\widehat{H}^{2k}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$。另一方面，利用 (7) 中给出的幂级数$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，我们得到微分特征 $ch(E,\nabla)\in H^{\mathrm{even}}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Q})$，它可以用 $\widehat{c}_k(E,\nabla)$ 表示（公式中省略 (E,∇)），见 [12, (4.10)]

$$\widehat{ch}(E,\nabla)=n+\widehat{c}_1+\frac{1}{2}\big(\widehat{c}_1*\widehat{c}_1-2\widehat{c}_2\big)+\frac{1}{6}\big(\widehat{c}_1*\widehat{c}_1*\widehat{c}_1-3\widehat{c}_1*\widehat{c}_2+3\widehat{c}_3\big)+\cdots,$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $*$是 $H^\bullet(M;\mathbb{C}/\mathbb{Q})$中的乘积。我们用 $ch_k(E)$表示$\smile ch(E)$中次数为 $2k$的分量，因此有

$$\begin{aligned}&\widehat{ch}_0(E,\nabla)=n,\qquad \widehat{ch}_1(E,\nabla)=\widehat{c}_1(E,\nabla),\\ &\widehat{ch}_2(E,\nabla)=\frac{1}{2}\big(\widehat{c}_1(E,\nabla)*\widehat{c}_1(E,\nabla)-2\widehat{c}_2(E,\nabla)\big),\ldots\end{aligned}\tag{14}$$

2.4. 表示的 Cheeger-Chern-Simons 类。考虑一个表示 $\rho\colon \pi_1(M)\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$。与 ρ对应，我们得到平坦的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-丛

$\sim$ $\sim$ $\smile V_\rho=M\times_\rho\mathbb{C}^n\to M$，其中 M 是 M 的万有覆盖，而 $M\times_\rho\mathbb{C}^n$ 是 $M\times\mathbb{C}^n$在 $\pi_1(M)$作用下的$\widetilde{\ }$商空间。由于 V_ρ具有平坦联络 ∇_ρ，我们有 $c_k(V_\rho,\nabla_\rho)=0$ 且 $c_k^{dR}(V_\rho)=0$，这意味着陈类 $c_k(V_\rho)$属于（5）中同态 $q\colon H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})\to H^{2k}(M;\mathbb{Z})$ 的像。此外，由（11）和（8）可得

$$\widehat{c}_k(V_\rho,\nabla_\rho)\in H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}),\tag{15}$$

并且它是由 q 对陈类 $c_k(V_\rho)$ 所作的函子性提升。我们分别将表示 ρ 的陈类和 Cheeger-Chern-Simons 类定义为

$$c_{\rho,k}=c_k(V_\rho)\in H^{2k}(M;\mathbb{Z}),\qquad \widehat{c}_{\rho,k}=\widehat{c}_k(V_\rho,\nabla_\rho)\in H^{2k-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

$\widehat{\ }$我们设 $\widehat{c}_\rho=1+\widehat{c}_{\rho,1}+\cdots+\widehat{c}_{\rho,n}\in H^{\mathrm{even}}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$。若 $\rho\colon \pi_1(M)\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 和 $\tau\colon \pi_1(M)\to\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 是两个表示，则有 [12, 定理 4.6]

$$\widehat{c}_{\rho\oplus\tau}=\widehat{c}_\rho*\widehat{c}_\tau.\tag{16}$$

注 2.4。令 $\widehat{C}_k \in \widehat{H}^{2k}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C});\ \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 为第 k 个泛 Chern 微分特征标。由于泛联络下的泛丛 $(\gamma^n, \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})\ \nabla_{\mathrm{univ}})$ 经映射 $\iota\colon \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d \to \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})$ 拉回后得到的丛 $(\gamma_d^n, \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d, \nabla_{\mathrm{univ}}^d)$ 是平坦的（见备注 2.2），因此我们有

$$\widehat{c}_k = \iota^*(\widehat{C}_k) \in H^{2k-1}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d;\mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

由于向量丛 $V_\rho \to M$ 具有平坦联络，其带有联络 $f\colon M \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的分类映射如式 (2) 所示分解，即 $f = \iota \circ f$，其中 $f\colon M \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})^d$。因此，表示 ρ 的第 k 个 Cheeger-Chern-Simons 类为

$$\widehat{c}_{\rho,k} = f^*(\widehat{c}_k).$$

类 $\widehat{c}_k \in H^{2k-1}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d;\ \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 称为平坦丛的通用第 k 个 Cheeger-Chern-Simons 类

注 2.5。第2.2小节中定义的表示 $\rho\colon \Gamma = \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的陈类 $c_k(\rho)$ 是分类空间 $B\Gamma$ 的上同调类，而本小节中定义的陈类 $c_{\rho,\,k}$ 是 M 的上同调类。它们之间具有如下关系。由于 $\pi_1(M) = \Gamma$，存在一个映射 $\phi\colon M \to \mathrm{B}\Gamma$。于是$c_{\rho,\,k} = \phi^*(c_k(\rho))$。

注2.6。也可以将表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的 Cheeger-Chern-Simons类定义为分类空间 $\mathrm{B}\Gamma$ 的上同调类。令$\widehat{c}_k \in H^{2k-1}(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d;\ \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 表示第 k 个万有切格-切恩-西蒙斯类（见注 2.4）。令 $\mathrm{B}\rho\colon \mathrm{B}\Gamma \to \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d$ 表示由 ρ 在分类空间之间诱导的映射。ρ 的第 k 个 Cheeger-Chern-Simons 类是其拉回

$$\widehat{c}_k(\rho) = \mathrm{B}\rho^*(\widehat{c}_k) \in H^{2k-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z}). \tag{17}$$

设 M 是基本群为 $\pi_1(M) = \Gamma$ 的光滑流形，并考虑映射 $\phi\colon M \to \mathrm{B}\Gamma$。于是 $\widehat{c}_{\rho,\,k} = \phi^*(\widehat{c}_k(\rho))$。

设 Γ 是一个离散群。设 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个表示。由（17）可知，$\widehat{c}_k(\rho) \in H^{2k-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$。根据泛系数定理，并利用 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 是可除的（等价地，内射的；见推论 4.2]），我们有

$$H^{2k-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}\,(H_{2k-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z}),\mathbb{C}/\mathbb{Z}). \tag{18}$$

因此，切恩–切格–西蒙斯类 $\widehat{c}_k(\rho)$ of ρ 可识别为态射

$$\widehat{c}_k(\rho)\colon H_{2k-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}/\mathbb{Z},$$

定义 2.7. 设 κ 是 $H_{2k-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z})$ 中的一个同调类，我们称其像为

$$\widehat{c}_k(\rho)(\kappa) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z},$$

k ρ 相对于 κ 的第 - 个切格–切恩–西蒙斯数（CCS 数）。

若向量丛 $V_\rho \to M$ 是拓扑平凡的，则称表示 ρ: $\pi_1(M) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为拓扑平凡；也就是说，作为拓扑向量丛，它与乘积丛 $M \times \mathbb{C}^n \to M$ 同构。

3. CCS-numbers of compact oriented 3-manifolds

本节我们仅讨论流形为紧致定向三维流形 L 的情形。我们定义表示 ρ: $\Gamma = \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的第一和第二 CCS 数，并证明，拓扑平凡表示 ρ 的第二 CCS 数与 Atiyah、Patodi 和 Singer 在 [5,p. 87] 中定义的、关于由 ρ 所确定的平坦复向量丛的 L 上狄拉克算子的拓扑指标一致。对于 L 为有理同调三维球面的情形，我们利用平坦丛指标定理，给出任意表示的第二 CCS 数公式。

3.1. 表示的 CCS 数。设 L 为紧致定向三维流形，并考虑表示 ρ: $\Gamma = \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$。由 (15) 可得$\widehat{c}_{\rho,\,k} \in H^{2k-1}(M;\,\mathbb{C}/\mathbb{Z})$。按照 (18) 的同一论证，可得一个同构$H^{2k-1}(L;\,\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_{2k-1}(L;\,\mathbb{Z})\ \mathbb{C}/\mathbb{Z})$。

定义 3.1. 设 ν 是 $H_1(L;\mathbb{Z})$ 中的一个同调类，我们称其像为

$$\widehat{c}_{\rho,1}(\nu) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z},$$

ρ 关于 ν 的第一CCS数。设 $[L] \in H_3(L;\mathbb{Z})$ 为基本类。我们定义 ρ 的第二 CCS 数为

$$\widehat{c}_{\rho,2}([L]) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}.$$

注意， ρ 关于 $H_3(L;\mathbb{Z})$ 中另一个类的第二 CCS 数是 $\widehat{c}_{\rho,\,2}([L])$ 的倍数。与定义 2.7 的关系如下。由于 $\pi_1(L) = \Gamma$，存在一个映射 ϕ: $L \to \mathrm{B}\Gamma$。设 $\nu \in H_{2k-1}(L;\,\mathbb{Z})$，其中 $k = 1,\ 2$。那么我们有

$$\widehat{c}_{\rho,k}(\nu) = \phi^*(\widehat{c}_k(\alpha))(\nu) = \widehat{c}_k(\rho)(\phi_*(\nu)). \tag{19}$$

3.2. 平坦丛的指标定理。设 A 是一个自伴椭圆算子，作用于紧流形 M 上向量丛 $E \to M$ 的截面空间 $C^\infty(M,E)$。那么 A 具有离散谱，其特征值 $\{\lambda\}$ 均为实数。在 [3] 中，Atiyah、Patodi 和 Singer 定义了一个复值函数 $\eta(s;A)$，它是复变量 s 的函数，称为 A 的 η-级数，其定义为

$$\eta(s;A) = \sum_{\lambda\neq 0} (\operatorname{sign}\lambda)|\lambda|^{-s},$$

其中求和遍历 A 的非零特征值。实部 $\Re(s)$ 足够大时，该级数收敛；根据 Seeley [46] 的结果，它可通过解析延拓扩展为整个 s 平面上的亚纯函数，并且在 $s=0$ 处取有限值。数值 $\eta(A)=\eta(0;A)$ 称为 A 的 η-不变量，它是一种谱不变量，用于度量 A 的谱的不对称性。他们还定义了 η-级数的一种改进形式，将 A 的零特征值也考虑在内，定义为 $\xi(s;A)=\frac{h+\eta_{(s;A)}}{2}$，其中 h 是 A 的核的维数。

考虑酉表示 $\rho\colon \pi_1(M)\to U(n)$ 以及由 ρ给出的平坦向量丛 V_ρ。将算子 A 与 V_ρ 耦合，可得到作用于$C^\infty(M,E\otimes V_\rho)$上的算子 A_ρ，该算子仍然是自伴的。约化的 η和 ξ-级数为

$$\tilde{\eta}_\rho(s;A)=\eta(s;A_\rho)-n\eta(s;A),\quad \tilde{\xi}_\rho(s;A)=\xi(s;A_\rho)-n\xi(s;A), \tag{20}$$

其中 n是表示 ρ的维数。根据 [5, 第 2] 节，函数 (20) 在 $s=0$ 处是有限的，模 $\mathbb{Z}$ 化后得到

$$\tilde{\eta}_\rho(A)=\tilde{\eta}_\rho(0;A)\in\mathbb{R}/\mathbb{Z},\qquad \tilde{\xi}_\rho(A)=\tilde{\xi}_\rho(0;A)\in\mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

它们是 A的同伦不变量。

如果表示 $\rho\colon \pi_1(M)\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 不是酉表示，则扭曲算子A_ρ 不是自伴的，但它具有自伴符号；这足以定义$\eta(s;A_\rho)$。为定义 $\xi(s;A_\rho)$，取 h为由虚轴上的谱~产生的维数；此时 $\xi_\rho(0;A)$ 是模整数的复数，即~为 $\xi_\rho(A)\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}$。

若 A 是一个作用于 M 上向量丛 $E\to M$ 的截面空间$C^\infty(M,E)$上的 m阶自伴椭圆算子，则其同伦类仅取决于其首符号 $\sigma_m(A)$的同伦类。记 T^*M 为 M的余切丛。根据 [5, 命题 3.1]，M上的自伴符号稳定类与 $K^1(T^*M)$的元素之间存在一一对应关系。

固定A的表示一个同态$\rho\colon \pi_1(M)\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，映射 $A\mapsto$ ~

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_\rho\colon K^1(T^*M)&\to\mathbb{C}/\mathbb{Z}\\ \sigma_m(A)&\mapsto\tilde{\xi}_\rho(A)\end{aligned}$$

称为相对于由 ρ给出的平坦丛的 A 的解析指标（或 A的符号类的解析指标）。

另一方面，表示 $\rho\colon \pi_1(M)\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 在系数为 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 的 K 理论中定义了一个元素$[\rho]\in K^{-1}(M,\mathbb{C}/\mathbb{Z})$，参见 [5, 第 90] 页。存在一个配对

$$K^{-1}(M,\mathbb{C}/\mathbb{Z})\otimes K^1(T^*M)\to K^0(T^*M,\mathbb{C}/\mathbb{Z}),$$

以及一个同态

$$\mathrm{Ind}\colon K^0(T^*M,\mathbb{C}/\mathbb{Z})\to\mathbb{C}/\mathbb{Z},$$

它扩展了 [6] 的通常拓扑指标。对于每个表示 ρ，都有一个拓扑定义的同态

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\rho\colon K^1(T^*M)&\to\mathbb{C}/\mathbb{Z}\\ \sigma_m(A)&\mapsto-\mathrm{Ind}([\rho]\cdot\sigma_m(A))\end{aligned}$$

称为关于由 ρ 给出的平坦丛的拓扑指标 .

