arXiv:2302.02035v2 [math.CT] 11 Mar 2023

幺半群伴随的唯一性

鳥井武

Abstract. 在由 $\mathcal{O}$ 这个 ∞-代数上的范畴所构成的 ∞-范畴中，分别取右伴随的 lax $\mathcal{O}$-幺半函子和左伴随的 oplax $\mathcal{O}$-幺半函子，可得到两种对偶等价。我们研究这两种 ∞-范畴之间的等价空间，并证明配备相容的 $\mathcal{O}$-幺半预层函子的这两种等价在典范意义下等价。

1. Introduction

本文研究由 $\mathcal{O}$ 这个 ∞-代数上的范畴所构成的 ∞-范畴中，分别取右伴随的 lax $\mathcal{O}$-幺半函子和左伴随的 oplax $\mathcal{O}$-幺半函子时，两者之间的等价空间。本文旨在证明，配备相容的 $\mathcal{O}$-幺半预层函子的这类等价具有唯一性。

在高阶范畴论中，我们期望经典范畴论中的命题都能得到适当的推广。我们称一个 ∞-范畴为（∞, r）-范畴，如果其中的 j-态射对于 $j > r$ 都是可逆的。$(\infty, 1)$-范畴具有不可逆的 1-态射这一事实至关重要，它意味着 $(\infty,1)$-范畴具有与通常的 1-范畴相似的范畴结构。因此，我们期望通过适当地表述，经典 1-范畴中的命题也能在 $(\infty, 1)$-范畴中成立。

$(\infty, 1)$-范畴有许多模型。完备 Segal 空间、Segal 范畴、拓扑范畴、单纯范畴和拟范畴都是 $(\infty, 1)$-范畴的模型。众所周知，这些模型都是等价的（例如参见 [2, 8]）。拟范畴易于处理，因为它们在范畴构造下是封闭的。拟范畴由 Boardman-Vogt [3] 在关于同伦不变代数结构的工作中以弱 Kan 复形之名引入。拟范畴理论由 Joyal [7] 和 Lurie [10, 11]进一步发展。

在经典范畴论中，根据教义伴随，幺半范畴之间的松幺半函子的左伴随自然地是一个余松幺半函子 [9]。对偶地，余松幺半函子的右伴随是松幺半的。这些对应关系产生了一个对偶等价：一边是右伴随为松幺半函子的幺半范畴组成的范畴，另一边是左伴随为余松幺半函子的幺半范畴组成的范畴。

这些对应关系的推广已在高阶范畴的框架下得到研究。Lurie [11] 证明，幺半∞-范畴之间的强幺半群函子的右伴随是松幺半函子。这一结果在许多情况下都很有用，但我们希望得到更一般的幺半伴随对应关系。在 [12] 中，我们证明了余松幺半群函子的右伴随是松幺半函子，反之亦然。Haugseng、Hebestreit、Linskens、Nuiten [6] 以更精确的方式表述了这些对应关系。他们构造了一个双对偶等价，它联系了由任意 $\mathcal{O}$-单子 ∞-范畴及其左伴随余松 $\mathcal{O}$-幺半群函子构成的（$\infty, 2$）-范畴

Date: 2023年3月11日（版本 2.0）。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18N70（主要），18N60、55U40（次要）。*Key words and phrases.* 幺半 ∞-范畴、松幺半函子、Day 卷积、 ∞-运算子。

与由右伴随松 $\mathcal{O}$-幺半群函子构成的范畴；这里 ∞-拟运算子 $\mathcal{O}$ 任意，他们通过引入曲正交纤维化和（余）Gray 纤维化的概念建立了这一对应关系。另一方面，在 [13], 中，我们用另一种方法证明了一个类似的等价，但将其限制在底层的（∞,1）-范畴上。我们证明，通过在它们之间构造完美配对，可以得到 ∞-范畴 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\,R}}(\mathrm{Cat}_\infty)$——由带右伴随松 $\mathcal{O}$-幺半群函子的 $\mathcal{O}$-幺半∞-范畴构成——与 ∞-范畴 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\,L}}(\mathrm{Cat}_\infty)$——由带左伴随余松 $\mathcal{O}$-幺半群函子的 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴构成——之间的对偶等价。

因此，我们在 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\,R}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 和 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\,L}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 之间有两个对偶等价。其中一个是 Haugseng、Hebestreit、Linskens、Nuiten [6], 得到的等价的限制，另一个由作者给出 [13]。本文旨在给出此类等价的唯一性结果。

在 [13] 中，我们研究了 $\mathcal{O}$-幺半预层函子 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}\colon \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty) \to \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\colon \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$。本文考虑 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\,R}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 和 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\,L}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 之间的等价 F 所构成的空间 $\mathcal{E}q$，并赋予其一个等价 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ F$。本文的第一个主要结果是下面的定理，它表明此类等价具有唯一性。

定理 1.1（参见定理 3.4）。空间 $\mathcal{E}q$ 是可缩的。

根据构造，T 中的等价 [13] 带有一个等价 $\theta\colon \mathbb{P}_{\mathcal{O}!} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ T$。因此，我们可以将对 (T,θ) 视为 $\mathcal{E}q$的一个对象。对于 [6], 中该等价的限制 H，我们将证明存在一个典范等价 $\gamma\colon \mathbb{P}_{\mathcal{O}!} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H$，且它与 Yoneda 嵌入相容。因此，我们也可以将对 (H,γ)视为 $\mathcal{E}q$的一个对象。由定理 1.1，我们得到以下定理，这是本文的第二个主要定理。

