arXiv:2302.02018v1 [q-bio.PE] 3 Feb 2023

具有阿利效应、迁入和霍林II型功能反应的层级模型

Eddy Kwessi*

摘要

本文讨论一种基于Ricker竞争模型的层级模型。所考虑的物种会争夺资源，并可能因配偶限制、反捕食警戒或攻击行为、合作捕食或资源防卫，或社会性体温调节而受到阿利效应的影响。物种可分为优势较强和优势较弱（或“弱势”）的物种，也可简单地视为捕食者和猎物。该模型还纳入了两个物种的迁入，以及结构更复杂的霍林II型功能反应。本文讨论了局部和全局稳定性分析，并给出模拟结果。我们还考虑由维纳过程形式的环境波动引起的物种人口随机性，并证明在某些条件下，全局解存在、平稳分布存在，且物种能够实现均值强持久性。我们还利用Wasserstein距离通过实证表明，随机性可以充当分岔参数。

1 引言

自然界中的复杂系统，其组成部分或子部分之间往往存在显性的或隐性的层级关系。因此，剖析其结构有助于理解其动力学。这种层级关系可能由规模、个体力量、群体结构或组织方式决定。例如，在蜂群中，蜂王是体型最大的成员，此外还有雄蜂，以及发育不完全的雌蜂——工蜂。另一个例子是野外生活的不同物种之间的关系，例如狮子、鬣狗和羚羊之间存在力量层级。尤其是在野外，物种会不断迁移，无论是个体迁移还是群体迁移；迁移可能是为了寻找食物或水源、应对环境变化，也可能是出于交配需求。关于在生物系统中应用层级模型，已有大量文献。本文将聚焦于生态界中的种群动力学。具体而言，我们关注受迁入和迁出影响、存在阿利效应且具有更具结构性的功能反应的物种间动力学。为便于理解，我们回顾一下：阿利效应（参见阿利(1949)）是指一种现象

*通讯作者：数学系，三一大学，1 Trinity Place，德克萨斯州圣安东尼奥，邮编 78212，电子邮箱：ekwessi@trinity.edu

，即种群密度与其相对增长率呈正相关。有时会将其分为弱阿利效应和强阿利效应，例如参见Hutchings (2015年）。当种群存在临界密度时，会出现强阿利效应： A 低于该密度，种群数量会下降直至灭绝；高于该密度，种群数量则会增长并趋近其环境容纳量 K。弱阿利效应则是指种群不存在这样的临界密度，但在较低密度下，种群增长率会随密度上升而提高。

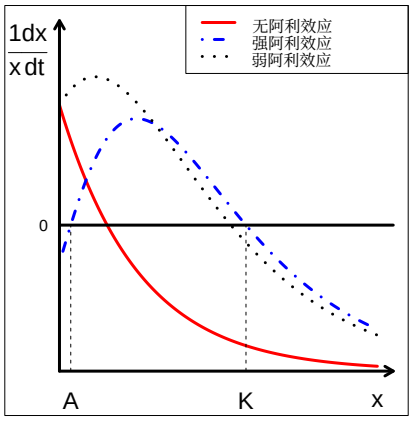

图 1：图中表示个体相对增长率随种群密度 x 变化的关系。红色曲线表示无阿利效应，因为个体增长率与密度呈负相关。黑色虚线表示弱阿利效应，因为在较低密度 x 下，个体增长率会增加，但不存在阿利阈值 A。蓝色虚线表示强阿利效应，因为个体增长率与阿利阈值的存在呈正相关；低于该阈值时，种群会减少直至灭绝。

我们还回顾一下，在生态学中，功能反应表示物种的摄食率与食物密度之间的函数关系。Holling（1959年）提出了三种功能反应类型。设 x 和 y 表示两个种群的密度；那么，I型功能反应的形式为 $h_1(x,y) = \mu xy$，其中 μ 为常数；II型功能反应的形式为 $h_1(x,y) = \dfrac{\alpha xy}{1+\alpha\beta xy}$，其中 α 表示攻击率， β表示处理时间，也就是物种 x 搜寻并处理从物种 y获取的食物所花费的时间。III型功能反应的形式为 $h_1(x,y) = \dfrac{\mu}{1+\alpha e^{-\beta xy}}$，其中 α 和 β 同上， μ 为表示饱和水平的常数，也就是物种密度较高时的速率阈值。

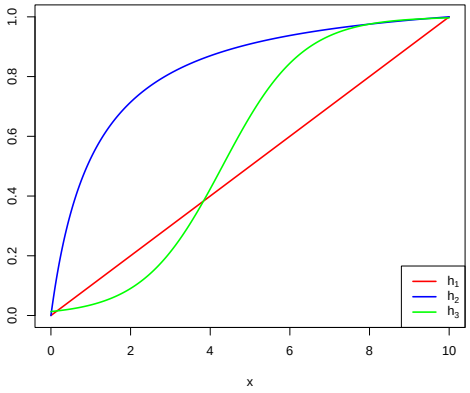

图 2：展示了采用选定参数的三种功能响应类型。

在生态学中，关于确定性模型稳定性分析的研究文献已十分丰富。对于包含一个、两个或更多物种的层级模型，感兴趣的读者可参见例如 Assas 等人（2015b）、Assas 等人（2015a）以及Elaydi 等人（2018）。考虑到物种生活在栖息地中，而这些栖息地常常受到人口波动或扰动的影响，因此有时采用随机模型更为准确。在这种情况下，尽管存在环境波动，物种的持存与共存尤其值得关注。诸如 Chesson （2009）、Bena¨ım 和 Schreiber （2009）、Hening 和 Li （2021）、Hening 等人 （2022）等论文及其参考文献和后续研究，为理解其生物学动机和必要的理论基础提供了很好的入门介绍。本文其余部分安排如下：第 2 节中，我们通过求出确定性模型的不动点来进行讨论，随后分析其局部和全局稳定性，并给出一些数值结果。第 3 节中，我们讨论随机模型。具体而言，我们证明全局解的存在性，证明均值强持久性，随后证明平稳分布的存在性，并给出数值结果。这些数值结果包括相空间图、直方图、物种密度等值线，以及基于 Wasserstein距离的比较分析。第4 节中，我们作出一些总结性评论。

2 确定性模型

在 Assas 等人 (2015b), Assas 等人 (2015a)以及Elaydi 等人(2018)中，讨论了针对两种和三种物种的层级模型。尤其是，文中讨论了以下模型

$$\begin{cases} x_{t+1} &= H_1 x_t + x_t e^{r_1 - x_t - \dfrac{m_1}{1+s_1 x_t}} \\ y_{t+1} &= H_2 y_t + y_t e^{r_2 - y_t - b x_t - \dfrac{m_2}{1+s_2 y_t}} \end{cases}, \tag{2.1}$$

在此模型中， x_t 和 y_t 表示所考察的两个物种 x 和 y 的密度，其中 x 是“较强”的物种，而 y 是较弱的物种。此外，H_i是迁入常数， r_i是物种的增长率， m_i是物种的死亡率， s_i是阿利效应常数，而 b 是竞争

常数。对于 $i = 1$，2，提出了以下假设，以确保每个物种都具有强阿利效应：

(i) $0 < H_i < 1$，$r_i s_i > 1 + s_i \ln(1 - H_i)$，以及 $m_i > r_i - \ln(1 - H_i)$。

(ii) $[r_i s_i - 1 - s_i \ln(1 - H_i)]^2 > 4 s_i (m_i - r_i + \ln(1 - H_i))$.

每个物种都受到强阿利效应的影响，该效应通过项m_1 $m_2 e^{1+s_1 x_t}$和 $e^{1+s_2 y_t}$乘性地引入。本文拟讨论以下模型：存在迁入，对较弱物种施加阿利效应，并采用Holling II型功能反应。选择II型而非III型，是因为III型功能反应往往出现在实验数据中，但在自然界中较为罕见。

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t e^{r_1} - x_t + dh(x, y) + H_1 \\ y_{t+1} = y_t e^{r_2 - y_t - \dfrac{m}{a + y_t} - h(x, y) + H_2} \end{cases} . \tag{2.2}$$

采用 Holling II型功能反应 $h(x, y) = (b + cx_t)1 + py_t\ b + cx_t($), 以及

参数	名称	维度
r_1, r_2	种群增长率	（时间）$^{-1}$
H_1, H_2	迁入/迁出率	（时间）$^{-1}$
a	阿利效应常数	生物量
b	物种 x 攻击率	（生物量）$^{-1}$（时间）$^{-1}$
c	两个物种之间的合作强度	（生物量）$^{-2}$（时间）$^{-1}$
d	转换系数	无量纲
m	物种 y 因阿利效应导致的死亡率	时间$^{-1}$
p	物种 x 的处理时间	Time

备注 1. 还可以考虑无空间结构或簇模型，其中迁入取决于簇的中心位置 ξ 与物种迁入源中心 η之间的距离，并使用拉普拉斯空间扩散核：

$$K(\xi, \eta, \gamma) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{|\xi - \eta|}{\gamma}} .$$

对于一个中心位于 η 的簇/斑块，我们假设生态系统中有 N 个簇，每个簇的中心位于 ξ_i，其中 $j = 1$、2、$\cdots$、N，且各物种的个体 x 和 y 根据空间扩散核 $K(\eta$、ξ、$\gamma)$ 从这些簇迁入中心位于 η 的簇。于是可得到该模型。

$$\begin{cases} x_{t+1}(\eta) = x_t(\eta) \sum_{j=1}^{N} K(\eta, \xi_j, \gamma_1) e^{r_1 - x_t(\xi_j) + dh(x_t(\xi_j), y_t(\xi_j))} \\ y_{t+1}(\eta) = y_t(\eta) \sum_{j=1}^{N} K_2(\eta, \xi_j, \gamma_2) e^{r_2 - y_t(\xi_j) - \frac{m}{a + y_t(\xi_j)} - h(x_t(\xi_j), y_t(\xi_j))} \end{cases} . \quad (2.3)$$

