无线网络中的空间网络演算与性能保证

Ke Feng* 和 François Baccelli*†
*法国巴黎 INRIA-ENS，†法国巴黎电信学院

arXiv:2302.02001v3 [cs.IT] 6 Sep 2023

摘要—**本文提出一种新方法，为任意大规模无线网络中的所有链路提供性能保证。本文引入了空间网络演算，包括针对平稳点过程的空间约束性质，以及用于处理这些约束的演算的初步步骤；它可视为空间上的经典网络演算扩展。具体而言，本文定义了两类约束：一类包括球调节和射噪声调节，二者被证明等价，并对干扰施加上界；另一类包括空洞调节，对信号功率施加下界。这些约束分为强约束和弱约束：前者要求约束在空间各处均成立，后者则只要求约束在联合平稳点过程所观测到的位置成立。**

通过这种方法，我们在适当监管下的设备到设备、自组和蜂窝网络中推导出性能保证。我们为所有链路给出信干噪比的通用界限，从而基于信息理论的可达性提供链路服务保证。将这些保证与经典网络演算相结合，可为无线排队网络中的所有数据包提供端到端时延保证。在没有进行空间监管的网络中，例如泊松网络，则不存在此类保证。

索引词—**确定性网络、超可靠低时延通信、性能保证、时延、排队网络、随机几何、点过程、Palm演算、无线网络、蜂窝网络、设备到设备网络、自组网络。**

I. 引言

网络演算 [1]–[3] 是在线路计算机网络中建立确定性时延保证的关键工具，用于应对诸如待处理信息的批量到达、多个接入同时连接网络、可抢占系统级任务导致处理速度下降等未受控制的事件。对于任务关键型和实时应用而言，此类保证是必不可少的，因为这些应用要求严格的实时性，例如飞机或汽车的控制网络、机场控制网络、生产车间控制网络或核电站控制网络。实现这一点需要：1）对输入到达过程进行整形；2）提供保证服务曲线。每台计算机或每条通信链路都是由受量子物理学支配的电子设备构成的物理系统，因此，严格确定性当然只能在一定限制范围内成立，而这些限制本质上具有概率性质。由于这一点以及许多其他更具说服力的原因，该领域近年来出现了随机网络演算这一趋势：它接受输入曲线和服务曲线中的某些形式的受控随机性，并以例如严格控制时延尾部分布的方式，取代确定性保证。

公平地说，就可证明的保证而言，无线网络落后于有线网络过去30多年一直为工业和嵌入式系统提供的保证：尽管5G和6G行业强烈宣称，超可靠低时延通信（URLLC）将在预期用例中支持100%的用户[4], [5], ，但据我们所知，在任意规模的无线网络中，为所有链路提供可证明的性能保证仍基本无法实现。迄今为止，最相关的成果是元分布 [6]–[8], ，它们能够对大型网络进行链路级刻画，但无法提供保证。这至少有两个内在原因。第一组原因来自物理学，更准确地说，来自电磁学。有线传播发生在受控（甚至经过设计的）媒介中，而开放空间中的无线传播则受到不受控的多径反射和直射路径阻挡的影响，这两种现象会使无线链路特性以不可预测的方式波动，分别由衰落和阴影效应这两个统计概念加以刻画。第二组原因来自无线媒介的共享性质。与电缆中的情况不同，在开放空间中，无法将某一给定的电磁传输与其他使用同一频谱、甚至相距很远的并发传输隔离开来。因此，其他源产生的干扰在这里发挥着关键作用，并且众所周知，甚至是密集网络中的主要限制因素。频率复用和载波侦听从某种意义上说是应对这一问题的自然方式，但只能算是启发式方法 [9], [10]。在这种开放空间环境下，多址接入的控制仍仅得到非常有限的掌握。所有这些现象（传播、衰落、阴影效应、多址接入和干扰）都是香农速率定义中的关键要素，而香农速率决定了无线链路通信服务过程的可实现性能。因此，不难理解为什么目前还无法提供确定性保证或严格的随机保证。

迄今为止，大型无线网络的性能分析依赖于一种广为认可的框架，该框架基于随机几何，尤其是泊松点过程（PPP） [11]–[15]。这一框架通常能够得到可计算的闭式结果，其在排队论中的对应形式是 M/M/1队列，或更一般地说，杰克逊网络。遗憾的是，这些框架都无法提供确定性保证。相比之下，本文将重点从针对特定空间模型给出新的闭式解，转向研究调控性质；这些性质在得到实施后，可带来所需的界。

A. 空间网络演算

本文通过构建一种新的方法来处理这类问题：空间网络演算 基于可通过算法实现的空间约束，并为任意大规模无线网络中的所有链路及其级联提供保证。对于受到空间约束的点过程，一个关键示例是硬核点过程。给定发射机过程和接收机过程的空间约束，这种演算能够为网络中的所有链路提供可计算的信干噪比（SINR）下界：在无衰落情况下为确定性下界，在有衰落情况下则为随机下界。由此可为所有链路提供服务曲线（即香农速率的下界）：无衰落时为确定性服务曲线，有衰落时则为随机服务曲线。随后，这些服务曲线与经典网络演算相结合，以实现无线排队系统中有界或受控的时延。

B. 空间约束概述

平稳空间点过程的空间约束在第二节和第三节中定义。本文定义了两类空间约束。第一类旨在控制无线链路的聚集，包括球约束和射噪声约束，二者已证明等价。第二类包含空洞调节，旨在控制链路距离。

约束分为强约束和弱约束。设 Φ 和 Ψ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ [15] 上的联合平稳遍历点过程，分别表示发射机和接收机点过程。对 Φ 的 强约束 要求在整个空间中处处成立，而相对于 Ψ 的 Φ 的弱约束 只要求在Ψ的原子处成立。弱约束的概念基于 Palm 演算 [15]，形式化了“典型观察者”的概念，在无线场景中很自然。经典网络演算中并未讨论这一点；据我们所知，这也是一项新内容。

C. 无线网络中的性能保证

空间网络演算的价值可通过第四至第六节中的几种关键无线网络架构加以说明，这些架构既包括设备到设备（D2D）类型，也包括蜂窝类型。第四节研究了双极 D2D 架构，其中发射机形成一个平稳点过程 Φ，且每个发射机在固定距离 τ处拥有一个专用接收机。我们证明，Φ 相对于接收机点过程的弱空间调控，会为网络中的所有链路带来信干噪比下界。进一步地，假设每个收发机对都有一个队列，其输入到达率等于常数 λ （所有队列均相同），且服务速率为无线链路的香农速率，我们证明，Φ 的空间调控会导致这样一种情况：当 λ 足够小时，所有队列都稳定；而在缺乏调控时，对于所有正的 λ，都有一定比例的队列不稳定。最后，通过确定性时延保证说明了以下情况：如果输入到达过程受到时间调控且不存在衰落，则所有队列均可获得保证；否则，则可通过尾部界限给出随机性保证。

另一种经典的设备到设备场景是自组场景，如第五节所述，其中只有一个收发器点过程 Φ。假设每个节点（收发器）都能与信干噪比高于某个预设阈值的节点建立双向链路，由此便定义了所谓的信干噪比图 [16], [17]。我们证明，若 Φ 强空洞调节且球调控，就能在任意远距离的节点之间进行远距离多跳通信。在无衰落的情况下，还能在自组网络中维持一个无线骨干网（定义如下），使数据包能够传输到任意远处，并对构成该骨干网的串联队列中的时延给出界限。同样，若输入业务到达过程受时间调控且不存在衰落，这些界限是确定性的；否则则具有随机性。

第六节所讨论的蜂窝场景包含两个联合平稳点过程：一个基站点过程 Φ 和一个用户点过程 Ψ。我们引入另一种空间调控方式，称为小区负载调节，用于控制 Ψ 在 Φ 的 Voronoi 单元中的聚集。如果 Φ 相对于 Ψ 弱球调控，且网络受小区负载调节，那么所有用户及其队列都能获得与前述网络架构类似的性能保证。

II. 强空间约束

A. 定义

设 Φ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$[1] 上、取值于 $\mathbb{R}^2$ 的平稳遍历点过程。令 $b(x, r) \subset \mathbb{R}^2$ 表示以 $x \in \mathbb{R}^2$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开球，$B(x, r)$ 表示其闭包。对于博雷尔集 $L \subset \mathbb{R}^2$，令$\Phi(L) \in \mathbb{N}$，$\{0, 1, 2, \dots\}$表示位于 L 中的 Φ 的点数。令 $N(r) \quad \Phi(b(o, r))$ 以简化记号。在本文中，我们用 a.s. （意为几乎必然）表示某个事件成立的概率为 1。

定义 1（强（σ, ρ, ν）-球调控）。若平稳点过程 Φ 对所有$r \geq 0$ 都满足下式，则称其为强（σ, ρ, ν）-球调控的，

$$N(r) \leq \sigma + \rho r + \nu r^2, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{1}$$

其中 σ, ρ, ν 为常数，且 σ, $\nu \geq 0$。

或者，我们可以写成 $\mathbb{P}(N(r) \leq \sigma + \rho r + \nu r^2) = 1$。根据平稳性，对于所有 $y \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, Φ, $b(y, r)$ 与 $\Phi(b(o, r))$ 同分布，因此几乎处处有上界 $\sigma + \rho r + \nu r^2$。引理 4 的第二节 III-B 节稍后证明了一个强得多的结果，该结果指出，Φ 是强 (σ, ρ, ν)-球调控的，当且仅当

$$\mathbb{P} \cap_{y \in \mathbb{R}^2\ r \geq 0} \Phi\ b\ y\ r \quad \leq \sigma + \rho r + (.\ (\ (.\ \ )) \quad r$$

$\nu r^2 = 1$)，也就是说，该界对所有位置同时几乎处处成立。

[1]按照概率论中的标准记法，Ω、$\mathcal{A}$，$\mathbb{P}$ 分别表示样本空间、 Ω上的 σ-代数，以及$(\Omega, \mathcal{A})$上的概率测度。

这一概念可以推广到 $\mathbb{R}^d$上平稳点过程的球调节，方法是将二次多项式替换为 d次多项式。一种特殊情况是 $\mathbb{R}^+$上平稳点过程的球调节。设 Φ 是$\mathbb{R}^+$上的平稳遍历点过程。将 Φ 的(σ, ρ)-球调节定义为：对于所有 $r > 0$，$\Phi([0,r)) \le \sigma + \rho r$，$\mathbb{P}$-几乎处处。根据平稳性，对于所有 $0 \le s \le t$，$\Phi([s,t)) \le \sigma + \rho(t-s)$，$\mathbb{P}$-几乎处处。在 $\mathbb{R}^+$上，球调节因此归结为经典网络演算中分组到达的(σ, ρ)-调节，区别仅在于此处的模型是随机的。

若存在有限常数 σ，ρ，ν，使得Φ 是强 (σ, ρ, ν)-球调控的，则称平稳点过程 Φ 是强球调控的。

定义 2（强 (σ, ρ, ν)-散粒噪声调节）。若平稳点过程 Φ 满足：对于所有非负、有界且非增的函数 $l:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，以及所有 $R > 0$，

$$\sum_{x\in\Phi\cap b(o,R)} \ell(\|x\|) \le \sigma\ell(0) + \rho\int_0^R \ell(r)\mathrm{d}r + 2\nu\int_0^R r\ell(r)\mathrm{d}r,\ \mathbb{P}\text{-a.s.}, \tag{2}$$

其中 σ，ν 为正数。

根据平稳性，(2) 等价于对所有 $y \in \mathbb{R}^2$ $\sum_{x\in\Phi\cap b(y,R)} \|x-y\| \le \sigma\, 0 + \rho \int_0^R r\, r + \mathrm{P}(\cdot)\, l(\mathrm{k}\,\mathrm{k})\, l(\,) 2\nu\, r\, r\, \mathbb{P}$ 2 R$l(\,)\mathrm{d}$ R$_0^R$ $r l(\,)\mathrm{d}$，-a。s。定义 是定义 1 的特例，因为后者只要求 (2) 对$l(\cdot) \equiv 1$ 成立。

注释 1. 式 (2) 等价于

$$\sum_{x\in\Phi} \ell(\|x\|) \le A_\ell, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}, \tag{3}$$

其中

$$A_\ell \triangleq \sigma\ell(0) + \rho\int_0^\infty \ell(r)\mathrm{d}r + 2\nu\int_0^\infty r\ell(r)\mathrm{d}r. \tag{4}$$

A_ℓ 有限当且仅当 R $_0^\infty$ $r l\mathrm{d}r < \infty$。令 $R \to \infty$，容易看出式 (2) 推出式 (3)。对于所有 $R > 0$，令$l(r) = \mathbb{I}(r \le R)$（当参数小于 R 时取 1，否则取 0 的指示函数），即可得到式 (2)。式 (3) 的左侧是由 Φ 和原点处的 l 生成的散粒噪声[2]，因此本定义采用了这个名称。

