arXiv:2302.02027v1 [math.NT] 3 Feb 2023

关于模 p下的特殊调和数 $H_{\lfloor p/9\rfloor}$ 和$H_{\lfloor p/18\rfloor}$

John Blythe Dobson (j.dobson@uwinnipeg.ca)

2023年2月7日

摘要

在孙志宏工作的基础上，我们建立了特殊调和数 $H_{\lfloor p/9\rfloor}$ 和 $H_{\lfloor p/18\rfloor}$ 模 p 的同余式，它们分别包含三个和四个不同的算术分量。我们还完全确定了模 p 下相应的倒数和族，这些倒数和属于 Dilcher 和 Skula 研究的类型。我们还讨论了这些结果在费马大定理第一种情形中的应用。

关键词：特殊调和数、费马商、递推数列、数列的多分割

1 引言

近年来，在模素数 p下确定以下形式的和方面已取得相当大的进展

$$s(k,N):=\sum_{j=\lfloor\frac{kp}{N}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{(k+1)p}{N}\rfloor}\frac{1}{j}, \tag{1}$$

对于满足 $1\le N<p$ 和 $0\le k\le N-1$ 的整数 N 和 k；当 $k=N-1$ 时，条件 $j\neq p$ 是必要的。事实上，我们只需考虑满足 $k<N/2$ 的情形，因为根据对称性，$s(k,N)\equiv -s(N-1-k,N)$ 模 p。这些和大概最早由 Lerch [9], 引入；它们之所以引人关注，很大程度上源于 Dilcher 和 Skula 在 1995年 的结果 [1]：若指数 p 是费马大定理第一种情形（费马大定理）的一个例外，则 p 必须整除每个这样的和 $s(k,N)$，其中 $N\le 46$。尽管同年怀尔斯公布了费马大定理的完整证明，这些和依然持续受到关注。在 $N=0$ 的情形下，这些和可方便地写成一种特殊的调和数：$s(0,N):=H_{\lfloor p/N\rfloor}$。

关于刻画式 (1) 中的和模 p 的一般问题，孙志宏和孙志伟兄弟分别在 1992年和 2002年发表的两篇论文中解决了这一问题（[11], [12]）；本文作者也对他们的方法在 $k=0$ 情形下作了初等阐述 [4]。这种方法并未明确揭示表示中所有可区分的分量，而我们

将在此处针对 $N=9$ 和 $N=18$ 两种情形加以阐述。尽管如此，1992年那篇论文（[11]，第 2 部分，定理 2.7）通过以另一种形式给出 $s(1,18)$ 的求值，在这一方向上迈出了关键的第一步。由于这一结果鲜少被引用（甚至可能从未被引用），下一节将对其作较为详细的讨论。随后，我们将引入针对 $H_{\lfloor p/9\rfloor}$ 的一个配套结果，最后给出一套完整的计算，求出对所有 k 的取值，$s(k,9)$ 和 $s(k,18)$ 模 p 的值。

这些最后的计算是常规的，只依赖于 Lerch [9] 或 Dilcher 和 Skula [2], 所建立的众所周知的线性关系，其中 $q_p(b):=(b^{p-1}-1)/p$ 表示以 b为底的 p 的费马商：

$$\begin{aligned} s(0,18)+s(2,18)+s(4,18)+s(6,18)+s(8,18) &\equiv -10\cdot q_p(2) \pmod p \\ s(1,18)+s(3,18)+s(5,18)+s(7,18) &\equiv 8\cdot q_p(2) \pmod p \\ s(0,18)+2\cdot s(1,18)+s(8,18) &\equiv 0 \pmod p. \end{aligned} \tag{2}$$

此外，还有三条取自 Emma Lehmer [8]研究成果的关系：

$$\begin{aligned} s(0,18)+s(1,18)+s(2,18)=s(0,6) &\equiv -2\cdot q_p(2)-\frac{3}{2}\cdot q_p(3) \pmod p \\ s(3,18)+s(4,18)+s(5,18)=s(1,6) &\equiv \quad 2\cdot q_p(2) \pmod p \\ s(6,18)+s(7,18)+s(8,18)=s(2,6) &\equiv -2\cdot q_p(2)+\frac{3}{2}\cdot q_p(3) \pmod p. \end{aligned} \tag{3}$$