定理 1.2（参见定理 4.8）。对 (T,θ)与 (H,γ)典范等价。

该定理推出以下推论。

推论 1.3（参见推论 4.9）。T 中的等价 [13] 等价于 [6]中等价的限制 H。

本文的组织结构如下：在 §2 中，我们回顾文献 [13]中研究的幺半预层函子 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}$ 的性质。在 §3 中，我们证明一个唯一性结果（定理 1.1）。我们引入 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\,R}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 和 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\,L}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 之间与幺半预层函子相容的等价所构成的空间 $\mathcal{E}q$，并证明 $\mathcal{E}q$ 是可缩的。在 §4 中，我们证明第二个主要定理（定理 1.2）。通过证明 [6] 中的等价的限制 H 可延拓为 $\mathcal{E}q$中的一个对象 (H,γ)，我们证明这对 (T,θ) 与 (H,γ) 是典范等价的。

记号 1.4。本文中我们固定格罗滕迪克宇宙 $\mathcal{U} \in \mathcal{V} \in \mathcal{W} \in \mathcal{X}$。我们称 $\mathcal{U}$ 的一个元素为小，称 $\mathcal{V}$ 的一个元素为大，称 $\mathcal{W}$ 的一个元素为很大，称 $\mathcal{X}$ 的一个元素为超大。

我们用 Cat_∞ 表示由小 ∞-范畴构成的大 ∞-范畴，并用 $\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ 表示由大 ∞-范畴构成的很大 ∞-范畴。我们用 Pr^{L} 表示 $\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ 中由可表∞-范畴和保余极限函子张成的子范畴。我们用 $\mathcal{S}$ 表示小空间构成的大 ∞-范畴，用 $\widehat{\mathcal{S}}$ 表示大空间构成的很大 ∞-范畴，并用 S 表示很大空间构成的超大 ∞-范畴。

对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $h\mathcal{C}$ 表示其同伦范畴，用 $\pi_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to h\mathcal{C}$ 表示典范函子。对于 ∞-范畴之间的函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，我们将同伦范畴上诱导的函子记作 $hF\colon h\mathcal{C} \to h\mathcal{D}$。

对于一个 ∞-拟运算子 $\mathcal{O}^{\otimes}\to\mathrm{Fin}_*$，我们将 $\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}$ 记作 $\mathcal{O}$。对于一个 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}\to\mathcal{O}^{\otimes}$，我们用 $\mathcal{C}$ 表示其底层的 ∞-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}\times_{\mathcal{O}^{\otimes}}\mathcal{O}$，为简便起见，我们称 $\mathcal{C}$ 为一个 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴。

致谢。作者谨此感谢 Jonathan Beardsley 告知他 Haugseng-Hebestreit-Linskens-Nuiten 所得结果的参考文献。他也要感谢预印本 [13] 的审稿人，因为本文正是源于他试图回应审稿人的问题和意见。作者的研究部分得到了 JSPS KAKENHI Grant Numbers JP17K05253 的资助。

2. Monoidal presheaf functors

在 [13] 中，我们研究了幺半预层函子 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}$。为方便读者，本节回顾 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}$ 的性质。

对于小 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathrm{P}(\mathcal{C})$ 表示预层的 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{S})$，即取值于 $\mathcal{S}$的 $\mathcal{C}$ 上的预层；用 $J_{\mathcal{C}}\colon\mathcal{C}\to\mathrm{P}(\mathcal{C})$ 表示 Yoneda嵌入。我们有预层函子 $\mathrm{P}_!:\mathrm{Cat}_\infty\to\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$ 和 $\mathrm{P}^*:\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$，其中 $\mathrm{P}_!(\mathcal{C})=\mathrm{P}(\mathcal{C})=\mathrm{P}^*(\mathcal{C})$。对于函子 $f\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，我们有 $\mathrm{P}_!(f)=f_!\colon\mathrm{P}(\mathcal{C})\to\mathrm{P}(\mathcal{D})$，它是 $J_{\mathcal{D}}\circ f$沿 $J_{\mathcal{C}}$的左 Kan 延拓；还有 $\mathrm{P}^*(f)=f^*\colon\mathrm{P}(\mathcal{D})\to\mathrm{P}(\mathcal{C})$，它由与 $f$op 的复合给出。

在 [13] 中，我们将 $\mathrm{P}_!$ 和 P^* 扩展为幺半预层函子。设 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-算子。我们用 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\text{lax R}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 表示小型 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴及右伴随松弛 $\mathcal{O}$-幺半函子构成的 ∞-范畴。我们还用 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\text{oplax L}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 表示小型 $\mathcal{O}$-幺半∞-范畴及左伴随松弛 $\mathcal{O}$-幺半函子构成的 ∞-范畴。我们构造了函子

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}\colon&\quad\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_\infty)&&\longrightarrow\quad\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}),\\ \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\colon&\quad\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax,L}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}&&\longrightarrow\quad\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$ 是对称幺半 ∞-范畴 Pr^{L} 中 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴及松弛 $\mathcal{O}$-幺半函子构成的 ∞-范畴。对于一个小型 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ 表示通过 Day 卷积积构造的 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(\mathcal{C},\mathcal{S})$（参见 [11, §2.2.6]）。我们有 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}(\mathcal{C})=\mathbb{P}(\mathcal{C})=\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$。设 $f\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个右伴随松弛 $\mathcal{O}$-幺半函子，并设 $g\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是一个左伴随 oplax $\mathcal{O}$-幺半函子。为简便起见，我们分别用 $f_!$ 和 g^* 表示 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}(f)$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}(g)$。

映射空间上的诱导函子

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{O}!,(\mathcal{C},\mathcal{D})}\colon&\quad\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_\infty)}(\mathcal{C},\mathcal{D})&&\longrightarrow\quad\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}),\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{D})),\\ \mathbb{P}^*_{\mathcal{O},(\mathcal{C},\mathcal{D})}\colon&\quad\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax,L}}(\mathrm{Cat}_\infty)}(\mathcal{C},\mathcal{D})&&\longrightarrow\quad\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}),\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}))\end{aligned}$$