在存在多个猎物的情况下，例如 M，每种猎物的密度为 y_t^i，（$i = 1$、$\cdots M$），捕食者的密度为 x_t，时间为 t，我们可以考虑一般模型

$$\begin{cases} x_{t+1}(\eta) = x_t(\eta) \sum_{j=1}^{N} K(\eta, \xi_j, \gamma_1) e^{r_1 - x_t(\xi_j) + \sum_{i=1}^{M} d_i h(x_t(\xi_j), y_t^i(\xi_j))} \\ y_{t+1}^i(\eta) = y_t^j(\eta) \sum_{j=1}^{N} K_2(\eta, \xi_j, \gamma_i) e^{r_{i+1} - y_t^i(\xi_j) - \frac{m_i}{a_i + y_t^i(\xi_j)} - h(x_t(\xi_j), y_t^i(\xi_j))} \end{cases} . \quad (2.4)$$

2.1 稳定性分析

2.2 不动点

请回顾，r_1，r_2，a，b，c，d，p，m 均为**正参数**。
我们首先求出模型的不动点；它们是原点 (0，0) 以及方程的等倾线的交点

$$r_1 + H_1 - x + \frac{d(b + cx)y}{1 + py(b + cx)} = 0 . \quad (2.5)$$

$$r_2 + H_2 - y - \frac{m}{a + y} - \frac{(b + cx)y}{1 + py(b + cx)} = 0 . \quad (2.6)$$

经过化简后，我们得到

$$(C_1): \quad x = r_1 + H_1 + d(r_2 + H_2) - dy - \frac{dm}{a + y} . \quad (2.7)$$

$$(C_2): \quad y = \frac{x - (r_1 + H_1)}{(b + cx)(-px + d + p(r_1 + H_1))} . \quad (2.8)$$

不动点将是 xy 平面中的曲线 (C_2) 与 yx 平面中的曲线 (C_1) 的交点。需要注意的是：

- (C_1) 有一条垂直渐近线 $y = -a$ 和一条渐近线 $x = r_1 + H_1 + d(r_2 + H_2) - dy$ 是 yx 平面。
- (C_2) 有两条垂直渐近线 $x = -\frac{b}{c}$ 和 $x = -\frac{d+p}{(r_1+H_1)\ p}$，以及一条位于 xy 平面内的水平渐近线 $y = 0$ 。

总之，我们可以预期存在以下不动点。

- 原点 $E_{00}(0, 0)$。
- 轴向不动点:
  1. 无捕食者不动点 $E_{10}(0, y)$,
  2. 无猎物不动点 $E_{01}(x, 0)$。
- 至多有两个内部不动点 $E_{11}(\alpha_{1x}, \alpha_{1y})$ 和 $E_{22}(\alpha_{2x}, \alpha_{2y})$。

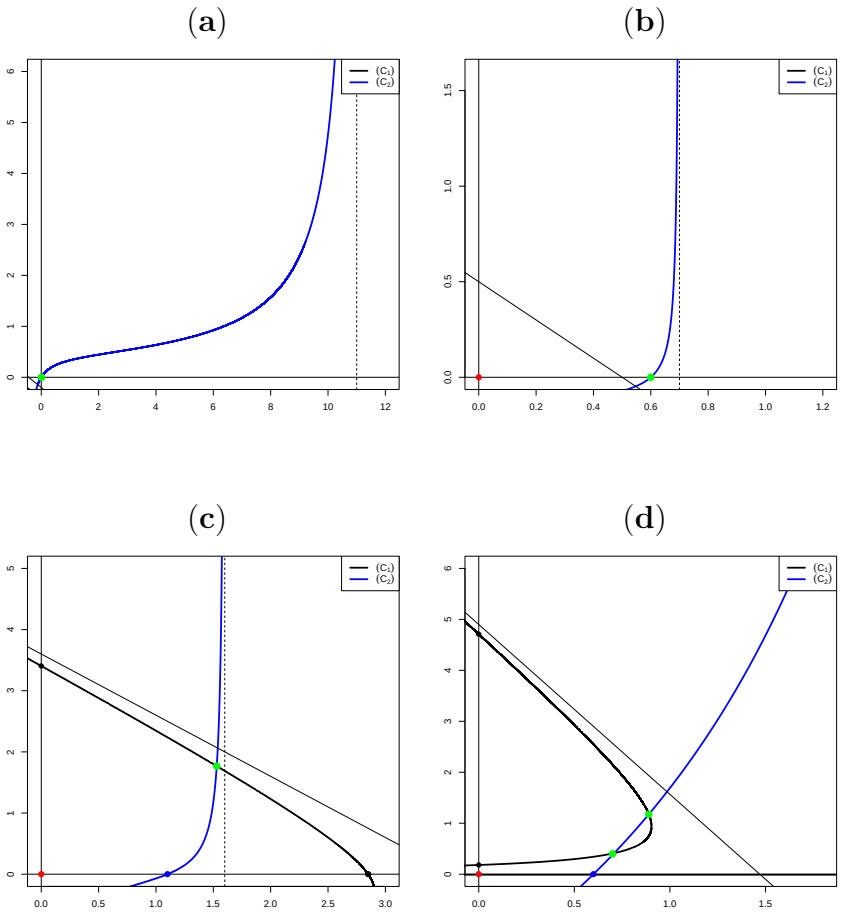

图3：图（a）表示不存在内部不动点的情形，图（b）表示存在一个轴向不动点的情形，图（b）表示存在一个内部不动点的情形，图（d）表示存在两个内部不动点的情形。

2.2.1 局部稳定性

Let

$$h(x, y) = \frac{(b + cx)y}{1 + py(b + cx)},$$

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= e^{r_1} + H_1 - x + dh(x,y)\ , \\
f_2(x,y) &= e^{r_2 + H_2 - y - \frac{m}{a+y} - h(x,y)}\ , \\
F(x,y) &= (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (xf_1(x,y), yf_2(x,y))\ .
\end{aligned}
$$

上述系统在任意给定点 $M(x,y)$ 处的雅可比矩阵为

$$
J(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y)\left(1 + x\left(-1 + \frac{dcy}{(1+py(b+cx))^2}\right)\right) & xf_1(x,y)\left(\frac{d(b+cx)}{(1+py(b+cx))^2}\right) \\ yf_2(x,y)\left(\frac{-cy^2}{(1+py(b+cx))^2}\right) & f_2(x,y)\left(1 + y\left(-1 + \frac{b+cx}{(1+py(b+cx))^2}\right)\right) \end{pmatrix}\ .
$$

在原点 $E(0,0)$，雅可比矩阵为

$$
J(0,0) = \begin{pmatrix} f_1(0,0) & 0 \\ 0 & f_2(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{r_1+H_1} & 0 \\ 0 & e^{r_2 + H_2 - \frac{m}{a}} \end{pmatrix}\ .
$$

因此，特征值为

$$
\lambda_1 = e^{r_1+H_1} \quad \text{and } \lambda_2 = e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}}\ .
$$

在无捕食者轴向不动点 $E(0,y)$，雅可比矩阵为

$$
\begin{aligned}
J(0,y) &= \begin{pmatrix} f_1(0,y) & 0 \\ f_2(0,y)\left(\frac{-cy^3}{(1+pby))^2}\right) & f_2(0,y)\left(1 + y\left(-1 + \frac{b+}{(1+pby))^2}\right)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{r_1+H_1} & 0 \\ e^{r_2+H_2-\frac{m}{a+y}}\left(\frac{-cy^3}{(1+pby))^2}\right) & e^{r_2+H_2-\frac{m}{a+y}}\left(1 + y\left(-1 + \frac{b}{(1+pby))^2}\right)\right) \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}
$$

因此，特征值为

$$
\lambda_1 = e^{r_1+H_1} \quad \text{and } \lambda_2 = e^{r_2+H_2-\frac{m}{a+y}}\left(1 + y\left(-1 + \frac{b}{(1+pby))^2}\right)\right)\ .
$$

在无猎物轴向不动点 $E(x,0)$，雅可比矩阵为

$$
J(x,0) = \begin{pmatrix} f_1(x,0)(1-x) & xdf_1(x,0)(b+cx) \\ 0 & f_2(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{r_1+H_1-x}(1-x) & xd(b+cx)e^{r_1+H_2-x} \\ 0 & e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}} \end{pmatrix}\ .
$$

因此，特征值为

$$
\lambda_1 = e^{r_1+H_1-x}(1-x) \quad \text{and } \lambda_2 = e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}}\ .
$$

在内部不动点 $E(x,\ y)$ 处，其中 $x,\ y > 0$，雅可比矩阵为

$$
J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + x\left(-1 + \frac{dcy}{(1+py(b+cx))^2}\right) & \frac{dx(b+cx)}{(1+py(b+cx))^2} \\ \frac{-cy^3}{(1+py(b+cx))^2} & 1 + y\left(-1 + \frac{b+cx}{(1+py(b+cx))^2}\right) \end{pmatrix}\ ,
$$

因为 $f_1(x,\ y) = f_2(x,\ y) = 1$。令 D 为 $J(x,\ y)$ 的行列式，T 为其迹。那么特征值为

$$\lambda_1 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \quad \text{and } \lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}\ .$$

我们有如下结果:

定理 2. 考虑上述确定性系统，则

▶ 原点 $E_{00}(0, 0)$ 局部渐近稳定，当且仅当 $r_1 + H_1 < 0$ 且$r_2 + H_2 < \frac{m}{a}$.▶ 无捕食者平衡点 $E_{01}(0, \bar{y})$ 局部渐近稳定，当且仅当 $r_1 + H_1 < 0$ 且 $\left|1 - y + \frac{yb}{1+pby}(\ )_2\right| < e^{\frac{m}{a} - r_2 - H_2}$.▶ 无猎物平衡点 $E_{10}(0, y)$ 局部渐近稳定，当且仅当 $|x - 1| < e^{x - r_1 - H_1}$ 且 $r_2 + H_2 < \overline{\frac{m}{a}}$.▶ 根据行列式-迹分析，我们知道：– 若 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$ 或 $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$，则 $E(x, y)$ 是局部鞍点。– 若 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$，则 $E(x, y)$ 局部渐近稳定。– 若 $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$，则 $E(x, y)$ 局部不稳定。