平坦丛指标定理 [5, (5.3)] 表明，如果 M 是奇维的，那么 ind_ρ 与 Ind_ρ 一致。

注 3.2。如果 $\rho\colon \pi_1(M)\to U(n)$ 是一个酉表示，则两个指标 ind_ρ 和 Ind_ρ 的取值都属于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

3.3. ρ的第二 CCS 数。设 L 是一个紧致定向三维流形，则它是一个自旋流形（见第六章，定理 1] ），并且具有一个狄拉克算子 D。该算子是一阶、自伴的椭圆算子，作用于旋量丛的截面上（见 [25, § 3.4] 或 [35, 例 5.9]）。

定理 3.3. 设 L 是一个紧致定向三维流形。设 D 是 L 上的狄拉克算子，且设 $\sigma=[\sigma_1(D)]$ 是 D 在 $K^1(T^*L)$ 中的符号类。设 $\rho\colon \pi_1(L)\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个拓扑平凡表示。那么，ρ 的第二 CCS 数与关于 ρ 的 D 的拓扑指标相同，即

$$\widehat{c}_{\rho,2}([L])=\mathrm{Ind}_\rho\,\sigma.$$

Proof. 证明的关键是确定 $\mathrm{Ind}_\rho\,\sigma$，其中 σ 是狄拉克算子的符号类，且 ρ 是紧致定向三维流形基本群的拓扑平凡表示；具体论证遵循平坦丛指标定理的证明。在 [5, 第 88] K^1 页，$(L,\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 被定义为下列自然映射的余核

$$K^{-1}(L,\mathbb{Q})\to K^{-1}(L,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\oplus K^{-1}(L,\mathbb{C}).$$

因此，给定表示 $\rho\colon \pi_1(L)\to GL(n,\mathbb{C})$，元素 $[\rho]\in K^{-1}(L,\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 由两个元素给出

$$a_\rho\in K^{-1}(L,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\quad\text{and}\quad b_\rho\in K^{-1}(L,\mathbb{C}).$$

用这些元素表示，拓扑指标可写为（见 [5, 第 98] 页）

$$\mathrm{Ind}_\rho\,\sigma=-\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(b_\rho\sigma)+\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}(\sigma a_\rho)\mod\mathbb{Z},\tag{21}$$

其中，$\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}$ 由拓扑指标 $K(T^*L)\to\mathbb{Z}$ 通过与$\mathbb{C}$ 进行张量化而得到，而 $\mathrm{Ind}^{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ 是系数取 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 的拓扑指标（参见 [5, 命题 6.2 和 (8.4)]）。

让我们回顾一下在 ρ 时元素 a_ρ 和 b_ρ 的构造： $\pi_1(L) \to GL(n,\mathbb{C})$ 是一个拓扑平凡表示，而 $s: V_\rho \cong L\times\mathbb{C}^n$ 是一个平凡化。在这种情况下，我们有 $a_\rho = 0$（参见 [5, 第 89 页，(i)、(ii)]）。元素 b_ρ 的构造如下。丛 V_ρ 有两个不同的平坦联络：其典范平坦联络∇_ρ，以及由 s 这一同构将 $L\times\mathbb{C}^n$ 上的平凡联络诱导得到的联络 ∇_{triv}。对丛 V_ρ 应用陈-西蒙斯构造，使用联络曲线 $\nabla_t = t\nabla_{\text{triv}} + (1-t)\nabla_\rho$ 和式 (7) 中针对陈特征给出的不变形式幂级数 $ch(A)$，我们得到陈-西蒙斯形式$Tch(\nabla_{\text{triv}},\nabla_\rho) \in \Omega^{\text{odd}}(L)$（如式 (12) 所示），以及一个混合奇维上同调类 $\beta = [Tch(\nabla_{\text{triv}},\nabla_\rho)] \in H^{\text{odd}}(L;\mathbb{C})$。我们有（参见 [5, 第 89 页，(iii)]）

$$b_\rho = ch^{-1}(\beta) \tag{22}$$

其中 $ch\colon K^{-1}(L,\mathbb{C}) \to H^{\text{odd}}(L;\mathbb{C})$ 是陈特征。

根据 Karoubi [27, 28], ，存在如下正合列

$$\cdots \to K^{-1}(L) \to K^{-1}(L,\mathbb{C}) \to K^{-1}(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \to K^0(L) \to \dots \tag{23}$$

通过改变 V_ρ 的平凡化，我们在 $K^{-1}(L,\mathbb{C})$ 中得到另一个元素。然而，改变平凡化等价于在 $K^{-1}(L)$ 中取一个元素。因此，根据正合列 (23)，显然 b_ρ 在 $K^{-1}(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 中的类不依赖于平凡化的选择（参见 [5, 第 89 页，(iv)]）。于是，当 ρ 是拓扑平凡的时，(21) 变为

$$\operatorname{Ind}_\rho \sigma = -\operatorname{Ind}_{\mathbb{C}}(b_\rho\sigma) \mod \mathbb{Z}. \tag{24}$$

由于 σ 是 Dirac 算子的符号类，(24) 与直接像同态 $K^{-1}(L,\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 重合（见 [5, 第 82 页 (2)]），其上同调表达式为

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_\rho \sigma &= \big\{\operatorname{ch}(b_\rho)\cdot\mathscr{I}(L)\big\}[L] \mod \mathbb{Z},\\ &= \big\{\beta\cdot\mathscr{I}(L)\big\}[L] \mod \mathbb{Z}, \qquad\qquad \text{by (22)}\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{I}(L)$ 是 L 的指标类（见 [7, 第 556] 页）。由于 L 是紧致三维流形，它是可平行化的，并且 $\mathscr{I}(L) = 1$。因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_\rho \sigma &= \big\{\beta\big\}[L] \mod \mathbb{Z},\\ &= \big\{[Tch(\nabla_{\text{triv}},\nabla_\rho)]\big\}[L] \mod \mathbb{Z},\end{aligned} \tag{25}$$

我们有 $\beta = [Tch(\nabla_{\text{triv}},\nabla_\rho)] \in H^{\text{odd}}(L;\mathbb{C})$，将陈-西蒙斯形式 $Tch(\nabla_{\text{triv}},\nabla_\rho)$ 的 3 次分量记为 $Tch(\nabla_{\text{triv}},\nabla_\rho)_3$, ，于是有

$[Tch(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)_3]\in H^3(L;\,\mathbb{C})$。现在考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} H^3(L;\mathbb{C}) & \xrightarrow{p_{\mathbb{Z}}} & H^3(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \\ & \searrow^{p_{\mathbb{Q}}} & \downarrow p \\ & & H^3(L;\mathbb{C}/\mathbb{Q}). \end{array}$$

根据构造可知

$\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_\rho)*\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_\rho)\ \widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_\rho)\ \widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})*\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})\ \widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})\ \in H^3(L;\,\mathbb{C}/\mathbb{Z})$.
由（13）可知

$$p_{\mathbb{Q}}\big([Tch(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)_3]\big)=\widehat{ch}_2(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})-\widehat{ch}_2(V_\rho,\nabla_\rho)\in H^3(L;\mathbb{C}/\mathbb{Q}),$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因为 $ch(V_\rho,\nabla)$ 的三次齐次部分为 $ch_2(V_\rho,\nabla)$。由（14）可将 $Tch(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)_3$ 分解如下

$$Tch(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)_3=\frac{1}{2}T(C_1\cdot C_1)(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)-TC_2(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho),$$

其中 $C_1\cdot C_1$ 是不变多项式代数 $I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$ 中的乘积。

令 $\omega_1=T(C_1\cdot C_1)(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)$ 和 $\omega_2=TC_2(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)$。由 (13) 可得 t

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{Z}}([\omega_1])&=\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})*\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})-\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_\rho)*\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_\rho),\\ p_{\mathbb{Z}}([\omega_2])&=\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})-\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_\rho),\\ p_{\mathbb{Q}}\Big(\frac{1}{2}[\omega_1]\Big)&=\frac{1}{2}p\big(\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})*\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})-\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_\rho)*\widehat{c}_1(V_\rho,\nabla_\rho)\big),\\ p_{\mathbb{Q}}([\omega_2])&=p\big(\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})\big)-p\big(\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_\rho)\big). \end{aligned}$$

为了完成证明，我们只需证明 $[\omega_1]=0$。事实上，若假设 $[\omega_1]=0$，则

$$p_{\mathbb{Z}}\big([Tch(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)_3]\big)=p_{\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2}[\omega_1]-[\omega_2]\right)=p_{\mathbb{Z}}\big(-[\omega_2]\big)=-\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})+\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_\rho).$$

根据 [12, 命题 2.10]，我们有 $\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_{\mathrm{triv}})=0$。因此，

$$p_{\mathbb{Z}}\big([Tch(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)_3]\big)=\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_\rho)\in H^3(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z}),$$

并结合 (25)，可得

$$\mathrm{Ind}_\rho\,\sigma=p_{\mathbb{Z}}\big([Tch(\nabla_{\mathrm{triv}},\nabla_\rho)_3]\big)[L]=\widehat{c}_2(V_\rho,\nabla_\rho)[L]=\widehat{c}_{\rho,2}[L]\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}.$$

$\widetilde{\ }$因此，我们只需证明 $[\omega_1]=0$。设 $V_\rho\times I$ 上的联络 ∇ 由联络曲线 ∇_t 定义$\widetilde{\ }$，其曲率为 Θ。由 (12) 得，

$$\omega_1=\pi_*\Big((C_1\cdot C_1)(\widetilde{\Theta})\Big)=\pi_*\Big(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge C_1(\widetilde{\Theta})\Big)\in\Omega^3(L),$$

~其中 π_* 表示沿纤维积分 [21, 备注 19-1.8]。注意， $[C_1(\Theta)] \in H^2(L\times I,\mathbb{C})$。由于 $\rho\colon \pi_1(L)\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 在拓扑上是平凡的， $V_\rho \to M$ 是一个平凡的~向量丛，且 $V_\rho\times I\to M\times I$ 也是一个平凡向量丛。因此， $[C_1(\Theta)]=0$.~所以，存在 $\mathcal{C}\in \Omega^1(L\times I)$，使得 $d\mathcal{C}=C_1(\Theta)$。利用形式 $\mathcal{C}$，得

$$C_1(\widetilde{\Theta})\wedge C_1(\widetilde{\Theta}) = C_1(\widetilde{\Theta})\wedge d\mathcal{C} = -d(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C}).$$

根据同伦纤维积分公式（见 [21, 命题 19-1.9]），我们得到

$$-\pi_*\big(d(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C})\big) = d\pi_*\big(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C}\big) - (j_1-j_0)\big(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C}\big).$$

We c 断言最后一项 $(j_1-j_0)\big(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C}\big)=0$。假设这一点成立，我们有

$$\omega_1 = \pi_*\left(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge C_1(\widetilde{\Theta})\right) = -\pi_*\left(d(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C})\right) = d\pi_*\left(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C}\right).$$

因此，形式 ω_1 是恰当的， $[\omega_1]=0\in H^3(L,\mathbb{C})$，由此得出定理的结论。

为证明 $(j_1-j_0)\big(C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C}\big)=0$，我们按以下步骤进行。每个微分形式 $\omega\in\Omega^k(L\times I)$ 都可以分解为 $\omega=\alpha+\beta\wedge dt$，其中 $\alpha\in\Omega^k(L\times I)$、$\beta\in\Omega^{k-1}(L\times I)$ 均不含任何 dt 因子 [21, 注 19-1.8]。根据定义，映射 $j_s\colon \Omega^{2k}(L\times I)\to\Omega^{2k-1}(L)$ 由 $j_s(\alpha+\beta\wedge dt)=\alpha|_{t=s}$ 给出，其中 $s=0,1$[21, 命题 19-1.9]。设 θ_{triv} 和 θ 分别是向量丛 V_ρ上联络 ∇_{triv} 和 ∇_ρ 的联络形式。由于 ∇_{triv} 是平凡联络~ ~$\theta_{\mathrm{triv}}=0$。由联络曲线$\nabla_t=t\nabla_{\mathrm{triv}}+(1-t)\nabla_\rho$ 给出的联络 ∇ 的曲率 Θ 为（见 [21, 注 19-5.1]）

$$\widetilde{\Theta} = t(1-t)\theta^2+\theta dt. \tag{26}$$

由于形式 $\mathcal{C}\in\Omega^1(L\times I)$，我们可以将其分解为 $\mathcal{C}=\alpha'+\beta'\wedge dt$，其中$\alpha'\in\Omega^1(L\times I)$，$\beta'\in\Omega^0(L\times I)=C^\infty(L\times I)$ 均不含任何 dt 因子。不变多项式 $C_1\in I^1(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$ 由 $C_1(A)=\mathrm{Tr}(A)$ 给出，因此由 (26) 可得

$$C_1(\widetilde{\Theta}) = t(1-t)\,\mathrm{Tr}(\theta^2)+\mathrm{Tr}(\theta)\wedge dt.$$