对于任意小的 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴，$\mathcal{C}$ 根据 [13, 定义 2.10 和 2.14]，$\mathcal{D}$ 它们在映射空间上的诱导函子都是全忠实的。对于任意右伴随的松 $\mathcal{O}$-幺半函子 $f\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，我们都有一个左伴随的 oplax $\mathcal{O}$-幺半函子 $f^L\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$。对偶地，对于任意左伴随的 oplax $\mathcal{O}$-幺半函子 $g\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，我们都有一个右伴随的松 $\mathcal{O}$-幺半函子 $g^R\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$。根据 [13, 引理 2.16], ，我们有 $(f^L)^*\simeq f_!$ 和 $(g^R)_!\simeq g^*$。

3. Uniqueness of equivalences

本节将给出 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\text{lax R}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 与 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\text{oplax L}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 之间与幺半预层函子 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}$相容的等价的唯一性结果。利用这一结果，我们将在下一节证明，[13] 的等价等同于 [6] 的等价的限制。

首先，我们考虑从 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}$,$(\mathrm{Cat}_\infty)$ 到 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\ L}}$,$(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 且与 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}$相容的函子空间 $\mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}}{}_{\infty/\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{PrL})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}!},\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$。由下文的引理 3.1 可知，该空间是离散的，并且等价于同伦范畴 $h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}$,$(\mathrm{Cat}_\infty)$ 与 $h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\ L}}$,$(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 之间与 $h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$和 $h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}$相容的函子空间 Map $\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty/h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{PrL})}(h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!},h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$。

引理 3.1. 设 $P\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Z}$ 和 $Q\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$ 是 ∞-范畴之间的函子。我们假设，对于任意对象 y, $y'\in\mathcal{Y}$，映射空间上的诱导函子 $\mathrm{Map}_{\mathcal{Y}}(y,y')\to\mathrm{Map}_{\mathcal{Z}}(Q(y)\ Q(y'))$ 是 (-1)-截断的。则空间 $\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/\mathcal{Z}}(P,Q)$ 是离散的，并且映射 $\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/\mathcal{Z}}(P,Q)\to\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/h\mathcal{Z}}(hP,hQ)$ 是一个等价。

证明. 首先，我们将证明空间 $\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/\mathcal{Z}}(P,Q)$ 是离散的。为此，只需证明函子 Q 是 Cat_∞ 中的 0-截断态射。我们考虑对角函子$\Delta\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{Y}\times_{\mathcal{Z}}\mathcal{Y}$。根据 [10, 引理 5.5.6.15], ，只需证明 Δ 在 Cat_∞ 中是 (-1)-截断的，也就是说，对于任意∞-范畴 $\mathcal{E}$，映射 $\Delta_*\colon \mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty}(\mathcal{E},\mathcal{Y})\to\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty}(\mathcal{E},\mathcal{Y}\times_{\mathcal{Z}}\mathcal{Y})$ 在 $\mathcal{S}$中是 (-1)-截断的。注意，空间之间的映射是 (-1)-截断的，当且仅当它是全忠实的。根据假设，我们看到函子 Δ 是全忠实的。这意味着 Δ_* 也全忠实。

接下来，我们将证明映射 $\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/\mathcal{Z}}(P,Q)\to\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/h\mathcal{Z}}(hP,hQ)$ 是一个等价。根据假设，下面的交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Y} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Y}}} & h\mathcal{Y}\\ {\scriptstyle Q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle hQ}\\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Z}}} & h\mathcal{Z}\end{array}$$

是一个拉回。这诱导出一个等价 $\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/\mathcal{Z}}(P,Q)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty/h\mathcal{Z}}(\pi_{\mathcal{Z}}\circ P,hQ)$。所需的等价由以下事实推出：对于任意普通范畴 $\mathcal{C}$，函子 $\pi_{\mathcal{X}}\colon\mathcal{X}\to h\mathcal{X}$ 根据命题 1.2.3.1] 诱导出一个等价 $\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty}(h\mathcal{X},\mathcal{C})\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Map}^{\mathrm{Cat}_\infty}(\mathcal{X},\mathcal{C})$。□

我们将定义一个对象

$$\mathbf{eq}=(\mathrm{eq},\mathrm{id})\in\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty/h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{PrL})}}(h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!},h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}).$$

令 $\mathrm{eq}\colon h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}$，$(\mathrm{Cat}_\infty)\to h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\ L}}$，$(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 为一个函子，它在对象上取恒等映射，并将包含右伴随 lax $\mathcal{O}$-幺半函子 f 的连通分量对应到包含其左伴随 oplax $\mathcal{O}$-幺半函子 f^L 的连通分量。由于 $(f^L)^*\simeq f_!$，我们有恒等自然等价 $\mathrm{id}\colon h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}\xrightarrow{\simeq}h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\circ\mathrm{eq}$。

现在，我们将给出一个条件，使得 $\mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}}{}_{\infty/\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{PrL})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}!},\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$ 的一个对象能够确定 Map $\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty/h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{PrL})}(h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!},h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$ 中与 eq 等价的一个对象。

引理 3.2. 设 $\mathrm{F}=(F,\delta)$ 是 $\mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}}{}_{\infty/\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{PrL})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}!},\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$ 中的一个对象，其中 F 是从 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}$，$(\mathrm{Cat}_\infty)$ 到 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\ L}}$,$(\mathrm{Cat}_\infty)$ 的函子，且 $\delta\colon\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}\xrightarrow{\simeq}\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\circ F$ 是一个自然等价。那么，F 确定了 $\mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}}{}_{\infty/h\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{PrL})}(h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!},h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$ 中的一个对象，该对象等价于 eq，当且仅当对于每个小的 $\mathcal{O}$- 幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，都存在一个等价 $\zeta_{\mathcal{C}}\colon F(\mathcal{C})\to\mathcal{C}$，使得 $\zeta^*_{\mathcal{C}}\colon\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})\to\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(F(\mathcal{C}))$ 等价于 $\delta_{\mathcal{C}}$。