这种调控的物理意义与无线网络中的总接收功率和干扰有关。在无线网络中，路径损耗函数自然满足关于 l 的条件。

定理 1（等价性）。平稳点过程 Φ 是强 (σ, ρ, ν)-散粒噪声调控的，当且仅当它是强 (σ, ρ, ν)-球调控的。

证明。首先，通过令$l(\cdot) \equiv 1$即可证明必要性。现在证明充分性。对于 $R > 0$，令 Δ，R/n 和 r_k，$k\Delta$，$n \in \mathbb{N}$，$k = 0,\ldots, n$。定义单调数列 $(B_0, B_1, \ldots)$ 和 $(l_0, l_1, \ldots)$，其中 B_k，$b(o, r_k)$，l_k，$l(r_k)$，$k = 0, \ldots, n$。位于 $b(o,R)$ 中的点在位置 o 产生的散粒噪声为

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\Phi\cap b(o,R)} \ell(\|x\|)\\
&\overset{(a)}{\le} l_0\Phi(B_1) + \sum_{k=1}^{n-1} l_k(\Phi(B_{k+1}) - \Phi(B_k))\\
&\overset{(b)}{=} \sum_{k=1}^{n}(l_{k-1} - l_k)\Phi(B_k) + l_n\Phi(B_n)\\
&\overset{(c)}{\le} \sum_{k=1}^{n}(l_{k-1} - l_k)(\sigma + \rho r_k + \nu r_k^2) + l_n(\sigma + \rho R + \nu R^2),\quad \mathbb{P}\text{-a.s.}
\end{aligned}$$

步骤 (a) 由l的单调性可得。步骤 (b) 由分部求和可得。步骤 (c) 由以下事实可得：Φ是强（ $\sigma\ \rho\ \nu$ $\sum_{k=1}^{n} l_{k-1}-,,$）球调控 $l_k\ \ \sigma + \rho r_k + \nu r_k^2$ 的。求和 P(,)() 收敛于黎曼–斯蒂尔切斯积分 R$_0^R$ $\sigma + \rho r + \nu r^2\mathrm{d}l$，当 $n \to \infty$ 时成立。该积分存在，因为 l 是单调且有界的，因此只有可数个间断点。现在，利用分部求和，我们得到 (2)。□

备注 2。定理 1 表明，强球调节点过程的散粒噪声具有可计算上界。该定理用于在无线网络中所有链路均无衰落的情况下，推导信干噪比的确定性界（例如，参见第四节）。

强球调节与强噪声调节之间的等价性，源于定义 2 中函数l 的普适性。对于固定的l，P $_{x\in\Phi} l(\mathrm{k}x\mathrm{k}) \le A_\ell$ 成立的条件较弱，因为它并不意味着该不等式对其他函数也成立。然而，正如下文所示，这种普适性十分重要，其影响也超出了等价性定理的范畴。令$\{h_x\}_{x\in\Phi}$ 表示与 Φ相关联的标记。现在，散粒噪声 P $_{x\in\Phi} h_x l(\mathrm{k}x\mathrm{k})$ 也受到$\{h_x\}_{x\in\Phi}$随机性的影响。令 L$_X(s) \triangleq \mathbb{E}[\exp(-sX)]$ 表示随机变量X的拉普拉斯变换。

定义 3（指数矩条件[3]）。若非负随机变量 X 的矩生成函数 L$_X(-s) = \mathbb{E}[\exp(sX)]$, 在 $s \in [0, s^*$时有限，则称其具有指数矩。

定理 2（有界条件拉普拉斯变换）。设 $\{h_x\}$ 为独立同分布的非负标记，具有有限均值和指数-˜矩。设 $l(r) = \log \mathrm{L}_h(-sl(r))$. 若 Φ 是强（σ, ρ, ν）-球调控的，则 $\exists s^* > 0$ 使得对于 $s \in [0, s^*)$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(s\sum_{x\in\Phi} h_x\ell(\|x\|)\right) \,\middle|\, \Phi\right] \le \exp\left(A_{\tilde{\ell}}\right),\quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{5}$$

证明。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{x\in\Phi} sh_x\ell(\|x\|)\right) \,\middle|\, \Phi\right] &\overset{(a)}{=} \prod_{x\in\Phi} \mathcal{L}_h(-s\ell(\|x\|))\\
&= \exp\left(\sum_{x\in\Phi} \log \mathcal{L}_h\left(-s\ell(\|x\|)\right)\right).
\end{aligned}$$

[2]散粒噪声的期望可由坎贝尔定理 [18]得到。

[3]这也称为克拉默条件 [19]。

步骤 (a) 是由标记的独立同分布假设得出的。接着，根据 (σ,ρ,ν)-球与 shot-˜噪声调节之间的等价性，只要证明 l 满足定义 2 中的路径损耗˜条件即可。现在，对于 $s \geq 0$, l 是非负的˜，因为 $\mathbb{E}_h[\exp(shl)] \geq 1$。其次，$\exists s^* > 0$ 使得 l 在 $0 \leq s \leq s^*$ 上有界，这是由于 l 有界，且h满足˜指数矩条件。容易看出，$l(r)$ 是非递增的。□

注释 3. 定理 2 表明，给定点过程后，独立同分布标记且强球调节的点过程所产生的散粒噪声的条件拉普拉斯变换存在一个上界。该结果用于推导所有链路的可靠性下界，其中衰落是具有指数矩的独立同分布标记。参见第四节。

注释 4. $A_{\tilde{\ell}}$ 有限，当 $\mathrm{R}_0^{\infty} rl(r)\mathrm{d}r < \infty$ 时，因为 $\log \mathrm{L}_h(-shl(r)) \sim sl(r)\mathbb{E}h$, $r \to \infty$。

定义 4（强 τ-空洞调控）。若平稳点过程 Φ 满足 $\Phi(B(o,\tau)) \geq 1$, $\mathbb{P}$-a.s.，其中 τ 为正常数，则称其为强 τ- 空洞调控。

再次利用平稳性，对所有 $y \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(B(y,\tau)) \geq 1$, $\mathbb{P}$-a.s.。此外，第二节 III-B 表明，若 Φ 是强 τ-空洞调控的，则 $\mathbb{R}^2$ 几乎必然可由 $\mathrm{S}_{x\in\Phi} B(x,\tau)$ 覆盖，其中 S 是以 Φ 中的点为圆心、τ为半径的所有闭圆盘的并集。该定义也推广到 $\mathbb{R}^d$中的平稳点过程。

这种调控的物理含义与覆盖的概念有关，例如蜂窝网络或卫星网络中的覆盖。令Φ 表示无线网络中发射机的位置。若Φ 是强 τ-空洞调控的，则网络中的任意位置半径为 τ的范围内都必须至少有一个发射机，在不存在衰落的情况下，该发射机可提供有下界的信号功率。

B. 性质

令 Φ 为一个平稳点过程，Φ_i, $i = 1, \ldots\ldots, n$ 为定义在概率空间$(\Omega, \mathrm{A}, \mathbb{P})$上的一族平稳点过程。以下性质成立：

- （叠加）若 Φ_i 是强$(\sigma_i, \rho_i, \nu_i)$-球调控的，$i = 1, \ldots\ldots, n$，则叠加$\mathrm{S}_{i=1}^{n}\{\Phi_i\}$是强$(\mathrm{P}\,\sigma_i, \mathrm{P}\,\rho_i, \mathrm{P}\,\nu_i)$-球调控的。若其中至少有一个$\Phi_i$ 不是强球调控的，则该叠加不是强球调控的。若 Φ_i 是强 τ_i-空洞调控的，$i = 1, \ldots\ldots, n$，则叠加$\mathrm{S}_{i=1}^{n}\{\Phi_i\}$是强$\min\{\tau_i\}$-空洞调控的。

- (稀疏化) 若 Φ 是强球调节的，则经过任意保持平稳性的稀疏化后仍然如此。若 Φ不是强空洞调节的，则经过任意稀疏化后仍然如此。

- (位移) 设 $\tilde{\Phi}$, $\{x \in \Phi: x + V_x\}$ 是由 Φ 位移得到的点过程，其中 $\{V_x\}_{x\in\Phi}$ 是一组随机向量。若这些随机向量 V_x 有界且˜保持平稳性，则 Φ 是强球调节的˜当且仅当 Φ 是强球调节的；Φ 是强空洞调节的当且仅当 Φ 是强空洞调节的。

叠加性质源于可数个几乎必然事件的交集仍是几乎必然事件这一事实。稀疏化性质显而易见。对于位移性质，令 D 表示位移向量的一个上界。设 Φ 是强 (σ,ρ,ν)-球调节的。$\tilde{N}(r) \leq N(r+D) \leq \sigma+\rho(r+D)+\nu(r+D)^2, \mathbb{P}$-几乎必然，这˜表明 Φ 由某个 $(\tilde{\sigma},\tilde{\rho},\nu)$ 球调节。反过来，˛$N(r) \leq N(r+D)$, $\mathbb{P}$-*a.s.*。结合这两个不等式即可证明必要且充分条件。设 Φ 是 τ-空洞˜调控的，即 $\Phi(B(o,\tau)) \geq 1$。那么 $\Phi(B(o,\tau+D)) \geq 1$，因此˜ Φ 是 $\tau+D$-空洞调控的。反向结论可用类似方法证明。注意，这些界是最坏情况界；在已知点过程的其他假设时，可能可以改进这些界。

这些性质有助于推导无线网络模型中的界。例如，叠加性质给出了异构蜂窝网络中的信干噪比界，其中网络的每一层都由某个 $(\sigma,\ \rho,\ \nu)$ 强调节。位移性质与移动性有关。它意味着，经过有限步有界移动后，强调节网络仍保持调节性，但其界可能有所不同。

以下结果给出了球调控点过程的局部调节性，并说明在缺乏球调节时散粒噪声的无界性。

引理1 (局部有界性)。平稳点过程 Φ是强球调节的，当且仅当存在常数$H > 0$ 和 $K < \infty$，使得 $\Phi(b(o,\ H)) \leq K$, $\mathbb{P}$-几乎处处。s。

证明。对于必要性条件，我们知道存在一个 (σ,ρ,ν) 三元组，使得 Φ 是 (σ,ρ,ν)-球调控的。任取 $H > 0$，并令 $K = \sigma + \rho H + \mu H^2$。根据定义 1，$\Phi(b(o,H)) \leq K$，$\mathbb{P}$-几乎处处。对于充分性条件，令 ϕ表示强度为 $2/(3\sqrt{3}H^2)$ 的中心化确定性三角格。对于所有 $r \geq 0$，$\mathrm{S}_{y\in\phi\cap b(o,r)} b(y,H)$ 是 $b(o,r)$ 的有限覆盖。我们有 $\Phi(b(o,r)) \leq \Phi\left(\mathrm{S}_{y\in\phi\cap b(o,r)} b(y,H)\right) \leq \mathrm{P}_{y\in\phi\cap b(o,r)} \Phi(b(y,H)) \leq K\phi(b(o,r))$, $\mathbb{P}$-几乎处处。最后一步依据以下事实：根据平稳性，$\mathbb{P}(\Phi(b(y,H)) \leq K) = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}^2$，并且若有限个事件各自几乎必然成立，则它们的交集也几乎必然成立。容易看出，对于所有 $r > 0$, $\phi(b(o,r))$ 有一个关于 r 的确定性二次多项式上界。这证明了 (σ,ρ,ν) 三元组的存在性。□

该引理给出了一种以局部排斥实现球调节的构造性方法。例如，硬核距离为 $H > 0$ 的硬核点过程是指任意半径为 $2H$的圆盘内都不会同时存在两个点的点过程。由引理1可立即推出，硬核点过程是带有 $K = 1$的球调节点过程。特别地，任何平稳格都是球调节的。这些例子将在下一小节中汇总。

引理2. 设 Φ 是一个平稳点过程。设$l: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 非负、非递增，且本质支撑非空。若 Φ 不是强球调节的，则 $\mathrm{P}_{x\in\Phi} l(\mathrm{k}x\mathrm{k})$几乎必然无法从上方有界。

证明。选择 $\epsilon > 0$，使得 $R(\epsilon) \triangleq \sup\{r: l(r) \geq \epsilon\} > 0$。由于 Φ 不是强球调节的，根据引理1，

表 I 一些常见点过程的强调节性质。

平稳点过程	球调节	空洞调节
PPP	x	x
内曼-斯科特簇过程	x	x
格	✓	✓
扰动格点	✓	✓
Matérn 硬核点过程	✓	x
泊松点过程+格	x	✓

$\Phi(b(o,\ R(\epsilon)))$ 无法被某个常数几乎处处从上界定。因而 $\mathrm{P}_{x\in\Phi} l(\mathrm{k}x\mathrm{k}) \geq \mathrm{P}_{x\in\Phi\cap b(o,\ R(\epsilon))} l(\mathrm{k}x\mathrm{k}) \geq \epsilon\Phi(b(o,\ R(\epsilon)))$ 无法几乎处处被某个常数从上界定。□

