arXiv:2302.02026v2 [math.AG] 25 May 2023

爆球等价下复代数曲线的分类

´JOSE EDSON SAMPAIO 和 EURIPEDES CARVALHO DA SILVA

Abstract. 本文致力于研究（全局）爆球等价下的复代数集。这种等价关系严格介于半代数双 Lipschitz 等价与拓扑等价之间。本文的主要结果是对复代数曲线进行完整分类。首先，我们给出无穷远处爆球同胚下复代数曲线的完整分类；随后，给出（全局）爆球同胚下复代数曲线的完整分类。对于无穷远处的分类，我们还给出了标准形分类。我们也介绍了爆球等价的若干性质。例如，我们证明，曲线次数在无穷远处爆球同胚下保持不变。本文还给出另一项性质，即一个伯恩斯坦型结果：若一个纯维复代数集在无穷远处与欧几里得空间爆球面同胚，那么它必定是一个仿射线性子空间。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 4 2.1. 切锥 4 2.2. 相对重数 5 2.3. 复代数集的次数 6 2.4. 半代数集的端 6 3. 爆球等价及其若干例子和性质 6 3.1. 爆球等价的定义 6 3.2. 相对重数的吹球面不变性 8 3.3. 切锥的吹球面不变性 8

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14R05；32S20；14B05；32S50。
Key words and phrases. 吹球几何；Lipschitz 几何；代数集；代数曲线分类。第一位署名作者获得了巴西国家科学技术发展委员会项目（编号 310438/2021-7）的部分资助。本研究获得了 Serrapilheira 研究所的资助（项目编号 Serra – R-2110-39576）。

3.4. 曲线次数的吹球面不变性 8 3.5. 一个伯恩斯坦型结果 9 3.6. 半代数外利普希茨同胚是爆球面同胚 9 3.7. 爆球面同胚的代数曲线的射影闭包 11 4. 吹球等价下复代数曲线的分类 13 4.1. 无穷远处复代数曲线的分类 13 4.2. 无穷远处分类的标准形 17 4.3. 复代数曲线的整体分类 17 5. Lipschitz 几何的一个应用 22 参考文献 25

1. Introduction

数学中最自然且最重要的问题之一，是将对象分类到给定范畴中的问题。例如，一个重要的分类结果是：在微分同胚下对紧致（无边界）光滑曲面进行分类。以下事实是众所周知的：设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $Y \subset \mathbb{R}^m$ 是两个连通的光滑（无边界）紧致曲面。则以下陈述等价：

(1) X 和 Y 微分同胚；(2) X 和 Y 是（内或外）双 Lipschitz 同胚的（双 Lipschitz 同胚的定义见定义 3.11）；(3) $\theta(X) = \theta(Y)$ 且 $g(X) = g(Y)$,

其中，$g(M)$ 表示 M 的亏格，$\theta(M) = 1$（如果 M 是可定向的），而 $\theta(M) = -1$（如果 M 是不可定向的）。

对于 $\mathbb{R}^n$ 中（不一定紧）的正常嵌入的光滑曲面，分类问题要困难得多，而且会发生巨大变化，正如下一个例子所示。

例 1.1. 设 $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$ 和 $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2\}$。

a) $\theta(X) = \theta(Y)$, $g(X) = g(Y)$，但 X 和 Y 不同胚；(b) X 和 Z 微分同胚，但它们不是内利普希茨等价；

如果允许出现奇点，那么分类问题会更加困难。

为了对这类曲面的拓扑性质有所掌握，我们不妨假设它们是半代数的。由于紧致流形（无边界）与半代数流形微分同胚（见 [21]），从某种意义上说，这一

假设并不过于严格。在对曲面作出这一假设后，第一作者与 Fernandes 在 [15] 中给出了所有具有孤立奇点的半代数曲面在内利普希茨同胚下的完整分类。

由于目前尚无关于半代数曲面在外部双 Lipschitz 同胚下的局部分类，我们认为，要实现此类曲面在外部双 Lipschitz 同胚下的整体分类仍有很长的路要走。然而，任何半代数外部双 Lipschitz 同胚都是爆球同胚（见定义 3.1 和命题3.12），因此，在外部双 Lipschitz 同胚下分类复代数曲面或半代数曲面这一问题中，一个中间步骤是对爆球同胚下的代数曲面进行分类。若想进一步了解爆球等价的局部性质，请参见 [1], [2], [24], [26], [27] 和 [28]。

Targino 最近在 [30] 中完成了关于外部双 Lipschitz 同胚下复代数曲线分类的问题。这一结果本身就很重要；此外，研究外部双 Lipschitz 同胚下复代数曲面的分类也很重要，因为两个复代数曲面之间的外部双 Lipschitz 同胚会诱导其奇异集之间的外部双 Lipschitz 同胚（见 [25] 和 [4]），而这些奇异集是点或复代数曲线。需要指出的是，有些代数曲线彼此爆球同胚，却并非外部双 Lipschitz 等价（见例 4.7）。不过，爆球等价仍是一种足够强的等价关系，能够捕捉奇点。事实上，由 [27] 可知，两个复代数曲面之间的爆球同胚会诱导其奇异集之间的爆球同胚。

因此，尝试在吹球同胚下对复代数曲线进行分类便顺理成章，而本文的主要目标就是给出这样的分类（见定理4.2和定理4.6）。更确切地说，我们给出两种分类：一种是在无穷远处的吹球同胚下进行的分类（见定理 4.2），另一种是在（全局）吹球同胚下进行的分类（见定理 4.6）。此外，对于无穷远处的吹球同胚下的分类，我们还给出了标准形（见定理4.3）。

需要强调的是，这里给出的分类对于空间代数曲线同样成立，而不仅仅适用于 [30] 中所讨论的平面代数曲线。此外，由于存在一些空间代数曲线，它们与任何平面代数曲线都不爆球面同胚（见注

4.8），因此空间代数曲线的分类问题比平面代数曲线的分类问题更为困难。

在第5节中，作为 [30] 和 [15], 中结果的推论，我们给出一些与 LNE 集相关的结果（见定义5.1）。例如，复代数曲线是 LNE，当且仅当它与一条 LNE 复代数曲线爆球面同胚（见命题 5.7）；而两条 LNE 复代数曲线爆球面同胚，当且仅当它们外部利普希茨等价（见推论 5.9）。

2. Preliminaries

这里，我们假设所有代数集均为纯维数。

2.1. 切锥。设 $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个无界半代数集（或具有 $p \in \overline{X}$ 的亚解析集）。如果存在一个趋于无穷远（或趋于 p）的点列 $\{x_i\} \subset X$，以及一个正实数列 $\{t_i\}$，使得 $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是 X 在无穷远处（或 p）的切向量，则称 $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ 为 X 在无穷远处（或 p）的切向量。

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{t_i} x_i = v \quad (\text{resp. } \lim_{i\to\infty} \frac{1}{t_i}(x_i - p) = v).$$

令 $C(X,\infty)$（分别为 $C(X,p)$）表示 X 在无穷远处（分别在 p处）的所有切向量的集合。我们称 $C(X,\infty)$ 为 X 在无穷远处（分别在 p处）的切锥。

注 2.1. 若 $A \subset \mathbb{C}^n$ 是一个复代数集，且 $p \in A \cup \{\infty\}$，那么 $C(A,p)$ 是一组齐次多项式的零点集（见 [8, 第 84 页，命题 2], [18, 定理 1.1] 以及 [29, 定理 3.1]）。特别地，$C(A,p)$ 是经过原点的复直线之并。

我们有如下刻画。

推论2.2（推论 2.16 [14]）。设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个无界半代数集。那么 $C(X,\infty) = \{v \in \mathbb{R}^n$；存在 $\exists \gamma\colon (\varepsilon,+\infty) \to Z$ C^0 半代数，使得 $\lim_{t\to+\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ 且 $\gamma(t) = tv + o_\infty(t)\}$，其中 $g(t) = o_\infty(t)$ 表示 $\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = 0$。

因此，我们得到如下结果

推论2.3 (推论2.18 [14])。设 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 是一个无界半代数集。设 $\phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 是由 $\phi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ 给出的半代数映射，并记 $X = \phi(Z \setminus \{0\})$。那么 $C(Z,\infty)$ 是一个半代数集，满足 $C(Z,\infty) = C(X,0)$，且 $\dim_{\mathbb{R}} C(Z,\infty) \le \dim_{\mathbb{R}} Z$。

表示子集$X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的无穷远处切锥（分别为 p）的另一种方式，是对 $\mathbb{R}^{n+1}$ 在无穷远处（分别在 p）进行球面爆裂。考虑 $\mathbb{R}^{n+1}, \rho_\infty$ 在无穷远处（分别在 p）的球面爆裂： $\mathbb{S}^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$（分别为 ρ_p: $\mathbb{S}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$），由 $\rho_\infty(x, r) = \frac{1}{r}x$（分别为 $\rho_p(x, r) = rx + p$）给出。

注意， ρ_∞: $\mathbb{S}^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$（分别地， ρ_p: $\mathbb{S}^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$）是一个同胚，其逆映射 ρ_∞^{-1}: $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n \times (0, +\infty)$（分别地， ρ_p: $\mathbb{S}^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$）由 $\rho_\infty^{-1}(x) = (\frac{x}{\|x\|}, \frac{1}{\|x\|})$（分别地， $\rho_p^{-1}(x) = (\frac{x-p}{\|x-p\|}, \|x - p\|)$）给出。