Hendel [7] 证明，$q_p(2)$ 是所有偶数 N的 $s(k,N)$ 中不可或缺的组成部分，而式 (3) 中呈现的规律始终成立。

2 朝着 $H_{\lfloor p/18\rfloor}$的发展

Sun（[11], 第 2 部分，定理 2.7）首先引入一个商，我们将其记为 $Z(p)$，使得实际上，

$$Z(p):=f(p)/p\equiv s(1,18)-2q_p(2) \pmod p, \tag{4}$$

其中 $f(\cdot)$ 是下文将要推导的一个数列。我们写作 $s(1,18)$ 时，Sun（[11],第 2 部分，定理 2.7）实际写作

$$\sum_{k=1}^{\lfloor p/9\rfloor}\frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

按照 [4] 的记号，该式为 $-s^*(0,9)$。现在，如果 $T(N,m)$ 表示二项式系数的稀疏和

$$\sum_{\substack{j=0\\ j\equiv 0 \bmod N}}^{m}\binom{m}{j},$$

那么，Sun 1992年–1995 [11], 的三部分论文中的一般结果（其中 $f(\cdot)$ 如(4)中所定义）给出

$$f(p) \equiv 9 \cdot T(9,p) - 2 \cdot T(2,p) - 7 \pmod{p^2}. \tag{5}$$

这意味着 $f(\cdot)$ 满足九阶线性递推（Sun 实际上并未写出该递推），

$$\begin{aligned} f(n) =& 8f(n-1) - 29f(n-2) + 62f(n-3) - 86f(n-4) + 80(n-5) \\ & - 50f(n-6) + 20f(n-7) - 5f(n-8) + f(n-9). \end{aligned} \tag{6}$$

该数列的前 36 项列于下表。

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
1	0	13	−1755	25	−10841355
2	−2	14	1636	26	−24927437
3	−6	15	12279	27	−49854867
4	−14	16	37426	28	−88165112
5	−30	17	87720	29	−135356601
6	−62	18	175447	30	−166501907
7	−126	19	307287	31	−109482111
8	−254	20	464776	32	202204690
9	−501	21	560190	33	1101562302
10	−932	22	348313	34	3176261536
11	−1551	23	−731055	35	7325660004
12	−2114	24	−3798314	36	14651320015

表1： $n \le 36$ 时 $f(n)$ 的值

Sun 证明该数列满足 $f(p) \equiv 0$ 模 p，因此 $f(p) \equiv f(1) \equiv 0$，而 $f(\cdot)$ 既是费马数列 [5]，也是素数可整除数列[10]。现在，如果按通常方式对 $f(\cdot)$ 进行多分割，即根据 n 模 9 的剩余类将其拆分，各个多分割数列将由五阶递推刻画：

$$f(n) = -246f(n-1)+13606f(n-2)+245f(n-3)-13605f(n-4)+f(n-5). \tag{7}$$

但 Sun 并未采用这种标准方法。相反，他首先注意到，可以将 $f(\cdot)$ 的偶数项增加 2，将满足 $n \equiv 3 \bmod 6$ 的项增加 6，而不影响满足 n 为素数 > 3的项，从而得到一个新的数列，最后将其各项除以 3，得到

$$g(n) = 0, 0, 0, -4, -10, -20, -42, -84, -165, -310, -517, -704, \ldots, \tag{8}$$

其由九阶递推表示

$$\begin{aligned} g(n) =& 6g(n-1) - 15g(n-2) + 20g(n-3) - 18g(n-4) + 18(n-5) \\ & - 20g(n-6) + 12g(n-7) - 3g(n-8) + g(n-9). \end{aligned} \tag{9}$$

将 $f(\cdot)$ 转换为另一个阶数相同的数列，乍看之下似乎适得其反，但 $g(\cdot)$ 具有一个非常有趣的性质。这个数列适用于一种不同寻常的多分割：每个子数列中选出的项并非来自 n modulo p 的单个剩余类，而是来自 n 的两个互补剩余类：

$$\begin{cases} 0, -84, -310, 29240, 102429, -8309145, -29388370, \dots & \text{for } n \equiv \pm 1 \pmod 9 \\ 0, -42, -517, 12476, 154926, -3613785, -45118867, \dots & \text{for } n \equiv \pm 2 \pmod 9 \\ 0, -20, -704, 4095, 186732, -1266104, -55500635, \dots & \text{for } n \equiv \pm 3 \pmod 9 \\ -4, -10, -585, 546, 116105, -243685, -36494037, \dots & \text{for } n \equiv \pm 4 \pmod 9. \end{cases}$$