证明。首先，我们假设 $h\mathbf{F} = (hF, h\delta)$ 等价于 eq。那么存在一个自然等价$\tau\colon hF \xrightarrow{\simeq}$eq，使得下图交换

(3.1)
$$\begin{array}{ccc} & h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!} & \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle h\delta} \\ h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ \text{等} & \xrightarrow{h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\circ\tau} & h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ hF. \end{array}$$

对于每个 $\mathcal{C}$，我们通过取分量 $\tau_{\mathcal{C}}$ 的一个代表元 $\zeta_{\mathcal{C}}$，得到所需的等价。

反过来，假设我们有一个等价 $\zeta_{\mathcal{C}}\colon F(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}$，使得对于每个 $\mathcal{C}$ 都有 $\zeta^*_{\mathcal{C}} \simeq \delta_{\mathcal{C}}$。我们将证明，这一族等价 $\{\zeta_{\mathcal{C}}\}$ 确定了一个自然等价 $\tau\colon hF \xrightarrow{\simeq}$ 等。我们考虑如下图表 σ:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle F(f)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^L} \\ F(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{D}}} & \mathcal{D} \end{array}$$

对于幺半范畴 $\mathbf{Mon}^{\mathrm{oplax\ L}}_{\mathcal{O}}$，$(\mathbf{Cat}_\infty)$ 中的任意态射 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $\mathbf{Mon}^{\mathrm{lax\ R}}_{\mathcal{O}}$，$(\mathbf{Cat}_\infty)$。根据 $\zeta^*_{\mathcal{C}} \simeq \delta_{\mathcal{C}}$ 的假设以及 $(f^L)^* \simeq f_!$ 这一事实，我们看到图表 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}(\sigma)$ 是同伦交换的。由于 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O},\ (F(\mathcal{D}),\mathcal{C})}$ 是全忠实的，我们看到图表 σ 也是同伦交换的。因此，这一族 $\{\zeta_{\mathcal{C}}\}$ 确定了一个自然等价 $\tau\colon hF \xrightarrow{\simeq}$等。根据构造，我们得到一个交换图 (3.1)。因此，$h\mathbf{F} = (hF, h\delta)$ 等价于等 $=$(等，id)。□

根据 [13, 定理 4.4],，我们有 $\mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}}_{\infty/\mathrm{Mon}^{\mathrm{lax}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{PrL})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}, \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$ 的一个对象 (T, θ)。我们将证明，(T, θ) 所诱导的对象与 $\mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}}_{\infty/h\mathrm{Mon}^{\mathrm{lax}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{PrL})}(h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}, h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$ 中的 eq 等价。

命题 3.3。对象 (T, θ) 确定了 $\mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}}_{\infty/h\mathrm{Mon}^{\mathrm{lax}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{PrL})}(h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}, h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})$ 的一个对象，该对象与 eq 等价。

证明。我们使用 [13, §4] 中的记号。对于一个小的 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，我们取 $\mathcal{M}^{\mathrm{lax}}{}_{,\mathcal{O}}{}^{\mathrm{R}}$ 的一个左右泛对象 $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, f)$，其中 $f \simeq g_!$，且 $g\colon \mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}$ 是 $\mathbf{Mon}^{\mathrm{lax\ R}}_{\mathcal{O}}$,$(\mathbf{Cat}_\infty)$ 中的一个等价。于是我们有一个等价 $\mu\colon T(\mathcal{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}$，它位于 $\mathbf{Mon}^{\mathrm{oplax\ L}}_{\mathcal{O}}$,$(\mathbf{Cat}_\infty)$ 中，并使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(T(\mathcal{D})) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \theta_{\mathcal{D}}} & \\ & \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}). & \end{array}$$

我们定义 $\zeta_{\mathcal{D}} = g \circ \mu\colon T(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$。那么，$\zeta_{\mathcal{D}}$是一个等价，且 $\zeta^*_{\mathcal{D}} \simeq \theta_{\mathcal{D}}$，因为 $g^* \simeq f^{-1}$。所需结果由引理 3.2 得出。□

我们定义一个空间 $\mathcal{E}q$ 如下

$$\mathcal{E}q = \mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty/\mathrm{Mon}^{\mathrm{lax}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{PrL})}}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}, \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}) \times_{\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty/h\mathrm{Mon}^{\mathrm{lax}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{PrL})}}(h\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}, h\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}})} \{\mathbf{eq}\}.$$

我们可以将 $\mathcal{E}q$ 视为 $\mathbf{Mon}^{\mathrm{lax\ R}}_{\mathcal{O}}$,$(\mathbf{Cat}_\infty)$ 与 $\mathbf{Mon}^{\mathrm{oplax\ L}}_{\mathcal{O}}$,$(\mathbf{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$之间的等价空间，这些等价与幺半预层函子 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 和 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}$相容。由引理 3.1，我们得到以下定理。

定理 3.4. 空间 $\mathcal{E}q$ 是可缩的。

4. Canonical equivalence between (T,θ) and (H,γ)

本节将证明， T 在 [13] 中的等价，等价于 [6]中该等价在 H 上的限制。根据命题 3.3，配备定理 4.4]中交换图的函子 T 产生了 $\mathcal{E}q$ 中的一个对象（T,θ）。因此，只需证明根据定理 3.4， H 可扩展为 $\mathcal{E}q$ 中的一个对象（H,γ）。

首先，我们必须证明 H 在 $\mathsf{Cat}_{\infty/\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})}$中给出一个从 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 到 $\mathbb{P}^{*}_{\mathcal{O}}$ 的态射。为证明这一点，我们将证明存在函子 $\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}(\mathsf{Cat}_{\infty})$ 到 $\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ \mathsf{Cat}_{\infty}})$ 的自然变换 $I \to \mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$ 和 $I \to \mathbb{P}^{*}_{\mathcal{O}} \circ H$，其分量等价于 Yoneda 嵌入，其中 I 是包含函子 $\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}(\mathsf{Cat}_{\infty}) \to \mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ \mathsf{Cat}_{\infty}})$。之后，我们将证明这些自然变换在典范意义下等价。