该引理表明，球调节是散粒噪声几乎必然有界的充要条件。因此，若不存在球调节，独立同分布标记点过程的条件拉普拉斯变换就不可能几乎必然有界。

C. 示例

本小节汇集了一些示例，用以说明迄今为止给出的定义。

推论1. 泊松点过程既不是强空洞调控的，也不是强球调控的。

证明. 对于任意 $r > 0$, $b(o,r)$ 或 $B(o,r)$ 中的点数服从泊松分布，因此几乎必然无法从上方有界，也无法与 0 保持正距离。由引理1即可得出结论。□

内曼-斯科特簇过程是一种簇过程，其母点过程为泊松点过程，且每个簇的点数是独立同分布的随机变量。很容易证明，该过程既不是球调控的，也不是空洞调控的。

引理 3. 在 $\mathbb{R}^2$ 上，任何硬核距离为 H 的硬核点过程都是强 $(1, 2\pi/(\sqrt{12}H), \pi/(\sqrt{12}H^2))$-球调控的。

证明. 见附录A。 □

只需从平稳泊松点过程中移除少量点，即可使其成为硬核点过程，从而强球调控。由此得到的点过程称为 Matérn 硬核过程。硬核距离为 H 的I型马特恩硬核过程由泊松点过程构造而成：若某个点在距离 $2H$ 内没有其他点，则保留该点，否则将其舍弃。硬核距离为 H 的 II 型 Matérn 硬核过程由泊松点过程构造而成，其中为每个点关联一个独立的随机标记；若某点的距离 $2H$ 内没有标记比它更大的点，则保留该点。密度更高的硬核点过程可通过序贯抑制过程实现。

例 1（Matérn 硬核过程）。Matérn 硬核过程因具有硬核性质而属于强球调节过程。由于稀疏化性质，且泊松点过程并非强空洞调节过程，它们也不是强空洞调节过程。

根据叠加性质，有限个 Matérn 硬核点过程的叠加仍然是球调控的（但不一定具有硬核性质）。

例 2（格与受扰动的格）。格既是强球调节的，也是强空洞调节的。根据位移性质，具有有界位移的独立受扰动格也具有强空洞调节性和球调控性。

例 3（泊松点过程与格的叠加）。泊松点过程与格的叠加具有强空洞调节性，但不具有强球调节性。这是由叠加性质得出的。

例 4（簇过程）。设 Φ_{p} 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的平稳点过程，且 $\{\Phi_x\}_{x\in\Phi_{\mathrm{p}}}$ 是一族几乎必然有界、分布于有界球中的点集。令簇点过程为 $\Phi = \mathrm{S}_{x\in\Phi_{\mathrm{p}}}\{x + \Phi_x\}$。若 Φ_{p} 具有强球调节性，则 Φ 也具有强球调节性。

表 I 总结了各示例中讨论的强调控性质，其中“+”表示叠加。

D. 极值调控参数

令 $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^3$ 定义为 $\mathrm{D} \triangleq \{z \in \mathbb{R}^3 : \Phi$ 具有 $z-$ 球调控性$\}$。D 是与 Φ 的球调控性质相关联的调控参数集合。D 是凸的且无界。为说明这一点，设 Φ 具有强 $(\sigma_1, \rho_1, \nu_1)$-球调节性，并具有 $(\sigma_2, \rho_2, \nu_2)$-球调节性。容易证明，对所有 $p \in [0,1]$、$p(\sigma_1, \rho_1, \nu_1) + (1-p)(\sigma_2, \rho_2, \nu_2) \in \mathrm{D}$, $\forall p \in [0,1]$，这说明了其凸性。其无界性显而易见，因为每个方向都可以无限增大。一个自然产生的问题是 D 的极值参数。这里我们考察两个不同方面：一方面，定义在 D 的每个无穷方向上达到下确界的极值参数；另一方面，联合定义极值三元组。

设 Φ 为一个强球调节过程，D 定义如上。设 σ_c, $\inf\{\sigma : (\sigma,\rho,\nu) \in \mathrm{D},\ \rho,\nu < \infty\}$; ρ_c, $\inf\{\rho : (\sigma,\rho,\nu) \in \mathrm{D},\ \sigma,\nu < \infty\}$; ν_c, $\inf\{\nu : (\sigma,\rho,\nu) \in \mathrm{D},\ \sigma,\rho < \infty\}$。对于非退化点过程，即 $\Phi \neq \emptyset$, $\mathbb{P}$-a.s., $\sigma_c \geq 1$，这反映了接触距离 $\min\{x \in \Phi : \mathrm{k}x\mathrm{k}\}$ 可以任意小这一事实。$\rho_c = 0$，因为总能找到足够大的 σ、ν，使得对所有 $R > 0$, ρR 都被 $\sigma + \nu R^2$上界。ν_c并非平凡量，并且取决于 Φ的分布。稍后我们将证明，一般而言，需要选择 $\rho > 0$ 才能达到 ν_c。对于固定的 l，极值散粒噪声调节为 $\inf_{(\sigma,\rho,\nu)\in\mathcal{D}} A_\ell$。

对于强空洞调控过程，我们将其极值空洞调控参数定义为 τ_c，$\inf\{\tau : \Phi(B(o,\ \tau)) \geq 1,\ \mathbb{P}$-a。s。$\}$。这里，$\tau_c$ 和 ν_c 给出了强球形与空洞调控点过程密度的以下下界和上界，即

$$1/\tau_c^2 \leq \mathbb{E}\Phi(B(o,1)) \leq \nu_c. \tag{6}$$

右侧不等式显而易见。为证明左侧不等式，$\mathbb{E}\Phi(B(o,\ 1)) = \mathbb{E}\Phi(B(o,\ \tau_c))/\tau_c^2 \geq \Phi(B(o,\ \tau_c))/\tau_c^2 \geq 1/\tau_c^2$。式 (6) 表明，强（$\sigma$, ρ, ν）球调节与 τ 空洞调节并非总能同时实现。对于 $\nu < \tau$，无法实现联合调节。当 $\nu_c = \mathbb{E}\Phi(B(o,\ 1))$ 时，$\sigma + \rho r$

上界约束了对于所有 $r > 0$，其附近点数相对于均值的偏差。显然，对于任何强度为 λ 的平稳格， $\nu_c = \lambda\pi$。

一般球调控点过程的极值调控参数可对散粒噪声给出更紧的上界，而散粒噪声与无线网络中的干扰功率有关。我们将通过下面的推广说明，这些上界还可以进一步改进。

E. 强 g-球调控

强（σ， ρ， ν）-球调控基于这样一个上界：用一个二次多项式表示平稳点过程的计数测度。正如引理1所述，所有局部有界的点过程都是球调控的。对于某些点过程，已知存在非多项式形式上界，这些上界虽然是 $O(r^2)$，但渐近地更紧。例如，球内格点数量的上界最早由高斯进行研究，这就是著名的高斯圆问题。对于单位密度的中心化正方格点，高斯证明了 $N(r)-\pi r^2 \le 2\sqrt{2}r$。对于具有平移中心的一般格点，已证明 $N(r)-\pi r^2 = O(r^{2/3})$，当 $r \to \infty$ 时；并猜想对于所有正的 ϵ [20]、 [21]，其为 $O(r^{1/2+\epsilon})$。这促成了对定义 1 的如下推广。令g ： $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为具有可数个间断点的非负广义递增函数，并且当 $r \to \infty$时， $g(r) = O(r^2)$。

定义 5（强 g-球调节）。若对所有 $r \ge 0, N(r) \le g(r)$， $\mathbb{P}$-几乎处处成立，则称平稳点过程 Φ 是强 g-球调控的。。。

由平稳性可知，对所有 $y \in \mathbb{R}^2$， $\Phi(b(y, r))$ 与 $\Phi(b(o, r))$ 同分布。因此，同一个几乎处处上界也适用于 $\Phi(b(y, r))$。一个更强的结果表明，$\mathbb{P}(\cap_{y\in\mathbb{R}^2,\ r\ge 0}\Phi(b(y, r)) \le g(r)) = 1$。正式证明见第三节 B 部分。

定理 3（等价性）。平稳点过程 Φ 是强 g-球调控的，当且仅当对所有非负连续非递增函数l: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 以及所有 $R > 0$,

$$\sum_{x\in\Phi\cap b(o,R)} \ell(\|x\|) \le \int_0^R g(r)\mathrm{d}\ell + \ell(R)g(R),\ \mathbb{P}\text{-a.s.} \qquad (7)$$

证明。将定理 1 的证明中的 $\sigma+\rho r+\nu r^2$ 替换为 $g(r)$即可得到证明。R $g\mathrm{d}l$ 是黎曼–斯蒂尔切斯积分，由于 g 有可数个间断点，该积分存在。□

注 5。对（7）两边取极限 $R \to \infty$，若右端有限，则得到 g-射噪声调节。

备注 6。l 在广义球约束中不需要有界。例如，对于 $l(r) = r^{-\alpha}$， $\alpha > 2$ 只要 $g(r)$ 在原点附近为零，(7) 的右端就存在。这里要求 l 连续，仅仅是为了确保 R$g\mathrm{d}l$存在。只需要求 l 与 g没有共同间断点，就可以放宽这一条件。(σ, ρ, ν)-球调节的性质对 g-球调节同样成立，故此处省略。

III. 弱空间调控

在许多应用中，人们感兴趣的视角仅来自一组特定的观察者，而非整个空间。例如，在认知无线电网络中，存在一组主收发器和一组次收发器。对于前者的强制调控（或保护），可能比从任意位置或次收发器所看到的要求更严格。这促使我们提出“弱空间调控”这一名称。“强—弱”这一术语的含义将在本节末尾变得清楚。弱空间调控建立在 Palm 演算之上，关注的是典型观察者 [15]的视角。

A. 定义

设 Φ 和 Ψ 是定义在同一概率空间 $(\Omega,\mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的两个点过程，它们在 $\mathbb{R}^2$ 上联合平稳且遍历。不失一般性，设 Ψ 为观测者集合， Φ 是从该集合测得的。令 $\mathbb{P}^o_\Psi$、$\mathbb{E}^o_\Psi$ 分别表示 Ψ的 Palm 概率和 Palm 期望。注意，没有任何限制禁止取 $\Psi = \Phi$。

回顾一下， $N(r)$ 计数的是 Φ 中位于 $b(o, r)$ 内的点的数量。令 g : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为非递减函数，且具有可数个间断点，使得当 $r \to \infty$ 时， $g(r) = O(r^2)$ 。

定义 6（弱 g-球调节）。若平稳点过程 Φ 相对于联合平稳点过程 Ψ 满足：对所有 $r \ge 0$， $N(r) \le g(r)$， $\mathbb{P}^o_\Psi$-几乎处处，则称其为（弱） g-球调节的。

注释 7。当调控是相对于观察者点过程指定时，称其为弱意义下的调控。若 Φ 与 Ψ 相互独立，则 $\mathbb{P}^o_\Psi = \mathbb{P}$ [15, 引理 6.3。1], ，由此可得到第二节中的强调控。

如果对于所有 $R > 0$ 以及所有非负且非增函数 l: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，均有 $\mathrm{P}_{x\in\Phi\cap b(o,R)}\, \mathrm{l}(\mathrm{k}x\mathrm{k}) \le \mathrm{R}_0^R g\mathrm{d}l + l(R)g(R)$， $\mathbb{P}^o_\Psi$-几乎处处成立（前提是黎曼–斯蒂尔切斯积分 R $g\mathrm{d}l$ 存在），则称 Φ 关于 Ψ 是 g-散粒噪声调控的。特别地，如果对于所有非负、有界且非增函数 l: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，均有 $\mathrm{P}_{x\in\Phi}\, \mathrm{l}(\mathrm{k}x\mathrm{k}) \le \sigma l(0)+\rho\, \mathrm{R}_0^\infty l(r)\mathrm{d}r+2\nu\mathrm{R}_0^\infty r l(r)\mathrm{d}r$， $\mathbb{P}^o_\Psi$-几乎处处成立，则称 Φ 关于 Ψ 是 (σ, ρ, ν)-球调控的。

推论 2（等价性）。当且仅当平稳点过程 Φ 相对于联合平稳点过程 Ψ 是 g-球调控的，它才是相对于联合平稳点过程 Ψ 的 g-散粒噪声调控过程。

证明。应用定理 3 证明中的技术。 □

定义 7（弱 τ-空洞调节）。如果平稳点过程 Φ 满足 $\Phi(B(o, \tau)) \ge 1$， $\mathbb{P}^o_\Psi$-a。s。，则称其相对于联合平稳点过程 Ψ 是 τ-空洞调控的，其中 $\tau > 0$ 为常数。