因此

$$C_1(\widetilde{\Theta})\wedge\mathcal{C} = t(1-t)\,\mathrm{Tr}(\theta^2)\wedge\alpha' + \big(t(1-t)\beta'\,\mathrm{Tr}(\theta^2)-\mathrm{Tr}(\theta)\wedge\alpha'\big)\wedge dt. \tag{27}$$

代入（27）

$$\alpha = t(1-t)\,\mathrm{Tr}(\theta^2)\wedge\alpha'\in\Omega^3(L\times I), \tag{28}$$

and

$$\beta = \big(t(1-t)\beta'\,\mathrm{Tr}(\theta^2)-\mathrm{Tr}(\theta)\wedge\alpha'\big)\in\Omega^2(L\times I)$$

~我们发现二者都没有任何 dt 因子，且 $C_1(\Theta) \wedge \mathcal{C} = \alpha + \beta \wedge dt$。因此，将 $t = 1$ 和 $t = 0$ 代入（28），得到

$$(j_1 - j_0)\big(C_1(\widetilde{\Theta}) \wedge \mathcal{C}\big) = \alpha|_{t=1} - \alpha|_{t=0} = 0.$$

证明至此完成。 □

由平坦丛指标定理可得以下推论。

~推论 3.4。在定理 3.3 的假设下，我们有 $\widehat{c}_{\rho,\ 2}([L]) = \xi_\rho(D)$。

注 3.5。若 L 是整数同调球，则定理 3.3 等价于 Jones 和 Westbury 的结果 [24,定理 A]，见第 4 节。

3.4. 有理同调 3-球的 CCS 数。设 L 是一个有理同调三维球面。设 ρ: $\pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个表示。由庞加莱对偶性，我们有 $H^1(L;\mathbb{C}) = H^2(L;\mathbb{C}) = 0$；由与短正合列 (6) 对应的 L 的上同调长正合列 (5)，在同构下， ρ 的第一 Cheeger-Cheern-Simons 类与第一陈类之间存在对应关系

$$\begin{aligned} H^1(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) &\cong H^2(L;\mathbb{Z}) \\ \widehat{c}_{\rho,1} &\mapsto c_{\rho,1}. \end{aligned} \tag{29}$$

引理 3.6. 设 L 是一个有理同调三维球面，且 ρ: $\pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是其基本群的一个表示。以下各项等价:

1. 表示 ρ 是拓扑平凡的。2. $c_{\rho,\ 1} = 0$。3. $\widehat{c}_{\rho,\ 1} = 0$。

Proof. 2 和 3 等价，由同构 (29) 给出。1 和 2 等价的证明如下。对于 $n = 1$, $c_{\rho,\ 1} = 0$ 当且仅当 ρ 是拓扑平凡的，因为线丛由其第一陈类分类。若 $n \geq 2$，则由 [42, 定理 3.2] 可知，因为唯一可能非零的陈类是 $c_{\rho,\ 1}$。□

引理 3.7. 设 L 是一个有理同调三维球面，且 ρ: $\pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是其基本群的一个表示。那么表示 $\rho \oplus \det(\rho^*)$ 是拓扑平凡的，其中ρ^* 是对偶表示。

Proof. 根据惠特尼乘积公式、注 2.3 以及 $c_{\rho^*,\ 1} = -c_{\rho,\ 1}$ 这一事实，我们有 $c_{\rho\oplus\det(\rho^*)\ 1} = c_{\rho,\ 1} + c_{\det(\rho^*)\ 1} = c_{\rho,\ 1} + c_{\rho^*,\ 1} = 0$。因此，根据引理 3.6，表示 $\rho \oplus \det(\rho^*)$ 是拓扑平凡的。□

引理 3.8. 设 L 为一个有理同调三维球面。对于任意表示 ρ: $\pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，其第一 Cheeger-Chern-Simons 类满足

$$\widehat{c}_{\rho,1} = \widehat{c}_{\det(\rho),1}.$$

Proof.

根据注 2.3 和注 2.5 $c_{\rho,\ 1} = c_{\det(\rho),\ 1}$ 以及$\widehat{c}_{\rho,\ 1}$ 和 $\widehat{c}_{\det(\rho),\ 1}$ 都是由 (5) 中的同态 q: $H^1(L;\ \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \to H^2(L;\ \mathbb{Z})$ 对 $c_{\rho,\ 1} = c_{\det(\rho),\ 1}$作出的提升；但由 (29) 可知，这种提升只有一个，因此它们相同。□

如果 L 是一个有理同调三维球面，利用定理 3.3 和平坦丛指标定理，我们可以给出任意表示 ρ: $\pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$的第二 CCS 数公式。

定理 3.9. 设 L 是一个有理同调三维球面。设 ρ: $\Gamma = \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$是一个表示。那么，

$$\widehat{c}_{\rho,2}([L]) = \tilde{\xi}_{\rho}(D) - \tilde{\xi}_{\det(\rho)}(D).$$

Proof. 考虑表示 $\rho \oplus \det(\rho^*)$，根据引理 3.7，它在拓扑上是平凡的。由于$c_{\det(\rho^*)\ 1} = -c_{\det(\rho),\ 1}$，由 (29) 可知$\widehat{c}_{\det(\rho^*)\ 1} = -\widehat{c}_{\det(\rho),\ 1}$。将 (16) 应用于 $\det(\rho) \oplus \det(\rho^*)$，得到

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_{\det(\rho)\oplus\det(\rho^*),1} &= \widehat{c}_{\det(\rho),1} + \widehat{c}_{\det(\rho^*),1} = 0 \\
\widehat{c}_{\det(\rho)\oplus\det(\rho^*),2} &= \widehat{c}_{\det(\rho),1} * \widehat{c}_{\det(\rho^*),1}.
\end{aligned}$$

因此，由引理 3.6，$\det(\rho) \oplus \det(\rho^*)$ 是拓扑平凡的。应用推论 3.4 可得:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_{\rho}(D) + \tilde{\xi}_{\det(\rho^*)}(D) = \tilde{\xi}_{\rho\oplus\det(\rho^*)}(D) &= \widehat{c}_{\rho\oplus\det(\rho^*),2}([L]) \\
&= \widehat{c}_{\rho,1} * \widehat{c}_{\det(\rho^*),1}([L]) + \widehat{c}_{\rho,2}([L]) \\
&= \widehat{c}_{\det(\rho),1} * \widehat{c}_{\det(\rho^*),1}([L]) + \widehat{c}_{\rho,2}([L]) \\
&= \widehat{c}_{\det(\rho)\oplus\det(\rho^*),2}([L]) + \widehat{c}_{\rho,2}([L]) \\
&= \tilde{\xi}_{\det(\rho)\oplus\det(\rho^*)}(D) + \widehat{c}_{\rho,2}([L]) \\
&= \tilde{\xi}_{\det(\rho)}(D) + \tilde{\xi}_{\det(\rho^*)}(D) + \widehat{c}_{\rho,2}([L]).
\end{aligned}$$

由此可得该定理。 □

4。 Elements in $K_3(\mathbb{C})$ via topologically trivial representation s

在本节中，给定一个紧致定向三维流形的基本群的拓扑平凡表示，我们构造一个属于 $K_3(\mathbb{C})$ 的元素；该群是复数的第三代数 K 理论群。借助这一构造，我们证明

定理 3.3 是 Jones 和 Westbury 的一个结果 [24, Theo- rem A] 的推广。首先，我们有以下引理。

引理 4.1. 设 L 是一个紧致定向三维流形。表示 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 经由 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 分解，当且仅当它是拓扑平凡的。

Proof. 注意到， ρ 经由 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 分解，当且仅当 $\det(\rho)\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ 是平凡表示。根据 (3)，平凡表示对应于平凡（平坦）丛，因此，$c_{\det(\rho),\,1} = 0$。根据注 2.3 $c_{\rho,\,1} = c_{\det(\rho),\,1} = 0$ 以及 [42,定理 3.2] ，这等价于 ρ 是拓扑平凡的。□

设 L 是一个紧致定向三维流形。设 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个拓扑平凡的表示。根据引理 4.1 ρ ，其像包含于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d$，也就是说，我们有 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d$。设 $V_\rho \to L$ 是它的相伴平坦向量丛。其带联络的分类映射 $\bar{f}_n\colon L \to \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d$ 分解为

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d \\ & \overset{f_n}{\nearrow} & \big\downarrow \iota \\ L & \xrightarrow{\bar{f}_n} & \mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d. \end{array}$$

令 $\widehat{c}_2 \in H^3(\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})^d;\, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 为第二个通用 Cheeger-Chern-Simons 类（见注 2.4）。记 $\widehat{c}_2$ 上同调类为

$$\widehat{\widehat{c}}_2 = \iota^*(\widehat{c}_2) \in H^3(\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d; \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

于是， ρ的第二个 Cheeger-Chern-Simons 类为

$$\widehat{c}_{\rho,2} = f_n^*(\widehat{\widehat{c}}_2) \in H^3(L; \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

因此， ρ 的第二 CCS 数为

$$\widehat{c}_{\rho,2}([L]) = f_n^*(\widehat{\widehat{c}}_2)([L]) = \widehat{\widehat{c}}_2((f_n)_*([L])), \tag{30}$$

也就是说，将类 $\widehat{c}_2$ 取值于同调类 $(f_n)_*([L]) \in H_3(\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d;\, \mathbb{Z})$。

群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d$ 是完美群，且是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})^d$的交换子子群。考虑极限 $\mathrm{SL}(\mathbb{C}) = \lim_n \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d$ 和 $\mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \lim_n \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})^d$。因此，$\mathrm{SL}(\mathbb{C})$是完美群，且是 $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$的交换子子群。

设 $Bi\colon \mathrm{BSL}(\mathbb{C}) \to \mathrm{BGL}(\mathbb{C})$ 是由包含同态 $i\colon \mathrm{SL}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ 诱导的分类空间之间的映射。Quillen 加号构造具有函子性 [44, 命题 5.2.4] ，对 Bi 关于 $\mathrm{SL}(\mathbb{C})$ 应用该构造，我们得到 $\mathrm{BGL}(\mathbb{C})$ 的万有覆盖$^+$ [44, 定理 5.2.7]

$$\pi = (Bi)^+\colon \mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathbb{C})^+.$$

因此， $\mathbb{C}$ 的第三个代数 K 理论群为

$$K_3(\mathbb{C}) = \pi_3(\mathrm{BGL}(\mathbb{C})^+) = \pi_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+).$$

由 [45, 命题 2.5]，Hurewicz 同态

$$h\colon K_3(\mathbb{C}) = \pi_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+) \to H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+;\mathbb{Z}) = H_3(\mathrm{SL}(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \tag{31}$$

是一个同构。另一方面，对于 $n \geq 3$ [45, (2.8) 和定理 4.1 (b)]，我们有如下稳定性同构

$$H_3(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d;\mathbb{Z}) \to H_3(\mathrm{SL}(\mathbb{C});\mathbb{Z}).$$

因此我们有

$$K_3(\mathbb{C}) = H_3(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d;\mathbb{Z}), \qquad n \geq 3.$$

令 L 为一个紧致定向三维流形。给定一个拓扑平凡表示 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，可以按以下方式构造一个 $K_3(\mathbb{C})$ 中的元素。由引理 4.1，我们有 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})^d$。令 $f_n\colon L \to \mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d$ 为诱导基本群上的 ρ 的映射，并将其与自然映射 $\iota_n\colon \mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d \to \mathrm{BSL}(\mathbb{C})$ 复合，得到

$$f = \iota_n \circ f_n\colon L \to \mathrm{BSL}(\mathbb{C}).$$

考虑由同调诱导的同态

$$f_*\colon H_3(L;\mathbb{Z}) \to H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \cong K_3(\mathbb{C}).$$

基本类 $[L]$ 的像给出元素 $\langle L,\rho\rangle = f_*([L]) \in K_3(\mathbb{C})$。

当 L 是有理同调球时，我们可以将这一构造扩展到非拓扑平凡的表示 $\rho\colon \pi_1(L) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，方法是取表示 $\rho\oplus\det(\rho^*)\colon \pi_1(L) \to \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$；根据引理 3.7，该表示是拓扑平凡的。然后取 $\langle L,\rho\oplus\det(\rho^*)\rangle \in K_3(\mathbb{C})$。

设 Σ 是一个整数同调 3-球面，且 $\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个表示。由于 $\pi_1(\Sigma)$ 是完美群，每个复表示的像都必须包含在 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 中；也就是说，根据引理 4.1，表示 ρ 是拓扑平凡的。在 [24] 中，Jones 和 Westbury 构造了 $K_3(\mathbb{C})$ 中的一个元素 $[\Sigma,\rho]$，如下所示。再次考虑映射$f = \iota_n \circ f_n\colon \Sigma \to \mathrm{BSL}(\mathbb{C})$。

对 f 应用 Quillen 加构造，我们得到一个映射

$$f^+\colon \Sigma^+ \cong \mathbb{S}^3 \to \mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+.$$

Its 同伦类 $[f^+]$是一个元素 $[\Sigma,\rho] = [f^+] \in \pi_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+) = K_3(\mathbb{C})$.