2.3 全局稳定性

本节讨论原点和内部平衡点的全局稳定条件。

定理 3. 令

$$\alpha = e^{r_1 + H_1 + \frac{d}{p}} \ and\ \beta = e^{r_2 + H_2}\ .$$

▶ 原点 $E_{00}(0,0)$ 在 $\alpha^2 \leq 1$ 和 $\beta^2 \leq 1$时是全局渐近稳定的。

▶ 内部平衡点 $E(x_*, y_*)$ 在 $\alpha^2 = 1$ 和$\beta^2 = 1$时是全局渐近稳定的。

2.4 模拟

在本节中，我们展示确定性模型中不同类型平衡点的情形。我们选取了八个起始点，其 x 和 y 坐标分别为：$X_0 =$(0.1, 0.1, 0.1, 10, 10, 10, 2.5, 20) $Y_0 =$ (10,0.5,0.1,0.1, 0.5,10, 0.1,3)。轨迹分别以黑色、浅绿色、浅蓝色、浅红色、浅青色、橙色、紫色和洋红色表示。实心圆点表示模型的不动点，蓝色实线和浅黑色曲线分别表示等倾线（C_2）和 C_1 。

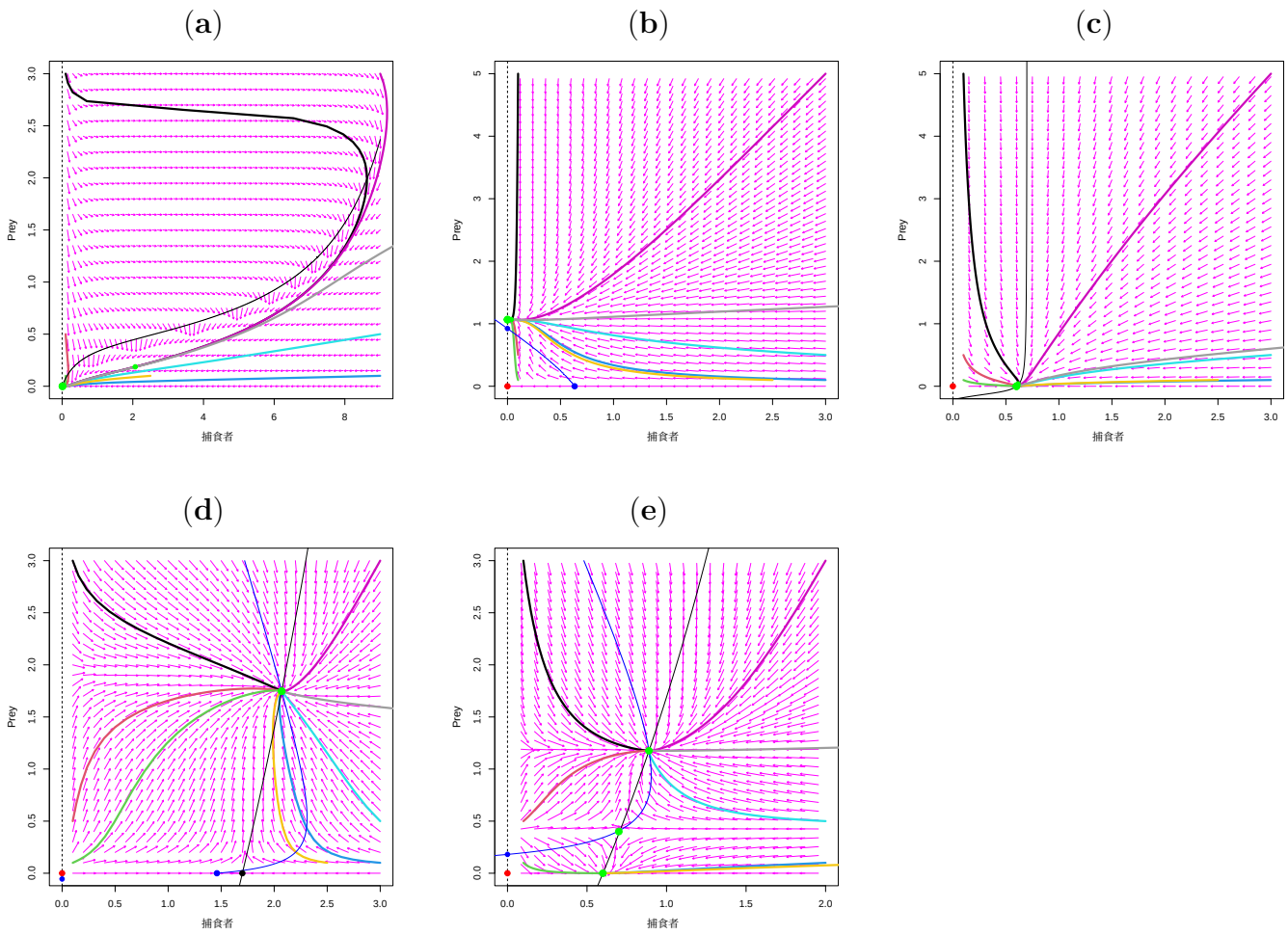

图4：图（a）显示轨迹收敛至原点 $E_0 0$，图（b）显示轨迹收敛至无捕食者轴向平衡点 E_{0y}，图（c）显示轨迹收敛至无猎物轴向平衡点 E_{x0}，图（d）显示轨迹收敛至内部不动点 E_{xy}图（e）显示两个内部不动点，其中一个稳定，另一个不稳定。

2.5 讨论

根据以上研究，我们可以得出以下观察结果：
1) Holling功能函数的选择确实会对该模型产生影响。我们选择II型而非III型的原因是：在假设猎物密度恒定时，种群动力学中会出现III型，而这里显然并非如此。

2) 此外，我们选择的II型功能反应与Holling最初提出的模型不同。不过，我们的功能反应考虑了种群动力学中的一个重要参数，例如合作常数 c。3) 我们关于全局稳定性的讨论仅限于采用Lyapounov泛函方法。值得指出的是，也可以使用单调映射等工具来证明全局稳定性，参见 Balreira 和 Luis(2014)。

4）众所周知，在不含移民项的标准 Ricker 模型中，内禀增长率参数是一个分岔参数（例如参见Kwessi 等人（2018））,

在某些情况下，标准 Ricker 模型会出现确定性混沌。在当前模型中，对于各个物种，分岔参数分别为 $r_1 + H_1 + \frac{d}{p}$ 和 $r_2 + H_2$，而且该系统很可能也会出现确定性混沌。由于这超出了我们打算探讨的范围，为简洁起见，我们不再进一步讨论。

3 随机模型

为考虑环境波动对所研究物种的影响，我们令

- $k \in \mathbb{N}$，我们令 $t_k = k\Delta t$，其中 $\Delta t > 0$。
- 我们定义 $X_k = (x_{t_k}, y_{t_k})$，其中 $k \in \mathbb{N}$。
- 我们令初始条件为 $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$。
- 我们考虑随机变量序列 $\{N_{j,k}(\Delta t)\ j = 1, 2, k \in \mathbb{N}\}$，其服从正态分布，满足对于 $j = 1, 2$ 以及所有 $k \in \mathbb{N}$，

  1. $E[N_{j,k}(\Delta t)] = 0$。 2. $E[(N_{j,k}(\Delta t))^2] = \sigma_j^2 \Delta t$ 其中对于 $j = 1, 2$。 3. $E[(N_{j,k}(\Delta t))^4] = o(\Delta t)$。

- 我们假设在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 内，X_k 受到随机扰动 $(x_{t_k} N_{1,k}(\Delta t)\, y_{t_k} N_{2,k}(\Delta t))$。

因此，对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{cases} x_{t_{k+1}} - x_{t_k} = x_{t_k} N_{1,k}(\Delta t) + x_{t_k} \left(e^{r_1 - x_{t_k} + \frac{d(b+cx_{t_k})x_{t_k}}{1+py_{t_k}(b+cx_{t_k})} + H_1} \right) \Delta t \\ y_{t_{k+1}} - y_{t_k} = y_{t_k} N_{2,k}(\Delta t) + y_{t_k} \left(e^{r_2 - y_{t_k} - \frac{m}{a+y_{t_k}} - \frac{(b+cx_{t_k})y_{t_k}}{1+py_{t_k}(b+cx_{t_k})} + H_2} \right) \Delta t \end{cases},$$

或者写成向量形式：

$$X_{k+1} - X_k = X_k F(X_k)\Delta t + X_k N_k(\Delta t)\ .$$

根据伊藤微积分（例如参见 Durrett (1996)），若令 $W_{k+1,j}(\Delta t) - W_{k,j}(\Delta t) := N_{k,j}(\Delta t)$ 并令 $\Delta t \to 0$，则上述方程收敛为一个自治随机微分方程（随机微分方程）

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t)\ , \tag{3.1}$$

其初始条件为 $X_0 = (x_0,\ y_0)$，其中

$$a(X(t)) = \begin{pmatrix} x(t)e^{r_1 - x(t) + \dfrac{d(b+cx(t))y(t)}{1+py(t)(b+cx(t))} + H_1} \\ y(t)e^{r_2 - y(t) - \dfrac{m}{a+y(t)} - \dfrac{(b+cx(t))y(t)}{1+py(t)(b+cx(t))} + H_2} \end{pmatrix},$$

且 $b(X(t)) = [x(t)\sigma_1,\ y(t)\sigma_2]$ 表示环境波动的人均幅度，而 $W(t) = [W_1(t)\ W_2(t)]$ 是维纳过程向量。

注4。 一个值得探讨的重要问题是：为什么不能通过在确定性模型中添加一个“随机”或“随机性”项来引入随机模型，甚至假设模型参数取自某些特定的概率分布，从而将模型参数随机化？尽管理论上这是一项值得开展的工作，但这个问题的最佳答案见 *Hening 和 Li (2021)*，注*2.1*。鉴于其重要性，我们在此重述，以使本文内容完整：仅仅在确定性模型中添加一个随机波动项存在一些缺陷，因为通常无法说明不同物种受到环境影响的机制。相反，按照 *Turelli (1977)* 的开创性研究，我们将随机微分方程模型视为“对更现实但往往在解析上难以处理的模型的近似”。具体而言，随机微分方程可以看作差分方程的缩放极限或近似。