子集 X 在球面爆破ρ_∞ 下的严格变换为 $X'_\infty := \rho_\infty^{-1}(X \setminus \{0\})$（分别地， $X'_p := \rho_p^{-1}(X \setminus \{0\})$）。子集 $X'_\infty \cap (\mathbb{S}^n \times \{0\})$（分别地， $X'_p \cap (\mathbb{S}^n \times \{0\})$）称为 X'_∞（分别地， X'_p）的边界，记作 $\partial X'_\infty$（分别地， $\partial X'_p$）。

注 2.4. 若 $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是半代数集，则 $\partial X'_\infty = (C(X, \infty) \cap \mathbb{S}^n) \times \{0\}$（分别地， $\partial X'_p = (C(X, p) \cap \mathbb{S}^n) \times \{0\}$）。

2.2. 相对重数。设 $X \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 是一个 d 维的亚解析子集，且 $p \in \mathbb{R}^{m+1} \cup \{\infty\}$。若存在一个开子集 $U \subset \mathbb{R}^{m+2}$，满足 $x \in U$，使得 $x \in \partial X'_p$ 是 $\partial X'_p$ 的简单点，则称 $x \in \partial X'_p$ 为 $\partial X'_p$ 的简单点:

a) 对所有 $i = 1, \cdots, r$， $(X'_p \cap U) \setminus \partial X'_p$ 的连通分支 $X_1, \cdots, X_r$ 都是 $\mathbb{R}^{m+2}$ 的拓扑子流形，且 $\dim X_i = \dim X$； b) 对所有$i = 1, \cdots, r$， $(X_i \cup \partial X'_p) \cap U$ 都是带边界拓扑流形。

令 $\mathrm{Smp}(\partial X'_p)$ 表示 $\partial X'_p$ 的简单点集合，并定义 $C_{\mathrm{Smp}}(X, p) = \{t \cdot x;\ t > 0$ 以及 $x \in \mathrm{Smp}(\partial X'_p)\}$。令 $k_{X,p}$: $\mathrm{Smp}(\partial X'_p) \to \mathbb{N}$ 为函数，使得 $k_{X,p}(x)$ 是芽 $(\rho_p^{-1}(X \setminus \{p\}), x)$ 的连通分支数。

注 2.5. 只要 $\partial X'_p$ 是一个 $(d-1)$ 维子集， $\mathrm{Smp}(\partial X'_p)$ 就是 $\partial X'_p$ 的 $(d-1)$ 维部分的开稠密子集，其中 $d = \dim X$。

定义 2.6. 显然，函数 $k_{X,\ p}$ 是局部常数。事实上， $k_{X,\ p}$ 在 $\mathrm{Smp}(\partial X'_p)$ 的每个连通分支 C_j 上都是常数。于是，我们定义 X 在 p 处（沿着 C_j）的相对重数为$k_{X,\ p}(C_j) := k_{X,\ p}(x)$，其中 $x \in C_j$。此外，当 X是一个复代数集时，存在一个复代数集 σ，满足 $\dim \sigma < \dim X$，使得$X_j \setminus \sigma$ 仅与一个连通分支 C_i 相交（见 [8], 第 132–133 页），其中每个 X_j 都是切锥 $C(X, p)$ 的不可约分支。于是我们定义

同样，$k_{X,\ p}(X_j) := k_{X,\ p}(C_i)$。设 X_1，……，X_r 是$C(X,p)$的不可约分支。如有必要，通过重新排列指标，我们假设 $k_{X,\ p}(X_1) \leq \cdots \leq k_{X,\ p}(X_r)$。于是我们定义 $k(X,p) = (k_{X,\ p}(X_1) ..., k_{X,\ p}(X_r))$。

2.3. 复代数集的次数。

定义 2.7。设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是一个纯 p维复代数集，并且设 $L \in G(n-p,n)$ 满足 $L \cap C(Y,\infty) = \{0\}$。令$\Pi\colon\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ 为满足 $L = \Pi^{-1}(0)$ 的正交投影。因此，存在一个真代数子集 $\sigma \subset \mathbb{C}^p$，使得 $d = \#(\Pi^{-1}(t) \cap X)$ 不依赖于 $t \in \mathbb{C}^p \setminus \sigma$。我们强调，$d$ 也不依赖于L。因此，我们将 X 的次数定义为 $\deg(X) = d$。

命题 2.8（ [14]中的命题 3.3）。设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是一个纯维数代数子集。那么，$\deg(X) = 1$当且仅当 X 是 $\mathbb{C}^n$的一个仿射线性子空间。

注 2.9 ([6])。设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是一个纯维复代数集，且 $X_1, \cdots, X_r$是 $C(X,\infty)$ 的不可约分支。那么

$$\deg(X) = \sum_{j=1}^{r} k_{X,\infty}(X_j) \cdot \deg(X_j).$$

2.4. 半代数集的端。对于 $R > 0$，我们记 $\mathbb{S}_R^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = R\}$ 和 $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < R\}$。此外，若 $X \subset \mathbb{R}^n$，我们定义 $\mathrm{Cone}_\infty(X) = \{tx;\ x \in X \text{ 和 } t \in [1,+\infty)\}$。

命题 2.10。设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是一个半代数集。那么存在$R_0 > 0$，使得对每个 $R \geq R_0$，都存在一个同胚 $h\colon C \setminus B_R(0) \to \mathrm{Cone}_\infty(C \cap \mathbb{S}_R^{n-1})$，满足 $\|h(x)\| = \|x\|$ 对所有 $x \in C \setminus B_R(0)$ 都成立。此外，若 C 有孤立奇点，则我们可以选取 R_0，使得$C \cap \mathbb{S}_R^{n-1}$ 对所有 $R \geq R_0$ 都光滑。

$C \setminus B_R(0)$ 的每个连通分支都称为 C 的一个端。

3. The blow-spherical equivalence and some examples and properties

3.1. 爆球等价的定义。

定义 3.1. 设 X 和 Y 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的子集。设 $p \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$、$q \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$。若同胚 $\varphi\colon X \to Y$ 满足

$q = \lim_{x\to p}\varphi(x)$ 称为在 p 处的爆球同胚，若该同胚

$$\rho_q^{-1}\circ\varphi\circ\rho_p\colon X_p'\setminus\partial X_p'\to Y_q'\setminus\partial Y_q'$$

可扩张为同胚 $\varphi'\colon X_p'\to Y_q'$。若同胚 $\varphi\colon X\to Y$ 对所有 $p\in\overline{X}\cup\{\infty\}$ 都是爆球同胚，则称其为爆球同胚。在这种情况下，我们称集合 X 和 Y 爆球面同胚或吹同构（在 (p,q) 处）。

定义 3.2. 设 X 和 Y 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的子集。若爆球同胚 $h\colon X\to Y$ 满足 $h($ 奇点集 $_1(X))=$ 奇点集 $_1(Y)$，且 $h|_{X\setminus \mathrm{Sing}_1}(X)\colon X\setminus$ 奇点集 $_1(X)\to Y\setminus$ 奇点集 $_1(Y)$ 是一个 C^1 微分同胚，则称其为强吹球面同胚。其中，对于 $A\subset\mathbb{R}^p$，奇点集 $_k(A)$ 表示满足以下条件的点 $x\in A$：对于 x 的任意开邻域 U，$A\cap U$ 都不是 $\mathbb{R}^p$ 的 C^k 子流形。在 ∞,φ 处的爆球面同胚 $X\to Y$:，若存在紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$ 和 $K\subset\mathbb{R}^m$，使得 $\tilde{\varphi}(X\setminus K)=Y\setminus K$，且限制映射 $\varphi|_{X\setminus K}\colon X\setminus K\to Y\setminus K$ 是一个强吹球面同胚，则称其为在 ∞ 处的强吹球面同胚。

注 3.3. 我们来看一些例子:

(1) 对任意 $X\subset\mathbb{R}^n$，$\mathrm{Id}: X\to X$ 都是一个爆球同胚；(2) 设 $X\subset\mathbb{R}^n$、$Y\subset\mathbb{R}^m$ 和 $Z\subset\mathbb{R}^k$ 是子集。若 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to Z$ 都是爆球同胚，则 $g\circ f\colon X\to Z$ 是一个爆球同胚。

因此，我们得到一个称为吹球面范畴的范畴，记作 BS，其对象是欧几里得空间的所有子集，态射是所有爆球同胚。

根据定义，若 X 和 Y 强爆球面同胚，则它们爆球面同胚；但反过来通常不成立，下一例将对此进行说明。

例3.4. 设 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y=|x|\}$。映射 $\varphi\colon\mathbb{R}\to V$ 由 $\varphi(x)=(x,|x|)$ 给出，它是一个爆球同胚（见命题 3.12 ）。然而，由于 $\mathrm{Sing}_1(\mathbb{R})=\emptyset$ 且 $\mathrm{Sing}_1(V)=\{(0,0)\}$，不存在强吹球面同胚 $h\colon\mathbb{R}\to V$，特别地，$\mathbb{R}$ 和 V 不是强爆球面同胚。

3.2. 相对重数的吹球面不变性。

命题 3.5. 设 X 和 Y 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的半代数集。设 $\varphi\colon X \to Y$是 $p \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$处的一个爆球同胚。那么

$$k_{X,p}(x) = k_{Y,q}(\varphi'(x)),$$

对所有 $x \in Smp(\partial X'_p) \subset \partial X'_p$，其中 $q = \lim_{x\to p}{}^{\varphi}(x)$。特别地，$k(X,p) = k(Y,q)$。