对于整数同调球 Σ，可以比较这两种构造，并发现它们给出相同的元素。

映射 f 和 f^+ 构成如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & \mathrm{BSL}(\mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle +} & & \downarrow{\scriptstyle +} \\ \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{f^+} & \mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+. \end{array} \tag{32}$$

图式 (32) 在同调中诱导出以下图式

$$\begin{array}{ccc} H_3(\Sigma;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ H_3(\mathbb{S}^3;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*^+} & H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+;\mathbb{Z}) \end{array} \tag{33}$$

因此,

$$\langle \Sigma, \rho \rangle = \tilde{f}_*([\Sigma]) = \tilde{f}_*^+([S^3]) = h([\tilde{f}^+]) = h([\Sigma, \rho]), \tag{34}$$

where h是 Hurewicz 同构 (31)。因此，我们证明了以下 g

定理 4.2. 设 Σ是一个整数同调 3-球面，且 ρ: $\pi_1(\Sigma) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 是一个表示。那么 $\langle \Sigma, \rho \rangle = [\Sigma, \rho] \in K_3(\mathbb{C})$。

在 [24, 定理 A] 中，作者考虑了一个同态 e: $K_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ，并证明，对于整数同调 3-球面 Σ 的基本群˜的一个表示 ρ: $\pi_1(\Sigma) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$，有 $e([\Sigma, \rho]) = \xi_\rho(D)$，其中 D 是作用于 Σ上的狄拉克算子。

另一方面，展开图 (33) 可得

$$\begin{array}{ccccc} H_3(\Sigma;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{(f_n)_*} & H_3(\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d;\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{(\iota_n)_*} & H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ H_3(\mathbb{S}^3;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{(f_n^+)_*} & H_3((\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d)^+;\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{(\iota_n^+)_*} & H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+;\mathbb{Z}) \end{array} \tag{35}$$

这意味着下面的图表是交换的

$$\begin{array}{ccccc} K_3(\mathbb{C}) = \pi_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+) & \xrightarrow[\cong]{h} & H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C})^+;\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{(\iota_n)_*^{-1}} & H_3(\mathrm{BSL}(n,\mathbb{C})^d;\mathbb{Z}) \\ & \searrow^{e} & & \swarrow_{\widehat{\widehat{c}}_2} & \\ & & \mathbb{C}/\mathbb{Z} & & \end{array}$$

因为由 (34) 和 (30) 可得

$$e([\Sigma,\rho]) = \widehat{\widehat{c}}_2 \circ (\iota_n)_*^{-1} \circ h([\Sigma,\rho]) = \widehat{\widehat{c}}_2 \circ (\iota_n)_*^{-1}(\langle \Sigma, \rho \rangle) = \widehat{\widehat{c}}_2((f_n)_*([\Sigma])) = \widehat{c}_{\rho,2}([\Sigma]) = \tilde{\xi}_\rho(D).$$

因此，定理 3.3 是对 $[24,$ 定理 A$]$ 的推广。

注 4.3. 当 ρ 是一个二维表示（$n=2$）时，图中的同态（ι_n）$_*$ 不再是同构。我 (35)
们有

$$H_3(\mathrm{BSL}(2,\mathbb{C})^d;\mathbb{Z}) \cong K_3^{\mathrm{ind}}(\mathbb{C}) \subset K_3(\mathbb{C}) \cong H_3(\mathrm{BSL}(\mathbb{C});\mathbb{Z}),$$

其中 K_3^{ind}（$\mathbb{C}$）是 K_3（$\mathbb{C}$）的不可分解部分，而（ι_n）$_*$ 是包含映射。在这种情况下，我们取 f_2: $\Sigma \to$ BSL(2, $\mathbb{C}$) 与由包含映射 SL(2, $\mathbb{C}$) $\to$ SL(n, $\mathbb{C}$) 以及 $n>2$诱导的映射 BSL(2, $\mathbb{C}$) $\to$ BSL(n, $\mathbb{C}$) 的复合。

5. CCS-numbers of $L=\mathbb{S}^3/\Gamma$

考虑形如 $L=\mathbb{S}^3/\Gamma$的紧致定向三维流形，其中 Γ 是 SU(2) 的有限子群。在本节中，我们计算所有不可约表示 α: π_1（L）$=\Gamma \to$ GL(n, $\mathbb{C}$) 的第一和第二 CCS 数。我们将结果与 C. B. Thomas $[48,$ § 1$]$关于 α的陈类的结果进行比较。

5.1. 三维流形 $L=\mathbb{S}^3/\Gamma$。设 Γ 是 SU(2) 的一个有限子群。照例，记 $[\Gamma,\Gamma]$ 为 Γ 的交换子子群，令 Ab : $\Gamma \to \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ 为投影，并将 Ab(Γ) $=\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ 记为 Γ 的阿贝尔化。

由于 GL(1, $\mathbb{C}$) 是阿贝尔群，根据阿贝尔化的泛性质，映射 Ab 诱导出同构

$$\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Ab}(\Gamma),\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})) \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Ab}^\star} \mathrm{Hom}\,(\Gamma,\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})), \tag{36}$$

Γ 的一维表示与 Ab(Γ) 的一维表示之间的同构。给定 $\varrho \in$ Hom (Γ, GL(1, $\mathbb{C}$))，我们通过同构 (36) 将关联表示记为 $\varrho_{\mathrm{Ab}} \in$ Hom (Ab(Γ), GL(1, $\mathbb{C}$))。

群 Γ 通过左乘作用于 $\mathbb{S}^3 \cong$SU(2)。轨道空间$L=\mathbb{S}^3/\Gamma$ 是一个紧致定向三维流形，其基本群为 $\pi_1(L)=\Gamma$，其同调群为（见 $[34,$ 第 $45]$ 页）

$$H_0(L;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(L;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ab}(\Gamma), \quad H_2(L;\mathbb{Z}) = 0, \quad \text{and} \quad H_3(L;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

因此， L 是一个有理同调三维球面，我们可以应用第 3.4 小节中的结果。由引理 3.8 可知，计算ρ 的第一个 Cheeger-Chern-Simons 类$\widehat{c}_{\rho,\,1}$，等价于计算一维表示 det(ρ): $\pi_1(L)=\Gamma \to$ GL(1, $\mathbb{C}$) 的第一个 Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_{\det(\rho),\,1}$。表示 det($\rho$) 诱导出一个分类映射（带平坦联络） $\bar{f}_{\det}$: $L \to$ BGL(1, $\mathbb{C}$)^d。令

$$\widehat{c}_1 \in \widehat{H}^1(\mathrm{BGL}(1,\mathbb{C})^d;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}\,(\mathbb{C}^{*d},\mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

是平坦丛的 Cheeger-Chern-Simons 第一类。我们有$\widehat{c}_{\det(\rho),\,1} = f_{\det}^*(\widehat{c}_1)$，因此，给定 $H_1(L;\,\mathbb{Z})$ 的一个类 $\bar{\nu} \cong$Ab(Γ)，我们有

$$\widehat{c}_{\det(\rho),1}(\bar{\nu}) = \bar{f}_{\det}^*(\widehat{c}_1)(\bar{\nu}) = \widehat{c}_1((\bar{f}_{\det})_*(\bar{\nu})).$$

¯但是，映射 $f_{\det}$在同调上诱导的同态

$$(\bar{f}_{\det})_*\colon \mathrm{Ab}(\Gamma) \cong H_1(L;\mathbb{Z}) \to H_1(\mathrm{BGL}(1,\mathbb{C})^d;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^{*d}$$

恰好是表示 $\det(\rho)_{\mathrm{Ab}}\colon \mathrm{Ab}(\Gamma) \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})^d \cong \mathbb{C}^{*d}$。因此我们有（见 [16,(0.2)]）

$$\widehat{c}_{\rho,1}(\bar{\nu}) = \widehat{c}_{\det(\rho),1}(\bar{\nu}) = \widehat{c}_1(\det(\rho)_{\mathrm{Ab}}(\bar{\nu})) = \frac{1}{2\pi i}\log(\det(\rho)_{\mathrm{Ab}}(\bar{\nu})). \tag{37}$$

5.2. SU(2) 的有限子群。令 $\langle 2,q,r\rangle$ 表示由以下表示给出的群

$$\langle 2,q,r\rangle = \langle b,c \,|\, (bc)^2 = b^q = c^r\rangle \tag{38}$$

并令 $\zeta_l = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ 为 l 次本原单位根。SU(2) 的有限子群分类众所周知（见 [11, 30, 34]）。下面列出这些子群及其不可约表示。我们沿用 [15], 的记号，其中 χ_j 是表示 α_j 的特征标， ψ_t 是表示 ρ_t的特征标。

循环群。C_l, $l \geq 2$。阶为 l。我们将 C_l 与 l 次单位根群等同。群 C_l有 l个不可约表示 α_j, $1 \leq j \leq l$，由 $\alpha_j(\zeta_l) = \zeta_l^{j-1}$给出。

二元二面体群。$\mathsf{BD}_{2r} = \langle 2, 2, r\rangle$, $r \geq 2$。阶为 $4r$。它有 $r+3$ 个不可约表示。四个一维表示，记作 α_j, $j = 1,\ldots,4$，定义如下：

r 偶数：

$$\begin{aligned} &\alpha_1(b) = \alpha_1(c) = 1, && \alpha_2(b) = -1, \alpha_2(c) = 1,\\ &\alpha_3(b) = 1, \alpha_3(c) = -1, && \alpha_4(b) = \alpha_4(c) = -1. \end{aligned}$$

r 奇数：

$$\begin{aligned} &\alpha_1(b) = \alpha_1(c) = 1, && \alpha_2(b) = -1, \alpha_2(c) = 1,\\ &\alpha_3(b) = i, \alpha_3(c) = -1, && \alpha_4(b) = -i, \phi_4(c) = -1. \end{aligned}$$

以及 $r-1$ 个二维表示，记作 ρ_t, $1 \leq t \leq r-1$，对任意 r 定义如下：

$$\rho_t(b) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^t & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \rho_t(c) = \left(\begin{smallmatrix} \zeta_{2r}^t & 0 \\ 0 & \zeta_{2r}^{-t} \end{smallmatrix}\right),$$

其中 ρ_1 是自然表示。

二元四面体群。$\mathsf{BT} = \langle 2,\ 3,\ 3\rangle$。24 阶。它有 7 个不可约表示，记为 α_j、 $j = 1$、.....、7。共有三个一维表示：

$$\alpha_1(b) = \alpha_1(c) = 1, \quad \alpha_2(b) = \zeta_3, \alpha_2(c) = \zeta_3^2 \quad \text{and} \quad \alpha_3(b) = \zeta_3^2, \alpha_3(c) = \zeta_3.$$

共有三个二维表示:

$$\alpha_4(b)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&1\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_4(c)=\left(\begin{smallmatrix}0&-\zeta_3\\\zeta_3^2&1\end{smallmatrix}\right),$$
$$\alpha_5(b)=\left(\begin{smallmatrix}-\zeta_3^2&\zeta_3\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_5(c)=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\\zeta_3^2&-\zeta_3\end{smallmatrix}\right),$$
$$\alpha_6(b)=\left(\begin{smallmatrix}-\zeta_3&-\zeta_3^2\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_6(c)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-\zeta_3^2&\zeta_3\end{smallmatrix}\right).$$

其中 α_4 是自然表示。存在一个三维表示:

$$\alpha_7(b)=\left(\begin{smallmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_7(c)=\left(\begin{smallmatrix}-1&-1&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right).$$

二元八面体群。BO $=\langle 2,3,4\rangle$。阶为 48。它有 8 个不可约表示，记为 α_j, $j=1,\ldots,8$。存在两个一维表示:

$$\alpha_1(b)=\alpha_1(c)=1,\quad \alpha_2(b)=1,\alpha_2(c)=-1.$$

存在三个二维表示:

$$\alpha_3(b)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&-1\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_3(c)=\left(\begin{smallmatrix}-1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right),$$
$$\alpha_4(b)=\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1+\sqrt{2}i&-i\\-i&1-\sqrt{2}i\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_4(c)=\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}-\sqrt{2}-i&-1\\1&-\sqrt{2}+i\end{smallmatrix}\right),$$
$$\alpha_5(b)=\left(\begin{smallmatrix}0&-i\\-i&1\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_5(c)=\left(\begin{smallmatrix}i&-\sqrt{2}i\\-1&\sqrt{2}-i\end{smallmatrix}\right),$$

其中 α_4 是自然表示。存在两个三维表示:

$$\alpha_6(b)=\left(\begin{smallmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&-1&-1\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_6(c)=\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\-1&-1&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right),$$
$$\alpha_7(b)=\left(\begin{smallmatrix}-1&0&-1\\1&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_7(c)=\left(\begin{smallmatrix}0&0&-1\\1&0&1\\0&-1&1\end{smallmatrix}\right).$$

存在一个四维表示:

$$\alpha_8(b)=\left(\begin{smallmatrix}-\zeta_3&0&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-\zeta_3^2\end{smallmatrix}\right),\qquad \alpha_8(c)=\left(\begin{smallmatrix}0&0&\zeta_3^2&\zeta_3^2\\0&0&0&\zeta_3\\0&-\zeta_3&0&0\\\zeta_3^2&-1&0&0\end{smallmatrix}\right).$$

二元二十面体群。BI $=\langle 2,\ 3,5\rangle$。阶为 120。它有 9 个不可约表示。一个一维表示 α_1；两个二维表示α_2,α_3，其中 α_2 是自然表示；两个三维表示α_4,α_5；两个四维表示 α_6,α_7；一个五维表示α_8 和一个六维表示 α_9。为节省篇幅，我们不逐一列出它们，因为下文不会用到。