我们将关注全局解的存在性、均值意义下的强持存性，以及平稳分布的存在性。

3.1 全局解的存在性

首先回顾以下关于随机微分方程全局解存在性的定理，参见例如Oksendal (2014), 定理5.2.1，第66页。

定理5. 设 $T > 0$ 和 $A\colon\ \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$，$B\colon\ \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ 为可测函数。设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为随机变量，满足 $\mathbb{E}[\|X_0\|^2] < \infty$，其中$\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$中的范数。假设对于给定的 $t \in [0,T]$ 和 $X(t)\ Y(t) \in \mathbb{R}^n$，存在$K_1$、$K_2 > 0$ 使得

1. 线性增长条件：

$$\|A(X(t),t)\| + \|B(X(t),t)\| \le K_1(1 + \|X(t)\|)\ .$$

2. 局部利普希茨条件：

$$\|A(X(t),t) - A(Y(t),t)\| + \|B(X(t),t) - B(Y(t),t)\| \le K_2\,\|X(t) - Y(t)\|\ .$$

则随机微分方程 $dX(t) = A(X(t)\ t) + B(X(t)\ t)dW(t)$ 在初始条件 $X(0) = X_0$ 下存在唯一解 $X(t)$，使得

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|X(t)\|^2\,dt\right] < \infty\ .$$

定理 6. 对于任意初始值 $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$，上述随机系统存在唯一的正的全局解 $X(t) = (x(t)\ y(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$。

证明。对于 $n = 2$，考虑上述非自治随机微分方程 n

$$dX(t) = a(X(t)) + b(X(t))dW(t)\ .$$

令 $X(0) = X_0 = (x_0,\ y_0)$，对于给定的 $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}^+$。令 $T > 0$ 为任意值。
显然，$\mathbb{E}[\|X_0\|^2] = \|X_0\|^2 < \infty$。回顾

$$a(X(t)) = [x(t)f_1(x(t), y(t)), y(t)f_2(x(t), y(t)]; \quad b(X(t)) = [x(t)\sigma_1, y(t)\sigma_2]\ .$$

$$f_1(x(t), y(t)) = e^{r_1 - x(t) + \frac{d(b+cx(t))y(t)}{1+py(t)(b+cx(t))} + H_1} \le e^{r_1 + H_1 + \frac{d}{p}}.$$

$$f_2(x(t), y(t)) = e^{r_2 - y(t) - \frac{m}{a+y(t)} - \frac{(b+cx(t))y(t)}{1+py(t)(b+cx(t))} + H_2} \le e^{r_2 + H_2}.$$

利用中值定理，我们可以选取

$$K_1 = K_2 = \max\left\{e^{r_1 + H_1 + \frac{d}{p}} + \sigma_1, e^{r_2 + H_2} + \sigma_2\right\}\ .$$

由于这对任意 $T > 0$ 都成立，因此我们得出结论：该解存在且为全局解。

□

3.2 均值意义下的强持存性

首先回顾均值强持久性的概念，以及一个用于证明随机微分方程具有均值强持续性的引理。

定义 7. 设 $X(t)$是随机微分方程的解。假设对所有 $t > 0$，归一化占用测度或均值满足

$$\langle X(t)\rangle = \frac{1}{t}\int_0^t X(u)du < \infty\ .$$

$X(t)$称为均值强持续的，如果

$$\lim_{t\to\infty} \inf \langle X(t)\rangle > 0\ .$$

为证明随机微分方程的解具有均值强持续性，通常会使用以下结果。

引理 8. 设 W_i 对所有 $1 \le i \le n$ 都是维纳过程。若 $X(t) \in (C[0, \infty], \mathbb{R}^+)$，且存在正常数 γ_1、γ_2 和 $T > 0$，使得

$$\ln(X(t)) \ge \gamma_1 t - \gamma_2 \int_0^t X(u)du + \sum_{i=1}^n \sigma_i W_i(t), \quad \textbf{for } t \ge T\ ,$$

那么，根据强大数定律，

$$\lim_{t\to\infty} \inf \langle X(t)\rangle \ge \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \textit{almost surely}\ .$$

现在我们可以陈述关于该系统均值持续性的结果：

定理 9。 设 $X(t)$是随机微分方程 (3.1)的解。若

$$\frac{1}{2}\max\left\{\sigma_1^2 e^{-r_1-H_1}, \sigma_2^2 e^{\frac{m}{a}+\frac{1}{p}-r_2-H_2}\right\} < 1\,,$$

则 $X(t)$ 均值强持续。

注 10。 上述定理也可以用另一种方法证明。事实上，我们证明的关键在于说明量 $\lambda_i(\mu) := \int_0^\infty \left(f_i(X(t)) - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\mu(dX) > 0$，其中 μ 是勒贝格测度。这在 *Hening 等人 (2022)* 中称为外部李雅普诺夫指数，它决定了测度 μ支集之外物种的瞬时人均增长。在该论文中，在一定条件下（见下文第 *3.3*节），证明了若 $\lambda_i(\delta^*) > 0$ （其中 δ^* 是集中于原点的狄拉克测度），则X 强随机持续。

3.3 平稳分布的存在性

现在我们关注模型的平稳分布是否存在。首先，沿用 Hening 和 Li (2021) 的思路，定义平稳分布和强随机持存的概念。

定义 11。 若过程（或具有解的随机微分方程） $X(t)$ 满足：只要 $X(0) = x$ 服从分布 ξ，则对任意时间 $t \geq 0$， $X(t)$ 的分布由 ξ给出，则概率测度 ξ 是该过程的不变概率测度。

定义 12。 设 Σ 是 $\mathbb{R}^n$上的 σ-代数，$_+^\circ := (0, \infty)^n$，并设 $E \in \Sigma$。我们将全变差范数定义为

$$\|\mu(E)\|_{TV} = \sup_{\pi}\left\{\sum_{A\in\pi}|\mu(A)|\,,\quad \pi \text{ is a countable disjoint partition of } E\right\}\,.$$

若过程 $X(t)$ 满足$\mathbf{x} = X(0)$，且具有定义在 $\mathbb{R}^n$上的 ξ_0 唯一不变概率测度，则称其具有强随机持存性，并且

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbb{P}(t, X, \cdot) - \xi_0(\cdot)\|_{TV} = 0, \quad \text{for } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{n,\circ}\,.$$

现在我们可以陈述与模型相关的平稳测度结果。

定理 13。 设 $X(t)$是随机微分方程 (3.1)的解。若

$$\frac{1}{2}\max\left\{\sigma_1^2 e^{-r_1-H_1}, \sigma_2^2 e^{\frac{m}{a}+\frac{1}{p}-r_2-H_2}\right\} < 1\,,$$

那么，上述随机微分方程有唯一的平稳分布 ξ_0，其支集位于 $\mathbb{R}^2$, $_+^\circ$ 且

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbb{P}(t, X, \cdot) - \xi_0(\cdot)\|_{TV} = 0, \quad \text{for } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{2,\circ}\,.$$

备注 14. 证明依赖于检验 *Hening 和 Li (2021)*. 定理 *2.1* 中的关键假设。该定理相当有力，因为它证明了强随机持久性，这比概率意义下的持久性和概率意义下几乎必然的持久性都更强。定理 *2.1* 的另一个优点是很容易将其推广到多个物种。通常，要证明平稳分布的存在，人们会像下面的命题那样证明几乎必然持久性。然而，命题的第二部分并不容易检验；从技术上讲，这相当于从头证明 *Hening 和 Li(2021)* 中的定理 *2.1*。

命题 15. 马尔可夫过程 $X(t)$ 存在唯一的平稳分布 ξ，如果存在一个有界区域 $V \in \mathbb{R}^n$，其边界 Σ 为正则边界，并且满足以下条件：

1. 在区域 V 及其某个邻域内，所对应扩散矩阵 $\Gamma(x)$ 的最小特征值远离零。 *2.* 若 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus V$，则从 $\mathbf{x}$ 出发的任意路径到达集合 V 所需的平均时间 $\tau(\mathbf{x})$ 有限；并且对于每个紧集 $U \subset \mathbb{R}^n$，有 $\sup \mathbb{E}[\tau(\mathbf{x})] < \infty$，那么对于$_{\mathbf{x}\in U}$，相对于测度 ξ可积的任意函数 f，

$$\mathbb{P}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\xi(dx)\right) = 1 \quad for\ all\ x \in \mathbb{R}^n\ .$$

3.4 模拟

为了模拟随机模型在区间 $[0,T]$ 上给定 $T>0$时的行为，我们将采用以下由 Milstein (1975) 提出的算法。

1. 选取一个初始条件 $X_0 = (x_0, y_0)$

2. 选择一个整数 $N > 1$。

3. 将区间 $[0,T]$ 划分为 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$，其中 $t_k = k\Delta t$，且 $\Delta t = \dfrac{T}{N}$。

4. 使用 Milstein 高阶格式，即对于 $0 \le k \le N$。

$$\begin{cases} x_{k+1} = & x_k + x_k f_1(x_k,y_k)\Delta t + x_k\sigma_1\Delta W_{1,k}\sqrt{\Delta t} + x_k\frac{\sigma_1^2}{2}[(\Delta W_{1,k})^2 - \Delta t] \\ y_{k+1} = & y_k + y_k f_2(x_k,y_k)\Delta t + y_k\sigma_2\Delta W_{2,k}\sqrt{\Delta t} + y_k\frac{\sigma_2^2}{2}[(\Delta W_{2,k})^2 - \Delta t] \end{cases}.$$

其中 $\Delta W_{i,k} = W_{k+1} - W_k$ 是相互独立的正态分布随机变量，均值为零，方差为 Δt。

在以下所有图中，我们取 $N = 100, T = 1$，并采用与确定性模型具有两个内部不动点相对应的模型参数： $r_1 = 0.5, r_2 = 0.1, H_1 =1.2, H_2 = 1.8, m = 0.4, a = 0.1, b = 0.9, c = 0.01, d = 0.3, p = 0.1$。

右侧第一个面板展示了确定性模型的相图，并叠加了100条随机轨迹，其起点为五个坐标分别为

$X_0 = (0.25, 0.25, 2.75, 2.75, 2.75)$ $Y_0 = (2, 0.25, 2, 0.25, 0.1)$。确定性轨迹以红色粗实线表示。第二和第五个面板分别为猎物和捕食者平稳分布的直方图。第三和第四个面板展示了平稳分布的等高线和三维表示，以便更直观地观察。在第三个图中，黑线分别表示捕食者和猎物密度的估计样本均值。图中显示了随机性如何使确定性模型的稳定不动点发生偏移。