我们考虑一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty}))_{I/} & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty})). \end{array}$$

我们需要以下引理，它刻画了 $\mathcal{F}$ 的始对象。

引理 4.1。若对于每个 $\mathcal{C} \in \mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}(\mathsf{Cat}_{\infty})$，对象 $(\sigma\colon I \to F)$ 属于 $\mathcal{F}$，且其分量 $\sigma_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to F(\mathcal{C})$ 等价于 Yoneda 嵌入 $J_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$，则该对象是始对象；也就是说，存在一个等价 $F(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$，使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ {\scriptstyle \sigma_{\mathcal{C}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle J_{\mathcal{C}}} \\ F(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}). \end{array}$$

证明。对于 $\mathcal{F}$ 中的任意对象 $(\tau\colon I \to G)$，我们有以下拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathcal{F}}(\sigma,\tau) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}))}(\sigma,\tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty}))_{I/}}(\sigma,\tau) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty}))}(\sigma,\tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty}))}(I,\tau). \end{array}$$

为了证明左侧垂直箭头的复合是一个等价，只需证明右侧垂直箭头的复合是一个等价。右侧垂直箭头的复合可识别为端之间的一个映射

$$\int_{\mathcal{C}\in \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty})} \mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})}(F(\mathcal{C}), G(\mathcal{C})) \longrightarrow \int_{\mathcal{C}\in \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax,R}}(\mathrm{Cat}_{\infty})} \mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty})}(\mathcal{C}, G(\mathcal{C})),$$

根据假设和 [13, 命题 2.7]，它是一个等价。 □

接下来，我们将证明存在一个 $\mathcal{F}$ 中的对象（$\alpha\colon I \to \mathbb{P}_{\mathcal{O}!}$），其分量等价于 Yoneda 嵌入。

引理 4.2。函子 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}^!}$ 可扩展为 $\mathcal{F}$ 中的一个对象（$\alpha\colon I \to \mathbb{P}_{\mathcal{O}^!}$），使得对于每个 $\mathcal{C} \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}(\mathrm{Cat}_\infty)$，$\alpha_{\mathcal{C}} \simeq J_{\mathcal{C}}$。

证明。令 $i : \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}) \to \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)$ 为包含函子。我们有一个伴随

$$i_! : \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}), \widetilde{S}) \leftrightarrows \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty), \widetilde{S}) : i^*,$$

其中，i^* 是限制函子，$i_!$ 是沿着 i的左 Kan 延拓。该伴随的余单位 $(i_!i^* \to \mathrm{id})$ 给出一个函子 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)\ \widetilde{S}) \times [1] \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)\ \widetilde{S})$。将其与 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}, (\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)\ \widetilde{S})$复合，该函子将 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)(\mathcal{C}, -)$ 指派给 $\mathcal{C}$，由此得到一个函子 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}, (\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}} \times [1] \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)\ \widetilde{S})$。我们将证明此函子可分解为经由 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 的函子。为此，只需证明对于任意$\mathcal{C} \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}, (\mathrm{Cat}_\infty)$，$i_!i^*M(\mathcal{C})$ 都是可表的，其中 $M(\mathcal{C}) = \mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)(\mathcal{C}, -)$。根据 [13, 命题 2.7]，函子 $i^*M(\mathcal{C})$ 等价于 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})\ -)$。因此，$i_!i^*M(\mathcal{C})$ 由 $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ 表示，因为 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)(\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})\ -)$ 是沿着 i 对 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})}(\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})\ -)$ 作出的左 Kan 延拓。因此，我们得到一个函子 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}, (\mathrm{Cat}_\infty) \times [1] \to \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\widehat{\ \ }\mathrm{Cat}_\infty)$，它是一个自然变换$\alpha\colon I \to \mathbb{P}_{\mathcal{O}^!}$，满足对每个 $\mathcal{C}$ 都有 $\alpha_{\mathcal{C}} \simeq J_{\mathcal{C}}$。□

接下来，我们想要证明存在一个 $\mathcal{F}$ 的对象 $(\beta\colon I \to \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H)$，其分量等价于 Yoneda 嵌入。为此，我们需要一些预备构造。

令 $p = (p_A, p_{\mathcal{O}})\colon Y \to A \times \mathcal{O}^{\otimes}$ 为与函子 $\mathrm{St}(p) : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}, (\mathrm{Cat}_\infty)$ 相关联的曲正交纤维化（有关曲正交纤维化和（逆）Gray 纤维化的定义，参见 [6] ）。虽然稍后我们会将 p 取为恒等映射，但引入一个占位符在记号上更为方便。注意，$(p_{\mathcal{O}}, p_A)\colon Y \to \mathcal{O}^{\otimes} \times A$ 是一个 Gray 纤维化。我们将 $p^\wedge\colon Y^\wedge \to \mathcal{O}^{\otimes,\mathrm{op}} \times A$ 记为由 p 经余笛卡尔直化，再相对于 $p_{\mathcal{O}}\colon Y \to \mathcal{O}^{\otimes}$ 进行笛卡尔反直化所得到的 op-Gray 纤维化。于是，$p^\wedge$ 也是与函子 $H \circ \mathrm{St}(p)\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{oplax\ L}}, (\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 相关联的曲正交纤维化。取相反范畴后，我们得到一个曲正交纤维化 $p^\vee = (p_A^\vee, p_{\mathcal{O}}^\vee) = (p^\wedge)^{\mathrm{op}}\colon Y^\vee = (Y^\wedge)^{\mathrm{op}} \to A^{\mathrm{op}} \times \mathcal{O}^{\otimes}$，它与函子 $(-)^\vee \circ H \circ \mathrm{St}(p)\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax\ R}}, (\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}$ 相关联。