证明。由于 $\varphi\colon X \to Y$ 在 p 处是一个爆球同胚，我们有 $\varphi'\colon X'_p \to Y'_q$ 是一个同胚，满足 $\varphi'(\partial X'_p) = \partial Y'_q$ 且$\varphi'(\mathrm{Smp}(\partial X'_p)) = \mathrm{Smp}(\partial Y'_q)$。因此，对于每个 $x \in \mathrm{Smp}(\partial X'_p)$，芽 $(\rho_p^{-1}(X \setminus \{p\}), x) = (X'_p \setminus \partial X'_p, x)$ 的连通分支数等于芽 $(\rho_q^{-1}(Y \setminus \{q\}), \varphi'(x)) = (Y'_q \setminus \partial Y'_q, \varphi'(x))$ 的连通分支数，这意味着 $k_{X,\,p}(x) = k_{Y,\,q}(\varphi'(x))$。□

3.3. 切锥的吹球面不变性。下一个结果是 [27] 中命题 3.3 的推广。

命题 3.6. 如果 $h\colon X \to Y$在 $p \in X \cup \{\infty\}$ 处是一个爆球面同胚，那么 $C(X,p)$ 和 $C(Y,h(p))$ 在 0 处爆球面同胚。

证明。令 $q = \lim_{x\to p} h(x)$。于是 $h'_p\colon \partial X'_p \to \partial Y'_q$ 是一个同胚。令 $\nu_h\colon C(X,p) \cap \mathbb{S}^{n-1} \to C(Y,q) \cap \mathbb{S}^{m-1}$ 为满足对所有 $x \in C(X,p) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ 都有 $h'_p(x,0) = (\nu_h(x), 0)$ 的同胚。现在，我们定义 $d_p h\colon C(X,p) \to C(Y, q)$ 为

$$d_p h(x) = \begin{cases} \|x\| \nu_h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

由于 $\rho_0^{-1} \circ d_p h \circ \rho_0(x,t) = (\nu_h(x), t)$，$d_p h$ 在 0 处是一个爆球同胚。□

3.4. 曲线次数的吹球面不变性。

命题 3.7. 设 X 和 Y 是两条复代数曲线。如果 X 和Y 在 ∞ 处爆球面同胚，那么 $\deg(X) = \deg(Y)$。

证明。设 $X_1,\ldots,X_r$（分别为 $Y_1,\ldots,Y_s$）是 $C(X,\infty)$（分别为 $C(Y,\infty)$）的不可约分支。由命题 3.6 可知，$C(X,\infty)$ 与 $C(Y,\infty)$ 爆球面同胚，因此 $r = s$。由于

每个 X_i （分别为 Y_j）都是一条复直线，由命题 3.5 和注 2.9 可知

$$\begin{aligned}\deg X &= \sum_{i=1}^{r} k_{X,\infty}(X_i)\deg X_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} k_{X,\infty}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} k_{Y,\infty}(Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} k_{Y,\infty}(Y_i)\deg Y_i = \deg Y.\end{aligned}$$

□

3.5. 伯恩斯坦型结果。

定义 3.8. 若存在紧子集 K 和 $\tilde{K}$，分别属于 X 和 $\mathbb{R}^d$，使得 $X \subset \mathbb{R}^n$ 在 ∞ 处与一个 $\mathbb{R}^d \setminus \tilde{K}$ 爆球面同胚，则称子集 $X \subset \mathbb{R}^n$ 在无穷远处爆球面正则。$X \setminus K$

现在回顾 Prill 在 [23] 中证明的 Prill 定理。

引理 3.9（[23]，定理）。设 $C \subset \mathbb{C}^n$ 是一个拓扑流形复锥。那么 C 是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间。

命题 3.10. 设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是一个纯维复代数集。若 X 在无穷远处爆球面正则，则 X 是 $\mathbb{C}^n$ 的仿射线性子空间。

证明. 根据命题 3.6，$C(X,\infty)$ 与 $\mathbb{C}^k$ 同胚，其中 k =dim X，因此，$C(X,\infty)$ 是一个拓扑流形。根据 Prill 定理$C(X,\infty)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间，特别地，$C(X,\infty)$ 是不可约的。因此 deg$(C(X,\infty))$ $=1$，并且根据命题 3.5，我们有 $k_{X,\ \infty}(C(X,\infty))$ =1；再利用注 2.9，我们得到

$$\deg X = k_{X,\infty}(C(X,\infty)) \cdot \deg(C(X,\infty)) = 1.$$

于是，根据命题 2.8，X 是 $\mathbb{C}^n$ 的仿射线性子空间。 □

3.6. 半代数外利普希茨同胚是爆破解球同胚。给定一个道路连通子集 $X \subset \mathbb{R}^n$，X 上的内距离定义如下：给定两个点 $x_1, x_2 \in X$, $d_{X,\ inn}(x_1, x_2)$ 是 X 上连接 x_1 与 x_2的路径长度的下确界。我们用$d_{X,\ out}$ 表示限制在 X 上的 $\mathbb{R}^n$ 的欧几里得距离。

定义 3.11. 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $Y \subset \mathbb{R}^m$。映射 $f\colon X \to Y$ 称为外部（分别为内部）Lipschitz 映射，如果存在 $\lambda > 0$ 使得

$\|f(x_1)-f(x_2)\| \leq \lambda\|x_1-x_2\|$（分别为 $d_{X,\ inn}(f(x_1)\ f(x_2)) \leq \lambda d_{X,\ inn}(x_1, x_2)$）对于所有 $x_1, x_2 \in X$。如果一个外部 Lipschitz（分别为内部 Lipschitz）映射$f\colon X \to Y$ 的逆映射存在，且为外部 Lipschitz（分别为内部 Lipschitz），则称其为外部（分别为内部）双 Lipschitz 同胚；在这种情况下，我们称 X 和 Y 外部（分别为内部）双 Lipschitz 同胚。

命题3.12. 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $Y \subset \mathbb{R}^m$ 为半代数集。若$h\colon X \to Y$是一个半代数外部双 Lipschitz 同胚，则 h 是一个爆球同胚。

证明。首先，我们证明 h 在 ∞处是一个爆球同胚。因此，考虑由下式给出的 $h'_\infty\colon X'_\infty \to Y'_\infty$

$$h'_\infty(u,t) = \begin{cases} \left(\frac{h(\frac{u}{t})}{\|h(\frac{u}{t})\|}, \frac{1}{\|h(\frac{u}{t})\|}\right) & \text{if } t \neq 0 \\ \left(\frac{d_\infty h(u)}{\|d_\infty h(u)\|}, 0\right) & \text{if } t = 0 \end{cases}$$

其中，$d_\infty h\colon C(X,\infty) \to C(Y,\infty)$ 是按如下方式给出的映射：给定 $v \in C(X,\infty)$，令 $\gamma\colon (\epsilon,+\infty) \to X$为一条半代数弧，使得 $\gamma(t) = tv + o_\infty(t)$。那么，对于某个 $w \in C(Y,\infty)$，有 $h \circ \gamma(t) = tw + o_\infty(t)$。因此，我们定义 $d_\infty h(v) = w$。

断言 3.12.1. $d_\infty h\colon C(X,\infty) \to C(Y,\infty)$ 是一个外部双 Lipschitz 同胚。

断言 3.12.1 的证明。根据假设，存在一个 $K \geq 1$，使得

$$\frac{1}{K}\|x-y\| \leq \|h(x)-h(y)\| \leq K\|x-y\|.$$

现在，考虑 $v_1, v_2 \in C(X,\infty)$，并令 $\gamma_1, \gamma_2\colon (\epsilon,+\infty) \to X$半代数曲线，使得 $\gamma_i(t) = tv_i + o_\infty(t)$，其中 $i = 1, 2$。因此，

$$\frac{1}{K}\frac{\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|}{t} \leq \frac{\|h(\gamma_1(t))-h(\gamma_2(t))\|}{t} \leq K\frac{\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|}{t}.$$

将 t 送至无穷远处，我们得到

$$\frac{1}{K}\|v_1-v_2\| \leq \|d_\infty h(v_1)-d_\infty h(v_2)\| \leq K\|v_1-v_2\|.$$

因此，$d_\infty h$ 是良定义的，且是一个外部双 Lipschitz 同胚。 □

因此，

$$\frac{d_\infty h}{\|d_\infty h\|}\colon C(X,\infty)\cap\mathbb{S}^n \to C(Y,\infty)\cap\mathbb{S}^n$$

是一个同胚。

断言 3.12.2. $h'_\infty\colon X'_\infty \to Y'_\infty$ 是一个连续映射。

断言 3.12.2 的证明。显然， h'_∞ 在 $X'_\infty \setminus \partial X'_\infty$中连续。因此，只需证明 h'_∞ 在每个点$(u, 0) \in \partial X'_\infty$处连续。于是，设$\{(x_n, t_n)\} \subset X'_\infty$满足$(x_n, t_n) \to (u, 0)$。我们需要证明

$$\lim_{n\to+\infty} h'_\infty(x_n, t_n) = h'_\infty(u, 0) = \left(\frac{d_\infty h(u)}{\|d_\infty h(u)\|}, 0\right).$$