3.4.1 两个物种均具有低随机性

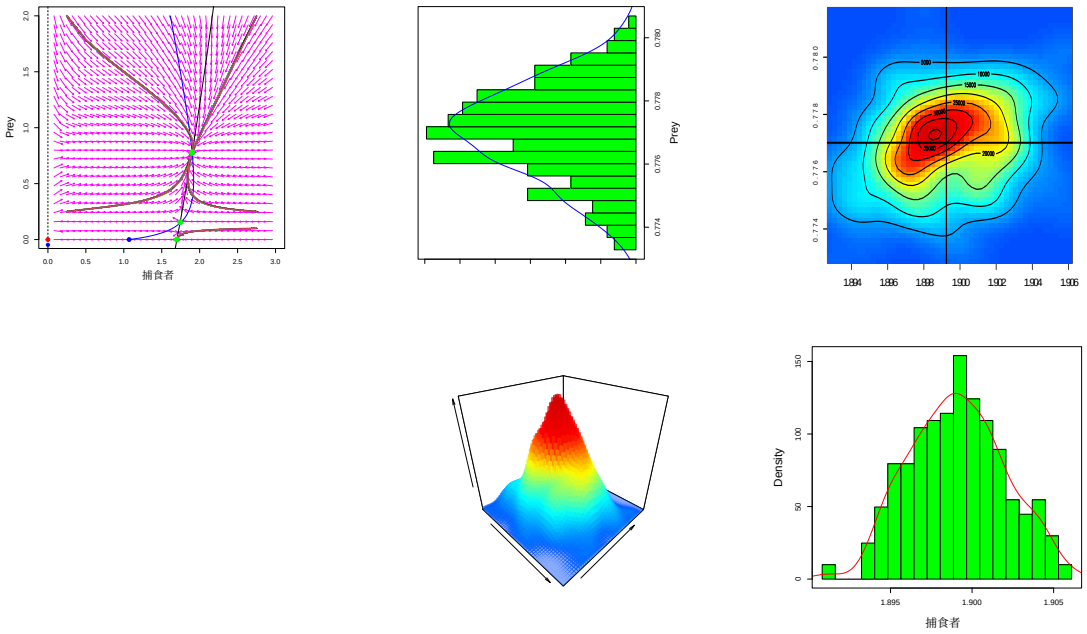

图5：在这种情况下，我们设定 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$。不出所料，轨迹与确定性模型的相似，且密度接近对称。

3.4.2 捕食者的低随机性，猎物的高随机性

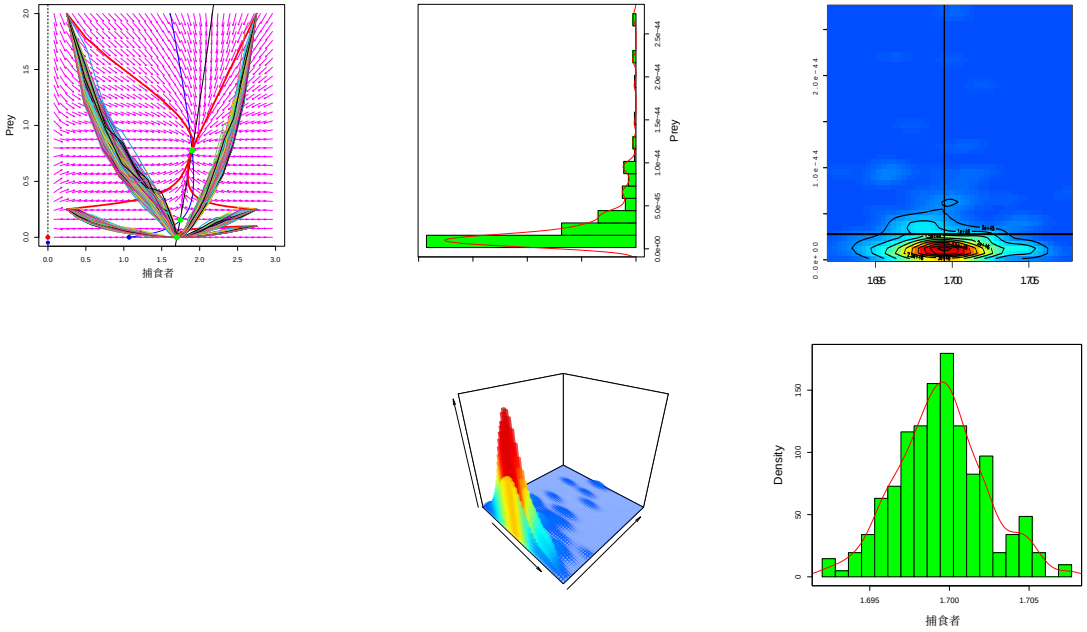

图6：在这种情况下，我们令 $\sigma_1 = 6$ 和 $\sigma_2 = 0.1$。此时，捕食者得以存活，而猎物迅速趋近灭绝极限。

3.4.3 捕食者随机性高、猎物随机性低

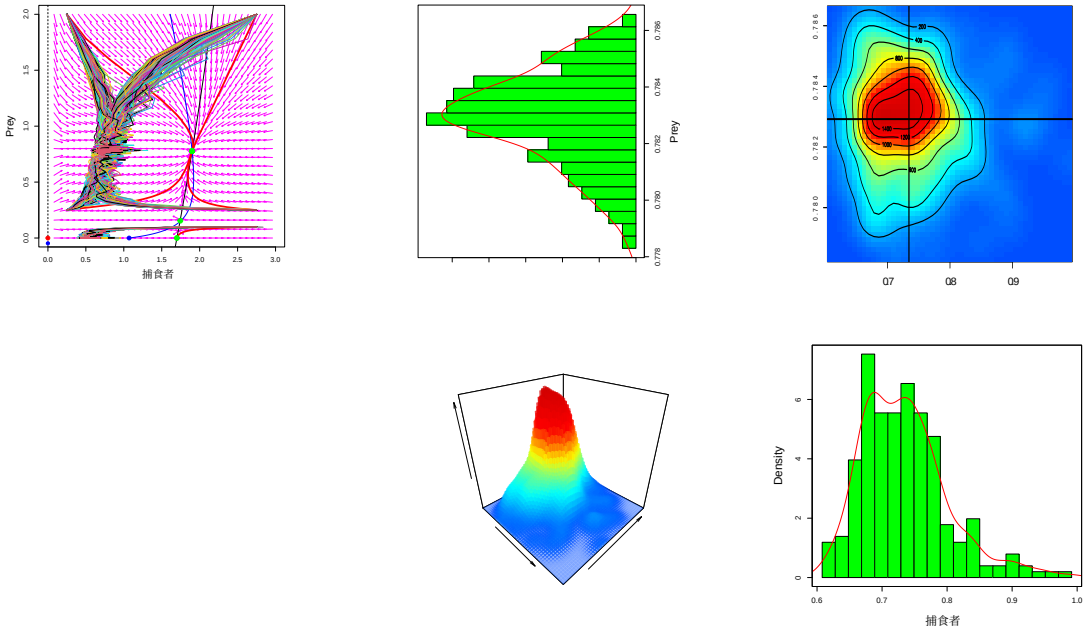

图7：在这种情况下，我们令 $\sigma_1 = 6$ 和 $\sigma_2 = 0.1$。此时，对于高于确定性不稳定不动点的轨迹，捕食者能够持续存在。

3.4.4 两个物种均具有高随机性

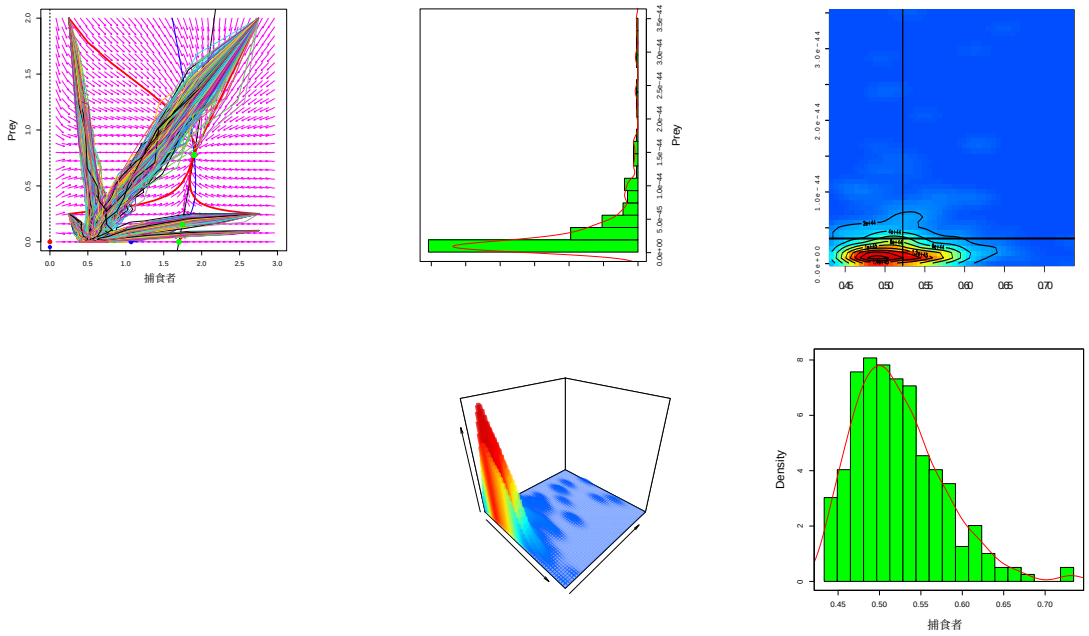

图 8：在这种情况下，我们令 $\sigma_1 = 6$ 和 $\sigma_2 = 6$。在这种情况下，两个物种最终都会灭绝，不过该物种灭绝的速度会快于捕食者。