注 8。任何平稳点过程都相对于其自身是空洞调控的。

强空间调控的叠加性质对于相对于同一观察者点过程的弱约束也成立。然而，强调控的并非所有性质都能推广到弱调节。例如，若存在某个常数 R， $K > 0$ 使得 $\Phi(b(o, R)) \le K$,

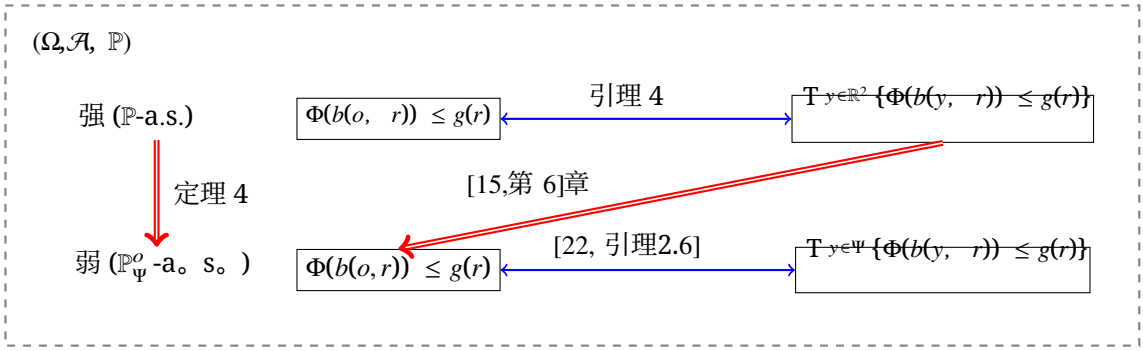


图 1. 强与弱球调控关系的示意图。该图适用于所有 $r > 0$。蓝线表示事件之间的等价性。红色双箭头表示“蕴含”。强与弱空洞调控也有类似结果，此处省略。

$\mathbb{P}^o_\Psi$ -几乎处处（引理1中称为局部有界性）， Φ不一定相对于 Ψ 是球调控的。此外，缺乏弱调节并不意味着脉冲噪声无法具有 $\mathbb{P}^o_\Psi$-几乎处处上界。可以使用具有有界支撑的固定 l 构造此类示例。

B. 与强调控的关系

本小节旨在说明本文所使用的强弱术语。首先，我们论证上述根据以 o 为中心的球的性质所定义的强调控，实际上是一个在整个空间中都成立的性质。

引理 4. 对于所有固定的 $l \in \mathbb{N}$ 和 $r > 0$，集合 $\mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2}\{\Phi(b(y, r) \le l\}$ 是 A 的一个事件。集合 $E_\Phi = \mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2, r\ge 0}\{\Phi(b(y,r)) \le g(r)\}$ 也是 A 的一个事件。此外，$\mathbb{P}(E_\Phi) = 1$ 当且仅当对于所有 $r \ge 0$， $\mathbb{P}(\Phi(b(o,r)) \le g(r)) = 1$。

证明。 见附录 B。 □

引理 5. 集合 $V_\Phi = \mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2}\{\Phi(B(y,\tau)) \ge 1\}$ 是 A 的一个事件。此外， $\mathbb{P}(V_\Phi) = 1$ 当且仅当 $\mathbb{P}(\Phi(B(o,\tau)) \ge 1) = 1$。

证明。 参见附录 C。 □

注意，事件 $\mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2}\{\Phi(b(y, r) \le l\}$，$E_\Phi$ 和 V_Φ 都是 $\{\theta_t\}$-不变的 [15, 第 6] 章；这类事件在 $\mathbb{P}^o_\Psi$-几乎必然意义下成立。，当且仅当它们在 $\mathbb{P}$-几乎必然意义下成立。

定理 4（强与弱）。设 Φ， Ψ 是两个联合平稳的点过程。

1）如果 Φ 是强 g-球调控的，那么对于所有联合平稳的点过程 Ψ、 Φ，相对于 Ψ， Φ 都是弱 g-球调控的；如果 Φ 相对于某个 Ψ 是弱 g-球调控的，则不一定是强 g-球调控的。2）如果 Φ 是强 τ-空洞调控的，那么对于所有联合平稳的点过程 Ψ、 Φ，相对于 Ψ， Φ 都是弱 τ-空洞调控的；如果 Φ 相对于某个 Ψ 是弱 τ-空洞调控的，则不一定是强 τ-空洞调控的。

证明。 对于 1) 的第一条结论，由引理 4 可知，若 Φ 是强 g-球调控的，则 $\mathbb{P}(E_\Phi) = 1$。接着可知根据 E_Φ 的 $\{\theta_t\}$-不变性， $\mathbb{P}^o_\Psi(E_\Phi) = 1$，这意味着弱 g-球调节。对于第二条结论，只需给出以下反例：设 Φ 为一个单位密度的平稳正方晶格。设 $\Psi = \Phi_{[1/2,0]}$ 为观察者点过程，它是将 Φ 沿向量 $(1/2, 0)$ 平移得到的。考虑相对于 Ψ的观察者 (σ, ρ, ν)-球调节： $\sigma = 0$ 属于该观察者点过程的调控参数集合。相比之下，相同的参数无法调控 Φ。

2）的第一个陈述由引理 5、 V_Φ的$\{\theta_t\}$不变性，以及 $\mathbb{P}^o_\Psi(V_\Phi) = 1$ 蕴含弱空洞调节这一事实得出。对于第二个陈述，令 Φ 为平稳泊松点过程，且 $\Psi = \Phi_{[1/2,0]}$。那么 Φ 相对于 Ψ 是 1/2-空洞调节的，但并非强空洞调节。□

图 1 展示了与强弱 g-球调节相关的关键要素及其关系。该结论适用于所有 $r > 0$。空洞调节也存在类似关系。

IV. 设备到设备双极网络中的性能保证

A. 系统模型

设设备到设备（D2D）双极网络 [17] 中的发射机位置由定义在概率空间（Ω， A， $\mathbb{P}$）[4]上的平稳遍历点过程 Φ 建模，其中 $\mathbb{R}^2$。每个发射机都有一个专用接收机，二者相距固定距离 $\tau > 0$ ，方向均匀随机。由此得到的接收机点过程记为 Ψ，它与 Φ联合平稳且遍历。我们关注典型 D2D 链路（发射机-接收机偶极子），其中接收机位于原点，其专用发射机记为 $t \in \Phi$。根据第二节中的位移性质， Φ 和 Ψ 要么都经过强球（空洞）调节，要么都未经过球（空洞）调节。此外，根据模型的构造， Φ 相对于 Ψ 是弱 τ-空洞调节的（反之亦然）。

我们首先考虑所有链路始终处于活动状态的情况，即所有发射机均处于满缓冲状态。这一假设给出了最坏情况界。排队方面将在

[4]粗略地说，遍历性意味着点过程的一次单独实现就包含了全部统计信息。平稳性和遍历性使我们只需模拟网络的一次大型空间实现。

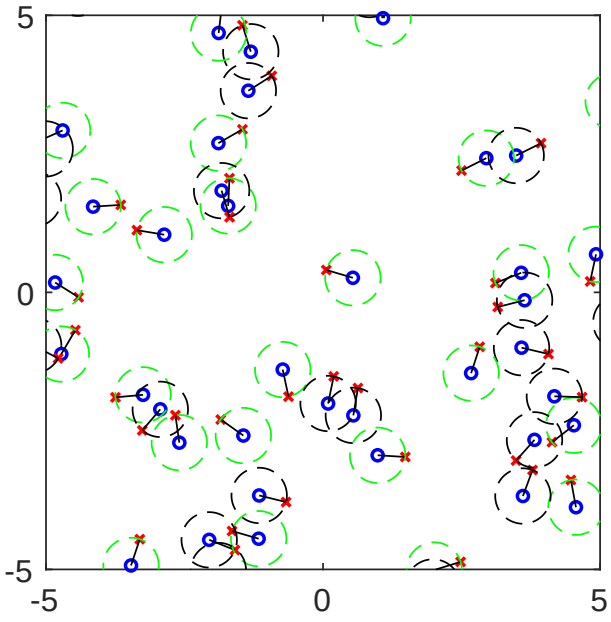


图 2. D2D 双极网络示意图，$\tau = 0.5$。蓝色圆圈表示由强度为 0.5 的泊松点过程模拟得到的发射机位置，红色叉号表示接收机位置。虚线圆圈表示以发射机为中心、半径为 0.5 的保护区。通过对泊松点过程进行稀疏化以获得 II 型 Matérn 硬核过程后，仅保留带有绿色保护区的发射机。

上一小节中讨论。不失一般性，我们假设带宽归一化为 1。假设路径损耗是距离的函数，记为 $l: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$。我们假设$l$有界、非递增、连续，且在$\mathbb{R}^2$上可积，即 $\int_0^\infty l(r) r \mathrm{d}r < \infty$。如备注 6 所述，对于 g-球调节而言，l 有界并非严格必要。不失一般性，令 $l(0) = 1$。令 W 表示加性白高斯噪声的方差。用h_x 表示从 $x \in \Phi$ 到原点的小尺度衰落功率。分别用 f_h、F_h 和 L_h 表示随机变量h的概率密度函数、累积分布函数和拉普拉斯变换。假设衰落$\{h_x\}_{x\in\Phi}$ 独立同分布，均值为 1，且满足指数矩条件（定义 3）。我们的框架很容易推广到包含阴影效应的系统模型，但此处不作讨论。

图 2 展示了一个 D2D 双极网络，其中原始发射机服从泊松点过程分布，该过程不受球调控；保留的发射机则服从 II 型 Matérn 硬核过程，该过程受球调控。后者通过对前者进行稀疏化实现。

B. 性能指标

原点处的信干噪比为

$$\mathrm{SINR} = \frac{h_t \ell(\tau)}{I_t + W},$$

其中 $\|t\| = \tau$ and $I_t = \sum_{x\in\Phi\setminus\{t\}} h_x l(\|x\|)$ 是接收干扰总功率。对于目标信干噪比阈值 $\theta > 0$，链路可靠性定义为

$$P_{\mathrm{s}}(\theta) \triangleq \mathbb{P}^o_\Psi(\mathrm{SINR} > \theta \mid \Phi).$$

随机变量 $P_{\mathrm{s}}(\theta) \in [0,1]$ 表示在给定发射机位置的条件下，衰落环境中典型接收机的可靠性。与 $P_{\mathrm{s}}(\theta)$ 相关的分布称为元分布 [6], ，它表示网络中链路可靠性高于 x 的链路比例，其中目标信干噪比阈值为 θ。对于某些点过程（例如泊松网络），该比例严格小于 1，其渐近特性已为人所知 [6], [7]。将干扰视为噪声时的链路遍历速率为

$$C \triangleq \mathbb{E}^o_\Psi[\log(1 + \mathrm{SINR}) \mid \Phi],$$

该值对衰落取平均（单位为 [纳特/秒/赫兹]）。

这里关注的情形是 $P_{\mathrm{s}}(\theta)$ 和 C 几乎处处有下界，即所有链路均达到一定的链路可靠性和遍历速率。请注意，前者意味着后者。

定义 8（链路性能界）。对于目标信干噪比阈值 θ，若 x 是所有链路的可靠性下界，则 $\mathbb{P}^o_\Psi(P_{\mathrm{s}}(\theta) > x) = 1$。若 x 是所有链路的遍历速率下界，则 $\mathbb{P}^o_\Psi(C \geq x) = 1$。

C. 无衰落

在不存在衰落的情况下，链路性能由网络几何结构决定。这是一个退化情形，其中链路可靠性 $P_{\mathrm{s}}(\theta) \in \{0,1\}$。总干扰就是由 Φ 相对于 Ψ 生成的散粒噪声的 Palm 版本，但不包括专用发射机 t 产生的散粒噪声。回顾注释 1，$A_\ell = \sigma l(0) + \rho \int_0^\infty l(r)\mathrm{d}r + 2\nu \int_0^\infty r l(r)\mathrm{d}r$。

推论 3。若 Φ 相对于 Ψ 是 (σ,ρ,ν)-球调控的，且不存在衰落，

$$I_t \leq A_\ell - \ell(\tau), \quad \mathbb{P}^o_\Psi\text{-a.s.} \tag{8}$$

链路信干噪比的下界为$l(\tau)/(A_\ell - l(\tau) + W)$，$\mathbb{P}^o_\Psi$-a.s.，且遍历速率的下界为 $\log\left(1 + l(\tau)/(A_\ell - l(\tau) + W)\right)$，$\mathbb{P}^o_\Psi$-a.s.