5.3. $\pi_1(L)$的不可约表示的第一 CCS 数。令 $L = \mathbb{S}^3/\Gamma$，其中 $\Gamma = \mathsf{C}_l$、BD_{2r}、BT、BO、BI。记 $\bar{b}, \bar{c}$ 为表示式 (38)中 Γ 的生成元 b, c 在 Ab(Γ) 中的像。表 1 展示了 Γ 的阿贝尔化（见[34,II§5-表 2]）。

$\Gamma < \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$	Ab(Γ)	生成元
C_l	C_l	由 ζ_l生成
BD_{2r} （r偶数）	$\mathsf{C}_2 \oplus \mathsf{C}_2$	由以下元素生成 $\bar{b}$和 $\bar{c}$
BD_{2r} （r奇数）	C_4	由以下元素生成 $\bar{b}$ 和 $\bar{c} = \bar{b}^2$
BT	C_3	由 $\bar{c}$生成，并且 $\bar{b} = \bar{c}^{-1}$
BO	C_2	由 $\bar{c}$生成，并且 $\bar{b} = 1$
BI	$\{1\}$	

TABLE 1. Γ的阿贝尔化

令 $\bar{\nu}$ 为 $H_1(L;\mathbb{Z}) = \mathsf{Ab}(\Gamma)$ 的一个生成元（根据表 1 中的 Γ，可以是 ζ_l、b 或 $\bar{c}$）。令 $\alpha\colon \pi_1(L) = \Gamma \to \mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ 为一个不可约表示。由 (37) 和同构 (36)，我们有

$$\widehat{c}_{\alpha,1}(\bar{\nu}) = \widehat{c}_{\det\alpha,1}(\bar{\nu}) = \frac{1}{2\pi i}\log(\det(\alpha(\nu))),$$

其中，当 $\bar{\nu} = \zeta_l$ 时 $\nu = \zeta_l$；当 $\bar{\nu} = b$ 时 $\nu = b$；当 $\bar{\nu} = \bar{c}$ 时 $\nu = c$。

表 2 展示了 α 的不可约表示的第一 CCS 数：$\pi_1(L) = \Gamma \to \mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$，相对于 $H_1(L;\mathbb{Z}) = \mathsf{Ab}(\Gamma)$ 的生成元。

C_l	α_1	α_2	$\cdots$	α_l					
$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}(\zeta_l)$	0	$\frac{1}{l}$	$\cdots$	$\frac{l-1}{l}$					
BD_{2r}, $r=2l$ 偶数	α_1	α_2	α_3	α_4	ρ_{2t-1}	ρ_{2t}			
$\widehat{c}_{\alpha,1}(\ \bar{b})$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}(\bar{c})$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0			
BD_{2r}, $r=2l-1$ 奇怪	α_1	α_2	α_3	α_4	ρ_{2t-1}	ρ_{2t}			
$\widehat{c}_{\alpha,1}(b)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$			
$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}(\bar{c})$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0			
BT	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7		
$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}(\bar{c})$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0		
BO	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	
$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}(\bar{c})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	
BI	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}(1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 2. 第一 CCS 数

5.4. $\pi_1(L)$ 的不可约表示的第二 CCS 数。令 $L=\mathbb{S}^3/\Gamma$，其中 $\Gamma=\mathsf{C}_l$、BD_{2r}、BT、BO、BI。为计算不可约表示 $\alpha\colon \Gamma\to \mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ 的第二 CCS 数 $\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])$，我们使用 [15] 的结果如下。

若 α 是拓扑平凡的（$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}=0$ 根据引理 3.6），由推论 3.4 可得$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])=\xi_\alpha(D)$。若 α 不是拓扑平凡的（$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}\neq 0$），由定理 3.9 可得$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])=\xi_\alpha(D)-\xi_{\det(\alpha)}(D)$。

命题 5.1. 有限子群 Γ of SU(2) 的一维不可约表示 $\alpha\colon \Gamma\to \mathsf{GL}(1,\mathbb{C})$ 的第一 CCS 数为零。

PROOF. 由表 2 和引理 3.6 可知，唯一拓扑平凡的一维不可约表示是平凡表示 α_1。因此，$\widehat{c}_{\alpha_1,\ 2}([L])=\xi_{\alpha_1}(D)$，根据定义（20），其值为零。若 α 不是拓扑平凡的，$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])=\xi_\alpha(D)-\xi_{\det(\alpha)}(D)$，但由于它是一维的，我们有 $\alpha=\det(\alpha)$，因此 $\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])=0$。□

根据命题 5.1，我们只需考虑维数大于 1 的不可约表示。表3中列出了在 [15]中计算得到的 $\xi_\alpha(D)$ 的值。

BT	$\alpha_{\mathbf{4}}$	α_5	α_6	α_7	BO	α_3	$\alpha_{\mathbf{4}}$	α_5	α_6	α_7	α_8
$\tilde{\xi}_\alpha(D)$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\tilde{\xi}_\alpha(D)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{48}}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
BD_{2r}	$\rho_{\mathbf{1}}$	BI	$\alpha_{\mathbf{2}}$	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	
$\tilde{\xi}_\alpha(D)$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4r}}$	$\tilde{\xi}_\alpha(D)$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{120}}$	$\frac{49}{120}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{24}$	

~TABLE 3. $\xi_\alpha(D)$ 的取值，来自 [15]。自然表示以粗体显示。

表 4 给出了 Γ 的不可约表示的第二 CCS 数。对于 BD_{2r}，我们只给出自然表示 ρ_1 的明确值，后续将用到这一表示。其他二维表示 ρ_t,$1 < t < r$ 的值可以利用 [15, 定理 5.1] 和定理 3.9 中的公式计算。

C_l	α_1	α_2	...	α_l					
$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])$	0	0	...	0					
BD_{2r}, r偶数	α_1	α_2	α_3	α_4	ρ_1				
$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])$	0	0	0	0	$\frac{1}{4r}$				
BD_{2r}, r奇数	α_1	α_2	α_3	α_4	ρ_1				
$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])$	0	0	0	0	$\frac{1}{4r}$				
BT	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7		
$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])$	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$		
BO	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	
$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$	
BI	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
$\widehat{c}_{\alpha,\ 2}([L])$	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{49}{120}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{24}$

TABLE 4. 第二 CCS 数

5.5. 与 C. B. Thomas 的结果比较。群 Γ 在 $\mathbb{S}^3$上自由作用，则 Γ 具有周期为 4 的周期上同调（若 G 是循环群，则周期为 2）（参见 [9,

第六章 § 9]）。在表 5 中，我们总结了 $j \in \{0,1,2,3\}$的所有 Tate 上同调群 $\widehat{H}^j(\Gamma;\mathbb{Z})$。

Γ	$\widehat{H}^0(\Gamma;\ \mathbb{Z})$	$\widehat{H}^1(\Gamma;\ \mathbb{Z})$	$\widehat{H}^2(\Gamma;\ \mathbb{Z})$	$\widehat{H}^3(\Gamma;\ \mathbb{Z})$
C_l	$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$	0
BD_{2r}, r 偶数	$\mathbb{Z}/4r\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	0
BD_{2r}, r 奇数	$\mathbb{Z}/4r\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	0
BT	$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0
BO	$\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0
BI	$\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$	0	0	0

TABLE 5. Γ的 Tate 上同调群。

为了检查我们的计算是否正确，可以将表 4 中的结果与 C. B. Thomas [48, § 1], 给出的结果进行比较；作者用分类空间 BΓ的上同调环的生成元表示了 Γ（ SU(2) 的一个有限子群）的不可约表示的全陈类。

设 $L = \mathbb{S}^3/\Gamma$ 满足 $\Gamma = \mathsf{C}_l$、BD_{2r}、BT、BO、BI。考虑映射 $\phi\colon L \to \mathrm{B}\Gamma$，并令 $\varsigma = \phi_*([L])$ 为同态 $\phi_*\colon H_3(L;\mathbb{Z}) \to H_3(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z})$ 在同调中由 ϕ 诱导的映射下，基本类 $[L] \in H_3(L;\mathbb{Z})$ 的像。根据 (19)，表示 $\alpha\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的第二 CCS 数为

$$\widehat{c}_{\alpha,2}([L]) = \widehat{c}_2(\alpha)(\varsigma), \tag{39}$$

其中 $\widehat{c}_2(\alpha) \in H^3(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ 是 α 的第二切格-切恩-西蒙斯类。利用同构 (18) $H^3(\mathrm{B}\Gamma;\ \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_3(\mathrm{B}\Gamma;\ \mathbb{Z})\ \mathbb{C}/\mathbb{Z})$，我们可以定义一个同态

$$\begin{aligned} H^3(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) &\to \mathbb{C}/\mathbb{Z} \\ \nu &\mapsto \nu(\varsigma). \end{aligned} \tag{40}$$

通过在同调类 $\varsigma \in H_3(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z})$ 上取值。根据泛系数定理，利用 $\mathbb{C}$ 是可除阿贝尔群这一事实，以及同调群 $H_j(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z})$ 是挠群这一事实，可以证明对于所有正整数 j，$H^j(\mathrm{B}\Gamma;\ \mathbb{C}) = 0$。利用这一点，在与短正合列 (6) 对应的 B$\Gamma$ 的上同调长正合列 (5) 中，我们得到一个同构 $H^j(\mathrm{B}\Gamma;\ \mathbb{Z}) \cong H^{j-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$，其中 k 阶陈类 $c_k(\alpha)$ 与 α 的 k 阶 Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_k(\alpha)$ 相互对应

$$\begin{aligned} H^j(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z}) &\cong H^{j-1}(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \\ c_k(\alpha) &\leftrightarrow \widehat{c}_k(\alpha). \end{aligned} \tag{41}$$

将 $j = 4$ 的同构 (41) 与同态 (40) 复合，我们得到一个同态

$$H^4(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z}) \cong H^3(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \tag{42}$$

它将表示 α 的第二陈类 $c_2(\alpha)$ 映射为其第二 CCS 数 $\widehat{c}_2(\alpha)(\varsigma)$。因此， $H^4(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z})$ 中上同调类之间的任何关系，也将在相应的 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 像中成立。

例如，对于二元四面体群 BT，我们有 [48, § 1]:

$$H^\bullet(\mathsf{BT};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8[x] + \mathbb{Z}_3[y], \tag{43}$$

其中 $x \in H^4(\mathsf{BT};\mathbb{Z})$ 和 $y \in H^2(\mathsf{BT};\mathbb{Z})$。第 5.2 小节中给出的 BT 的不可约表示的全陈类为

$$c(\alpha_1) = 1, \qquad c(\alpha_2) = 1 - y,$$
$$c(\alpha_3) = 1 + y, \qquad c(\alpha_4) = 1 + x - y^2, \tag{44}$$
$$c(\alpha_5) = 1 + x - y, \qquad c(\alpha_6) = 1 + x + y, \tag{45}$$
$$c(\alpha_7) = 1 + 4x - y^2. \tag{46}$$

回忆一下，自然表示为 α_4，其第二陈类 $c_2(\alpha_4)$ 由 $H^4(\mathsf{BT};\mathbb{Z})$ [48, 命题 2] 生成。因此，对于任意表示 $\alpha\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，都存在 $N \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widehat{c}_2(\alpha) = N\widehat{c}_2(\alpha_4)$。

由表 4 可得

$$9 \cdot \widehat{c}_2(\alpha_4)(\varsigma) = 9 \cdot \frac{1}{24} = \frac{9}{24} = \widehat{c}_2(\alpha_5)(\varsigma) = \widehat{c}_2(\alpha_6)(\varsigma) \tag{47}$$

and

$$4 \cdot \widehat{c}_2(\alpha_4)(\varsigma) = 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \widehat{c}_2(\alpha_7)(\varsigma). \tag{48}$$

另一方面，由 (44) 可得 $c_2(\alpha_4) = x - y^2$。根据 (43) 和 (45)，有

$$9 \cdot c_2(\alpha_4) = 9(x - y^2) = 9x - 9y^2 = x = c_2(\alpha_5) = c_2(\alpha_6), \tag{49}$$

根据 (46)，有

$$4 \cdot c_2(\alpha_4) = 4(x - y^2) = 4x - 4y^2 = 4x - y^2 = c_2(\alpha_7). \tag{50}$$

因此，在同态 (42) 下，关系 (49) 和 (50) 分别对应于关系 (47) 和 (48)。其他情形类似。

6. Applications to singularity theory

本节受第5节结果的启发，为曲面奇点定义新的不变量。本节的主要结果表明，可以根据其局部基本群的不可约表示的 CCS 数恢复有理双重点奇点的谱。最后，利用 Atiyah、Patodi 和 Singer˜的一项结果，我们展示了其他计算不变量 $\xi_\rho(D)$ 的方法，其中 ρ 是正规曲面奇点的局部基本群的一个表示，且其链接为有理同调球；计算时可使用该奇点的解消或平滑化。