为了理解不同系统参数下随机性对物种密度的影响，可以跟踪参数 σ_1 和 σ_2逐步变化时捕食者和猎物密度的变化。随后，我们可以评估这些相邻分布之间的Wasserstein距离（参见Villani (2008)），以判断它们的相似或差异程度。由此可以确定随机性阈值。同时，也可以跟踪捕食者和猎物的平均种群密度。设 $p > 1$ 为一个实数。回顾一下，在度量空间（ $W(\theta_1, \theta_2)$ 上，两个概率测度$\mathscr{M}$， D和 θ_1之间的Wasserstein距离 θ_2，若它们的联合概率测度 θ定义在集合 $\Gamma(\theta_1, \theta_2)$上，则其定义如下：

$$W_p(\theta_1, \theta_2) = \left(\inf_{\theta \in \Gamma(\theta_1, \theta_2)} \left\{ \int_{\mathscr{M} \times \mathscr{M}} \theta(u, v)[D(u, v)]^p du dv \right\} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

在实际应用中，分布 θ_1 和 θ_2 将被视为基于次序统计量样本 $U = (U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(K)})$ 和 $V = (V_{(1)}, V_{(2)}, \cdots, V_{(K)})$ 的经验概率测度。因此， $W_p(\theta_1, \theta_2)$ 的一个估计量为

$$\widetilde{W}_p(\theta_1, \theta_2) = \left(\sum_{i=1}^{K} \left| U_{(i)} - V_{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

在我们的情形中，我们将使用 $p = 2$。对于捕食者，我们使用与给定随机参数 $\sigma_{1,i} \in [0.1, 8]$ 相对应的样本 $U_1 = X(\sigma_{1,i})$ 和 $V_1 = X(\sigma_{1,i+1})$，其中 $i = 1, 2, \cdots, K$。同样，对于猎物，我们使用样本 $U_2 = Y(\sigma_{2,i})$ 和 $V_2 = Y(\sigma_{2,i+1})$，

对于 $\sigma_{2,i} \in [0.1, 8]$。在下面的图中，我们将轨迹的起点选为 $x_0 = 5, y_0 = 1$ 和 $K = 80$。对于 $i = 1, \cdots, 80$。参数 $\sigma_{1,\cdot} = \sigma_{2,\cdot} = \sigma$将称为随机性。左侧面板表示捕食者和猎物分布之间连续两次观测的 Wasserstein距离随随机性的变化，右侧面板表示随机性与平均种群密度之间的关系。

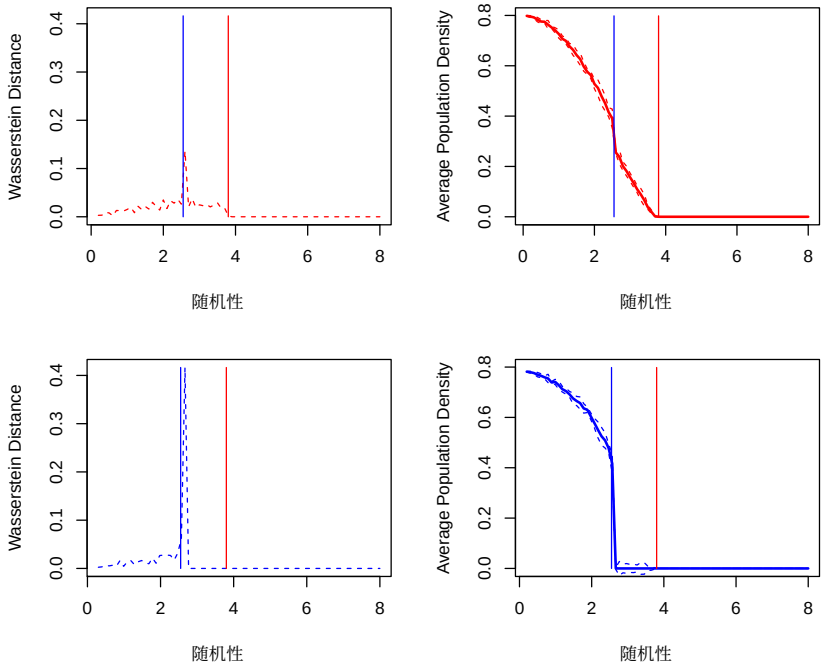

图9：此处，$r_1 = 0.5$，$r_2 = 0.1$，$H_1 = 1.2$，$H_2 = 1.8$，$m = 0.4$，$a = 0.1$，$b = 0.9$，$c =$0。01；$d = 0.3$；$p = 0.1$。对应于确定性情形下的两个内部不动点。

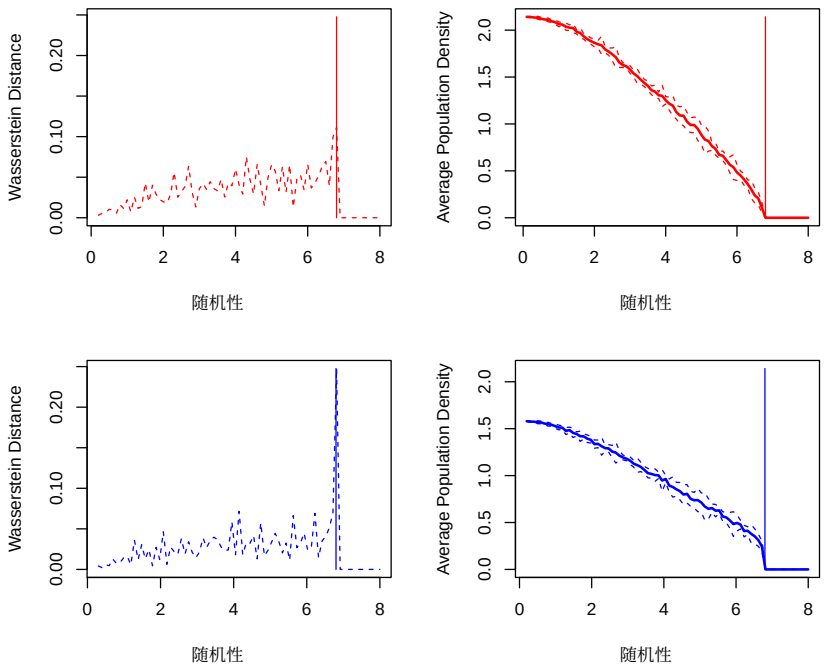

图 10: $r_1 = 0.1,\ r_2 = 0.1,\ H_1 = 0.9,\ H_2 = 2,\ m = 0.1,\ a = 0.05,\ b = 0.9,\ c = 0.01,$ d =2。5, $p = 1.5$ 对应于确定性情形下的一个内部不动点。

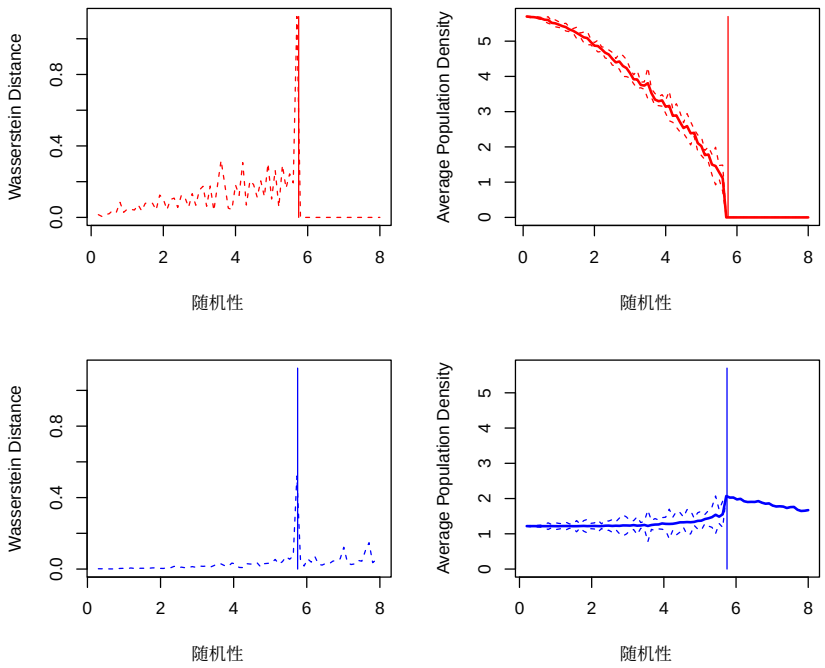

图 11: $r_1 = 0.9;\ \ r_2 = 0.1,\ H_1 = -1,\ H_2 = 3.5,\ m = 0.1,\ a = 0.5,\ b = 0.2,\ c = 0.4,$ d =2。5, $p = 0.1$ 对应于确定性情形下的无捕食者轴向不动点。

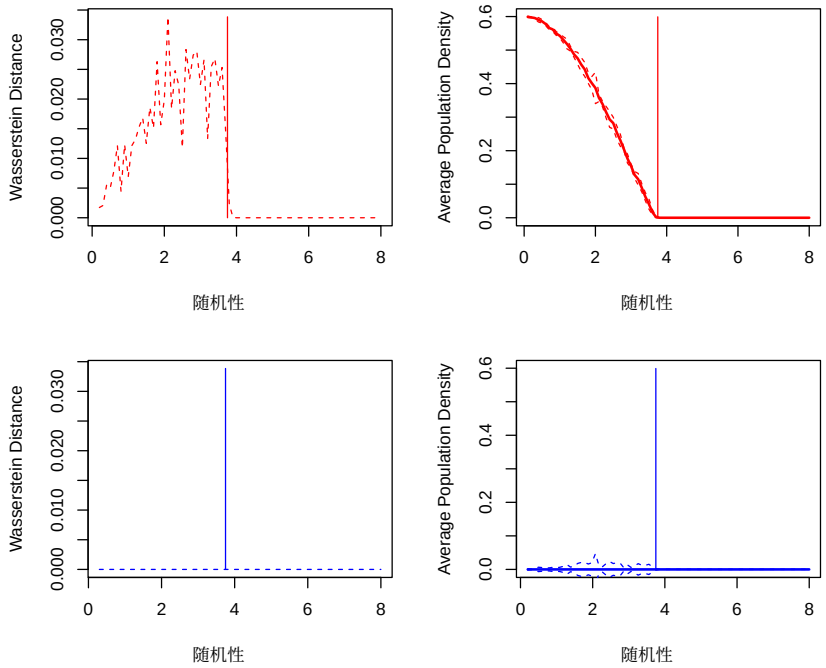

图12： $r_1 = 0.1,\ r_2 = 0.8,\ H_1 = 0.5,\ H_2 = -.9,\ m = 0.8,\ a = 1.2,\ b = 0.4,\ c = 0.6,$ d =1, $p = 10$ 对应确定性情形中的无猎物轴向不动点。