证明。由于 Φ 相对于 Ψ是 (σ, ρ, ν)-球调控的，根据定义 2，有 $\sum_{x\in\Phi} l(\|x\|) \leq A_\ell$，$\mathbb{P}^o_\Psi$-a.s。然后由以下事实可得：$I_t = \sum_{x\in\Phi\setminus\{t\}} l(\|x\|) = \sum_{x\in\Phi} l(\|x\|) - l(\tau)$。 □

注 9。如果对 Φ没有空间调控，例如当 Φ 为泊松点过程（PPP）时，则不存在上述几乎处处界。

例 5。考虑 $l(r) = \min\{1, r^{-\alpha}\}$，$\alpha > 2$。如果 Φ是 (σ, ρ, ν)-球强调控的，根据强-弱关系，

$$I_t \leq \sigma + \rho\alpha/(\alpha - 1) + \nu\alpha/(\alpha - 2) - \min\{1, \tau^{-\alpha}\}, \ \mathbb{P}^o_\Psi\text{-a.s.}$$

对于硬核距离为 $H = 1$、$\alpha = 4$ 和 $\tau = 1$的硬核点过程，只需将其代入引理 3 中的 $(\sigma,\rho,\nu) = (1, 2\pi/\sqrt{12}, \pi/\sqrt{12})$ 即可。

D. 有衰落

1) 干扰界：有衰落时，即使 Φ 相对于 Ψ 是球调控的，给定 Φ 的总干扰功率通常也无法获得几乎处处上界，因为衰落的支撑集可能无界。不过，可以利用经典不等式对其尾部分布进行界定。

推论 4（马尔可夫界与切比雪夫界）。如果 Φ 相对于 Ψ 是 (σ, ρ, ν)-球调控的，那么 $\mathbb{P}^o_\Psi$-几乎处处，$\mathbb{P}^o_\Psi(I > x \mid \Phi) \le (A_\ell - l(\tau))/x$，并且 $\mathbb{P}^o_\Psi(|I - \mathbb{E}[I \mid \Phi]| > x \mid \Phi) \le (\mathbb{E}h^2 - 1)(A_{\tilde{\ell}} - \tilde{l}(\tau))/x^2$，其中 $\tilde{l} = l^2$。

证明。第一个不等式由以下事实以及马尔可夫不等式得出：$\mathbb{E}[I \mid \Phi] = \mathrm{P}_{x\in\Phi\setminus\{t\}} l(\mathrm{k}x\mathrm{k}) \le A_\ell - l(\tau)$，该事实来自推论 3。对于第二个不等式，给定 Φ 时 I 的条件方差为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^o_\Psi\left[\left(\sum_{x\in\Phi\setminus\{t\}}(h_x-1)\ell(\|x\|)\right)^2 \;\middle|\; \Phi\right]\\ &\overset{(a)}{=}\sum_{x\in\Phi\setminus\{t\}}\mathbb{E}\left[(h_x-1)^2\right]\ell^2(\|x\|)\\ &=\left(\mathbb{E}[h^2]-1\right)\sum_{x\in\Phi\setminus\{t\}}\tilde{\ell}(\|x\|).\end{aligned}$$

步骤 (a) 由衰落与 $\mathbb{E}h = 1$ 的独立性假设得出。接着，由切比雪夫不等式、l^2 有界且非递减这一事实，以及 Φ 相对于 Ψ是 (σ, ρ, ν)-受控散粒噪声，便可得到结论。□

推论 5。对于第 IV-A 节所述的 D2D 双极模型，若 Φ 相对于 Ψ 是 (σ, ρ, ν)-球调控的，则存在 $\exists s^* > 0$，使得对于 $s \in [0, s^*)$，$\mathrm{L}_{I|\Phi}(-s) \le \exp\left(A_{\tilde{\ell}} - \tilde{l}(\tau)\right)$，$\mathbb{P}^o_\Psi$-a.s.，其中 $\tilde{l}(r) = \log \mathrm{L}_h(-sl(r))$。

证明。由定理 2 可得。□

如果 Φ 不是球受控的，那么 $\mathbb{E}[\exp(sI) \mid \Phi]$ 不能被 $\mathbb{P}^o_\Psi$几乎处处上界。因此，带衰落的干扰的拉普拉斯变换不能被 $\mathbb{P}^o_\Psi$ 几乎处处上界。一个这样的例子是泊松点过程。

例 6。对于独立同分布的中上-m 衰落，$\mathrm{L}_h(-s) = (1 - s/m)^{-m}$，且 $s^* = m$。当$l(r) = \min\{1, r^{-\alpha}\}$时，$\alpha > 2$，

$$\begin{aligned}A_{\tilde{\ell}} = m\log\frac{1}{(1-s/m)^\sigma} &+ \frac{\alpha\rho s\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha},1;2-\frac{1}{\alpha};\frac{s}{m}\right)}{\alpha-1}\\ &+\frac{\alpha\nu s\ {}_2F_1\left(1-\frac{2}{\alpha},1;2-\frac{2}{\alpha};\frac{s}{m}\right)}{\alpha-2},\end{aligned}$$

其中 ${}_2F_1$ 是超几何函数，可以通过数值方法高效计算。

推论 6（切尔诺夫界）。令$l(r) = \log \mathrm{L}_h(-sl(r))$。如果 Φ 是(σ, ρ, ν)-球调控的，那么

$$\mathbb{P}^o_\Psi(I > x \mid \Phi) \le \exp\left(\inf_{s\in[0,s^*)} -sx + A_{\tilde{\ell}} - \tilde{\ell}(\tau)\right),\ \mathbb{P}^o_\Psi\text{-a.s.} \quad (9)$$

证明。对于$\forall s \ge 0$，$\mathbb{P}^o_\Psi(I > x \mid \Phi) = \mathbb{P}^o_\Psi(\exp(sI) > \exp(sx) \mid \Phi) \le \exp(-sx)\mathrm{L}_{I|\Phi}(-s)$。然后，式（9）由推论 5 得出，并对 s上的指数项取最小值。□

(9) 右端中的指数称为勒让德变换。如果它关于 s 可微，则可以通过求导来求解。

2) 性能保证：

定理 5（所有链路的可靠性下界）。如果 Φ 关于 Ψ 是 (σ, ρ, ν)- 球调控的，且衰落满足指数矩条件，那么对于任意 $\theta > 0$，链路可靠性都有下界。此外，$P_{\mathrm{s}}(\theta) \ge \zeta(\theta)$，$\mathbb{P}^o_\Psi$-a。s。，其中 $\zeta(\theta)$ 是以下确定性函数：

$$\zeta(\theta) \triangleq \int_{\frac{W\theta}{\ell(\tau)}}^{\infty} f_h(x)\left(1 - e^{\inf_{s\in[0,s^*)} A_{\tilde{\ell}} - \tilde{\ell}(\tau) - s\left(x\ell(\tau)\theta^{-1} - W\right)}\right)^+ \mathrm{d}x, \quad (10)$$

且 $\tilde{l}(r) = \log \mathrm{L}_h(-sl(r))$。此外，对于任意 $\epsilon > 0$、$\exists\delta > 0$，只要所有链路在 $\theta \le \delta$时均达到可靠性 $1 - \epsilon$。

Proof. See Appendix D. □

注释 10 (一般性)。定理 5 适用于所有 (σ, ρ, ν)-球调控点过程（强球调控或相对于 Ψ），无论其分布如何。对于信道模型，它适用于所有有界且非递增的路径损耗函数以及衰落统计，包括瑞利、莱斯和中上分布。

定理 5 证明了所有链路均具有下界的超高可靠性。$\zeta(\theta)$ 可通过数值方法高效计算。对于中上衰落且 $l(r) = \min\{1, r^{-\alpha}\}$，可通过对指数求导找到其下确界。

定理 6。对于瑞利衰落，如果 Φ 相对于 Ψ 是 (σ, ρ, ν)-球调控的，则

$$P_{\mathrm{s}}(\theta) \ge \exp\left(-\frac{\theta W}{\ell(\tau)}\right)\exp\left(-A_{\tilde{\ell}} + \tilde{\ell}(\tau)\right),\quad \mathbb{P}^o_\Psi\text{-a.s.}, \quad (11)$$

其中 $\tilde{l}(r) = \log(1 + \theta l(r)/l(\tau))$。

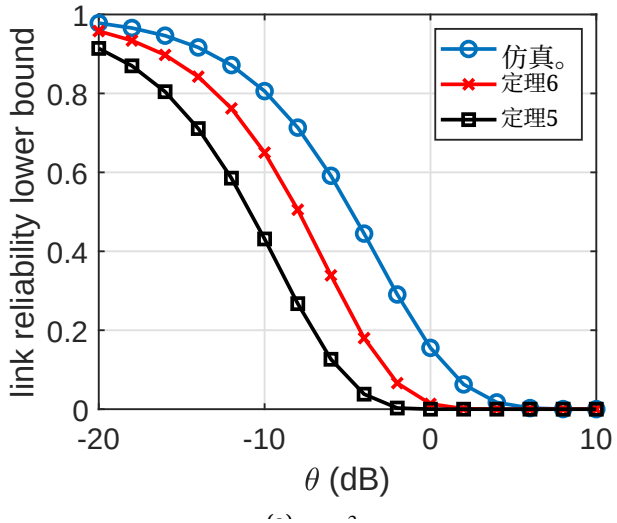
证明。

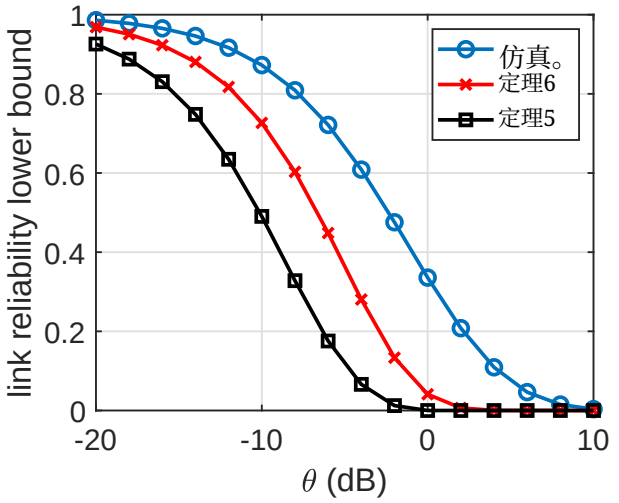
$$\begin{aligned}P_{\mathrm{s}}(\theta) &\overset{(a)}{=} \mathbb{E}^o_\Psi\left[\exp\left(-\frac{\theta(I+W)}{\ell(\tau)}\right)\;\middle|\;\Phi\right]\\ &\overset{(b)}{=}\exp\left(-\frac{\theta W}{\ell(\tau)}\right)\prod_{x\in\Phi\setminus\{t\}}\frac{1}{1+\theta\ell(\|x\|)/\ell(\tau)}\\ &=\exp\left(-\frac{\theta W}{\ell(\tau)}\right)\exp\left(-\sum_{x\in\Phi\setminus\{t\}}\log(1+\theta\ell(\|x\|)/\ell(\tau))\right).\end{aligned}$$

步骤 (a) 根据瑞利衰落的互补累积分布函数得出。步骤 (b) 根据衰落的独立性假设以及瑞利衰落的分布得出。最后，$l(r) = \log(1 + \theta l(r)/l(\tau))$ 是单调不增且有界的。因此，对于关于 Ψ 的 (σ, ρ, ν)-受控点过程，我们通过应用干扰上界证明该定理。□

定理 6 给出了瑞利衰落这一特殊情况下 $P_{\mathrm{s}}(\theta)$ 的几乎处处下界的显式公式。根据式（11）右端表达式关于 θ 的严格单调性和连续性，我们可以对式（11）的右端求反，从而得到实现任意高目标可靠性所需阈值信干噪比的下界。特别地，对于 $l(r) = \min\{1, r^{-\alpha}\}$，

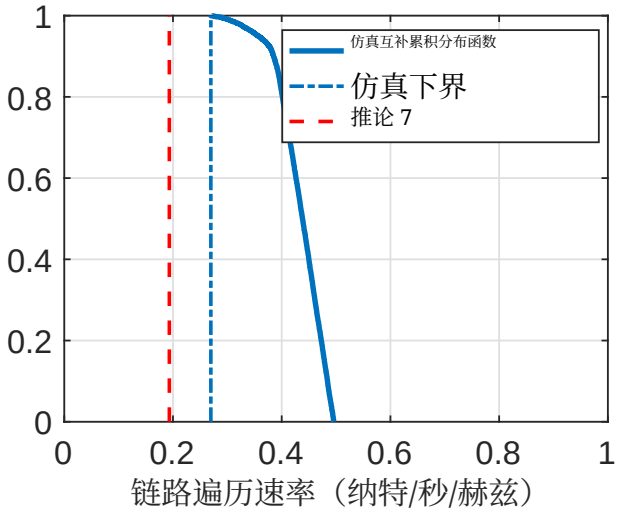
$$\begin{aligned}A_{\tilde{\ell}} = \log\frac{\left(1+\frac{\theta}{\ell(\tau)}\right)^\sigma}{1+\theta} &+ \frac{\alpha\rho\theta\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha},1;2-\frac{1}{\alpha};-\frac{\theta}{\ell(\tau)}\right)}{(\alpha-1)\ell(\tau)}\\ &+\frac{\alpha\nu\theta\ {}_2F_1\left(1-\frac{2}{\alpha},1;2-\frac{2}{\alpha};-\frac{\theta}{\ell(\tau)}\right)}{(\alpha-2)\ell(\tau)} + \tilde{\ell}(\tau).\end{aligned} \quad (12)$$