令 $\mathrm{Tw}^l(A)$ 为带有左纤维化 $\mathrm{Tw}^l(A) \to A^{\mathrm{op}} \times A$ 的扭箭头 ∞-范畴。我们考虑以下拉回图

$$\begin{array}{ccc} E(Y/A) & \longrightarrow & Y^\vee \times_{\mathcal{O}^\otimes} Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_A^\vee \times p_A} \\ \mathrm{Tw}^l(A) & \longrightarrow & A^{\mathrm{op}} \times A. \end{array}$$

注意，垂直箭头是笛卡尔纤维化，并且对于任意 $(\phi\colon s \to t) \in \mathrm{Tw}^l(A)$，纤维 $E(Y/A)\phi$ 是一个 $\mathcal{O}$-幺半∞-范畴 $Y_s^\vee \times_{\mathcal{O}^\otimes} Y_t$。

令 $\mathrm{Nat}(I, \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H)_A$ 为从 $I \circ \mathrm{St}(p)$ 到 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H \circ \mathrm{St}(p)$ 的函子的自然变换空间。我们将证明存在一个全忠实函子 $\mathrm{Nat}(I, \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H)_A \to \mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty}(E(Y/A)\ \mathcal{S})$。

为此，我们将首先证明，∞-范畴 $\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 上的笛卡尔对称幺半结构是闭的。由 Day 卷积积构造[11, Construction 2.2.6.18],的自然性，我们有一个函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(-,-) : \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty) \longrightarrow \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty).$$

引理 4.3. 存在一个自然等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(\mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

任意 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\in \mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 上的 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴。这诱导出一个自然等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathcal{A},\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(\mathcal{B},\mathcal{C}))\simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{B},\mathcal{C})$$

∞-范畴之间的等价。

证明。由于对于任意 $\mathcal{O}$-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，根据 [11, 例 2.2.6, 3], 我们有自然等价 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathcal{O},\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$，因此第二部分可由第一部分推出。故只需证明第一部分。

令 $L:\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)\to\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 为由 $L(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})=\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(A\times_{\mathcal{O}}\mathcal{B},\mathcal{C})$ 给出的函子，并令 $R:\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)\to\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 为由 $R(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})=\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(A,\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(\mathcal{B},\mathcal{C}))$ 给出的函子。我们将借助函子 $G:\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)\to\mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}},\widehat{\mathcal{S}})$ 来比较 L 和 R，该函子由 $G(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})=(\mathcal{Z}\mapsto\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)}(\mathcal{Z}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{B},\mathcal{C}))$ 给出。根据 $\mathrm{Fun}^{\mathcal{O}}(-,-)$ 的泛性质，我们看到 $j\circ L$ 和 $j\circ R$ 等价于 G，其中$j:\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)\to\mathrm{Fun}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)^{\mathrm{op}},\widehat{S})$ 是 Yoneda嵌入。由于 j 是全忠实的，我们得到 L 等价于 R。□

命题 4.4. 存在一个全忠实函子 $\mathrm{Nat}(I,\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\circ H)_A\to\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty}(E(Y/A)\ \mathcal{S})$，其本质像由满足以下条件的函子 $F\colon E(Y/A)\to\mathcal{S}$ 所张成：它将 q-笛卡尔态射映为等价，并且对于每个$\phi\in\mathrm{Tw}^l(A)$，其限制 $F_\phi\colon E(Y/A)_\phi\to\mathcal{S}$ 是一个 $E(Y/A)\phi$-幺半对象。

证明. 根据 [4, 命题 5.1] （或 [5, 命题 2.3]），空间 $\mathrm{Nat}(I,\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\circ H)_A$ 等价于端 $\int_{t\in A}\mathrm{Map}_{\mathrm{Mon}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(\mathrm{Cat}_\infty)}(Y_t,\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(Y_t))$。利用引理 4.3，我们得到自然等价 $\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(Y_t,\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(Y_s))\simeq\mathrm{Fun}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{lax}}(Y_s^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t,\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^\otimes)\simeq\mathrm{Fun}^\times(Y_s^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t,\mathcal{S})$，其中 $\mathrm{Fun}^\times(Y_s^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t,\mathcal{S})$ 是 $\mathrm{Fun}(Y_s^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t,\mathcal{S})$ 的一个全子范畴，由 $Y_s^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t$-幺半对象在 $\mathcal{S}$ 中张成。因此我们得到一个全忠实函子 $\mathrm{Nat}(I,\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\circ H)_A\to\int_{t\in A}\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty}(Y_t^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t,\mathcal{S})\simeq\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty}(\int^{t\in A}Y_t^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t,\mathcal{S})$，其中 $\int^{t\in A}Y_t^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t$ 是 Cat_∞ 中的一个余端。

余端 $\int^{t\in A}(Y^\vee)_t\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t$ 是复合函子 $\mathrm{Tw}^l(A)\to A^{\mathrm{op}}\times A\xrightarrow{\chi}\mathrm{Cat}_\infty$ 的一个余极限，其中 χ 分类笛卡尔纤维化 $p_A^\vee\times p_A:Y^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y\to A^{\mathrm{op}}\times A$。因此，根据 [10, 命题 3.3.4.3]，它可由 $E(Y/A)$ 通过将所有 q-笛卡尔态射求逆而得到。因此，存在一个全忠实函子 $\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty}(\int^{t\in A}Y_t^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y_t,\mathcal{S})\to\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty}(E(Y/A)\ \mathcal{S})$，其本质像由那些将 q-笛卡尔态射映为等价的函子构成。复合这两个全忠实函子，即得到所需函子。□