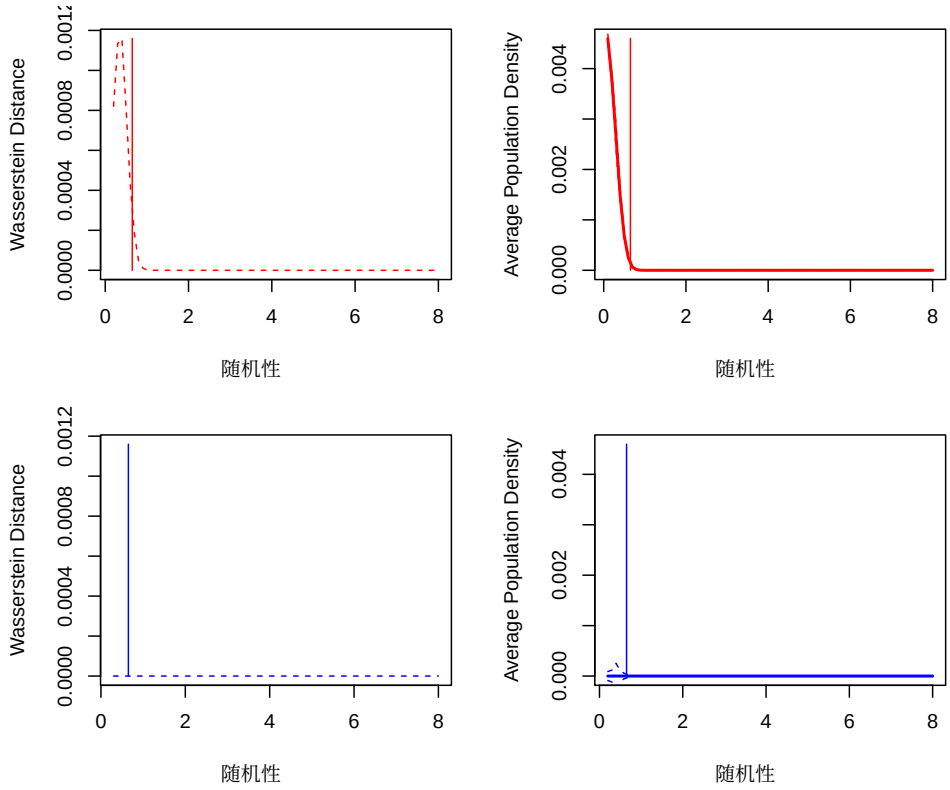

图13： $r_1 = 0.1,\ r_2 = 0.8,\ H_1 = -0.1,\ H_2 = -1,\ m = 0.9,\ a = 0.4,\ b = 0.5,\ c = 1,$ d =2。2, $p = 0.2$。对应于确定性情形中不存在内部不动点。

4 讨论

1. 值得注意的是，Wasserstein距离图与平均种群密度图存在相似之处。2. 实际上，在图9–13中，随机性存在一些临界值；超过这些临界值后，捕食者和猎物的平均密度都会发生定量变化。它们分别用实线表示：捕食者对应红线，猎物对应蓝线。Wasserstein距离图中也能看到对应的距离下降。3. 单从分岔的角度来看，这种下降表明随机性似乎会使两个物种都发生超临界叉形分岔。4. 单从统计学角度来看，发生分岔时得到的Wasserstein距离明显呈单峰且右偏，而右偏程度显然为零。5. 另一个重要结论是，Wasserstein距离清楚地显示了猎物的持存情况，见图11。事实上，除捕食者消失导致的单个峰值外，Wasserstein距离呈单峰分布，且数值处于相同范围内。6. 图12 很有意思，它表明捕食者虽然在环境随机性作用下能够持存一段时间，但最终会因缺少猎物而灭绝。另一方面，猎物则会因捕食和环境波动而迅速灭绝。7. 需要注意的是，模拟采用了确定性情形下对应两个内部不动点的参数。其余情形也能得出与上述类似的观察结果。8. 我们观察到，环境波动的人均幅度只是种群密度的线性函数。也可以考虑结构更复杂的人均幅度函数，尤其是更高次的多项式，而不会从根本上改变我们在此得出的结论。

我们的模拟只是一个初步的概念验证，表明 Wasserstein距离或可成功用于研究随机环境中的分岔。然而，还需要在理论和实践层面开展进一步研究，以加深理解。由于Wasserstein距离易于计算，不妨探究它能否作为计算最大李雅普诺夫指数的替代方法，用于实证评估混沌事件。

参考文献

W. C. Allee。《动物生态学原理》。W.B. Saounders Co.，费城，1949。ISBN 0-7216-1120-6。

L. Assas、B. Dennis、S. Elaydi、E. Kwessi 和 G. Livadiotis。具有阿利效应的层级竞争模型 II：迁入情形。生物动力学杂志，9(1):288–316，2015a。L. Assas、S. Elaydi、E. Kwessi、G. Livadiotis 和 D. Ribble。具有阿利效应的层级竞争模型。生物动力学杂志，9:32–44，2015b。S. Balreira、E. Elaydi 和 R. Luis。高维单调映射的全局稳定性。差分方程与应用杂志，23(12):2037–2071，2014。P. Bena¨ım 和 S. J. Schreiber。随机环境中结构化种群的持存。*Theor. Pop. Biol.*，76(1):19–34，2009。P. Chesson。空间异质环境中竞争共存的一般理论。*Theor. Popul. Biol.*，58(3):211–237，2009。R. Durrett。《随机微积分：实用导论》。CRC出版社，1996。doi: https: //doi.org/10.1201/9780203738283。S. Elaydi、E. Kwessi 和 G. Livadiotis。具有阿利效应的层级竞争模型 III：多物种。生物动力学杂志，2018。doi: 10.1080/17513758.2018. 1439537。A. Hening 和 Y. Li。持存生态系统的平稳分布。数学生物学杂志，82(64)，2021。doi: https://doi.org/10.1007/s00285-021-01613-2。A. Hening、D. H. Nguyen 和 S. J. Schreiber。三维随机生态系统动力学的分类。应用概率年刊，32(2): 893–931，2022。C. S Holling。简单类型捕食和寄生的一些特征。加拿大昆虫学家，91(7):385–395，1959。J. A. Hutchings。物种恢复受损的阈值。英国皇家学会学报*B*辑，282:20150654，2015。doi: 10.1098/rspb.2015.0654。E. Kwessi、S. Elaydi、B. Dennis 和 G. Livadiotis。单物种种群模型的近乎精确离散化。自然资源建模，2018。doi: 10.1111/nrm.12167。G. N. Milstein。随机微分方程的近似积分。概率论及其应用，19(3):557–000，1975。B. Oksendal。《随机微分方程：导论与应用》。 (Universitext)。施普林格，2014。M. Turelli。随机环境与随机微积分。*Theor. Popul. Biol*，12(2): 140–178，1977。C. Villani。《最优传输：旧与新》。施普林格，2008。ISBN 978-3-540-71050-9。

5 附录

5.1 定理3的证明

证明。令

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} xe^{r_1-x+\frac{d(b+cx)y}{1+py(b+cx)}+H_1}, & ye^{r_2-y-\frac{m}{a+y}-\frac{(b+cx)y}{1+py(b+cx)}+H_2} \end{pmatrix}.$$

考虑李雅普诺夫函数 $L(x,y)=x^2+y^2$。
Then

$$\begin{aligned} L(F(x,y))-L(x,y) &= x^2\left[e^{2\left(r_1+H_1-x+\frac{d(b+cx)y}{1+py(b+cx)}\right)}-1\right] \\ &+ y^2\left[e^{2\left(r_2+H_2-\frac{m}{a+y}-\frac{(b+cx)y}{1+py(b+cx)}\right)}-1\right] \\ &\le x^2\left[e^{2\left(r_1+H_1+\frac{db}{p}\right)}-1\right]+y^2\left[e^{2(r_2+H_2)}-1\right]. \end{aligned}$$

因此，$L(F(x,y))-L(x,y)\le 0$ 当 $r_1+H_1+\frac{d}{p}<0$ 且 $r_2+H_2<0$ 时。这表明平衡点 (0,0) 是全局渐近稳定的。回想一下，

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{(b+cx)y}{1+py(b+cx)}\le\frac{d}{p}, \\ F(x,y) &= (F_1(x,y),F_2(x,y))=(xf_1(x,y),yf_2(x,y)). \end{aligned}$$

and

$$\begin{cases} f_1(x,y)=e^{r_1+H_1-x+dh(x,y)}\le e^{r1+H_1+\frac{d}{p}} \\ f_2(x,y)=e^{r_2+H_2-y-\frac{m}{a+y}-h(x,y)}\le e^{r_2+H_2} \end{cases} \tag{5.1}$$

考虑李雅普诺夫函数

$$L(x,y)=(x-x_*)^2+(y-y_*)^2.$$

并令 $\Delta L=L(F(x,y))-L(x,y)$. 那么

$$\begin{aligned} \Delta L &= (xf_1(x,y)-x_*)^2+(yf_2(x,y)-y_*)^2-(x-x_*)^2-(y-y_*)^2 \\ &\le (\alpha x-x_*)^2+(\beta x-y_*)^2-(x-x_*)^2-(y-y_*)^2 \\ &= (\alpha^2-1)x^2-2(\alpha-1)x_*x+(\beta^2-1)y^2-2(\beta-1)y_*y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha^2-1)\left(x-\frac{1}{\alpha+1}x_*\right)^2-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}x_*^2\\
&+ (\beta^2-1)\left(y-\frac{1}{\beta+1}y_*\right)^2-\frac{\beta-1}{\beta+1}y_*^2
\end{aligned}
$$