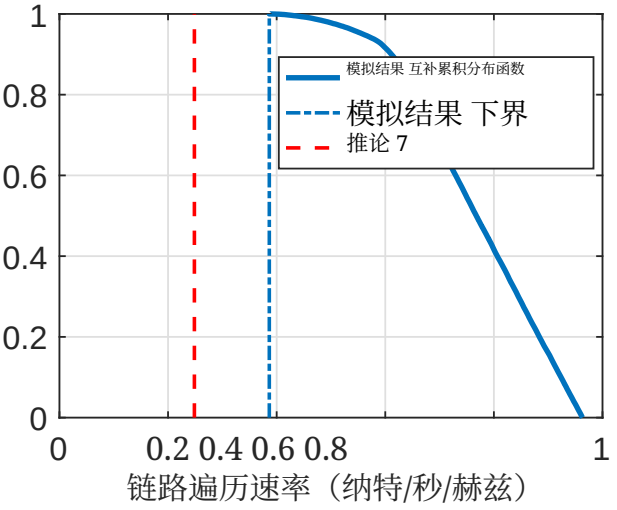


(b) $\alpha = 4$。

图 3. Φ 为具有 $H = 1$的三角晶格时，双极网络中链路可靠性的下界。$W = 0$，$l(r) = \min\{1, r^{-\alpha}\}$，$\tau = 1$，瑞利衰落。解析下界由定理6和定理5得到，其中$A_{\tilde{\ell}} - \tilde{l}(\tau)$由式（12）给出，$\sigma = 1$，$\rho = 2\pi/\sqrt{12}$，$\nu = \pi/\sqrt{12}$ 由引理 3 得到。仿真下界基于 500,000 次实现得到。



(a) $\alpha = 3$。



(b) $\alpha = 4$。

图 4. 偶极网络中链路遍历速率的下界和互补累积分布函数。解析下界通过推论 7（使用定理 6 中的界）得到。设置和参数与图 3 相同。

在图 3 中，我们绘出了推导得到的下界与仿真下界的对比，其中 Φ 是硬核距离为 1 的平稳三角晶格，且 $l(r) = \min\{1, r^{-\alpha}\}$，其中 $\alpha = 3, 4$。这里我们选择三角晶格，以便较准确地估计最坏情况下的可靠性。对于具有相同硬核距离的 Matérn硬核点过程，同样的几乎处处界也成立；但极端情况很少发生，因此更难准确仿真。统计界的分析留待未来工作。(σ, ρ, ν)-球调节参数见引理 3。纵向间隔表示所提出的解析表征与仿真结果之间最坏情况下链路可靠性的差异。横向间隔表示为实现给定目标可靠性，推导得到的信干噪比阈值与仿真得到的信干噪比阈值之间的差异。对于高于 0.7 的目标可靠性，仿真结果与定理 6 之间的横向间隔小于 4 dB。通过横向间隔衡量的 $\alpha = 3$ 界为略紧于 $\alpha = 4$ 的界。

推论 7（所有链路的遍历速率下界）。若 Φ 相对于 Ψ 是 (σ, ρ, ν)- 球调控，则遍历速率的下界为 $\mathrm{R}_0^{\infty} \exp\left(-\zeta\left(e^t - 1\right)\right)\mathrm{d}t$，$\mathbb{P}_{\Psi}^{o}$-a。s.，其中 $\zeta(\cdot)$ 在定理 5 中定义。令 $\tilde{l}(r) \triangleq \log(1 + (e^t - 1)\, l(r)/l(\tau))$。对于瑞利衰落，我们有

$$C \geq \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(e^t - 1)W}{\ell(\tau)}\right) \exp\left(-A_{\tilde{\ell}} + \tilde{\ell}(\tau)\right) \mathrm{d}t, \ \mathbb{P}_{\Psi}^{o}\text{-a.s.} \quad (13)$$

证明。有衰落时，

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}_{\Psi}^{o}(\log(1 + \mathrm{SINR}) > t \mid \Phi)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}_{\Psi}^{o}(\mathrm{SINR} > e^t - 1 \mid \Phi)\mathrm{d}t. \end{aligned} \quad (14)$$

其余部分由定理 5 和定理 6 中的可靠性下界推出。□

图 4 绘出了推论 7 中的解析下界（使用定理 6 中的界）与链路遍历速率的仿真下界的对比，其中参数与图 3 中的相同。 $\alpha = 3$ 和 $\alpha = 4$ 对应的仿真下界与解析下界之间的差距分别为 0.07 和 0.148（纳特/秒/赫兹）。

E. 设备到设备网络中的无线队列

空间网络演算与经典网络演算相结合，可为无线排队系统中的所有队列同时提供性能保证。此前，随机网络演算已通过构建基于信干噪比的服务曲线 [8], [23], 用于研究无线队列的性能。对于大型无线网络， [8]分析泊松双极网络中无线队列的时延。由于泊松网络中缺乏空间约束，网络中只有一部分（严格子集）链路能够获得稳定性和性能保证 [24]。

考虑与链路相关联的可数个队列，每个队列都具有无限缓冲区，并采用先进先出（FIFO）调度。业务流量按照强度为 $\lambda > 0$ 的时间平稳遍历点过程到达发射机，经无线链路服务，并在接收机成功解码后离开队列。每个队列的服务过程取决于其无线链路的性能。我们假设干扰队列处于满缓冲状态，这是一种保守的假设。另一个重要问题是如今将衰落视为时间序列。令 $h_x(t)$ 表示时刻 t 从 $x \in \Phi$ 到原点的衰落。在给定 Φ 的条件下，时间衰落过程 $\{h_x(t)\}_t$ 相对于 $x \in \Phi$ 假设为具有指数矩的独立同分布，这与上述假设一致。主要的附加假设是，对于所有固定的 x，时间序列 $h_x(t)$ 都是遍历的。一个简单的例子是，该时间序列为混合马尔可夫链，其稳态分布与上述所考虑的分布相同（例如中上分布）。

定理 7。设 Φ 为表示双极网络中发射机位置的平稳遍历空间点过程。若 Φ 相对于 Ψ是 (σ, ρ, ν)-球调控的，则

1）在无衰落的情况下，若每个队列的业务到达是 (σ^*, ρ^*)-调控的，且 $\rho^* < \log\left(1 + l(\tau)^{A_\ell - l(\tau) + W}\right)$，则每个队列的队列长度和时延均有上界；2）在存在具有指数矩的遍历衰落时，存在一个阈值 $\rho^* > 0$，使得当 $\lambda < \rho^*$时，网络中的所有队列均稳定，时延的尾部分布有上界，队列长度的尾部分布也有上界。

若 Φ 相对于 Ψ不是球受控的，无论是在无衰落还是有衰落的情况下，都有非零比例的队列不稳定。链路级时延和队列长度的尾部分布无法得到上界。

证明略。关于时延尾部分布上界存在性的论述源自 Loynes 定理 [25]，并利用了有关衰落时间序列和到达点过程的时间遍历性假设。以下离散时间示例展示了这一结果的特性。

示例 7（离散时间队列中的时延随机界）。本例旨在说明，仅通过空间调控（即不进行时间调控，且存在相干时间较短的衰落）可以获得怎样的排队时延随机界。例中考虑一个存在瑞利衰落的设备到设备网络，其中每条链路都配备了一个无限缓冲区先进先出队列。时间按时隙划分。每个队列中的分组到达过程在各时隙间独立同分布，且每个时隙的到达数据包数量在整数上的分布为 X。在给定时隙，若某个队列队首数据包所在位置和时刻的信干噪比超过阈值 θ，则该数据包成功传输（得到服务）；否则，该数据包留在队首，并在下一时隙再次尝试，直至传输成功。最简单的情形是时隙时长与衰落的相干时间处于同一量级。此时，每个队列在不同时间隙经历的衰落均为独立同分布。在瑞利衰落情况下，给定发射机点过程时，典型队列中的成功概率条件值有一个下界，该下界是定理 5 中给出的常数。因此，每个队列的平稳时延在随机意义上不超过这样一个离散时间队列的时延：其到达过程独立同分布，分布为 X；服务过程为独立同分布的伯努利服务过程，成功概率为常数 $\zeta(\theta)$。此类队列的平稳队列长度和时延分布已通过生成函数技术得到广泛研究，并已知其关于 X 和 $\zeta(\theta)$ [26] 的闭式表达。

最后一个示例的结果可以扩展到更复杂的场景（例如，用时隙间衰落的混合马尔可夫演化代替独立同分布假设）。关于平稳队列尾部衰减，已有大量广为人知的计算结果 [27], ，其研究始于 W. Feller 对 GI/GI/1 队列的开创性工作，涵盖离散时间队列和流体队列。尽管这些结果与最后一个定理所考虑的无线场景完全相关，我们仍不在此处进行回顾。

小尺度衰落的遍历性是所有队列稳定的必要条件。缺乏这种遍历性时，无线链路可能由于持续的不良衰落而长期维持任意低的速率，从而导致一部分队列不稳定。

V. 自组网络中的性能保证

A. 系统模型

设 Φ 是定义在概率空间（$\mathbb{R}^2$ Ω,A, $\mathbb{P}$）上的平稳点过程，用于描述收发器的位置。根据第二 III-B 节中的强弱调节关系，如果 Φ 是强球形（空洞）调节的，那么相对于其自身，它也是弱球形（空洞）调节的。

我们假设，如果节点 x 接收到的信干噪比足够大，则节点 x 可以向节点 y 传输数据。如上所述，l： $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 表示路径损耗函数，该函数仅取决于链路长度，有界、非递增且在 $\mathbb{R}^2$上可积。 W 表示

加性白高斯噪声的方差。这里，我们用h_{xy}表示从节点 x 到节点 y 的衰落，并假设衰落随机变量$\{h_{xy}\}_{x,y\in\Phi,x\neq y}$ 是具有指数矩的独立同分布随机变量。在节点 y 处测得的链路 $x \to y$的信干噪比为

$$\mathrm{SINR}_{xy} \triangleq \frac{h_{xy}\ell(\|x-y\|)}{I+W},$$

其中，$I = I_{x,y}$，$\mathrm{P}_{z\in\Phi\setminus\{x,y\}} h_{z}l(\mathrm{k}z-y\mathrm{k})$ 是 y 处接收到的总干扰功率。

对于预设信干噪比阈值 θ，Φ 的信干噪比图是一个随机图，其节点为 Φ 的原子；若在 Φ 中，x 与 y 之间存在一条边，则 $\mathrm{SINR}_{xy} > \theta$ 且 $\mathrm{SINR}_{yx} > \theta$ [16],[17]。如果 Φ 渗流 的阈值为 θ，则称其信干噪比图发生渗流。若在 Φ 的 Palm 概率下，存在一个 $\tau > 0$ 和 Φ 中的点 $\{x_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$，使得

1) $x_{0,0} = (0,0)$，且对于所有 $i \in \mathbb{Z}$, $x_{i,j}$ 都属于以 $(2i\tau, 2j\tau)$ 为中心、边长为 2τ 的正方形；2) $x_{i,j}$ 与 $x_{i\pm1,j}$ 之间存在一条边，且 $x_{i,j}$ 与 $x_{i,j\pm1}$ 之间存在一条边，对于所有 $i,j \in \mathbb{Z}$ 均成立。

注意，信干噪比图中存在这样的信干噪比骨干网络，意味着该图会发生渗流。

B. 信干噪比图渗流

若 Φ 是强（σ，ρ，ν）球调控的，且是强 τ空洞调控的，则

1）在不存在衰落的情况下，原点处的干扰几乎必然有上界 $\mathbb{P}^o_\Phi \mathrm{l}(\tau)$。从距 o最近的节点出发，将干扰视为噪声时的链路速率下界为 $\log\left(1+\mathrm{l}(\tau)\, A_\ell - \underline{\mathrm{l}(\tau)+W}\right)$，几乎必然成立；2）若衰落具有指数矩，则干扰的条件拉普拉斯变换几乎必然有上界 $\tilde{\quad}\quad\tilde{}$，其上界为 $\exp(A_{\tilde{\ell}} - \mathrm{l}(\tau))$，其中 $\mathrm{l}(r) = \log \mathrm{L}_h(-s\mathrm{l}(r))$。从距 o最近的节点出发，链路可靠性的下界为 $\zeta(\theta)$，几乎必然成立。遍历速率的下界为 $\mathrm{R}_0^\infty \exp(-\zeta(e^t-1))\mathrm{d}t$，几乎必然成立。