6.1. 正规曲面奇点。为便于后文引用，我们回顾正规曲面奇点的一些基本事实，详见 [39]。记 (X,x) 为复解析正规曲面芽，或维数为 2 的正规完备 $\mathbb{C}$-代数的谱。设 $\pi\colon \tilde{X}\to X$ 是 (X,x) 的一个解消，即从˜一个光滑曲面 $\tilde{X}$ 到 (X,x) 的某个代表元的真全纯映射，并且在 $\pi^{-1}(x)$ 的补集上，π 为双全纯映射。将例外除子记为 $E:=\pi^{-1}(x)$，其不可约分支为 $E_1,\dots,E_s$。若不存在自交数为 $E_i^2=-1$ 的有理不可约例外除子 E_i，则该解消称为极小解消。任取一个解消˜ ˜π: $\tilde{X}\to X$。$\tilde{X}$ 的除子群 $\mathrm{Div}(\tilde{X})$ 定义为

$$\mathrm{Div}(\tilde{X}):=\left\{\sum n_jD_j\,\middle|\,D_j \text{ is a irreducible curve on } \tilde{X} \text{ and } n_j\in\mathbb{Z}\right\}.$$

除子 $D=\sum n_jD_j$ 的支集（记作 $|D|$）是不可约曲线 D_j 的并；即 $|D|=\bigcup D_j$。

定义 6.1. 设 D 是一个除子。我们称：

(1) 若 $|D|\subset E$，则称 D 为一个循环。**(2)** 若 $D=\sum r_jE_j$，其中 $r_j\in\mathbb{Q}$，则称 D 为一个有理循环。

若对于所有 j 都有 $r_j\geq 0$，则称一个整数循环或有理循环是有效的。

循环之间存在一种自然的序关系：设 $Z'=\sum n'_jE_j$ 和 $Z=\sum n_jE_j$ 是两个循环。当且仅当对任意 j 都有 $n'_j\leq n_j$ 时，我们称 $Z'\leq Z$。此外，循环的交也有如下定义：

$$Z'\cdot Z=\left(\sum n'_iE_i\right)\cdot\left(\sum n_jE_j\right)=\sum_{i,j}n_in_j\,(E_i\cdot E_j)\,.$$

记作

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{top}}:=\{\,Z\neq 0\,\text{effective cycle}\,|\,Z\cdot E_j\leq 0\,\text{for all}\,j\,\}\,.$$

众所周知，$\mathcal{Z}_{\mathrm{top}}$ 有唯一的极小元素 Z_{fund}，称为基本循环（有时也称为极小循环或 Artin 基本循环）。更多详情请参见 [38, 第 2] 章。

定义 6.2。 X 的几何亏格 p_g 定义为 $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ 作为$\mathbb{C}$-向量空间的维数。它与解消的选择无关。

我们称 (X, x) 具有有理奇点，若 X 的几何亏格为零。

商曲面奇点 (X, x) 同构于一个芽 $(\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$，其中 Γ是 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ 的一个小[2] 有限子群。如果 Γ 和 Γ' 是 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ 的两个小有限子群，那么当且仅当 Γ 和 Γ' 共轭时， $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 和 $\mathbb{C}^2/\Gamma'$ 解析同构。任何商曲面奇点都是有理正规曲面奇点（更多细节见 [22,第 7 章第 4] 节）。

设 X 是芽 (X, x) 的一个代表元，我们可以假设 $X \setminus \{x\}$ 是连通的，且 $(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$。若 $\epsilon > 0$ 足够小，则交集 $L = X \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ 称为 (X, x) 的链接。回顾一下，链接不依赖于ϵ。此外，链接 L 是一个光滑、紧致、连通且定向的三维流形。在奇点理论中，通常将 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X, x)$ 记为 $= \pi_1(L)$，并称其为局部基本群。对于正规曲面奇点，局部基本群满足以下刻画。

命题 6.3（[31]）。对于正规曲面奇点（X, x），

(1) 群 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X, x)$ 是有限群，当且仅当（X, x）是商奇点。(2) 若 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X, x)$ 是无限群，则链接 L 是型为$K(\pi_1(L), 1)$ 的 Eilenberg–MacLane空间。此外，局部基本群是无挠的。

备注 6.4。任意正规有理曲面奇点的链接都是有理同调球面（见 [38, 练习 1.27 和 § 3.9]）。此外，其极小解消的例外除子是有限多个分支的并集 E_i，这些分支同构于射影直线 $\mathbb{CP}^1$，其中 $E_i^2 \leq -2$ （见 [38, § 3.9]）。

有理双点奇点（X, x）是商奇点（$\mathbb{C}^2/\Gamma, 0$），其中Γ 是 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 的有限子群。$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 的每个有限子群都是小群，且共轭于 $SU(2)$ 的一个子群，因此，有理双点奇点同构于形如（$\mathbb{C}^2/\Gamma, 0$）的芽，其中 $\Gamma = \mathsf{C}_l$、BD_{2r}、BT、BO、BI；其链接是第 5 节提到的有理同调 3-球 $L = \mathbb{S}^3/\Gamma$。有理双点奇点是唯一可嵌入$\mathbb{C}^3$的商曲面奇点。关于有理双点奇点的更多细节，请参见例如 [34]。

注6.5. 对于有理双重点奇点，基本循环是众所周知的（见 [22, 例7.2.5]）。表6列出了有理双重点奇点的基本循环系数（不作特定排序）。

令 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ 为全纯函数芽环，并令 $f \in \mathcal{O}$在 0 处有一个孤立临界点。令 $\mu = \mu(f)$ 为 f 的米尔诺数，并且

[2]不含（伪）反射。

奇点	系数 Z_{fund}
$\mathbb{C}^2/\mathsf{C}_l$	$1, 1, \ldots, 1$ （$l-1$ 次）
$\mathbb{C}^2/\mathsf{BD}_{2r}$	1， 1， 1 和 2， ....., 2 ($r-1$ times)
$\mathbb{C}^2$/二元四面体群	1， 1， 2， 2， 2， 3
$\mathbb{C}^2$/二元八面体群	1， 2， 2， 2， 3， 3， 4
$\mathbb{C}^2$/二元二十面体群	2、2、3、3、4、4、5、6

TABLE 6. Z_{fund} 有理双重点奇点的系数

令 $(X, 0)$ 为由 f定义的孤立超曲面奇点的芽，即 $X = f^{-1}(0)$。谱 $sp(X)$ 是 $(X, 0)$ 的一个概念，由 Steenbrink [47]引入，它利用与复超曲面奇点相关的米尔诺纤维上同调上的混合霍奇结构以及单值化。它是由称为谱数的 μ 有理数构成的一个（多重）集合： $sp(X) = \{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_\mu\}$。谱是奇点的不变量：设 $f, g \in \mathcal{O}$, $X = f^{-1}(0)$ 和 $Y = g^{-1}(0)$；如果 f 和 g 是右等价的 $f \sim g$，那么 $sp(X) = sp(Y)$。事实上，如果 $f \sim u \cdot g$，其中 u 是 $\mathcal{O}$的单位元，我们称 f 和 g 接触等价，此时 $sp(X) = sp(Y)$。谱还有许多更深刻的性质，例如：若 $\alpha \in sp(X)$，则 $\lambda := \exp(2\pi i\alpha)$ 是上同调单值变换的一个特征值。换言之，谱数 α_1， ....., α_μ 是单值特征值的特定对数。有理双重点奇点的谱列于表7，其中在数对 (s, m) 中， s 是谱数， m 是其重数，参见 [47, 第 165] 页。

奇点	谱
$\mathbb{C}^2/\mathsf{C}_l$	$(\frac{1}{l}, 1) \ldots, (\frac{l-1}{l}, 1)$
$\mathbb{C}^2/\mathsf{BD}_{2r}$, $r = 2l$ （偶数）	$(\frac{1}{2(r+1)}, 1) \ldots, (\frac{2l-1}{2(r+1)}, 1)$, $(\frac{1}{2}$, 2), ($\frac{2l+3}{2(r+1)}$, 1) ....., ($\frac{2r+1}{2(r+1)}, 1)$
$\mathbb{C}^2/\mathsf{BD}_{2r}$, $r = 2l-1$ (奇数)	$(\frac{1}{2(r+1)}, 1) \ldots, (\frac{2l-1}{2(r+1)}, 1), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{2l+3}{2(r+1)}, 1) \ldots, (\frac{2r+1}{2(r+1)}, 1)$
$\mathbb{C}^2$/二元四面体群	$(\frac{1}{12}, 1), (\frac{4}{12}, 1), (\frac{5}{12}, 1), (\frac{7}{12}, 1), (\frac{8}{12}, 1), (\frac{11}{12}, 1)$
$\mathbb{C}^2$/二元八面体群	$(\frac{1}{18}, 1), (\frac{5}{18}, 1), (\frac{7}{18}, 1), (\frac{9}{18}, 1), (\frac{11}{18}, 1), (\frac{13}{18}, 1), (\frac{17}{18}, 1)$
$\mathbb{C}^2$/二元二十面体群	$(\frac{1}{30}, 1), (\frac{7}{30}, 1), (\frac{11}{30}, 1), (\frac{13}{30}, 1), (\frac{17}{30}, 1), (\frac{19}{30}, 1), (\frac{23}{30}, 1), (\frac{29}{30}, 1)$

TABLE 7. 有理双重点奇点的谱

6.2. 从 CCS 数恢复有理双重点奇点的谱。设 (X, x) 是一个正规曲面奇点。其链接 L 是一个紧致定向三维流形，记其基本群为 $\Gamma = \pi_1(L)$。设$\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 是一个表示。根据式（39）， ρ的第二 CCS 数 $\widehat{c}_{\rho,\ 2}([L])$ 可计算为 $\widehat{c}_2(\rho)(\varsigma)$。根据注 2.6，Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_2(\rho)$ 仅取决于表示 ρ，而同调类 ς 仅取决于 L（见第5.5小节）。因此，所有第二 CCS 数 $\widehat{c}_{\rho,\ 2}([L])$ 均可利用分类空间的上同调信息以及来自 L的同调类 ς来确定。我们希望得到一个源自L 的拓扑和奇点的不变量。为此，我们针对正规曲面奇点引入第二 CCS 数 $\widehat{c}_{\rho,\ 2}([L])$ 的一种变体，它将 X 的解消信息纳入考量。

定义 6.6。设 (X, x) 是一个正规曲面奇点， L 是其链接。设$\pi\colon X \to X$ 是一个解消，$Z_{\mathrm{fund}} = \sum n_i E_i$ 是其基本循环。设 $\rho\colon \pi_1(L) \to GL(n, \mathbb{C})$ 是一个表示。不变量 $\Xi_\rho(X, X)$ 定义为

$$\Xi_\rho(X, \tilde{X}) := \left(\frac{1 + \sum n_i^2}{1 + \sum n_i}\right) \widehat{c}_{\rho,2}([L]).$$

注 6.7。注意， $\Xi_\rho(X, X)$ 的定义取决于解消。

本节的主要结果是下面的定理 6.8，它说明如何从其局部基本群的不可约表示的前几个 CCS 数以及极小解消和自然表示对应的不变量 $\Xi_\rho(X, X)$，恢复有理双点奇点的谱。

定理 6.8. 设 $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$ 是有理双点曲面奇点的芽。设 $\pi\colon X_{\min} \to X$ 为极小解消。则 (X, x) 的谱及其重数可由 $\Gamma = \pi_1^{\mathrm{loc}}(X, x)$ 和 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X, \tilde{X}_{\min})$ 的不可约表示的非零第一 CCS 数得到，其中 $\alpha_{\mathrm{Nat}}\colon \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 是自然表示。

Proof. 令 $\pi\colon X_{\min} \to X$ 为极小解消。记其基本循环为 $Z_{\mathrm{fund}} = \sum n_i E_i$。记 $t_\Gamma = \frac{1+\sum n_i^2}{1+\sum n_i}$。令 $\alpha_{\mathrm{Nat}}\colon \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 为自然表示。在下表中，我们分别计算了有理数 t_Γ 和不变量 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X, X_{\min})$，它们分别来自表6和表3：

	BD_{2r}	BT	BO	BI
t_Γ	$\frac{2r}{r+1}$	$\frac{24}{12} = 2$	$\frac{48}{18}$	$\frac{120}{30} = 4$
$\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X, \tilde{X}_{\min})$	$\frac{1}{2(r+1)}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{30}$

我们可以如下恢复表7中给出的谱数：

(1) 分为两种情况：$\Gamma = \mathsf{C}_l$：相对于生成元 ζ_l （属于 $H_1(\mathrm{BC}_l;\mathbb{Z})$），$\mathsf{C}_l$ 的不可约表示的每个不同的非零第一 CCS 数都是重数为 1 的谱数。$\Gamma \neq \mathsf{C}_l$：相对于类 $\bar{c}$ （属于 $H_1(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z})$），$\Gamma$ 的不可约表示的每个不同的非零第一 CCS 数都是重数为 1 的谱数（重复的第一 CCS 数只计一次）。(2) 如果 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,\tilde{X}_{\min}) \neq 0$，则它具有 $\frac{1}{m}$ 的形式，其中 m 为某个整数，且它是重数为 1 的谱数。(3) 需要考虑两种情况：$\tilde{}\mathrm{BD}_{2r}$：倍数 $(2i+1)\cdot\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,X_{\min})$（其中 $i=1,\ldots..,r$）是其余的谱数，每个重数均为 1。$\tilde{}$BT、BO 或 BI：倍数 $k\cdot\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,X_{\min})$（其中 $1<k<m$，且k 与 m 互素）是其余的谱数，每个重数均为 1。