令 $a_0=\max\{\alpha^2-1,\beta^2-1\}$，并令 $b_0=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}x_*^2+\frac{\beta-1}{\beta+1}y_*^2$。若 $a_0\le 0$ 且 $x_*=y_*=0$，则 $\Delta L\le 0$。特别地，若 $a_0=0$，那么显然，对于任意的 (x_*,y_*)，都有 $\Delta L\le 0$。假设 $a_0>0$。那么 $b_0\ge 0$。令 $r_0^2=\frac{b_0}{a_0}$。
那么 $\Delta L\le 0$若 $\left(x-\frac{1}{\alpha+1}x_*\right)^2+\left(y-\frac{1}{\beta+1}y_*\right)^2<r_0^2$。也就是说，$\Delta L\le 0$若 $(x,y)\in B\left(\left(\frac{1}{\alpha+1}x_*,\frac{1}{\beta+1}y_*\right),r_0\right)$，因此局部稳定性成立。 □

5.2 定理 9 的证明

证明。设 $0<\theta<1$。则 $e^{-x}\ge -x+\theta$。令 $g_1(x(t)):=\ln(x(t))$。
由 Itô 公式可得

$$
\begin{aligned}
dg_1(x(t)) &= \left[\frac{\partial g_1}{\partial t}+x(t)f_1[x(t),y(t)]\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{2}\right]dt+x(t)\sigma_1\frac{\partial g_1}{\partial x}dW_1(t)\\
&= \left[e^{r_1+H_1-x(t)+\frac{d(b+cx(t))}{1+py(t)(b+cx(t))}}-\frac{\sigma_1^2}{2}\right]dt+\sigma_1 dW_1(t)\\
&\ge \left[e^{r_1+H_1-x(t)}-\frac{\sigma_1^2}{2}\right]dt+\sigma_1 dW_1(t)\\
&\ge \left[e^{r_1+H_1}(-x(t)+\theta)-\frac{\sigma_1^2}{2}\right]dt+\sigma_1 dW_1(t)\,.
\end{aligned}
$$

从 0 积分到 t，可得

$$
\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)\ge\left[\theta e^{r_1+H_1}-\frac{\sigma_1^2}{2}\right]t-e^{r_1+H_1}\langle x(t)\rangle+\sigma_1 W_1(t)\,.
$$

设 $\gamma_{11}=\theta e^{r_1+H_1}-\frac{1}{2}\sigma_1^2$ 和 $\gamma_{12}=e^{r_1+H_1}$。设 $g_2(y(t)):=\ln(y(t))$。那么根据伊藤公式，我们有

$$
\begin{aligned}
dg_2(y(t)) &= \left[\frac{\partial g_1}{\partial t}+y(t)f_2[x(t),y(t)]\cdot\frac{\partial g_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{2}\right]dt+y(t)\sigma_1\frac{\partial g_1}{\partial y}dW_1(t)\\
&= \left[e^{r_2+H_2-y(t)-\frac{m}{a+y(t)}-\frac{b+cx(t)}{1+py(t)(b+cx(t))}}-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right]dt+\sigma_2 dW_2(t)\\
&\ge \left[e^{r_2+H_2-y(t)-\frac{m}{a}-\frac{1}{p}}-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right]dt+\sigma_2 dW_2(t)\\
&\ge \left[e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}-\frac{1}{p}}(-y(t)+\theta)-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right]dt+\sigma_2 dW_2(t)\,.
\end{aligned}
$$

从 0 积分到 t，我们有

$$\ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right) \geq \left[\theta e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}-\frac{1}{p}} - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right] t - e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}-\frac{1}{p}} \langle y(t)\rangle + \sigma_2 W_2(t) .$$

令 $\gamma_{21} = \theta e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}-\frac{1}{p}} - \frac{1}{2}\sigma_2^2$和 $\gamma_{22} = e^{r_2+H_2-\frac{m}{a}-\frac{1}{p}}$。
由此可得 γ_{11}，$\gamma_{21} > 0$，若 $1 > \theta > \frac{1}{2}\max\left\{\sigma_1^2 e^{-r_1-H_1},\ \sigma_2^2 e^{\frac{m}{a}+\frac{1}{p}-r_2-H_2}\right\}$.

对于这样的 θ，令 $\gamma_1 = (\gamma_{11},\ \gamma_{12})$ 和 $\gamma_2 = (\gamma_{21},\ \gamma_{22})$。令 $\sigma = (\sigma_1,\ \sigma_2)$。
由于 $X(t) = (x(t)\ y(t))$ 且 $W(t) = (W_1(t)\ W_2(t))$，我们将得到如下向量形式

$$\ln(X(t)) \geq \gamma_1 t - \gamma_2 \int_0^t X(u)du + \sigma W(t) .$$

然后根据上述引理8，我们得出结论

$$\liminf_{t\to\infty} \langle X(t)\rangle \geq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} > 0 \quad \text{almost surely} .$$

因此，$X(t)$ 是均值强持续的。

□

5.3 定理 13证明

考虑随机微分方程 (3.1)。它的形式为

$$dZ_i(t) = Z_i(t)f_i(\mathbf{Z}(t))dt + Z_i(t)g_i(\mathbf{Z}(t))dW_i(t), \quad i = 1, 2 ,$$

其中 $Z_1(t) = x(t)$ 和 $Z_2(t) = y(t$。由注 10 可知，若

$$\frac{1}{2}\max\left\{\sigma_1^2 e^{-r_1-H_1}, \sigma_2^2 e^{\frac{m}{a}+\frac{1}{p}-r_2-H_2}\right\} < 1 ,$$

则对于任意遍历不变测度 $\lambda_{i=1,2}(\mu) > 0$，max μ。对于给定的 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$，根据 Hening 和 Li (2021) 中的定理 2.1，接下来需要验证以下假设

A_1: diag$(g_1(\mathbf{z}) \cdots, g_n(\mathbf{z}))\Gamma^T\Gamma$diag$(g_1(\mathbf{z}) \cdots, g_n(\mathbf{z}))$ 是正定矩阵 .

A_2： $f_i(\cdot)$ $g_i(\cdot)$: $\mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ 是局部利普希茨函数，对于 $i = 1$，2。

A_3： 存在$\mathbf{c} = (c_1,\ c_2) \in \mathbb{R}^2_+$ 和 $\gamma_b > 0$，使得

$$\limsup_{\|z\|\to\infty}\left[\frac{\sum_{i=1}^2 c_i z_i f_i(\mathbf{z})}{1+\sum_{i=1}^2 c_i z_i} - \frac{1}{2}\frac{\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}c_i c_j z_i z_j g_i(\mathbf{z})g_j(\mathbf{z})}{\left(1+\sum_{i=1}^n c_i z_i\right)^2} + \gamma_b\left(1+\sum_{i=1}^2\left(\left|f_i(\mathbf{z})+g_i^2(\mathbf{z})\right|\right)\right)\right] < 0 .$$

注意，在我们的情形下，对于 $i = 1$，2，$g_i(\mathbf{Z}(t)) = 1$。
对于 A_1，我们有

$$\text{diag}(g_1(\mathbf{z}), \cdots, g_n(\mathbf{z}))\Gamma^T\Gamma\text{diag}(g_1(\mathbf{z}), \cdots, g_n(\mathbf{z})) = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix} ,$$

由于 $\sigma_i > 0$ 对于 $i = 1, 2$，因此这是一个正定矩阵。
对于 A_2，$f_i(\cdot)$ 是导数有界的局部连续可微函数，因此它们是局部 Lipschitz 函数。

A_3 需要稍作推导。由式（5.1）可知，给定 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2_+$，存在 $k_1, k_2 > 0$，使得 $f_i(\mathbf{z}) \leq k_i$。令 $k = \max\{k_1, k_2\}$。于是，对于所有 $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+$

$$\frac{\sum_{i=1}^2 c_i z_i f_i(\mathbf{z})}{1 + \sum_{i=1}^2 c_i z_i} \leq k \frac{\sum_{i=1}^2 c_i z_i}{\sum_{i=1}^2 c_i z_i} \leq k \ .$$

同理，

$$1 + \sum_{i=1}^2 \left(\left| f_i(\mathbf{z}) + g_i^2(\mathbf{z}) \right| \right) \leq 1 + k + 2 = 3 + k \ .$$

此外，

$$\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} c_i c_j z_i z_j g_i(\mathbf{z}) g_j(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 c_i^2 z_i^2 \ .$$

因此，只要能找到 $\gamma_b > 0$ 和 $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+$，使得 A_3 成立，

$$k + \gamma_b(3 + k) \leq \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 c_i^2 z_i^2}{\left(1 + \sum_{i=1}^2 c_i z_i\right)^2} \ .$$

我们可以利用柯西-施瓦茨不等式进一步细化这一条件。具体而言，令 $\sigma = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$。由柯西-施瓦茨不等式可得，

$$\left(\sum_{i=1}^2 c_i z_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^2 1^2 \sum_{i=1}^2 c_i^2 z_i^2 = 2 \sum_{i=1}^2 c_i^2 z_i^2 \ .$$

于是 $\sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 c_i^2 z_i^2 \geq \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^2 c_i z_i \right)^2$。因此，如果我们能够找到 $\gamma_b > 0$ 和 $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+$ 使得

$$k + \gamma_b(3 + k) \leq \frac{\sigma}{4} \frac{\left(\sum_{i=1}^2 c_i z_i\right)^2}{\left(1 + \sum_{i=1}^2 c_i z_i\right)^2} \ .$$

现在令 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_+$。我们选取一个 $\gamma_0 \in (0, 1)$。存在 $x \in \mathbb{R}^+$ 使得 $x \geq \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}$。因此，我们将有 $\frac{x}{1+x} \geq \gamma_0$，这意味着 $\frac{x^2}{(1+x)^2} \geq \gamma_0^2$。特别地，在区间 $[\min\{z_2, z_2\}, \max\{z_1, z_2\}]$ 中选取 x，存在 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+$ 使得 $x = \sum_{i=1}^2 c_i z_i$ 且 $\frac{\left(\sum_{i=1}^2 c_i z_i\right)^2}{\left(1 + \sum_{i=1}^2 c_i z_i\right)^2} \geq \gamma_0^2$。最后，我们选取 γ_b 使得 $\gamma_0^2 = 4(k + \gamma_b(3 + k))$，证明完毕。$\sigma$