（虽然 $n \equiv \pm 3$模 9 的情形显然不包含任何素数 > 3，但为求完整起见，我们仍将其列入；不过，由 n 能被 9 整除的项构成的较简单数列与我们的目的无关。）

对于上述七组初始值，四个子数列都满足相同的七阶线性递推

$$\begin{aligned} h(m) =& h(m-1) - 246h(m-2) + 246h(m-3) + 13605h(m-4) \\ & - 13605h(m-5) - h(m-6) + h(m-7), \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$m = \begin{cases} 2\left\lfloor \dfrac{n}{9} \right\rfloor + 1 & \text{if } n \equiv 1, 2, 4 \pmod 9 \\ 2\left\lfloor \dfrac{n}{9} \right\rfloor + 2 & \text{if } n \equiv -1, -2, -4 \pmod 9. \end{cases}$$

Sun 接着构造了一个 $g(\cdot)$ 的分解，使得

$$g(n) = \begin{cases} 2j(n) - 1 & \text{if } n \equiv 0 \pmod 9 \\ j(n+1) - 2 & \text{if } n \equiv \pm 1 \pmod 9 \\ j(n) - j(n-1) - 2 & \text{if } n \equiv \pm 2 \pmod 9 \\ -j(n) - 1 & \text{if } n \equiv \pm 3 \pmod 9 \\ -j(n+1) - j(n) + j(n-1) - 2 & \text{if } n \equiv \pm 4 \pmod 9, \end{cases} \tag{11}$$

并发现 $j(\cdot)$ 满足三阶稀疏递推，

$$\begin{aligned} &j(1)=0, j(2)=2, j(3)=-1 \\ &j(n)=3j(n-2)-j(n-3) \quad (n\geq 3). \end{aligned} \tag{12}$$

数列 $j(\cdot)$ 保留了原有的费马数列和素数整除性质，因为 $j(p) \equiv j(1) \equiv 0 \mod p$。因此，最后只考虑与素数 $p>9$ 相关的情况，我们有

$$Z(p) := 3\cdot\frac{g(p)}{p} \equiv \begin{cases} 3\cdot\dfrac{j(p+1)-2}{p} & \text{if } p\equiv \pm 1 \pmod 9 \\ 3\cdot\dfrac{j(p)-j(p-1)-2}{p} & \text{if } p\equiv \pm 2 \pmod 9 \\ 3\cdot\dfrac{-j(p+1)-j(p)+j(p-1)-2}{p} & \text{if } p\equiv \pm 4 \pmod 9. \end{cases} \tag{13}$$

3 $H_{\lfloor p/9\rfloor}$的发展

受 Hendel [7], 的研究启发，我们现在引入一个与 Sun 的 $Z(p)$ 相伴的数列。下一节将详细论证该数列对当前问题的适用性，不过我们想先处理其构造中的技术细节。我们从这个商开始

$$X(p) := k(p)/p \equiv s(0,9)-s(0,3) \pmod p. \tag{14}$$

按照 Sun 兄弟的方法，它满足

$$k(p) \equiv 3\left\{-6\cdot T(18,p)+3\cdot T(9,p)+2\cdot T(6,p)-T(3,p)+2\right\} \pmod{p^2}, \tag{15}$$

其中 $T(N,m)$ 又是二项式系数的稀疏和

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j\equiv 0 \bmod N}}^{m} \binom{m}{j}.$$

$k(p)$被 p 整除这一性质源自 Sun 的工作；又由于 $k(p) \equiv k(1) \equiv 0$ 模 p， $k(\cdot)$ 既是费马数列，也是素数可整除数列。若考虑所有自然 n的 $k(n)/3$ ，便得到一个数列，其前36项列于下表。

n	$k(n)/3$	n	$k(n)/3$	n	$k(n)/3$
1	0	13	2873	25	5218265
2	0	14	6734	26	5218265
3	−1	15	15014	27	2
4	−4	16	32132	28	−20242870
5	−10	17	66368	29	−78528607
6	−19	18	132734	30	−226111984
7	−28	19	257393	31	−572533513
8	−28	20	483626	32	−1343905180
9	2	21	877799	33	−2992450957
10	110	22	1529363	34	−6395344954
11	407	23	2527769	35	−13201132948
12	1145	24	3873017	36	−26402265898