引理 6. 若 Φ 是强（σ,ρ,ν）-球调控的，且强τ-空洞调控的，则

1）在无衰落的情况下，当 θ 低于某个正阈值时，信干噪比图具有南北向和东西向骨干网络；2）在存在衰落的情况下，当θ 低于某个正阈值时，信干噪比图发生渗流。

证明。 我们首先构建骨干网络。由于 Φ 是 τ-void regulated，以概率 1，每个球 $B((2i\tau,\ 2j\tau)),\ \tau)$都至少包含 Φ 中的一个点。对于每个 $(i,\ j) \neq (0,\ 0)$，令 $x_{i,\ j}$为该球中横坐标最大的点（例如）。现在证明，当 θ 足够小时，在没有衰落的情况下，序列 $\{x_{i,\ j}\}$ 是一个 2τ 南北向和东西向骨干。若骨干中的两点 $x = x_{i,\ j}$ 和 $y = x_{l,\ k}$ 对应的 $(i,\ j)$ 与 $(l,\ k)$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 网格中相邻，则称这两点为相邻点。在没有衰落的情况下，该骨干上任意一点处的干扰几乎必然有上界 A_ℓ, $\mathbb{P}^o_\Phi$, 因此信干噪比x_y 有下界。因此所有相邻点都

当 θ 足够小时相连，由此证明了第一个结论。

对于引理的第二部分，注意到，按照与定理 5 证明中类似的论证，对于每个$\epsilon > 0$，都存在足够小的 $\delta > 0$，使得例如$\mathbb{P}^o_\Phi$（信干噪比$\mathrm{x}_{1,0}\mathrm{x}_{0,0} > \delta$） $\geq 1-\epsilon$, $\mathbb{P}^o_\Phi$-几乎必然成立。因此，存在一个足够小的信干噪比阈值，使骨干网络中任意两个相邻点以大于 1/2 的概率相连。现在利用骨干网络的渗流问题与$\mathbb{Z}^2$ 上的键渗流问题同构这一事实（其中各键独立地处于闭合状态），可运用键渗流理论 [28] 证明，当该概率大于 1/2 时，信干噪比图会发生渗流。□

C. 自组织排队网络

网络演算的一项重要应用是串联队列：通过类似于系统理论中的技术，可以直接计算一组服务曲线的级联结果 [2], [3], ，不过这里使用的是极小加代数。利用上一小节讨论的渗流性质，构建由队列组成的网络，以便在这种自组场景中实现长距离多跳中继，是很有意义的。例如，在不存在衰落的情况下，可以利用骨干网络结构，在每条东西向路径和每条南北向路径上维持由串联队列构成的网络，并确保每个站点（两个相邻收发器之间的链路）都具有服务曲线（香农速率）。根据经典排队理论的论证，只需利用骨干网络上从一个队列到下一个队列的传输进行多跳路由，就能以正速率（且与源和目的地之间的距离无关）维持骨干网络上任意点对之间的长距离流量。如果输入流受到时间约束，那么在没有衰落的情况下，甚至可以通过将针对串联队列所发展的网络演算理论（见 [2], [3]）应用于此多跳路由方案中串联的无线链路，为这些流提供确定性的端到端时延保证。

VI. 蜂窝网络中的性能保证

A. 系统模型

设蜂窝网络中的基站（BS）和用户位置分别由定义在概率空间 $(\Omega,\mathrm{A},\mathbb{P})$ 上、定义于 $\mathbb{R}^2$ 的联合平稳遍历点过程 Φ 和 Ψ 建模。设每个用户都关联到其信号最强（平均意义下）的基站；根据路径损耗函数的单调性，该基站就是最近基站。最近基站几乎必然唯一[15]。根据此关联方案，每个基站通过多址接入为其 Voronoi 单元内的用户提供服务，因此小区内资源由用户在时间和频率上共享。这一特点要求进行我们所称的小区负载调节。用V 表示与典型基站 o 关联的 Voronoi 单元。

定义9 （小区负载调节）。 若存在某个常数$K > 0$ 使得 $\Psi(V) \leq K$，$\mathbb{P}^o_\Phi$-几乎处处成立，则由基站点过程 Φ 和用户点过程 Ψ 构成的平稳蜂窝网络称为小区负载受控。

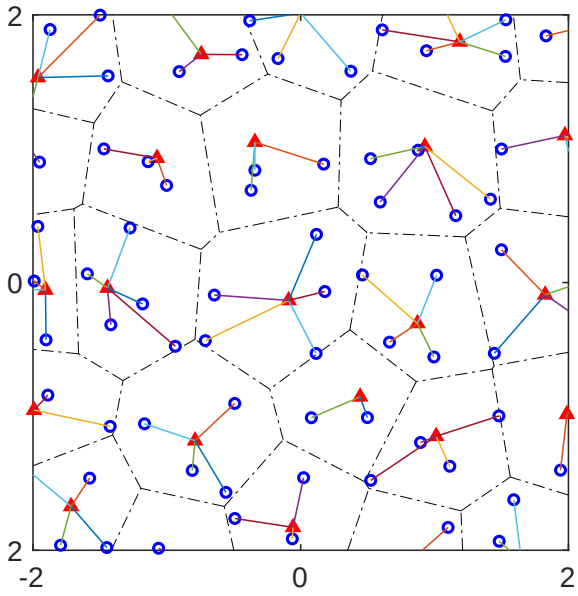


图 5. 空间和小区负载调节蜂窝网络示意图，其中基站以红色三角形表示，用户以蓝色圆圈表示。基站和用户分别是两个相互独立的独立同分布扰动方格点阵的实现，其中 $\lambda_\Psi = 4\lambda_\Phi = 1$。黑色虚线表示基站点过程的沃罗诺伊小区边界。

本质上，小区负载调节控制了 Ψ在 Φ的沃罗诺伊单元中的聚集程度，从而在下行链路性能中考虑了小区内多址接入的影响。小区负载调节可以通过在每个基站中实施集中式修剪，逐小区实现；也可以采用分布式方式，或通过负载均衡实现。例如，如果小区覆盖区域由用户共享，那么对用户进行适当的球调节即可实现分布式部署。

引理7. 上述蜂窝模型在 Φ 强空洞调控且 Ψ 关于 Φ 球调控时，具有小区负载受控特性。

证明. 设 Φ 具有强 τ-空洞调控。与原点 $V \subset B(o,\tau)$ 相关联的 Voronoi 单元 $\mathbb{P}^o_\Phi$-几乎处处成立。否则，根据 Voronoi 单元的凸性，对于一定比例非零的 V，有 $B(\cdot,\tau) = 0, \mathbb{P}^o_\Phi$- 几乎处处成立。这与强 τ- 空洞调控的假设矛盾。由于 Ψ 关于 Φ 球调控，因此对于某个常数 $K > 0$，必有 $\mathbb{P}^o_\Phi(\Psi(B(o,\tau)) \le K) = 1$。因此 $\mathbb{P}^o_\Phi(\Psi(V) \le K) = 1$。□

B. 链路性能保证

我们关注位于原点的典型用户。令 t 为典型用户的服务基站，即 argmax{l(kxk) : $x \in \Phi$}。典型用户处的干扰为 $I = I_t$，P $_{x\in\Phi\setminus\{t\}} h$ $_x l$(kxk). 对于第六节 A 中描述的蜂窝模型，若 Φ 是 τ-空且相对于 Ψ 球调控的，则

1）在不存在衰落的情况下，$\mathbb{P}^o_\Psi$-a。s。，$I \le A_\ell - \bar{l}(\tau)$，以及信干噪比 $\ge \bar{l}(\tau)/(A_\ell - \bar{l}(\tau) + W)$；2）如果衰落具有指数矩，则$\mathbb{P}^o_\Psi$-a。s。，$\mathrm{L}_{I|\Phi}(-s) \le \exp\left(A \bar{l} - \bar{l}(\tau)\right)$，其中 $\bar{l}(r) = \log \mathrm{L}_h(-s l(r))$，并且链路可靠性的下界为 $\zeta(\theta)$。

3）此外，如果网络的小区负载受控，则共享基站时频资源时，每个用户的信息论速率都有一个下界。

利用调控的叠加性质，很容易推导出适用于多层网络的类似界。

图 5 展示了一个空间和小区负载调节蜂窝网络，其中基站和用户分别服从两个相互独立的独立同分布扰动方格点阵，且 $\lambda_\Psi = 4\lambda_\Phi = 1$。位移向量的长度分别在 $[0, 0.5]$ 和 $[0, 0.25]$，上均匀随机分布，角度则在 $[0, 2\pi]$ 上均匀随机分布。

C. 蜂窝网络中的无线队列

考虑一个与基站－用户对相关联的无限缓冲先进先出队列可数集。假设每个基站使用多址方案为其关联用户提供服务。假设业务流量按照强度为$\lambda > 0$的时间平稳遍历点过程到达每个基站的队列，并在目标用户成功解码后离开队列。设蜂窝网络为小区负载受控，且 Φ 为关于 Ψ的（σ，ρ，{v9>）球调控。考虑与典型用户的基站相关联的队列，并假设干扰队列处于满缓冲状态。在没有衰落的情况下，$\exists \rho^* > 0$满足：如果每个基站－用户队列的下行业务到达受（σ^*，ρ^*）调控，则下行时延有上界；在具有指数矩的遍历衰落下，如果每个基站－用户队列的下行业务到达过程是遍历的，则存在一个平均速率，使得下行时延的尾部分布有上界。

VII. 讨论

在这项工作中，我们推导出适用于空间约束下任意大型无线网络中所有链路的可计算性能界。所提出的空间约束可以通过算法实现。强空洞约束可以通过添加规则网格或扰动网格等方式实现。球调节可以通过 Matérn I 或 II 方法以分布式方式实现 [17]。讨论弱约束的分布式实现超出了本文的范围。一个关键问题是这些界的可达性。为此，我们迈出了第一步：定义了与 (σ，ρ，ν)-球调节相关的极值参数，并引入了广义球约束。尤其值得关注的是针对特定应用场景的紧性能界，例如超高可靠性、低时延或高吞吐量。无线网络可以支持具有不同优先级的多种用户类别/业务流量，值得探索对其进行联合建模和优化。其他相关问题包括阴影效应、动态功率控制、负载均衡和定向传输对性能保证的影响。

附录

A. 引理 *3* 的证明

考虑在 $\mathbb{R}^2$ 上的任意硬核点过程 Φ，其硬核距离为 $H > 0$。对于任意 $r > 0$，绘制半径为 H的球

以 $\Phi \cap b$中的点为中心（o, r）。这些球的并集 $\cup_{x\in\Phi\cap b(o,r)} b(x, H) \subset b(o, r+H)$。$\Phi$ 在 $b(o, r)$ 中的点数，不得超过在 $b(o, r+H)$ 中能够堆积的半径为 H 的球的最大数量（称为最密堆积）。此外，关于最密堆积已有如下结果[5]：在 $\mathbb{R}^2$ 中的有界凸域内，若至少堆积两个球，则所堆积球的体积分数[6] 不超过 $\pi/\sqrt{12}$ [29]。六角三角晶格可达到该上界。

现在，对于 $r < H$, Φ 中至多有一个点落在 $b(o, r)$ 中。因此 $N(r) \le 1$, $r < H$。对于 $r \ge H$，在 $b(o, r+H)$ 的最密堆积中，至少可以堆积两个球。因此，我们可以对体积分数应用上界，得到$\pi H^2 N(r) \le \pi^2(r+H)^2/\sqrt{12}$，对于 $r \ge H$。综合两者可得

$$N(r) \le \begin{cases} 1, & r < H \\ \frac{\pi}{\sqrt{12}}(1 + \frac{2r}{H} + \frac{r^2}{H^2}), & r \ge H. \end{cases} \tag{15}$$

对于所有 $r > 0$, $1+2\pi r/(\sqrt{12}H)+\pi r^2/(\sqrt{12}H^2)$ 是 $\mathbb{P}$-a.s., $N(r)$ 的上界。