由于 $h'_\infty\big|_{\partial X'_\infty}\colon \partial X'_\infty \to \partial Y'_\infty$ 连续，我们可以假设 $t_n > 0, \forall n$。因此，令 $s_n = \frac{1}{t_n}$，可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} h'_\infty(x_n, t_n) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{h(\frac{u}{t_n})}{\|h(\frac{u}{t_n})\|}, \frac{1}{\|h(\frac{u}{t_n})\|}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{h(s_n u)}{s_n}}{\|\frac{h(s_n u)}{s_n}\|}, \frac{1}{\|h(s_n u)\|}\right).\end{aligned}$$

设 $\gamma\colon (\epsilon, +\infty) \to X$ 是一条半代数弧，满足 $\gamma(s) = su + o_\infty(s)$。则 $\lim_{n\to+\infty} \frac{h(s_n u)}{s_n} = d_\infty h(u)$。事实上，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{h(s_n u)}{s_n} - \frac{h(\gamma(s_n))}{s_n}\right\| &\le K\frac{\|s_n u - \gamma(s_n)\|}{s_n}\\ &= K\left\|\frac{o_\infty(s_n)}{s_n}\right\|.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to+\infty}\left\|\frac{h(s_n u)}{s_n} - \frac{h(\gamma(s_n))}{s_n}\right\|\\ &= \left\|\lim_{n\to+\infty}\frac{h(s_n u)}{s_n} - d_\infty h(u)\right\|.\end{aligned}$$

这意味着 h'_∞ 连续。 □

同理，我们也证明了 h'^{-1}_∞ 连续，从而完成了证明： h 在 ∞ 处是一个爆球同胚。

现在，令 $p \in \overline{X}$和 $q = \lim_{x\to p} h(p)$。令 $T_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$和 $T_q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$为由 $T_p(x) = x + p$和 $T_q(y) = x + q$给出的映射。由 [27,命题 3.8] 可知， $T_q^{-1} \circ h \circ T_p$是 0 处的吹球面同胚。因此， h 是 p处的吹球面同胚。

□

3.7. 经吹胀球面同胚的代数曲线的射影闭包。令 $\iota\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{CP}^n$ 为由$\iota(x) = (1 : x)$给出的映射。无穷远超平面记为 L_∞，它是 $\mathbb{CP}^n$中 $\iota(\mathbb{C}^n)$的补集。在此，我们将 $\mathbb{C}^n$ 与 $\iota(\mathbb{C}^n)$视为相同。在此识别下，对于集合 $X \subset \mathbb{C}^n$， X 在 $\mathbb{CP}^n$ 中的闭包称为 X的射影闭包。

命题 3.13. 设 $X \subset \mathbb{C}^m$ 和 $Y \subset \mathbb{C}^k$ 为复代数曲线。设 $h\colon X \to Y$ 为一个同胚，且在 ∞处是吹胀球面同胚。那么 h 可延拓为 X 和 Y的射影闭包之间的同胚。

证明。设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是 X 和 Y的射影闭包。因此

$$h\colon \overline{X} \setminus L_\infty \to \overline{Y} \setminus L_\infty$$

$$(1:z) \mapsto (1:h(z))$$

设 $\{a_1, \cdots, a_r\} = \overline{X} \cap L_\infty$ 和 $\{b_1, \cdots, b_s\} = \overline{Y} \cap L_\infty$。

我们用 $a_i = (0:c_i)$（分别用 $b_j = (0:d_j)$）表示 $i = 1, \cdots, r$（分别表示 $j = 1, \cdots, s$）。注意，$C(X,\infty) = \bigcup \mathbb{C} \cdot c_i$（分别地，$C(Y,\infty) = \bigcup \mathbb{C} \cdot d_j$）。由于 h 在 ∞处是一个爆球同胚，因此 h 诱导出一个同胚 $\phi\colon C(X,\infty) \to C(Y,\infty)$，并且因此存在一个双射 σ: $\{1, \cdots, r\} \to \{1, \cdots, s\}$，使得

$$\phi(\mathbb{C} \cdot c_i) = \mathbb{C} \cdot d_{\sigma(i)},$$

其中 $\phi\colon C(X,\infty) \to C(Y,\infty)$ 定义如下

$$\phi(v) = \begin{cases} \|v\| \cdot \nu_\infty\left(\frac{v}{\|v\|}\right), & v \neq 0 \\ 0, & v = 0. \end{cases}$$

并且 $\nu_\infty\colon C(X,\infty) \cap \mathbb{S}^{2m-1} \to C(Y,\infty) \cap \mathbb{S}^{2k-1}$ 是满足 $h'_\infty(v,0) = (\nu_\infty(v), 0)$ 的同胚。

因此，我们定义 $\overline{h}\colon \overline{X} \to \overline{Y}$ 如下:

$$\overline{h}(v) = \begin{cases} h(v), & v \in \overline{X} \setminus L_\infty \\ b_{\sigma(i)}, & v = a_i \end{cases}$$

固定 $i \in \{1, \cdots, r\}$，并令 $(z_n : x_n) \in \overline{X}$，其中 $z_n \neq 0$，使得 $(z_n : x_n) \to a_i = (0 : c_i)$。

由于 $c_i = (c_i^1 : \ldots : c_i^m) \neq 0$，不妨假设 $c_i^1 \neq 0$。因此，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n^1 \neq 0\ \forall n \geq n_0$，其中 $x_n = (x_n^1 : \ldots : x_n^m) = (x_n^1 : y_n)$。然后

$$w_n = \left(1 : \frac{x_n^1}{z_n} : \frac{y_n}{z_n}\right) \to (0:1:c).$$

注意，若 $\{u_n\} \subset X$ 使得 $\frac{u_n}{\|u_n\|} \to u$，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $u_n \in \bigcup_{i \in J} X_i$、$\forall n > n_0$ 且 $C(X_i,\infty) = L = \mathbb{C} \cdot u$、$\forall i \in J$。此外，

$h(u_n) \in \bigcup_{j\in J'} Y_j$使得 $C(Y_j,\infty) = \phi(L) = L'$、 $\forall j \in J'$。事实上，

$$h'_\infty\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{1}{\|u_n\|}\right) = \left(\frac{h(u_n)}{\|h(u_n)\|}, \frac{1}{\|h(u_n)\|}\right) \to h'_\infty(u, 0)$$

并且，特别是 $\frac{h(u_n)}{\|h(u_n)\|} \to \phi(u) \in \phi(L) = L' = \mathbb{C}\cdot v$。这意味着

$$\overline{h}(w_n) = \overline{h}\left(1 : \frac{x_n^1}{z_n} : \frac{y_n}{z_n}\right) = \left(1 : h\left(\frac{x_n^1}{z_n}, \frac{y_n}{z_n}\right)\right) \to b_{\sigma(i)},$$

这表明 $\overline{h}$ 连续。类似地，我们也证明了 $\overline{h}^{-1}$ 连续。因此，$\overline{h}$: $\overline{X} \to \overline{Y}$是一个同胚。□

下一个例子表明，在命题 3.13 中，我们不能去掉 h 在 ∞ 处是爆球同胚这一条件。

例 3.14. 设 $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2;\ xy = 0\}$ 和 $Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; (y - x^2)x = 0\}$。那么 X 和 Y是同胚的，但它们的射影闭包$\overline{X}$ 和 $\overline{X}$ 不是同胚的。事实上，对于任意 $p \in\overline{X} \setminus \{(1 : 0 : 0)\}$，$(\overline{X}, p)$ 都是不可约的；对于任意 $p \in \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$，$(\overline{Y}, p)$ 都是可约的（另见图 1 和图 2）。

正如我们将在下一个例子中看到的，命题 3.13 的逆命题并不成立。

例 3.15. 设 $L = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2;\ y = 0\}$ 和 $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$. 那么，$\overline{L}$ 和 $\overline{C}$ 的射影闭包是亏格为零的光滑射影曲线。因此，$\overline{L}$ 和 $\overline{C}$ 微分同胚。然而，L 和 C在无穷远处并非爆球面同胚，尤其是它们并非爆球面同胚（另见图 3 和图 4）。

4. Classification of complex algebraic curves under blow-spherical equivalence

4.1. 无穷远处复代数曲线的分类。我们将证明，复代数曲线的无穷远处爆球面几何决定且仅由其无穷远处的爆球面树决定。

定义 4.1. 设 $C \subset \mathbb{C}^n$ 是一条复代数曲线，X_1、$\cdots$、X_r 是无穷远处切锥 C (C, ∞) 的不可约分支。C 的无穷远处复爆球树是这样一棵有根树：其根的标签为 ∞，顶点 D_i's 对应于直线 X_i's，并且从每个顶点 D_i 到根连一条边。最后，对于每个无穷远方向 X_i，对于曲线 C 中每个与 X_i 相切的端 $E_{i,j}$，添加一个新顶点 $A_{i,j}$，并以权 $k_{E_{i,j}}(X_i)$ 添加一条连接 $A_{i,j}$ 与 D_i 的边。

图 1、2、3 和 4 展示了一些无穷远处复爆球树的例子。

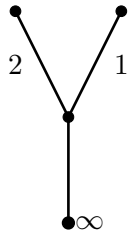


FIGURE 1. 曲线 ($y - x^2$)$x = 0$ 的复爆球树在无穷远处

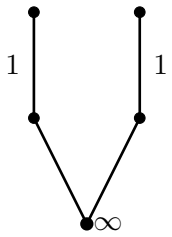


FIGURE 2.曲线 $xy = 0$ 的无穷远处复爆球树。



FIGURE 3.曲线 $y = 0$ 的无穷远处的实爆球树。

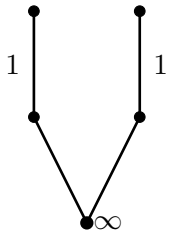


FIGURE 4.曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 的无穷远处的实爆球树。

定理 4.2. 设 C 和 Γ 是两条复代数曲线。设 $X_1, ..., X_r$（分别为 $Y_1, ..., Y_s$）是 $C(C, \infty)$（分别为 $C(\Gamma, \infty)$）的不可约分支。我们对 C 和 Γ 的端作如下编号：

$$C \setminus B_R = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{e_i} E_{ij}$$

and

$$\Gamma \setminus B_R = \bigcup_{l=1}^{s} \bigcup_{m=1}^{\widetilde{e}_l} F_{lm},$$