接下来，我们将构造一个函子 $B\colon E(Y/A)\to\mathcal{S}$，它属于命题 4.4 中函子 $\mathrm{Nat}(I,\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}}\circ H)_A\to\mathrm{Map}_{\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty}(E(Y/A)\ \mathcal{S})$ 的本质像。

由 [1, §5], 可得一个纤维映射空间函子 $\mathrm{Map}^{Y/\mathcal{O}^\otimes}:Y^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y\to\mathcal{S}$，以及一个与之$\widetilde{\ }$相关的左纤维化 $O(Y/\mathcal{O}^\otimes)\to Y^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y$。根据构造的自然性，我们有一个映射$\widetilde{O}(Y/\mathcal{O}^\otimes)\to\widetilde{O}(A/*)\simeq\mathrm{Tw}^l(A)$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{O}(Y/\mathcal{O}^\otimes) & \longrightarrow & Y^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_A^\vee\times p_A}\\ \mathrm{Tw}^l(A) & \longrightarrow & A^{\mathrm{op}}\times A.\end{array}$$

$\widetilde{\ }$因此我们得到一个函子 $O(Y/\mathcal{O}^\otimes)\to E(Y/A)$。

我们将证明 $\to E(\widetilde{Y/A})$ 是一个左纤维化。函子 $E(Y/A)\to Y^\vee\times_{\mathcal{O}^\otimes}Y$是一个左纤维化，因为它是由左纤维化 $\mathrm{Tw}^l(A)\to A^{\mathrm{op}}\times A$ 经拉回得到的。由于

~ ~复合 $O(Y/\mathcal{O}^{\otimes}) \to E(Y/A) \to Y^{\vee} \times_{\mathcal{O}^{\otimes}} Y$是一个左纤维化，因此函子 $O(Y/\mathcal{O}^{\otimes}) \to E(Y/A)$ 也是一个左纤维化。因此，我们得到一个相应的函子 $B\colon E(Y/A) \to \mathcal{S}$，它将 $((y,y')\ \phi)$（其中 $(y,y') \in Y^{\vee} \times_{\mathcal{O}^{\otimes}} Y$ 且 $\phi\colon p_A^{\vee}(y) \to p_A(y')$）映射到映射空间

$$\mathrm{Map}^{\phi}_{Y_o}(y,y') = \mathrm{Map}_{Y_o}(y,y') \times_{\mathrm{Map}_A(p_A^{\vee}(y),p_A(y'))} \{\phi\},$$

其中 $o = p_{\mathcal{O}}^{\vee}(y) = p_{\mathcal{O}}(y') \in \mathcal{O}^{\otimes}$。

我们将证明，函子 $B\colon E(Y/A) \to \mathcal{S}$ 属于命题 4.4 中全忠实函子 $\mathrm{Nat}(I, \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H)_A \to$映射 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty}(E(Y/A)\ \mathcal{S})$ 的本质像。

引理 4.5. 函子 $B\colon E(Y/A) \to \mathcal{S}$ 将 q-笛卡尔态射映为等价。

~证明。取一个 q-笛卡尔态射 $\Phi\colon ((y,y')\ \phi) \to ((\widetilde{y},\widetilde{y}')\ \phi)$，它属于 $E(Y/A)$。我们可以假设 $o = p_{\mathcal{O}}^{\vee}(y) = p_{\mathcal{O}}(y') = p_{\mathcal{O}}^{\vee}(\widetilde{y}) = p_{\mathcal{O}}(\widetilde{y}') \in \mathcal{O}^{\otimes}$。我们将证明，$\Phi$ 在 $\mathrm{Map}^{\phi}_{Y_o}(y,y')$ 与 $\mathrm{Map}^{\phi}_{Y_o}(\widetilde{y},\widetilde{y}')$ 之间诱导出一个等价~。

我们将 $p_o\colon Y_o \to A$ 表示为 p 在 $o \in \mathcal{O}^{\otimes}$ 处的限制，它是一个笛卡尔纤维化和余笛卡尔纤维化。态射 Φ 由一个 p_o-余笛卡尔态射 $f\colon \widetilde{y} \to y$、一个 p_o-笛卡尔态射 $g\colon y' \to \widetilde{y}'$，以及一个交换图组成

$$\begin{array}{ccc} p_A(y) & \xrightarrow{\phi} & p_A(y') \\ {\scriptstyle p_A(f)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle p_A(g)} \\ p_A(\widetilde{y}) & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & p_A(\widetilde{y}'). \end{array}$$

By 利用 $p_A(f)_!(\widetilde{y}) \simeq y$、$p_A(g)^*(\widetilde{y}') \simeq y'$ 和逐纤维伴随性，我们得到一个等价 e

$$\mathrm{Map}_{Y_{(a,o)}}(y, \phi^*(y')) \simeq \mathrm{Map}_{Y_{(\widetilde{a},o)}}(\widetilde{y}, \widetilde{\phi}^*(\widetilde{y}')),$$

其中 $a = p_A(y)$ 和 $\widetilde{a} = p_A(\widetilde{y})$。结合等价 $\mathrm{Map}^{\phi}_{Y_o}(y,y') \simeq \mathrm{Map}^{Y_{(a,o)}}(y, \phi^*(y'))$ 和 ~$\mathrm{Map}^{\phi}_{Y_o}(\widetilde{y},\widetilde{y}') \simeq \mathrm{Map}^{Y_{(\widetilde{a},o)}}(\widetilde{y}, \widetilde{\phi}^*(\widetilde{y}'))$，我们得到所需的等价。 □

引理 4.6。对于任意 $\phi \in \mathrm{Tw}^{l}(A)$，限制 $B_{\phi}\colon E(Y/A)_{\phi} \to \mathcal{S}$ 是一个 $E(Y/A)\phi$-幺半对象。