我们逐一考察这些情形。

情形 C_l：由表 4 可知，关于生成元 ζ_l，C_l 的非平凡不可约表示的第一 CCS 数为 $\frac{1}{l},\ldots,\frac{l-1}{l}$，这恰好就是谱。它们的重数均为 1。

情形 BD_{2r}：由表 4 可知，关于 $\bar{c}$，BD_{2r} 的不可约表示的非零第一 CCS 数等于 $\frac{1}{2}$，其重数取为 1。此外，数 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,\tilde{X}_{\min}) = \frac{1}{2(r+1)}$ 也是一个谱数，重数为 1。取倍数 $(2i+1)\cdot\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,X_{\min})$，其中$i=1,\ldots,r$，得到：$\frac{3}{2(r+1)},\frac{5}{2(r+1)}\cdots,\frac{2r+1}{2(r+1)}$，这些就是其余的谱数，重数均取为 1。因此，所有谱数的重数均为 1，除了 r even ($r=2l$) 的情形，此时数 $\frac{1}{2}$ 的重数为 2，其中一个来自第一 CCS 数，另一个来自 $\frac{2l+1}{2(r+1)} = \frac{r+1}{2(r+1)} = \frac{1}{2}$。

BT 情形：根据表 4，BT 的不可约表示相对于 $\bar{c}$ 的非零第一 CCS 数为$\frac{4}{12}$ 和 $\frac{8}{12}$，它们是谱数，每个重数均为 1。此外，数 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,\tilde{X}_{\min}) = \frac{1}{12}$也是一个重数为 1 的谱数。取满足$1<k<12$且与 12 互素的倍数 $k\cdot\frac{1}{12}$ 和 k，可得：$\frac{5}{12}$、$\frac{7}{12}$、$\frac{11}{12}$，它们是其余的谱数，重数均为 1。因此，所有谱数的重数均为 1。

BO 情形：根据表 4，BT 的不可约表示相对于 $\bar{c}$ 的非零第一 CCS 数等于 $\frac{1}{2}=\frac{9}{18}$，它是一个谱数，重数取为 1。此外，$\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,\tilde{X}_{\min})=\frac{1}{18}$ 是一个重数为 1 的谱数。取满足$1<k<18$且与 18 互素的倍数 $k\cdot\frac{1}{18}$ 和 k，可得：$\frac{5}{18}$、$\frac{7}{17}$、$\frac{11}{18}$、$\frac{13}{18}$、$\frac{17}{18}$，它们是其余的谱数，重数均为 1。因此，所有谱数的重数均为 1。

BI 情形：所有第一 CCS 数均为零。$\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,\tilde{X}_{\min})=\frac{1}{30}$ 是一个重数为 1 的谱数。取满足 $1<k<30$且 k与 30 互素的倍数 $k\cdot\frac{1}{30}$，得到：$\frac{7}{30}$，$\frac{11}{30}$，$\frac{13}{30}$，$\frac{17}{30}$，$\frac{19}{30}$，$\frac{23}{30}$，$\frac{29}{30}$这些就是所有重数为 1 的谱数。

这证明了该断言。 □

注 6.9。注意，对于 $\Gamma=\mathrm{BT}$、BO、BI 和 $\Gamma=\mathrm{BD}_{2r}$（其中 r 为偶数），同调类 $\bar{c}$ 是 $H_1(\mathrm{B}\Gamma;\mathbb{Z})$的一个生成元；唯一例外是 $\Gamma=\mathrm{BD}_{2r}$ 且 r 为奇数的情形。若在这种情形下我们取相对于生成元 b的第一 CCS 数，得到的数$\frac{1}{4}$ 和$\frac{3}{4}$ 并不是谱数。

注 6.10. 若 $(\mathbb{C}^2/\Gamma,0)$ 是一个链接为 L 的有理双点奇点，则由表 2 可知，自然表示 $\alpha_{\mathrm{Nat}}\colon\Gamma\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 在拓扑上是平凡的。由 定理 3.3 $\widehat{c}_{\alpha_{\mathrm{Nat}},2}([L])=\xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(D)$，其中 D 是 L 的狄拉克算子。因此 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X,\tilde{X})=\left(\frac{1+\sum n_i^2}{1+\sum n_i}\right)\tilde{\xi}_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(D)$。

一个自然的问题是，若在微分算子替换狄拉克算子，是否会得到有趣的不变量。

6.3. 麦凯对应。本节回顾麦凯对应的基础知识。我们假设读者已基本熟悉对偶化层、模和正规曲面奇点，更多详情请参见 [10, 38, 22] 。

设 X是一个正规簇。令 $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bullet,\bullet)$ 和 $\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\bullet,\bullet)$ 分别为层论的 Hom 和 Ext 函子（见 [20]）。若一个 $\mathcal{O}_X$- 模 M 不能写成两个非平凡子模的直和，则称其为不可分解的。$\mathcal{O}_X$-模 M的对偶记为 $M^\vee:=\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(M,\mathcal{O}_X)$。若从 M 到 M 的自然同态是同构，则称 $\mathcal{O}_X$-模 M为自反的。

设 (X,x) 是一个正规曲面奇点的 $\mathbb{Q}$ 中关于满层的以下定义。

定义 6.11. 若存在一个自反的 $\mathcal{O}_X$-模M，使得 $\mathcal{M}\cong(\pi^*M)$，则称 $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-模 $\mathcal{M}$ 为全的。我们称 $\mathcal{M}$为与 M 相关联的全层。

根据 Artin 和 Verdier [2], ，经典的 McKay对应可表述如下：对于有理双重点奇点，以下对象之间存在一一对应关系，

- 非平凡不可约表示 π_{loc1} (X,x),
- 非平凡不可分解自反 $\mathcal{O}_X$-模,
- X的极小解消的例外除子中的不可约分支。

注 6.12. 一般而言，给定任意一个 (X,x) 正规曲面奇点，以及 ρ 一个 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)$ 的表示，根据黎曼-希尔伯特对应，我们可得到一个自反$\mathcal{O}_X$-模。此模取决于该表示，因此我们将其记为 M_ρ。更多详情请参见 [19] 。

如果该奇点不是有理双点奇点，则需要附加一个假设，才能得到类似麦凯对应的分类。对于有理奇点，这一性质称为特殊性，已有多位学者对此进行研究: Esnault [17], Wunram[49], Riemenschneider [43], Iyama 和 Wemyss [23]。对于 Gorenstein奇点，Fern´andez de Bobadilla 和 Romano-Vel´azquez [18] 将其称为上同调特殊性。

定义 6.13. 设 (X,x) 是一个正规曲面奇点的芽。设 M 是一个秩为 r 的自反 $\mathcal{O}_X$-模。我们称 M 为

(1) 特殊的，如果 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(M,\mathcal{O}_X)=0$,˜; (2) 上同调特殊的，如果对任意解消 $\pi\colon X\to X$ 与 M 相关联的全层 $\mathcal{M}$满足 $\dim_{\mathbb{C}}\left(R^1\pi_*\left(\mathcal{M}^\vee\right)\right)=rp_g$, 其中 p_g 是几何亏格（定义 6.2）。

对于局部基本群的表示，我们有如下定义。

定义 6.14. 设 (X,x) 是一个正规曲面奇点，且 ρ 是 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)$ 的一个表示。设 M_ρ 是由 ρ 和黎曼-希尔伯特对应给出的自反 $\mathcal{O}_X$-模。我们称该表示 ρ 为

(1) 如果 M_ρ 是特殊的。(2) 如果 M_ρ 是上同调特殊的。

注 6.15. 根据 [49], ，在有理双重点奇点中，任意表示（反身模）都是特殊表示（特殊反身模）。此外，根据 [18] ，在这种情况下，特殊与上同调特殊这两个概念是一致的。

设 (X,x) 为一个有理双点曲面奇点的芽，并考虑自然表示 $\alpha_{\mathrm{Nat}}\colon \pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)\to SL(2,\mathbb{C})$。根据定理 6.8

$\sim\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X, X_{\min})$ 总是一个谱数。此外，对于任意不可约表示 $\alpha\colon\ \pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，如果其第一 Cheeger-Chern-Simons 类 $\widehat{c}_1(\alpha)$ 不为零，那么相应的第一CCS数 $\widehat{c}_1(\alpha)(\bar{c})$ 总是一个谱数。我们希望利用 $\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)$ 的不可约表示 $\mathrm{Irr}(\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x))$ 中满足 $i=1$、2 的表示的 Cheeger-Chern-Simons类 $\widehat{c}_i(\alpha)$，为有理曲面奇点或 Gorenstein 曲面奇点 (X,x) 定义一个新的不变量；但为了定义奇点本身而不仅仅是局部基本群的不变量，我们将只使用特殊表示或上同调特殊表示（见下文例6.17）。下面的定义是这一注释的自然结果。

定义6.16. 设(X,x)是一个有理曲面奇点的芽，L 是其链接。(X,x)的拓扑谱为以下集合

$$\mathrm{TSpf}(X) = \{0 \neq \widehat{c}_{\alpha,1} \in H^1(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \,|\, \alpha \in \mathrm{Irr}(\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)), \alpha \text{ is special}\}.$$

此外，若(X,x)是一个商奇点，则(X,x)的拓扑谱为以下集合

$$\begin{aligned}\mathrm{TSpf}(X) = \{&\widehat{c}_{\alpha,1} \in H^1(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \,|\, \alpha \in \mathrm{Irr}(\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)), \alpha \text{ is special and } \widehat{c}_1(\alpha) \neq 0\ \} \\ &\bigcup \{\widehat{c}_{\alpha_{\mathrm{Nat}},2} \,|\, \alpha_{\mathrm{Nat}} \text{ is the natural representation}\}.\end{aligned}$$

若(X,x)是一个Gorenstein奇点，则(X,x)的拓扑谱为以下集合

$$\mathrm{TSpf}(X) = \{0 \neq \widehat{c}_{\alpha,1} \in H^1(L;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \,|\, \alpha \in \mathrm{Irr}(\pi_1^{\mathrm{loc}}(X,x)), \alpha \text{ is cohomologically special}\}.$$

以下例子表明，奇点的拓扑谱确实取决于奇点本身，而不仅仅取决于局部基本群。

例6.17. 考虑以下阶为3的循环子群：

$$\Gamma_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \quad \text{and} \quad \Gamma_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

记为

$$(X_1,x_1) := (\mathbb{C}^2/\Gamma_1, 0) \quad \text{and} \quad (X_2,x_2) := (\mathbb{C}^2/\Gamma_2, 0),$$

相应的商奇点。芽 (X_2,x_2) 是一个有理双点奇点。对于 $j=1$，2，令 L_j 为奇点 (X_j,x_j) 的链接。在这两种情况下，链接都是三维透镜空间。此外，对于 $j=1$，2，有 $\pi_1(L_j) \cong \mathsf{C}_3$。因此，$\pi_1(L_1)$ 和 $\pi_1(L_2)$ 具有相同的非平凡不可约表示，即 α_2 和 α_3。根据 Artin 和 Verdier [2] 以及 Wunram [49]，我们有：

- 对于奇点 (X_1,x_1)，只有一个非平凡的特殊不可约表示，并且，
- 对于奇点（X_2,x_2），α_2 和 α_3 都是特殊表示。

因此，TSpf(X_1)只有一个上同调类，而TSpf(X_2)有两个上同调类。因此，即使 π_1(L_1)和 π_1(L_2)具有相同的表示论，（X_1, x_1）和（X_2, x_2）的拓扑谱确实不同。它们取决于奇点。

由定理 6.8 和注 6.15，对于有理双重点奇点 X，我们可以通过对特定同调类求值，从拓扑谱 TSpf(X) 中恢复一些谱数：$\widehat{c}_{\alpha,\ 1}(\bar{c})$ 和$\widehat{c}_{\alpha_{\mathrm{Nat}},\ 2}([L])$，并对所得数取适当的倍数。

注 6.18. 设 ($\mathbb{C}^2/\Gamma$, 0) 是一个商奇点（$\Gamma \subset$ GL(2, $\mathbb{C}$)）。根据 Wun- ram，极小解消 $X_{\min}$ 上基本循环的系数 $n_1, \ldots, n_s$ 与 X 的非平凡特殊不可约表示 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的维数一致。因此，对于商奇点，极小解消$\sim X_{\min}$ 的 $\frac{1+\sum n_i^2}{1+\sum n_i}$ 乘法因子（出现在 $\Xi_\rho(\tilde{X}_{\min}, D)$（定义 6.6 ）中）取决于群（不可约表示的维数）和奇点（仅特殊表示）。

对于有理双点奇点 $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$ ($\Gamma \subset$ SL(2, $\mathbb{C}$))，所有非平凡的不可约表示都是特殊的（注 6.15），并且众所周知，Γ 的阶 $|\Gamma|$ 由 $|\Gamma| = 1 + \sum_{i=1}^{s}$ 秩 α_i^2给出。因此，

$$\frac{1+\sum_{i=1}^{s} n_i^2}{1+\sum_{i=1}^{s} n_i} = \frac{|\Gamma|}{1+\sum_{i=1}^{s} \operatorname{rank} \alpha_i}.$$