对所有 $i \in \{1, \cdots, r\}$，满足 $C(E_{ij}, \infty) = X_i$，且对所有$l \in \{1, \cdots, s\}$，满足 $C(F_{lm}, \infty) = Y_l$。那么，以下陈述等价：

(1) C 和 Γ 在无穷远处爆球同胚；(2) 存在 σ: $\{1,\cdots,r\}\to\{1,\cdots,s\}$，使得对每个 i，都存在 σ_i: $\{1,\cdots,e_i\}\to\{1,\cdots,\widetilde{e}_{\sigma(i)}\}$，使得 $k_{E_{ij},\ \infty}(X_i)$ $=k_{F_{\sigma(i)\sigma_i(j)},\ \infty}(Y_{\sigma(i)})$；(3) C 和 Γ的无穷远处爆球树同构；(4) C 和 Γ 在无穷远处强爆球同胚。

证明。通过将 $\mathbb{C}^n$ 与 $\mathbb{C}^n\times\{0\}\subset\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^k=\mathbb{C}^{n+k}$ 等同，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，我们可以假设 X 和 Y 属于同一个 $\mathbb{C}^n$。

(1) $\Rightarrow$ (2)。设 h: $C\setminus K\to\Gamma\setminus K$ 是一个爆球面同胚，紧子集 K 和 K 满足某些条件。根据命题 3.6，h 诱导出一个同胚 $d_\infty h$: $C(C,\infty)\to C(\Gamma,\infty)$，因此，$d_\infty h$ 将 $C(C,\infty)$ 的每个不可约分支映到 $C(\Gamma,\infty)$ 的一个不可约分支上。因此，存在一个双射 σ: $\{1,\cdots,r\}\to\{1,\cdots,s\}$，使得对所有 $i\in\{1,\cdots,r\}$，$Y_{\sigma(i)}=d_\infty h(X_i)$。对于每个 $i\in\{1,\cdots,r\}$，根据命题 3.5，$\{k_{E_{i,j},\infty}(X_i);\ j=1,\ .....,\ e_i\}=\{k_{F_{\sigma(i),m},\infty}(Y_{\sigma(i)});\ m=1,\ .....,\ \tilde{e}_{\sigma(i)}\}$。于是，我们可以选取一个双射 σ_i: $\{1,...,e_i\}\to\{1,...,\tilde{e}_{\sigma(i)}\}$，使得 $k_{E_i,\ j,\ \infty}(X_i)=k_{F_{\sigma(i)},\ \sigma_i(j),\ \infty}(Y_{\sigma(i)})$。

(2) $\Rightarrow$ (3)。我们假设存在一个双射 σ: $\{1,\cdots,r\}\to\{1,\cdots,s\}$，使得对每个 $i\in\{1,\cdots,r\}$，都存在一个双射 σ_i: $\{1,\cdots,e_i\}\to\{1,\cdots,\widetilde{e}_{\sigma(i)}\}$，满足 $k_{E_{ij},\infty}(X_i)=k_{F_{\sigma(i)\sigma_i(j)},\infty}(Y_{\sigma(i)})$。于是，我们定义 C 和 Γ 的无穷远处爆球树之间的同构：将根映射到根，将每个顶点 D_i（对应于~直线 X_i）映射到顶点 $D_{\sigma(i)}$（对应于直线 $Y_{\sigma(i)}$）；将连接根与 D_i 的~边映射到连接根与 D的边；将每个顶点 $A_{i,j}$（对应于端 $E_{i,j}$）映射到 $A_{\sigma(i),\sigma_i(j)}$（对应于端 $F_{\sigma(i),\sigma_i(j)}$）；并将连接 $A_{i,j}$ 与 D_i 的边映射到连接$A_{\sigma(i),\sigma_i(j)}$与 D的~~边。

(3) $\Rightarrow$(4)。设 Ψ 是 C 与 Γ在无穷远处的复吹球面~树之间的同构。因此，存在 $\Psi(D_i)=D_{\sigma(i)}$ 和 $\Psi(A_{i,\ j})=_\sim A_{\sigma(i),\ \sigma_i(j)}$，使得 $k_{E_{ij},\ \infty}(X_i)=k_{F_{\sigma(i)\sigma_i(j)},\ \infty}(Y_{\sigma(i)})$。

固定 $i\in\{1,\cdots,r\}$。设 T_i: $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$和 $L_{\sigma(i)}$: $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$是线性同构，使得 $T(X_i)=L_{\sigma(i)}(Y_{\sigma(i)})=L:=\{(0,\xi)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C};\ \xi\in\mathbb{C}\}$。固定 $j\in\{1,\cdots,e_i\}$。设 $E=T_i(E_{ij})$ 和 $F=L_{\sigma(i)}(F_{\sigma(i)\sigma_i(j)})$。注意，$T_i$: $E_{ij}\to E$和 $L_{\sigma(i)}$: $F_{\sigma(i)\sigma_i(j)}\to F$是无穷远处的强吹球面同胚。因此，由命题 3.5，$k_{E_{ij},\infty}(X_i)=k_{E,\infty}(L)$ 且$k_{F_{\sigma(i)\sigma_i(j)},\infty}(Y_{\sigma(i)})=k_{F,\infty}(L)$。

断言 4.2.1. E 和 F 在无穷远处强爆球面同胚

~证明。设 $\psi\colon \mathbb{C}\setminus D_\epsilon \to E$ 和 $\psi\colon \mathbb{C}\setminus D_\epsilon \to F$ 是无穷远处的 Puiseux 参数化，其中 $D_\epsilon \subset \mathbb{C}$是某个圆盘。由于 $k = k_{E_{ij},\ \infty}(L) = k_{F_{\sigma(i)\sigma_i(j)},\ \infty}(L)$, 存在全纯映射 $\phi, \widetilde{\phi}\colon \mathbb{C}\setminus D_\epsilon \to \mathbb{C}^{n-1}$，满足 $\lim_{t\to\infty} {}^{\phi_{(t)}}{}_{t^k} = \lim_{t\to\infty} \frac{\phi_{(t)}}{t^k} = 0$，并且 ψ 和 $\widetilde{\psi}$ 是由下式给出的同胚

$$\psi(t) = (\phi(t), t^k)$$

and

$$\widetilde{\psi}(t) = (\widetilde{\phi}(t), t^k).$$

现在定义 $\varphi\colon\ E \to F$ 由 $\varphi = \widetilde{\psi}\circ\psi^{-1}$ 给出。注意，φ 是一个微分同胚。因此，我们需要证明 φ 是一个无穷远处的爆球面同胚。事实上，设 $(x, 0) \in \partial C'_\infty$，对于任意满足 $\lim_{n\to+\infty} z_n = (x, 0)$ 的序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E'\setminus\partial E'_\infty$，并且对所有 n，记 $z_n = (x_n, t_n)$ 和$s_n = \psi^{-1}(\frac{x_n}{t_n})$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\varphi'_\infty(z_n) &= \left(\frac{\varphi(\frac{x_n}{t_n})}{\|\varphi(\frac{x_n}{t_n})\|}, \frac{1}{\|\varphi(\frac{x_n}{t_n})\|}\right)\\ &= \left(\frac{(\widetilde{\phi}(s_n), s_n^k)}{\|(\widetilde{\phi}(s_n), s_n^k)\|}, \frac{1}{\|(\widetilde{\phi}(s_n), s_n^k)\|}\right).\end{aligned}$$

另一方面，$\frac{x_n}{t_n} = (\phi(s_n)s_n^k)$，因此我们有

$$z_n = \left(\frac{(\phi(s_n), s_n^k)}{\|(\phi(s_n), s_n^k)\|}, \frac{1}{\|(\phi(s_n), s_n^k)\|}\right).$$

~最后，由于 $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t^k} = \lim_{t\to\infty} {}^{\phi_{(t)}}{}_{t^k} = 0$，我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi'(z_n) = \lim_{n\to+\infty} z_n = (x, 0).$$

因此，φ 是一个无穷远处的爆球面同胚，且 $\varphi'|_{\partial E'_\infty} = \mathrm{id}_{\partial E'_\infty}$。□

由于 $\varphi\colon E \to F$ 是无穷远处的强爆球面同胚，因此 φ_{ij}: $= L_{\sigma(i)}\circ\varphi\circ T_i^{-1}\colon E_{ij} \to F_{\sigma(i)\sigma_i(j)}$ 是无穷远处的强爆球面同胚。

现在，我们通过 $h(x) = \varphi_{ij}(x)$ if $x \in E_{ij}$定义 $h\colon C\setminus B_R \to \Gamma\setminus B_R$。由于每个$\varphi_{ij}$ 都是强吹球面同胚，且对于每个 $i \in \{1, ..., r\}$, $\varphi'_{ij}|_{\partial E'_{ij}{}_\infty} = \varphi'_{il}|_{\partial E'_{il}{}_\infty}$ 对所有 $j, l \in \{1, ..., e_i\}$都成立，因此我们得到 h 是强吹球面同胚。