表2： $k(n)/3$ 在 $n \leq 36$下的取值

振荡序列 $k(n)$在 n 为9的奇数倍时会回到2，即式(15)中的常数项；除前两项外，当 n 模36的剩余类介于9和27之间时，第 n项为正；当剩余类介于0和8之间或28和35之间时，则为负。该数列由上表所列的七个初始值以及一个七阶线性递推定义，

$$\begin{aligned} k(n) =& 7k(n-1) - 21k(n-2) + 36k(n-3) - 39k(n-4) \\ &+ 27k(n-5) - 12k(n-6) + 3k(n-7). \end{aligned} \tag{16}$$

基于 n 的任一模18剩余类，对 $k(n)$进行多分割得到的 $r(n)$满足四阶递推关系

$$r(n) = -199097r(n-1) - 18108279r(n-2) + 18287694r(n-3) - 19683r(n-4), \tag{17}$$

这意味着式（16）可以改写为稀疏递推关系

$$\begin{aligned} k(n) =& -199097k(n-18) - 18108279k(n-36) \\ &+ 18287694k(n-54) + 19683k(n-72). \end{aligned} \tag{18}$$

4 $s(k,9)$ 和 $s(k,18)$的表达式

由定义（14）以及 Glaisher 的经典结果（[6], 第 50 页），即$s(0,\ 3) \equiv -\frac{3}{2}q_p$ (3) 模 p，我们得到

$$s(0,9) \equiv X(p) - \frac{3}{2}q_p(3) \pmod{p}. \tag{19}$$

将此结果与 Sun 对 $s(1,18)$ 的求值进行比较，我们立即推得$s(0,18) \equiv -2q_p(2) - \frac{3}{2}q_p(3) + X(p) - Z(p)$。这一结果以及下文其余结果都满足引言中汇总的线性关系。根据关系式（4）和（19），作为额外检验，我们对已知的 p 进行了数值验证，其中 $q_p(2)$ 模 p 为零（维费里希素数，OEIS A001220），$q_p(3)$ 模 p 为零（米里马诺夫素数，OEIS A014127），以及 $X(p)$ 或 $Z(p)$ 模 p为零。这表明这些分量确实彼此独立，且任何其他有效的$X(p)$和 $Z(p)$定义都只能与我们的定义相差一个缩放因子。

完整的数值集合如下：

k	$q_p(3)$	$X(p)$	$Z(p)$
0	$-\frac{3}{2}$	1	0
1	-3	-3	-1
2	3	2	1
3	0	1	1
4	0	0	0

表3： $s(k,9)$各分量的系数

k	$q_p(2)$	$q_p(3)$	$X(p)$	$Z(p)$
0	-2	$-\frac{3}{2}$	1	-1
1	2	0	0	1
2	-2	0	-1	0
3	2	-3	-2	-1
4	-2	6	6	4
5	2	-3	-4	-3
6	-2	-6	-5	-2
7	2	6	6	3
8	-2	$\frac{3}{2}$	-1	-1

表4： $s(k,18)$各分量的系数

鉴于 Dilcher 和 Skula [1] 证明，未满足费马大定理第一种情形的素数 p 对所有 k，其 $s(k,9)$ 和 $s(k,18)$ 必须同时为零，因此，对这些和的零值进行搜索所得的结果或许值得关注：

k	p0 677, 6691, 532199813 1
151, 457, 971, 1439, 12613 2	
241, 739, 37799,3112456729 3	
97, 58193	

表5：使 $p < 5$、330、000、000、000 的 s(k、9) 模 p 余数为零的值

k	p0 5235774727037 1 47, 1777, 217337 2
167 3 1171, 37783, 28525219 4 137, 251,	
1087,1301, 2111, 5749, 428687393 5 4177,	
1581479 6 108541, 48303223 7 149, 35267 8 —	