根据注 6.10，在这种情况下有 $\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X, \tilde{X}) = \left(\frac{1+\sum n_i^2}{1+\sum n_i}\right)\tilde{\xi}_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(D)$，并且由表 3 $\tilde{\xi}_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(D) = \frac{1}{|\Gamma|}$可知，对于 $\Gamma =$ BD$_{2r}$、BT、BO、BI。因此，在这些情况下有

$$\Xi_{\alpha_{\mathrm{Nat}}}(X, \tilde{X}) = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{s} \operatorname{rank} \alpha_i}.$$

~6.4. 通过麦凯对应得到的不变量 $\xi_\rho(D)$。在本节最后部分~，我们将展示如何利用麦凯对应计算不变量 $\xi_\rho(D)$。这种方法的优点是计算起来更为简便。

设 (X, x) 是一个正规曲面奇点的芽。记 L 为其链接。假设 L 是一个有理同调球，例如任何有理奇点的链接~（见备注 6.4）。设 π: $X \to X$ 是一个解消，使得 E 是一个正规交叉除子。设 (L, σ_{can}) 是配备由解消诱导的典范自旋^c 结构 σ_{can}的链接（见 [40, § 2]）。此外，~ ~X 上的近复结构给出一个自旋^c 结构 $\sigma_{\tilde{X}}$，使得其在 L 上的限制为 σ_{can}。从现在起，我们将使用这一自旋^c 结构。

定理 6.19。设 (X, x) 是一个正规曲面奇点的芽。假设˜链接 L 是一个有理同调球。设 $\pi\colon X \to X$ 是一个解消，其带有E正规交叉除子。设 $\rho\colon \pi_1(L) \to GL(n, \mathbb{C})$ 是一个表示。记 M_ρ 为由黎曼–希尔伯特对应和 ρ给出的自反 $\mathcal{O}_X$-模。记 $\mathscr{M}_\rho$ 为相应的向量丛。那么，

$$\tilde{\xi}_\rho(D) = \int_{\tilde{X}} (\operatorname{ch} \mathscr{M}_\rho - n)\, \mathcal{T}(\tilde{X}), \tag{51}$$

其中 ch 是陈特征， $\mathcal{T}$是托德类。此外，如果 ρ 是拓扑平凡的，那么$\widehat{c}_{\rho,2}([L])$ 由 (51) 给出。

Proof. 证明见 [4, 第 415] 页及推论 3.4。 □

推论 6.20. 设 (X, x) 是一个商曲面奇点的芽。设˜$\pi\colon X \to X$为极小解消。记 $E = \bigcup E_j$为例外除子。则存在一个良定义的自然映射

$$\Psi\colon \{E_1, \dots, E_n\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Proof. 根据 [49], ，例外除子的不可约分支与局部基本群的非平凡特殊表示之间存在一一对应。因此，该映射由定理 6.19 给出（回顾一下，任意商奇点都是有理奇点）。□

如果 (X, x) 存在一个米尔诺纤维为 F 的平滑化，我们也可以得到类似的结果。对于超曲面，可以将 F 取为通常的米尔诺纤维。于是， F 具有一个自旋^c 结构，其在链接上的限制与 σ_{can} 一致（见 [40, § 2]）。因此，

定理 6.21. 设 (X, x) 是一个正规曲面奇点的芽。假设˜链接 L 是一个有理同调球。设 $\pi\colon X \to X$ 是一个解消，其中 E 是正规交叉除子。假设 (X, x) 存在一个米尔诺纤维为 F 的平滑化。设 L 是 (X, x) 的链接。设 $\rho\colon \pi_1(L) \to GL(n, \mathbb{C})$ 是一个表示， V_ρ 是其在 L 上的相伴平坦向量丛。假设存在一个将 V_ρ 延拓到 F 上的延拓 $\mathscr{V}_\rho$ 。那么，

$$\tilde{\xi}_\rho(D) = \int_F (ch(\mathscr{V}_\rho) - n)\, \mathcal{T}(F). \tag{52}$$

此外，如果 ρ 是拓扑平凡的，那么 $\widehat{c}_{\rho,\ 2}([L])$ 由式 (52) 给出。

Proof. 证明可由 [4, pp. 415] 和推论 3.4 得出。 □

致谢。 本研究得到项目 UNAM-DGAPA-PAPIIT-IN105121 和 CONACYT 282937 的资助。我们感谢 Javier F. de Bobadilla 教授、Andr´as Nemethi 教授和 Duco van Straten 教授对这一问题的关注及其宝贵意见。第三作者得到 OTKA 126683 和 Lend¨ület 30001 的资助。第三作者感谢吕米尼 CIRM 的热情接待，并为我们提供了理想的工作环境。他还感谢 2021 年第二学期 Jean-Morlet 讲席教授 Javier F. de Bobadilla 教授的邀请。

References

[1]V. 阿诺德. 奇点理论中的若干问题. 印度科学院数学科学会议录, 90(1):1–9, 1981. 1[2]M. Artin 和 J.-L. Verdier. 有理双点上的自反模. 数学年刊, 270(1):79–82, 1985. 6.3, 6.17[3] M. F. Atiyah, V. K. Patodi 和 I. M. Singer. 谱不对称与黎曼几何 I. 77:43–69, 1975. 3.2[4] M. F. Atiyah, V. K. Patodi 和 I. M. Singer. 谱不对称与黎曼几何 II. 数学与哲学学会剑桥分会会议录, 78:405–432, 1975. 1, 6.4, 6.4[5] M. F. Atiyah, V. K. Patodi 和 I. M. Singer. 谱不对称与黎曼几何 III. 79:71–99, 1976. (文档), 1, 3, 3.2, 3.3, 3.3, 3.3, 3.3[6] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer. 椭圆算子的指标：I. 87:484–530, 1968. 3.2[7] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer. 椭圆算子的指标：III. 87:546–604, 1968. 3.3[8] Michael F. Atiyah. 有限群的特征标与上同调. IHÉS 数学出版物 ´ematiques´de l’IHES, 9:23–64, 1961. 2, 2.2, 2.3[9] Kenneth S. Brown. 群的上同调，第 87 卷. 施普林格, 尚贝, 1982. 2, 2.4, 5.5[10] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog. Cohen–Macaulay 环，第 39 卷. 剑桥：剑桥大学出版社, 1998. 6.3[11] A. Cayley. 多面体札记. 载于《数学论文集》，第 V 卷. 1866. 5.2[12] Jeff Cheeger 和 James Simons. 微分特征与几何不变量. 几何与拓扑，学院公园专题年会议录, 马里兰州学院公园，1983/84，数学讲义 1167，50–80，1985. 1, 2.3, 1, 2.3, 2.3, 2.4, 3.3[13] Shiing Shen Chern. 微分几何专题. 新泽西州普林斯顿：高等研究院. 106 页, 1951. 2, 2.3[14] Shiing Shen Chern 和 James Simons. 特征形式与几何不变量. 数学年刊 (2), 99:48–69, 1974. 2.3[15] Jose Luis Cisneros-Molina. 扭曲狄拉克算子的 η-不变量 $\mathbb{S}^3/\Gamma$. Geometriae Dedicata, 84:207–228, 2001 年 2 月. 5.2, 5.4, 5.4, 3, 5.4[16]Johan L. Dupont. 平坦丛的特征类及其公式. 拓扑学, 33(3):575–590, 1994. 5.1[17] H´el`ene Esnault. 商曲面奇点上的自反模. 《纯粹与应用数学杂志》, 362:63–71, 1985. 6.3[18] Javier Fernandez de Bobadilla 和 Agust´ín Romano-Vel´azquez. 正规 Gorenstein Stein 曲面上的自反模、它们的变形与模空间. 即将发表于《美国数学会回忆录》, 2022. 1, 6.3, 6.15

[19] Trond Stølen Gustavsen 和 Runar Ile. 正规曲面奇点上的自反模与局部基本群的表示. 纯粹与应用代数杂志, 212(4):851–862, 2008. 6.12[20] Robin Hartshorne. 代数几何. 数学研究生教材, 第 52 号. 施普林格出版社, 纽约—海德堡, 1977. 6.3[21] Dale Husemoller. 纤维丛. 20. 第三版, 1993. 2, 2.1, 2.1, 2.3, 3.3[22] Shihoko Ishii. 奇点导论. 东京：施普林格, 2014. 6.1, 6.5, 6.3[23] Osamu Iyama 和 Michael Wemyss. 特殊 Cohen–Macaulay 模的分类. 《数学杂志》, 265(1):41–83, 2010. 6.3[24] J. D. S. Jones 和 B. W. Westbury. 代数 K 理论、同调球面与 η-不变量. 34(4):929–957, 1994. (文档), 1, 3.5, 4, 4, 4, 4[25] J¨urgen Jost. 黎曼几何与几何分析. 尚贝：施普林格, 2017. 3.3[26]Constantin P. Kahn. 极小椭圆奇点上的自反模. 数学年刊, 285(1):141–160, 1989. 6.3[27] Max Karoubi. 循环同调与 K 理论，第 149 卷. 法国数学会, 巴黎, 1987. 3.3[28] Max Karoubi. 次特征类的一般理论。（次特征类的一般理论）。 KK 理论, 4(1):55–87, 1990. 3.3[29] Robion C. Kirby. 四维流形拓扑，第 1374 卷. 柏林等地：施普林格出版社, 1989. 3.3[30] Felix Klein. 二十面体讲义与五次方程的解法. Dover, 1956. 英译自 1884 年原版. 5.2[31]J´anos Koll´ar 和 Andr´as N´emethi. 奇点上的全纯弧. 《数学发明》, 200(1):97–147, 2015. 6.3[32] Ove Kroll. 有限群表示的陈类的一种代数刻画. 伦敦数学会, (19):245–248, 1987. 2.2[33]Ove Kroll. 有限群表示的陈类. 《数学教学》 (2), 35(3-4):363–374, 1989. 2.2[34] Klaus Lamotke. 正多面体与孤立奇点. 数学高级讲座. Friedr. Vieweg & Sohn, 不伦瑞克, 1986. 5.1, 5.2, 5.3, 6.1[35] H. Blaine Lawson, Jr. 和 Marie-Louise Michelsohn. 自旋几何，普林斯顿数学丛书第 38 卷. 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1989. 3.3[36] Guido Mislin. 群表示的有限化陈类. 巴塞罗那自治大学数学系出版物, 26(3):109–127, 1982. 2.2, 2.3[37]M. S. Narasimhan 和 S. Ramanan. 泛联络的存在性. 《美国数学杂志》, 83:563–572, 1961. 2.2[38] Andr´as N´emethi. 正规曲面奇点五讲. 载于《低维拓扑》。暑期学校论文集，布达佩斯，匈牙利，1998 年 8 月 3–14 日，第 269–351 页 . 布达佩斯：J´anos Bolyai 数学会 , 1999. 6.1, 6.4, 6.3[39] Andr´as N´emethi. 正规曲面奇点，第 74 卷，数学及其边界领域成果，第 3 辑。现代数学综述丛书 /数学及相关领域成果，第 3 辑。现代数学综述丛书/. 施普林格, 尚贝, 2022. 6.1[40] Andr´as N´emethi 和 Liviu I. Nicolaescu. Seiberg–Witten 不变量与曲面奇点. 《几何与拓扑》, 6:269–328, 2002. 6.4, 6.4

[41] John Oprea 和 Daniel Tanr´e。《平坦圆丛、拉回与离散化的圆》。Int. J. Math. Math. Sci., (21):3487–3495, 2005. 2.1[42] Franklin P. Peterson。《关于陈类的一些评论》。Ann. Math. (2), 69:414–420, 1959. 3.4, 4[43] Oswald Riemenschneider。《特殊表示与二维 McKay 对应》。Hokkaido Mathematical Journal, 32(2):317 – 333, 2003. 6.3[44] Jonathan Rosenberg。《代数 K 理论及其应用》。147. 1994. 4[45] Chih-Han Sah。《离散化的经典李群的同调 III》。56:269–312, 1989. 4, 4[46] R. T. Seeley。《椭圆算子的复幂》。载于《奇异积分》, Proc. Symp. Pure Math., 第 10 卷，第 288–307 页，1967. 3.2[47] J. H. M. Steenbrink。《超曲面奇点的谱》。第 179-180 号，第 11、163–184 页。1989. Actes du Colloque de Th´eorie de Hodge (吕米尼, 1987)。(文档), 1, 6.1[48] C. B. Thomas。《关于具有二元多面体基本群的 Poincar´e 3-复形》。Math. Ann., 226:207–221, 1977. 5, 5.5, 5.5, 5.5[49] J. Wunram。《商曲面奇点上的自反模》。Math. Ann., 279(4):583–598, 1988. 1, 6.3, 6.15, 6.17, 6.18, 6.4

División de Ingenierías, Campus Guanajuato, Universidad de Guanajuato, Av. JuárezNo. 77, Zona Centro, Guanajuato, Gto., México, C.P. 36000, +524731020100-5924电子邮件地址: ja.arciniega@ugto.mx

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, Universidad Nacional Autónomade México, Avenida Universidad s/n, Colonia Lomas de Chamilpa, Cuernavaca, More-los, Mexico.

电子邮件地址：jlcisneros@im.unam.mx

Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, Reáltanoda Utca 13-15, H-1053, Budapest, Hungary.Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, Universidad Nacional Autónoma deMéxico, Avenida Universidad s/n, Colonia Lomas de Chamilpa, Cuernavaca, More-los, Mexico.

电子邮件地址：agustin@renyi.hu, agustin.romano@im.unam.mx