(4) $\Rightarrow$(1)。平凡。 □

4.2. 无穷远处的分类的标准形。设 p_1: $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{>0}) \to \mathbb{Z}_{>0}$ 和 p_2: $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{>0}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{>0})$ 为典范投影，其中 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{>0})$ 表示 $\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $\mathbb{Z}_{>0} = \{n \in \mathbb{Z}; n > 0\}$; 的幂集。令 $\mathcal{A}$ 为由满足以下条件的所有有限非空子集 A构成的 $Z_{>0} \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{>0})$ 的子集：

i) $p_1(A) = \{1, ..., r\}$ 对于某个 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$; ii) $p_2(p_1^{-1}(i)) = \{k_{i,1}, ..., k_{i,e_i}\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$ 以及 $k_{i,\ j} \leq k_{i,\ j+1}$ 对于所有 $j \in \{1, ..., e_i - 1\}$ 以及所有 $i \in \{1, ..., r\}$。iii) 对于所有 $i \in \{1, ..., r-1\}$ $e_i \leq e_{i+1}$。

对于如上所述的集合 $A \in \mathcal{A}$，我们将 A 的实现定义为曲线

$$X_A = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{e_i} (j(y - ix)^{k_{i,j}-1} - (y + ix)^{k_{i,j}}) = 0\}.$$

因此，由定理 4.2和 $\mathcal{A}$的定义可得以下分类结果：

定理4.3。对于每条复代数曲线 $X \subset \mathbb{C}^n$，存在唯一的集合 $A \in \mathcal{A}$，使得 X_A 与 X 在无穷远处爆球同胚。

注4.4. 定理4.3特别指出，任意空间代数曲线在无穷远处都与某条平面代数曲线爆球面同胚。

4.3. 复代数曲线的整体分类。

定义 4.5. 设 $C \subset \mathbb{C}^n$ 是一条复代数曲线，且 p_1、$\cdots$、p_s 是 C 的奇点。C 的复吹球树是这样一棵有根树：根对应于该曲线，顶点 $C_j's$ 对应于曲线 C 的不可约分支；我们用边连接各顶点 C_j，并赋予其一个权，该权等于对应不可约分支的欧拉示性数。固定 j，对于 C 的每个满足 $p_i \in C_j$ 的奇点 p_i，我们添加一个标记为 i 的新顶点，再添加一个标记为 ∞ 的新顶点，并用边连接每个这样的新顶点与 C_j。对于每个 $i \in \{1, .., s\}$，设 $X_{i、1}$、...、$X_{i、d_i}$ 是 C（C、p_i）的不可约分支。设 $X_{\infty、1}$、...、$X_{\infty、d_\infty}$ 是 C（C、∞）的不可约分支。对于满足 $X_{\infty、m} \subset C$（C_j、∞）的每个切向方向 $X_{\infty、m}$，我们添加一个标记为 m 的新顶点，并用边连接每个顶点 m 与顶点 ∞。若 $p_i \in C_j$，则对于满足 $X_{i、m} \subset C$（C_j、p_i）的每个切向方向 $X_{i、m}$，我们添加一个标记为 m 的新顶点，并用边连接每个顶点 m 与对应于 p_i 的顶点。最后，对于每个

不可约分支 $C^l_{j,\ p_i}$（或者，对于芽（C_j、 p_i）的每个端 E_{jl}（或者 C_j 的每个端）），若其与 $X_{i,\ m}$ （或者 $X_{\infty,\ m}$）相切，则我们添加一个新顶点和一条边，将该新顶点与 m 相连，并赋予其由相对重数 $k_{C^l_{j,\ q_l},\ p_i}$（$X_{i,\ m}$）（或者 $k_{E_{jl},\ \infty}$（$X_{\infty,\ m}$））给出的权。

图 5 和图 6 展示了一些复爆球面树的示例。

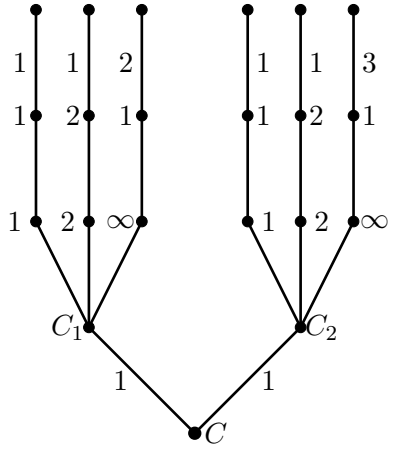


FIGURE 5. 曲线 $(y - x^2)(y - x^3) = 0$ 的复吹球树。

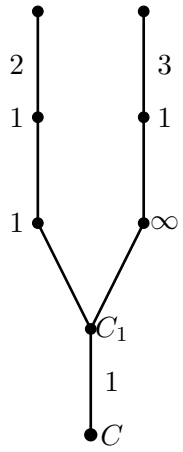


FIGURE 6. 曲线 $y^2 - x^3 = 0$ 的复吹球树。

定理 4.6. 设 $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ 和 $\widetilde{C} = \bigcup_{j\in J} \widetilde{C}_j$ 是两条复代数曲线，其中 $\{C_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\widetilde{C}_j\}_{j\in J}$ 分别是 C 和$\widetilde{C}$的不可约分支。以下陈述等价：

(1) C 与 $\widetilde{C}$ 爆球面同胚；(2) C 与 $\widetilde{C}$的复吹球树之间存在同构；
(3) C 与 $\widetilde{C}$ 强爆球面同胚。

证明。(1) ⇒(2)。假设存在一个爆球同胚φ: $C \to \widetilde{C}$。因此存在一个双射 σ: $I \to J$，使得 C 的每个不可约分支 C_i 在 φ 作用下都映到 $\widetilde{C}$的一个不可约分支 $\widetilde{C}_{\sigma(i)}$。因此，$\chi(C_i) = \chi(\widetilde{C}_{\sigma(i)})$，其中$C$(χ)是 C的欧拉示性数。由于 φ(奇点集(C)) = 奇点集(C)，由 [27]中的推论 6.2和定理 4.2可得 C 与 $\widetilde{C}$的复吹球树之间存在同构。

(2) ⇒ (3)。假设 C 和 $\widetilde{C}$ 的复爆球树之间存在一个同构。因此，我们可以假设 C 和 $\widetilde{C}$ 具有相同的复吹球树。

我们固定 $r \in \{1, ..., s\}$。记 $X = C_r$ 和 $\widetilde{X} = \widetilde{C}_r$。设 p_1、$\cdots$、p_s（分别地，$\widetilde{p}_1$、$\cdots$、$\widetilde{p}_s$）为位于 X（分别地，$\widetilde{X}$）中的 C（分别地，$\widetilde{C}$）的奇点。因此，根据假设，我们有 $\chi(X) = \chi(\widetilde{X})$、$k(X, \infty) = k(\widetilde{X}, \infty)$ 以及 $k(X, p_j) = k(\widetilde{X}, \widetilde{p}_j)$、$j = 1$、$\cdots$、$s$。

由 [27] 中的推论 6.2 可知，对于充分小的 $\epsilon > 0$，存在强爆球面同胚

$$g_j \colon C \cap \overline{B_\epsilon(p_j)} \to \widetilde{C} \cap \overline{B_\epsilon(\widetilde{p}_j)},$$

对任意 $j \in \{1, \cdots, s\}$。

根据定理 4.2，对于充分大的 $R > 0$，存在一个强爆破球面同胚

$$h \colon X \setminus B_R(0) \to \widetilde{X} \setminus B_R(0).$$

我们分别将 X 和 $\widetilde{X}$ 的端记为 E_1、$\cdots$、E_e 以及 $\widetilde{F}_1$、$\cdots$、$\widetilde{F}_e$，使得对于任意 $i \in \{1, \cdots, e\}$，$h(E_i \setminus B_R(0)) = \widetilde{F}_i \setminus B_R(0)$。

现在，我们定义以下带边界的曲面

$$M = \left(C \cap \overline{B_R(0)}\right) \setminus \left\{B_\epsilon(p_1) \cup \cdots \cup B_\epsilon(p_s)\right\}$$

and

$$N = \left(\widetilde{C} \cap \overline{B_R(0)}\right) \setminus \left\{B_\epsilon(\widetilde{p}_1) \cup \cdots \cup B_\epsilon(\widetilde{p}_s)\right\}.$$

注意， $f\colon\ \partial M \to \partial N$ 由下式给出

$$f(z) = \begin{cases} g_j(z), & \text{if } z \in C; \|z - p_j\| = \epsilon \\ h(z), & \text{if } z \in X; \|z\| = R \end{cases}$$

是一个微分同胚。

边界 ∂M 和 ∂N 是维数为~1 的光滑紧流形，因此其连通分支 S_i 和 S_i 微分同胚于 $\mathbb{S}^1$，即 $\partial M = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ 和 $\partial N = \bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{S}_i$。