表6：使 $p < 5$、330、000、000、000 的 s(k、18) 模 p 余数为零的值

这些计算使用 PARI/GP 中的标准矩阵幂方法完成，用于计算各个序列模 p 的值，而 s(8、18) 是唯一尚未找到结果的情形。需要注意的是， p 的任何值都不会出现在多个位置中。

5 与费马大定理第一种情形的联系

若素数 p 不满足费马大定理第一种情形（费马大定理），Wieferich 证明了 q_p (2) 必须模 p 为零，而 Mirimanoff 证明了 q_p(3) 必须模 p 为零。因此，关系式 (4) 和 (19)，以及 Dilcher 和 Skula 于 1995年 得出的、在引言 [1] 中提及的结果，意味着 Z(p) 和 X(p) 模 p 均为零，这是费马大定理第一种情形不成立的必要条件。对 $p < 5$,330,000,000,000 以内的数进行计算机搜索，仅发现以下这些使表达式模 p 为零的情形：

对于 Z(p)：179、1949、28885849。

对于 X(p)：2、13、19、2423。

在已测试的 p 范围内，不存在任何 p ，使得对于不同的 k 值， s(k,18) 同时为零；也不存在任何 k 值，使得以下三个量中任意两个同时为零： s(k,18)、 Z(p) 和 X(p)。

6 结论

Dilcher 和 Skula 于 1995年 发表的论文 [1] 研究了 $s(k, N)$，其中 N从 2 取到 46。对这些数的计算研究主要聚焦于情形 $k = 0$ 或 $H_{\lfloor p/N \rfloor}$。尽管 Dilcher 和 Skula 声称（第 389–390 页），对于此范围内除 $N = 5$ 以外的每个 N，都存在某个 $p < 2000$，使得 $s(0, N)$ 模 p 为零，但在这类情形中有多达 22 种（N =7、11、12、13、14、15、16、17、18、20、22、28、29、30、31、35、38、39、43、44、45、46），只有允许和为空时，这一说法才成立；这显然不是作者本意。无论是在先前的工作 [3] 中，还是在本文中，我们都不考虑空和，并在这些情形下将搜索范围扩展到更大的 p。对于介于 2 和 46 之间的 N，现在已知除 $N = 5$、12、20、29、31、43 以外的所有情形至少有一个解 p。

参考文献

[1] Karl Dilcher 和 Ladislav Skula，“费马大定理第一种情形的新判据”，数学计算**64** （1995年），363–392。[2] K. Dilcher 和 L. Skula，“某些模 p倒数和之间的线性关系”，魁北克数学科学年刊**35** （2011年），17–29。[3] John Blythe Dobson，“关于某些特殊调和数的计算”，预印本见 `https://arxiv.org/abs/1501.05075`。[4] John Blythe Dobson，“二项式系数稀疏和的 Ramus恒等式的一种矩阵变体”，国际数学与计算机科学杂志**12** （2017年）：27–42，见 `http://ijmcs.future-in-tech.net/12.1/R-Dobson.pdf`。[5] Frank S. Gillespie，“费马小定理的一个推广”，斐波那契季刊**27** （1989年），109–115。[6] J. W. L. Glaisher，“关于伯努利函数的一般同余定理”，伦敦数学会会刊33（1900年）27–56。[7] Russell Jay Hendel，“跳跃和的凯莱–哈密顿与循环矩阵方法”，第*16*届国际斐波那契数及其应用会议论文集（= 斐波那契季刊，第52卷，第5期，2014年12月），124–135。[8] Emma Lehmer，《关于涉及伯努利数及费马商与威尔逊商的同余式》，数学年刊**39** （1938年），350–360。[9] M. Lerch，“关于费马商的理论……”，数学年刊**60**（1905年），471–490。[10] Gregory Minton，“序列问题的三种解法”，数学杂志84（2011年）33–37。doi:10.4169/math.mag.84.1.033。[11] 孙志宏，“组合和$\sum_{k\equiv r \pmod m} \binom{n}{k}$及其在数论中的应用”（中文），南京大学数学半年刊**9**（1992年），227–240；**10** （1993年），205–118；**12** （1995年），90–102。作者网站上提供了非常详尽的英文摘要，网址为 `http://www.hytc.cn/xsjl/szh/`。[12] 孙志伟，“关于和$\sum_{k\equiv r \pmod m} \binom{n}{k}$及相关同余式”，以色列数学杂志**120** （2002年），135–156。