证明。设 $\phi\colon s \to t$ 属于 A。如果 $o \simeq o_1 \oplus \cdots \oplus o_n$，其中 $o_i \in \mathcal{O}$ 对于 $1 \le i \le n$，那么 $Y_o \simeq Y_{o_1} \times_A \cdots \times_A Y_{o_n}$。我们取分别在此等价下对应于 $(y_1,\ldots,y_n)$ 和 $(y_1',\ldots,y_n')$ 的 $y \in Y_s$ 和 $y' \in Y_t$。我们必须证明，B_{ϕ} 诱导出一个等价 $\mathrm{Map}^{\phi}_{Y_o}(y,y') \simeq \mathrm{Map}^{\phi}_{Y_{o_1}}(y_1,y_1')$ $\times \cdots \times \mathrm{Map}^{\phi}_{Y_{o_n}}(y_n,y_n')$。这由纤维映射空间的自然性以及一个等价 $\mathrm{Map}^{Y_o}(y,y') \simeq \mathrm{Map}^{Y_{o_1}}(y_1,y_1')$ $\times_{\mathrm{Map}_A(s,t)} \cdots \times_{\mathrm{Map}_A(s,t)} \mathrm{Map}^{Y_{o_n}}(y_n,y_n')$ 得出。□

由引理 4.5 和 4.6，函子 B 属于命题 4.4 中全忠实函子 $\mathrm{Nat}(I, \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H)_A \to \mathrm{Map}^{\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty}}(E(Y/A)$ $\mathcal{S})$ 的本质像，因此我们得到一个自然变换 $\beta^A\colon I \circ \mathrm{St}(p) \to \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H \circ \mathrm{St}(p)$。特别地，将 $\mathrm{St}(p)$ 取为恒等函子$A^{\mathrm{op}} = \mathrm{Mon}^{\mathrm{lax\ R}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cat}_{\infty}) \to \mathrm{Mon}^{\mathrm{lax\ R}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cat}_{\infty})$，我们得到一个自然变换 $\beta\colon I \to \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H$。我们回顾一下，对每个 $\mathcal{C} \in \mathrm{Mon}^{\mathrm{lax\ R}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cat}_{\infty})$，都有 $H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$。由构造可知，$\beta_{\mathcal{C}} \simeq J_{\mathcal{C}}$。因此，我们得到如下推论。

推论 4.7. 函子 $\mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H$ 扩展为 $\mathcal{F}$ 中的一个对象 $(\beta\colon I \to \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H)$，使得对于每个 $\mathcal{C} \in \mathrm{Mon}^{\mathrm{lax\ R}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cat}_{\infty})$，都有 $\beta_{\mathcal{C}} \simeq J_{\mathcal{C}}$。

由引理 4.1，我们得到自然变换 $(\alpha : I \to \mathbb{P}_{\mathcal{O}!})$ 与 $(\beta\colon\ I \to \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H)$ 之间的典范等价。因此，我们得到一个等价 $\gamma\colon\ \mathbb{P}_{\mathcal{O}!} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^*_{\mathcal{O}} \circ H$，使得 $\gamma \circ \alpha \simeq \beta$。由于 $\alpha_{\mathcal{C}} \simeq J_{\mathcal{C}}$ 和 $\beta_{\mathcal{C}} \simeq J_{\mathcal{C}}$，我们得到 $\gamma_{\mathcal{C}} \simeq \mathrm{id}^*_{\mathcal{C}}$。因此，由引理 3.2，我们可以将这一对 (H, γ) 视为 $\mathcal{E}q$ 的一个对象，并由定理 3.4 得到以下定理。

定理 4.8. 有序对（T, θ）与（H, γ）存在典范等价。

该定理推出以下推论。

推论 4.9. T 在 [13] 中的等价，等价于[6]中的等价的限制 H 。

References

[1] C. Barwick、S. Glasman 和 D. Nardin，《笛卡尔纤维化与余笛卡尔纤维化的对偶化》。Theory Appl. Categ. 33 (2018), Paper No. 4, 67–94. [2] J. E. Bergner，《(∞, 1)-范畴综述》，Towards higher categories, 69–83, IMA Vol. Math. Appl., 152, Springer, New York, 2010.[3] J. M. Boardman 和 R. M. Vogt，《拓扑空间上的同伦不变代数结构》，Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.[4] D. Gepner、R. Haugseng 和 T. Nikolaus，《 ∞-范畴中的Lax余极限与自由纤维化》。Doc. Math. 22 (2017), 1225–1266. [5] S. Glasman，《拓扑 Hochschild同调上的谱级霍奇滤过》。Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), no. 3, 1583–1612. [6] R. Haugseng、F. Hebestreit、S. Linskens 和 J. Nuiten，《Lax幺半伴随、二变量纤维化与mates演算》，预印本，arXiv:2011.08808.[7] A. Joyal，《拟范畴与Kan复形》，J. Pure Appl. Algebra 175 (2002), no. 1-3, 207–222. [8] A. Joyal 和 M. Tierney，《拟范畴与Segal空间》，Categories in algebra, geometry and mathematical physics, 277–326, Contemp. Math., 431, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. [9] G. M. Kelly，《教义伴随》，Category Seminar (Proc. Sem., Sydney, 1972/1973), 257–280, Lecture Notes in Math., Vol. 420, Springer, Berlin, 1974.[10] J. Lurie，《高阶拓扑斯理论》，Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.[11] J. Lurie，《高阶代数》，可见 http://www.math.harvard.edu/~lurie/. [12] T. Torii，《余模的拟范畴与Landweber精确性、Bousfield类及Ohkawa定理》，Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 309, 2020, 325–380, Springer, Singapore. [13] T. Torii，《幺半伴随的完美配对》，预印本，arXiv:2202.02493，即将发表于Proceeding of the American Mathematical Society。

Department of Mathematics, Okayama University, Okayama 700–8530, Japan
Email address: torii@math.okayama-u.ac.jp