由于 M 和 N 可定向，且具有相同的亏格和相同数量的边界，根据紧致曲面的分类定理（见 [17]），存在一个微分同胚 $\nu\colon\ M \to N$。限制映射 $\nu|_{S_i}\colon\ S_i \to \widetilde{S}_i$ 是一个保定向微分同胚。现在 $\nu^{-1} \circ h_i\colon\ S_i \to S_i$，根据 [17] 中的定理 3.3，存在一个同伦 $H_i\colon\ S_i \times [R', R] \to S_i \times [R', R]$，使得 $H_i(\cdot, R') = \mathrm{id}$，且 $H_i(\cdot, R) = \nu^{-1} \circ h_i$。令 $s\colon\ [R', R] \to [R', R]$ 为一个光滑函数，使得

$$s(t) = \begin{cases} R', & \text{if } t \in [R', \frac{R+2R'}{3}] \\ g(t), & \text{if } t \in [\frac{R+2R'}{3}, \frac{2R-R'}{3}] \\ R, & \text{if } t \in [\frac{2R-R'}{3}, R] \end{cases},$$

其中 g 是一个光滑隆起函数，满足

$$g(t) = \begin{cases} R', & \text{if } t \leq \frac{R+2R'}{3} \\ R, & \text{if } t \geq \frac{2R-R'}{3} \end{cases}.$$

现在我们定义 $\Phi\colon\ \overline{C \cap ann(0;\ R', R)} \to \partial M \times [R', R]$ 使得 $\Phi(x) = (h(x),\ |x|)$，以及 $\Psi\colon\ \partial N \times [R', R] \to \nu\left(\overline{C \cap ann}(0;\ R', R)\right)$，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} C \cap \overline{ann(0; R', R)} & \xrightarrow{\ \Phi\ } & \partial M \times [R', R] \\ & \searrow^{\nu} & \downarrow \Psi \\ & & \nu\left(C \cap \overline{ann(0; R', R)}\right) \end{array}$$

其中 $ann(0;\ R', R) = B_R(0) \setminus B_{R'}(0)$。因此，我们有

$$\begin{aligned} \Psi\left(H(h(x), R'), |x|\right) &= \Psi\left(h(x), |x|\right) \\ &= \nu \circ \Phi^{-1}\left(\Phi(h(x))\right) \\ &= \nu(h(x)), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Psi\left(H(h(x),R),|x|\right) &= \Psi\left(\nu^{-1}\circ h(x),|x|\right)\\ &= \nu\circ\Phi^{-1}\left(\nu^{-1}\circ h(x),|x|\right)\\ &= \nu\left(\nu^{-1}\circ h(x)\right)\\ &= h(x),\end{aligned}$$

根据 [17], 中的定理 3.3，存在一个微分同胚 F: $M\to N$，它将f: $\partial M\to\partial N$延拓。因此，我们定义强吹球面同胚 ~phism ϕ_r: $X\to X$ 如下:

$$\phi_r(z)=\begin{cases} g_j(z), & \text{if } z\in X; \|z-p_j\|\le\epsilon\\ h(z), & \text{if } z\in X; \|z\|\ge R\\ F(z), & \text{if } z\in M.\end{cases}$$

~最后，由 $\varphi(z)=\phi_r(z)$（当 $z\in C_r$时）定义的映射 φ: $C\to C$是一个强吹球面同胚。

根据定义，(3) ⇒(1)，由此证明完毕。 □

由此我们得到以下例子:

例 4.7. 设 $C_1=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2;\ y-x^4=0\}$, $C_2=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2;\ y-x^2-x^4=0\}$ 且 $C_3=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2;\ y-x^3-x^4=0\}$。那么 $C=C_1\cup C_2$ ~和 $C=C_1\cup C_3$ 爆球面同胚（见图 7）。由于 C_1 和 C_2 在 0 处的重合度为 2，且 C_1和 C_3 在 0 处的重合度为 3（见 [11]中曲线重合度的定义），~可知 C 和 C 并非外部利普希茨等价（见 [11, 定理 3.2]）。

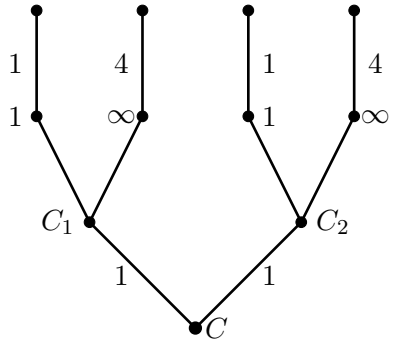


FIGURE 7. 曲线 C 的复吹球树。

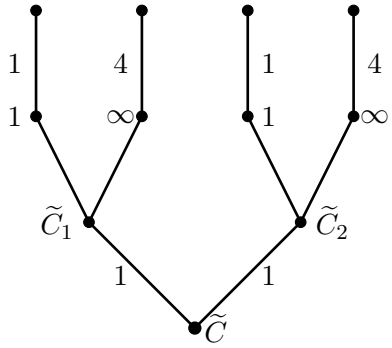


FIGURE 8. 曲线 C 的复吹球树~

注4.8. 在 [3, 例 4.10] 中给出了一个代数曲线 $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ 的例子，它有九个尖点，且其射影闭包是一条有九个尖点的有理曲线。因此，不存在与 Γ爆球面同胚的代数曲线 $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$。事实上，假设存在一个爆球同胚 $\varphi\colon\ \Gamma \to \Lambda$，且 $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ 是一条代数曲线。根据 [27, 定理 4.3]，曲线 Λ 也有九个尖点，因此由命题 3.13，Λ 在 $\mathbb{CP}^2$ 中的射影闭包是一条至少有九个尖点的有理尖点曲线，这与 [31, 推论 1.2]矛盾。上述$\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ 是作为某条射影曲线 $\overline{\Gamma} \subset \mathbb{CP}^n$的一个仿射部分得到的。下面说明如何得到这样一条曲线 $\overline{\Gamma}$。设 k 为一个正整数。定义 $\varphi_k\colon\ \mathbb{C} \setminus \{1, ..., k\} \to (\mathbb{C}^2)^k$，如下：

$$\varphi(t) = \left(t-1, \tfrac{1}{(t-1)^2}, t-2, \tfrac{1}{(t-2)^2}, ..., t-k, \tfrac{1}{(t-k)^2}\right).$$

设 $\overline{\Gamma}_k$ 为 φ 的像的射影闭包。我们知道，$\overline{\Gamma}_k$ 是一条具有 k 个尖点的有理代数曲线。

5. An application to Lipschitz geometry

在本节中，我们将证明，爆球同胚能够检测出属于 LNE 类的复代数曲线。

定义5.1（参见 [5]）。设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个子集。若存在常数 $c \geq 1$，使得对于所有点对 x_1、$x_2 \in X$，X 是 Lipschitz正规嵌入（LNE）的，则称 X 为 Lipschitz正规嵌入（LNE）；$d_{X,\ inn}(x_1, x_2) \leq C\|x_1 - x_2\|$。若 X 在 p 处是 Lipschitz正规嵌入集（简称在

p），即存在一个邻域 U，使得 $p \in U$ 且 $X \cap U$ 是一个 LNE 集；或者等价地，芽 (X, p) 是 LNE。在这种情况下，我们也称 X 为 C-LNE（分别称 C 在 p 处为 -LNE）。若存在紧子集 K，使得 $X \setminus K$ 是一个 LNE 集，则称 X 为无穷远处 Lipschitz 正规嵌入集（简称无穷远处 LNE）。在这种情况下，我们也称 X 在无穷远处为 C-LNE。

定义 5.2. 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $Y \subset \mathbb{R}^m$。如果存在紧子集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^m$ 以及一个外部双 Lipschitz 同胚 $f\colon X \setminus K \to Y \setminus \tilde{K}$，我们就称 X 和 Y 在无穷远处外部双 Lipschitz 等价。

我们来回顾 Dias 和 Ribeiro 在 [10]中的以下结果：

定理 5.3（ [10]中的定理 1.4）。设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是一个纯维复代数子集。若 X 在无穷远处是 Lipschitz正规嵌入的，则 $\deg(X) = \deg(C(X, \infty))$。

由此，他们还得出：如果一个纯维复代数子集在无穷远处是 Lipschitz正规嵌入的，那么其无穷远处切锥是约化的（见 [10, 命题 3.3]）。这一推论的局部版本在 [9] 中得到了证明，而在 [13]中则是在更一般的背景下证明的。

另一个推论如下：

推论 5.4. 设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是次数为 d 的复代数曲线。若 X 在无穷远处是 Lipschitz正规嵌入的，则 $C(X, \infty)$ 是经过原点的 d 条不同复直线的并集。

上述推论的逆命题也成立。为说明这一点，我们先回顾以下结果，它属于 [30], 上关于无穷远处外部双 Lipschitz 同胚的曲线分类，其中我们用 $\overline{X}$ 表示 X 的射影闭包：

定理 5.5. 设 C 和 C' 是两条复代数平面曲线。以下陈述等价：

(1) C 和 C' 在无穷远处外部双 Lipschitz 等价；(2) 存在一个双射 ψ，将 C 的无穷远点集映到 C' 的无穷远点集，且 $(\overline{C} \cup L_\infty, p)$ 与 $(\overline{C'} \cup L_\infty, \psi(p))$ 具有相同的嵌入拓扑类型。

由于任意复代数曲线 $X \subset \mathbb{C}^n$ 在无穷远处都与某条平面复代数曲线 $A \subset \mathbb{C}^2$ 外部利普希茨等价（见 [12, 定理 2.1]），因此