B. 引理 *4* 的证明

首先，我们证明 $L_{l,r}$, $\{y \in \mathbb{R}^2 : \Phi(b(y,r)) \le l\}$ 是一个随机闭集 [15, Chap. 9]。我们有$\Phi(b(y,r)) = \mathrm{P}_{X_i\in\Phi} \mathbb{I}(||X_i - y|| < r)$。对于所有 i，函数 $y \to \mathbb{I}(||X_i - y|| < r)$ 是下半连续的，因为它是一个开集的指示函数。这又意味着函数 $y \to \Phi(b(y,r))$ 也是下半连续的，因为在任意一点的邻域内，求和中只有有限项。因此，$\Phi(b(y,r))$ 的下水平集是 $\mathbb{R}^2$ 的闭集。为了证明该闭集是随机闭集，只需证明对于所有紧集 K，集合 $\{\omega \in \Omega : L_{l,r} \cap K = \emptyset\}$ 属于 A。为证明这一点，我们可以将最后一个集合改写为

$$\sum_{X_{i_1},\ldots,X_{i_{l+1}}\in\Phi,\neq} \prod_{j=1}^{l+1} \mathbb{I}(\|X_{i_j} - K\| < r) > 0,$$

其中，最后一个求和涉及 $l+1$ 的所有由 Φ 中互不相同的点组成的元组，并且 $\mathrm{k}X_{i_j} - K\mathrm{k}$ 表示 X_{i_j} 与集合 K 之间的最小距离。由于可以用一个由可数集中的点组成的集合来枚举 Φ 中的点，且其中每个点都是一个随机变量（例如根据它们到原点的距离确定），因此最后一个集合属于 A。

令 A^c 表示 A 在 $\mathbb{R}^2$ 中的补集。我们有 $L^c_{l,r} = \{y \in \mathbb{R}^2 : \Phi(b(y,r)) > l\}$。事实表明，$L_{l,r}$ 是一个随机闭集，这意味着 $L^c_{l,r}$ 是一个随机闭集，其中 A 表示 A 的闭包。由于 $\mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2}\{\Phi(b(y,r)) \le l\} = \overline{\{L^c_{r,l} = \emptyset\}} = \{L^c_{r,l} = \emptyset\}$，并且可以将 $\{L^c_{l,r} = \emptyset\}$ 重写为 $\{\overline{L^c_{l,r}} \in \Gamma_{\mathbb{R}^2}\}$，因此我们得到，对于所有 r 和 l, $\mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2}\{\Phi(b(y,r)) \le l\}$ 都是一个事件。这证明了该陈述的第一部分。

[5]在 $\mathbb{R}^2$中，这个问题称为圆堆积。这里，我们使用“球”一词来指代一般维度下的堆积问题。

[6]在球堆积问题中，这个量通常称为“堆积密度”。为避免与点的空间密度混淆，这里改用体积分数。某些高维中的体积分数界也已为人所知。

现在我们证明该命题的第二部分。令$k_0 = \lfloor g(0) \rfloor$。函数 g 单调不减，具有可数个间断点，并趋于 ∞。因此 $\exists t_k$, $k = 0, 1, \ldots\ldots$, 其中$t_0 = 0$，且使得 $\lfloor g(r) \rfloor = k + k_0$ 对 $r \in [t_k, t_{k+1}$成立）。现在，

$$\begin{aligned} E_\Phi &= \bigcap_{r>0} \bigcap_{y\in\mathbb{R}^2} \{\Phi(b(y,r)) \le g(r)\} \\ &= \bigcap_{k\ge 0} \bigcap_{r\in[t_k,t_{k+1})} \bigcap_{y\in\mathbb{R}^2} \{\Phi(b(y,r)) \le k + k_0\} \\ &= \bigcap_{k\ge 0} D_k, \end{aligned}$$

在 D_k的条件下，$\mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2}\{\Phi(b(y, t_{k+1})) \le k + k_0\}$。因此，要证明 E_Φ 是一个事件，只需证明对于所有 k, D_k 都是 A 的一个事件。这由陈述的第一部分可得。

最后，只需证明对于所有 $r > 0$，若 $\mathbb{P}(\Phi(b(o,r)) \le g(r)) = 1$，则对所有 k都有 $\mathbb{P}(D_k) = 1$。如上所述，对于所有 r，若 $\mathbb{P}(\Phi(b(o,r)) \le g(r)) = 1$，则对所有 k都有$\mathbb{P}(\Phi(b(o,t_{k+1})) \le k_0 + k) = 1$。由平稳性可知，对所有 k 和 y，都有 $\mathbb{P}(\Phi(b(y,t_{k+1})) \le k_0 + k) = 1$。因此，对所有 k，都有 $\mathbb{P}(\mathrm{T}_{y\in\mathbb{Q}^2}\Phi(b(y,t_{k+1})) \le k_0 + k) = 1$。也就是说，$\mathbb{Q}^2 \subset L_{k_0+k,t_{k+1}}$ $\mathbb{P}$-几乎必然成立。但由于$L_{k_0+k,t_{k+1}}$是一个闭集，因此$\mathbb{R}^2 \subset L_{k_0+k,t_{k+1}}$ $\mathbb{P}$-几乎必然成立。所以 $\mathbb{P}(D_k) = 1$。证明至此完成。

C. 引理 *5* 的证明

回顾一下，空洞调节的定义涉及闭球。出于与附录 B 中所述理由对偶的原因，上水平集 $V_\Phi = \mathrm{T}_{y\in\mathbb{R}^2}\{\Phi(B((y,r)) \ge 1\}$ 是随机闭集，这进而意味着 $V_\Phi = \mathbb{R}^2$ 是一个事件。此外，如果 $\mathbb{P}(\Phi(B(o,r)) \ge 1) = 1$，那么 $\mathbb{P}(\mathrm{T}_{y\in\mathbb{Q}^2}\{\Phi(B(y,r)) \ge 1\}) = 1$。但由于 V_Φ 是一个闭集，最后一个性质意味着 $\mathbb{P}(V_\Phi) = 1$。定理的证明至此完成。

D. 定理 *5* 的证明

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^o_\Psi(\mathrm{SINR} > \theta \mid \Phi) \\ &= \mathbb{P}^o_\Psi(I + W < h_t \ell(\tau)/\theta \mid \Phi) \\ &\overset{(a)}{=} \mathbb{P}^o_\Psi(I < h_t \ell(\tau)/\theta - W, h_t > W\theta/\ell(\tau) \mid \Phi) \\ &= \int_{\frac{W\theta}{\ell(\tau)}}^\infty f_{h_t}(x) \mathbb{P}^o_\Psi(I < x\ell(\tau)/\theta - W \mid \Phi, h_t = x)\, \mathrm{d}x \\ &\overset{(b)}{=} \int_{\frac{W\theta}{\ell(\tau)}}^\infty f_h(x) \left(1 - \mathbb{P}^o_\Psi\left(\exp(sI) \ge \exp\left(s\left(\frac{x\ell(\tau)}{\theta} - W\right)\right) \;\middle|\; \Phi\right)\right) \mathrm{d}x \\ &\overset{(c)}{\ge} \int_{\frac{W\theta}{\ell(\tau)}}^\infty f_h(x) \left(1 - \inf_{s\in[0,s^*)} \mathcal{L}_{I|\Phi}(s) \exp\left(-s\left(x\ell(\tau)/\theta - W\right)\right)\right)^+ \mathrm{d}x \\ &\overset{(d)}{\ge} \int_{\frac{W\theta}{\ell(\tau)}}^\infty f_h(x) \left(1 - e^{\inf_{s\in[0,s^*)} A_{\tilde{\ell}} - \tilde{\ell}(\tau) - s(x\ell(\tau) - \theta W)/\theta}\right)^+ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

其中 $\tilde{l}(r) = \log \mathrm{L}_h(-s l(r))$，且 f^+, $\max(0, f)$。步骤 (a) 源于干扰始终非负这一事实。步骤 (b) 源于干扰与目标发射机的衰落相互独立。步骤 (c) 和 (d) 使用了与推论 6 中相同的切尔诺夫界。第二部分显然成立，因为 $\zeta(\theta)$ 是连续且非递增的，并且 $\lim_{\theta\to 0} \zeta(\theta) = 1$。

致谢

本研究得到了欧盟地平线2020研究与创新计划下的ERC NEMO资助项目支持，资助协议编号788851，资助对象为INRIA。作者感谢A. Khezeli对本研究提出的意见和建议。

参考文献

[1] R. L. Cruz，《网络时延演算I：孤立网络元件》，《IEEE信息论汇刊》，第37卷，第1期，第114–131页，1991年。[2] C.-S. Chang，《通信网络中的性能保证》。施普林格科学与商业媒体，2000年。[3] J.-Y. Le Boudec 和 P. Thiran，《网络演算：互联网确定性排队系统理论》。施普林格，2001年。[4] 3第三代合作伙伴计划（3GPP），《NR超可靠低时延场景（URLLC）的物理层增强研究》，技术报告（TR）38.824，2019年3月。[5] D. Cavalcanti、J. Perez-Ramirez、M. M. Rashid、J. Fang、M. Galeev 和 K. B. Stanton，《扩展空口精准时间分发与时效性能力，以支持未来无线工业自动化系统》，《IEEE学报》，第107卷，2019年6月，第1152卷，页码1132。[6] M. Haenggi，《泊松双极网络和蜂窝网络中信干比的元分布》，《无线通信汇刊》，第15卷，第4期，第2577–2589页，2016年。[7] K. Feng 和 M. Haenggi，《蜂窝网络中信干比元分布的可分离性、渐近性质及应用》，《无线通信汇刊》，第19卷，第7期，第4806–4816页，2020年。[8] M. Kountouris、N. Pappas 和 A. Avranas，《大型无线网络中的服务质量保障》，载于《2018年第16届移动、自组与无线网络建模和优化国际研讨会（WiOpt）》，2018年，第1–6页。[9] A. Al-Hourani 和 M. Haenggi，《采用频率复用距离保护的新一代蜂窝网络性能》，《通信汇刊》，第67卷，第10期，第7277–7287页，2019年。[10] H. Q. Nguyen、F. Baccelli 和 D. Kofman，《密集 IEEE 802.11 网络的随机几何分析》，载于《IEEE INFOCOM 2007——第26届IEEE国际计算机通信会议》，2007年，第1199–1207页。[11] F. Baccelli、M. Klein、M. Lebourges 和 S. Zuyev，《通信网络的随机几何与架构》，《电信系统》，第7卷，第1期，第209–227页，1997年6月。 [在线]。可查阅：https://doi.org/ 10 1023 1019172312328 。/A：J. [12] G. Andrews、F. Baccelli 和 R. K. Ganti，《一种便于分析蜂窝网络覆盖率与速率的方法》，《通信汇刊》，第59卷，第11期，第3122–3134页，2011年11月。[13] M. Haenggi、J. G. Andrews、F. Baccelli、O. Dousse 和 M. Franceschetti，《用于无线网络分析与设计的随机几何和随机图》，《IEEE通信领域精选期刊》，第27卷，第7期，第1029–1046页，2009年9月。[14] M. Haenggi，《泊松双极网络和蜂窝网络中信干比的元分布》，《无线通信汇刊》，第15卷，第4期，第2577–2589页，2016年4月。[15] F. Baccelli、B. Błaszczyszyn 和 M. Karray，《随机测度、点过程与随机几何》。INRIA，2020年1月。[16] O. Dousse、F. Baccelli 和 P. Thiran，《干扰对自组网络连通性的影响》，《IEEE/ACM网络汇刊》，第13卷，第2期，第425–436页，2005年。[17] F. Baccelli 和 B. Błaszczyszyn，《随机几何与无线网络：第二卷，应用》。Now Publishers，2009年。[18] D. J. Daley 和 D. Vere-Jones，《点过程理论导论。第二卷：一般理论与结构》。施普林格，2008年。[19] H. Cramér，《概率论的一个新极限定理》，1994年。[20] D. G. Kendall，《随机椭圆内部格点数量》，《数学季刊》，第os-19卷，第1期，第1–26页，1948年1月。[21] P. D. Lax 和 R. S. Phillips，《欧氏空间与非欧空间中格点的渐近分布》，《泛函分析杂志》，第46卷，第3期，第280–350页，1982年。[22] F. Baccelli、M.-O. Haji-Mirsadeghi 和 A. Khezeli，《永恒家族树与单模随机图上的动力学》，《当代数学》，第719卷，2018年11月。[23] H. Al-Zubaidy、J. Liebeherr 和 A. Burchard，《适用于多跳衰落信道的（min，×）网络演算》，载于*2013*年 *IEEE INFOCOM* 论文集，2013年，第1833–1841页。[24] Y. Zhong、M. Haenggi、T. Q. S. Quek 和 W. Zhang，《随机接入下静态泊松网络的稳定性》，《*IEEE* 通信汇刊》，第64卷，第7期，第2985–2998页，2016年。[25] F. Baccelli 和 P. Brémaud，《排队论要素：Palm 鞅演算与随机递归》，1994年。[26] H. Bruneel，《离散时间排队系统的性能》，《计算机与运筹学》，第20卷，第3期，第303–320页，1993年。[27] S. Asmussen，《应用概率与排队》。施普林格，2003年，第2卷。[28] G. Grimmett，《渗流》。施普林格，1999年。[29] K. Böröczky, Jr，《有限堆积与覆盖》。剑桥大学出版社，2004年。