由定理 5.5 可知，次数为 d 的（连通）复代数曲线 X 在无穷远处是 LNE，当且仅当 $C(X,\infty)$ 是 d 条经过原点的互异复直线之并。由于复代数曲线 X 在 p 处局部是若干两两横截的光滑曲线之并，当且仅当 $C(X,p)$ 是 m 条 $X(p)$ 互异的经过原点的复直线之并，以下局部结果早已为人所知：复代数曲线 X 在 p 处是 LNE，当且仅当 $C(X,p)$ 是 m 条 $X(p)$ 互异的经过原点的复直线之并（例如，见 [9]）。这也可由复解析曲线芽在外部利普希茨等价下的分类推出；该分类由 Neumann 和 Pichon 于 [20], 完成，此前 Pham 和 Teissier 于 [22] 、Fernandes 于 [11] 作出了贡献（另见 [16]）。因此，作为上述结果的一个直接推论，我们得到以下 LNE 曲线的刻画：

命题 5.6. 设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是次数为 d 的连通复代数曲线。那么，以下陈述等价：

(1) X 是 LNE；(2) 对所有 $p \in \in \text{Sing}(X) \setminus \cup \{$, X 在 p 处是 LNE；(3) 对所有 $p \in \in \text{Sing}(X)$, $C(X,p)$ 是经过原点的 $m(X,p)$ 条不同复直线的并，且 $C(X,\infty)$ 是经过原点的 d 条不同复直线的并。

da Costa 的博士论文 [7] 中出现了一个等价刻画。显然， [7] 中的刻画独立于 Targino 的结果，因为其中没有引用 [30]。

由于爆球同胚能够检测上述命题中的条件 (3)，我们有以下结论：

命题 5.7. 设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是一条复代数曲线。那么， X 是 LNE，当且仅当它与一条 LNE 复代数曲线爆球面同胚。

让我们回顾一下 [15] 中证明的以下结果：

定理 5.8（ [15] 中的推论 5.6）。设 X、$Y \subset \mathbb{C}^n$ 是两条连通的复代数曲线。那么，以下陈述等价：

(1) X 与 Y 同胚；(2) X 与 Y 内利普希茨等价。

因此，我们得到以下刻画：

推论 5.9. 设 X、$Y \subset \mathbb{C}^n$ 是两条 LNE 复代数曲线。则以下陈述等价：

(1) X 和 Y 同胚；(2) X 和 Y 外部利普希茨等价；(3) X 和 Y 爆球面同胚。

请注意，$\Leftrightarrow$(2)也可由 [30], 中的整体分类推出，因为以下结果的证明只需对 [30]中的整体分类证明稍作改写：

命题 5.10. 设 C 和 Γ 是 $\mathbb{C}^n$中的两条不可约复代数曲线。那么，C 和 Γ 外部利普希茨等价，当且仅当满足以下条件：

(1) C 和 Γ 同胚；(2) C 和 Γ 在无穷远处外部双 Lipschitz 等价；(3) 存在一个双射 φ: Sing(X) $\to$ Sing(Y)，使得对于所有 $p \in$ Sing(X)，芽(C, p)和($\Gamma, \varphi(p)$)均外部利普希茨等价。

致谢。作者谨向 Alexandre Fernan- des 致以谢意，感谢他对本研究的关注。

References

[1] Birbrair, L.; Fernandes, A. 和 Grandjean, V. *Collapsing topology of isolated singularities*。arXiv:1208.4328v1 [math.MG], 预印本（2012）。[2] Birbrair, L.; Fernandes, A. 和 Grandjean, V. *Thin-thick decomposition for real definable isolated singularities*。《印第安纳大学数学杂志》，第 66 卷（2017），547–557。[3] Birbrair, L.; Fernandes, A.; Jelonek, Z. *On the extension of bi-Lipschitz mappings*。《数学精选：新系列》，第 27 卷，文章编号：15（2021）。[4] Birbrair, L.; Fernandes, A.; Lˆe D. T. 和 Sampaio, J. E. *Lipschitz regular complexalgebraic sets are smooth*。美国数学会会刊，第 144 卷（2016），983–987。[5] Birbrair, L. 和 Mostowski, T. *Normal embeddings of semialgebraic sets*。《密歇根数学杂志》，第 47 卷（2000），125–132。[6] Bobadilla, J. F.; Fernandes, A. 和 Sampaio, J. E. *Multiplicity and degree as bi-Lipschitz invariants for complex sets*。《拓扑学杂志》，第 11 卷（2018），第 4 期，957–965。[7] da Costa, A. L. A. *Characterization of Lipschitz normally embedded complex curves and Lipschitz trivial values of polynomial mappings*。博士论文，塞阿拉联邦大学（2023）。http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/70235[8] Chirka, E.M. *Complex analytic sets*。R. A. M. Hoksbergen 从俄文翻译。数学及其应用（苏联系列），第 46 卷。克吕维尔学术出版社集团，多德雷赫特，1989 年。

[9]Denkowski, M. 和 Tibar, M. *Testing Lipschitz non-normally embedded complex spaces*。《罗马尼亚数学科学学会数学公报》，第 62 卷（2019），第 2 期，93–100。[10] Dias, L.R. G. 和 Ribeiro, N.R. *Lipschitz normally embedded set and tangent cones at infinity*。《几何分析杂志》，第 32 卷（2022），文章编号 51。[11] Fernandes, A. 复曲线的拓扑等价与双利普希茨映射。《密歇根数学杂志》，第 51 卷，第 3 期，593–606，2003。[12] Fernandes, A. 和 Jelonek, Z. *Bi-Lipschitz characterization of space curves*。预印本（2023），arXiv:2301.12875 [代数几何]。[13] Fernandes, A. 和 Sampaio, J. E. *Tangent cones of Lipschitz normally embedded sets are Lipschitz normally embedded. Appendix by Anne Pichon and Walter D. Neumann*。International Mathematics Research Notices，第 2019 卷（2019），第 15 期，4880–4897。[14] Fernandes, A. 和 Sampaio, J. E. *On Lipschitz rigidity of complex analytic sets*。《几何分析杂志》，第 30 卷（2020），706–718。[15] Fernandes, A. 和 Sampaio, J. E. *Global bi-Lipschitz classification of semialgebraicsurfaces*。已获准在《比萨高等师范学院年刊（科学类）》发表（2022）。[16] Fernandes, A.; Sampaio, J. E. 和 Silva, J. P. *Hölder equivalence of complex analyticcurve singularities*。《伦敦数学会公报》，第 50 卷（2018），第 5 期，874–886。[17] Hirsch, M. W. *Differential topology*。纽约：施普林格出版社，1976。[18] Lˆe, Cˆong-Tr`ınh 和 Pham, Tien-Son. *On tangent cones at infinity of algebraic va-rieties*。《代数及其应用杂志》，第 16 卷（2018），第 2 期，1850143（10 页）。[19] Mumford, M. *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*。《高等科学研究院数学出版物》，第 9 卷（1961），5–22。[20] Neumann, W. 和 Pichon, A. *Lipschitz geometry of complex curves*。《奇点杂志》，第 10 卷（2014），225–234。[21] Nash, J. *Real algebraic manifolds*.《数学年刊》，第 56 卷（1952），第 3 期，405–421。[22] Pham, F. 和 Teissier, B. *Fractions lipschitziennes d'une algébre analytique complexeet saturation de Zariski*。巴黎综合理工学院数学中心，1969 年 6 月。[23] Prill, D. *Cones in complex affine space are topologically singular*。《美国数学会会刊》，第 18 卷（1967），178–182。[24]Sampaio, J. E. *Regularidade lipschitz, invariância da multiplicidade e a geometria dos cones tangentes de conjuntos analítico*。博士论文，塞阿拉联邦大学（2015）。https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/12545。DOI：10.13140/RG.2.2.10019.53287 [25] Sampaio, J. E. *Bi-Lipschitz homeomorphic subanalytic sets have bi-Lipschitz homeomorphic tangent cones*。《数学精选：新系列》，第 22 卷（2016），第 2 期，553–559。[26] Sampaio, J. E. *Some homeomorphisms that preserve tangent cones and multiplicity*。《当代数学》，第 742 卷（2020），189–200。[27] Sampaio, J. E. *Multiplicity, regularity and blow-spherical equivalence of complex an-alytic set*。《亚洲数学杂志》，第 24 卷（2020），第 5 期，803-820。

[28] Sampaio, J. E. *Multiplicity, regularity and blow-spherical equivalence of real analytic sets*。Mathematische Zeitschrift，第 301 卷（2022 年），385–410 页。[29] Sampaio, J. E. *On Lipschitz Geometry at infinity of complex analytic sets*。变分法与偏微分方程，第 62 卷，文章编号：69（2023年）。[30]Targino, R. *Outer Lipschitz Geometry of Complex Algebraic Plane Curves*。International Mathematics Research Notices IMRN，在线卷（2022 年），1-35, https://doi.org/10.1093/imrn/rnac202。[31] Tono, K. *On the number of cusps of cuspidal plane curves*。Math. Nachr.，第 278 卷（2005 年），216–221 页。

José Edson Sampaio: Departamento de Matemática, Universidade Federaldo Ceará, Rua Campus do Pici, s/n, Bloco 914, Pici, 60440-900, Fortaleza-CE,Brazil.
E-mail: edsonsampaio@mat.ufc.br

Euripedes Carvalho da Silva: Departamento de Matemática, Instituto Fed-eral de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Av. Parque Central, 1315,Distrito Industrial I, 61939-140, Maracanaú-CE, Brazil.and Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Rua Cam-pus do Pici, s/n, Bloco 914, Pici, 60440-900, Fortaleza-CE, Brazil. E-mail:euripedes.carvalho@ifce.edu.br