arXiv:2302.02036v1 [math.OC] 4 Feb 2023

非线性平衡截断：第2部分——流形上的模型降阶

Boris Kramer、Serkan Gugercin 和 Jeff Borggaard

摘要—**非线性平衡截断是一种模型降阶技术，它能够在考虑系统开环或闭环可观性与可控性的情况下，降低非线性系统的维数。迄今为止，两项计算挑战阻碍了该技术在大规模系统中的应用：（a）用于刻画可控性和可观性的能量函数是高维 Hamilton–Jacobi–(Bellman) 方程的解，而求解这些方程在计算上难以实现；（b）用于构造降阶模型（ROM）的变换可能病态，且生成的降阶模型难以在非线性平衡流形上进行仿真。这篇两部分文章的第1部分（[30]）通过一种可扩展的张量方法，求解开环和闭环能量函数的多项式近似，从而应对挑战（a）。本文（第2部分）通过提出一种新颖且可扩展的方法，在多项式非线性平衡流形上进行模型降阶，以降低全阶模型的维数，从而应对挑战（b）。相关的非线性状态变换会在新坐标中同时"对角化"相关能量函数。鉴于这种非线性平衡变换可能病态且计算开销大，受线性情形启发，我们开发了一种计算高效的平衡与降阶策略，由此得到一种可扩展且条件更佳的截断变换，以生成平衡降阶模型。我们在一个半离散偏微分方程（即 Burgers 方程）上展示了该算法，并说明更高次数的变换能够提高降阶模型输出的准确性。**

索引词—**降阶建模、平衡截断、非线性流形、Hamilton-Jacobi-Bellman方程、非线性控制仿射系统。**

本研究部分由美国国家科学基金会CMMI-2130727号资助，并基于作者驻留于普罗维登斯的计算与实验数学研究所期间，在2020年春季学期项目"模型与不确定及动态系统的维数降阶"以及2020年春季重聚活动中开展的工作；该工作由美国国家科学基金会DMS-1929284号资助。

B. Kramer任职于加利福尼亚大学圣迭戈分校机械与航空航天工程系，美国加利福尼亚州拉霍亚，邮编92093-0411（电子邮件：bmkramer@ucsd.edu）。

S. Gugercin 和 J. Borggaard 任职于弗吉尼亚理工大学数学系，地址为弗吉尼亚州布莱克斯堡，邮编 24061（电子邮箱：gugercin@vt.edu、jborggaard@vt.edu）。

I. 引言

大规模非线性动力系统的仿真可能耗时且消耗大量资源。当这些仿真用于实时的基于模型的控制时，这往往会成为瓶颈。降阶模型（ROM）通过在维数低得多的状态空间中近似动力系统（及其相关的系统理论性质），为这一问题提供了颇具吸引力的解决方案；一般性概述请参见例如 [2], [3], [6], [8], [48], [53]。随后，这些降阶模型便可用于设计低维控制器和滤波器。

Moore [37]以及Mullis和Roberts [38] 开创的针对线性时不变（LTI）系统的平衡截断降阶，为开环情形下的模型降阶问题提供了一种优雅的方法。该方法利用系统的可控性和可观性能量，确定相对重要性最高的状态。如果某个状态需要大量输入能量才能到达，同时对输出的影响又很小，那么降阶模型便可忽略该状态，而不会显著影响系统的输入输出行为。将这一概念扩展到闭环LTI系统，便产生了LQG平衡 [28], [51]和 $\mathcal{H}_\infty$ 平衡概念 [39]。针对LTI系统的不同表述及不同降阶模型结果，已有多种变体，例如随机平衡 [15], [25],、有界实平衡 [41], 、正实平衡 [15], [40],和频率加权平衡 [18]；另请参阅综述 [5], [26]。20世纪80年代，对LTI系统平衡方法的关注推动了大规模Lyapunov方程或Riccati型代数矩阵方程计算方法的研究，并由此产生了低秩求解器 [9], [49]和倍增法 [35] ，能够求解具有数百万个状态的这些矩阵方程。

对于大规模非线性系统，相关理论已基本建立，但可扩展的计算方法和高效的降阶模型开发仍是尚未解决的问题。Scherpen [45]提出了非线性开环系统平衡截断的理论基础，定义了输入和输出能量函数，并指出这些函数可通过求解 Hamilton-

Jacobi（HJ）偏微分方程（PDE）得到。非线性系统（可能不稳定）的闭环情形也已有相关理论扩展，例如 Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）平衡 [47] 和 $\mathcal{H}_\infty$ 平衡 [46] 。除需要求解 HJ(B) 方程外，非线性平衡还需要进行非线性变换，而线性时不变系统的平衡只需线性变量变换。尽管很快就有人指出，通过原始非线性平衡框架 [45]得到的降阶模型并不唯一 [23], ，但 [20] 提出的略有不同的变换解决了这一问题，从而得到唯一确定的降阶模型。Krener [31] 提出了另一种平衡策略，分别对能量函数的多项式近似的各阶进行平衡。完整的先平衡后降阶方法首先在高维空间中计算平衡变换，随后再降低模型维数，参见 [21], [43], [45]–[47]。然而，在线性情形下，先平衡后降阶方法已被证明数值条件不佳，因为需要对较小的汉克尔奇异值求逆 [2]。总之，非线性变换难以计算，这会降低非线性降阶模型的效率，而且也可能数值条件不佳。最后，如何得到类似于线性情形的误差界（以舍弃的汉克尔奇异值表示）仍是一个尚未解决的问题。

人们提出了其他通过平衡来降低全阶模型维度的方法，这些方法无需计算完全非线性的能量函数。一般而言，这些方法会计算一个二次能量函数，进而实现线性子空间降阶。例如， [7], [24] 为非线性系统推导代数Gramian矩阵，并提出了一种线性坐标变换。 [14] 中的作者将 Carleman 双线性化与一种平衡方法结合起来，以近似平衡弱非线性系统。非线性系统的经验格拉米矩阵也可用于此目的 [33], 并同样能够实现线性子空间降阶。最后， [11], 提出了一种借助再生核希尔伯特空间来近似非线性平衡截断降阶映射的方法（一种基于机器学习的数据驱动技术），并将其应用于二维和七维常微分方程示例。其思路是将非线性动力系统嵌入一个高维（或无限维）再生核希尔伯特空间（RKHS）中。在该空间中，可以应用线性理论。随后，作者学习从高维 RKHS 到平衡有限维系统的映射，并通过二维和七维常微分方程示例展示了结果。此外，还有一些相关方法会平衡问题的其他特征（而非前述非线性能量函数），例如流平衡 [52], 、增量平衡（续） [10], 动态平衡 [44]。这些方法与非线性汉克尔算子和能量函数 [29]只有较松散的联系。此外，增量平衡仅适用于动力系统右端的奇函数。另一种称为微分平衡的平衡方法 [29], 与非线性汉克尔算子存在关联。该方法需要求解线性时变矩阵不等式（李雅普诺夫不等式的推广），因此主要针对开环系统。

在这篇分为两部分的文章中，我们提出了一种基于非线性能量函数的、可扩展且计算高效的非线性平衡截断方法，适用于闭环和开环系统。目前，针对中大型系统尚无此类方法。在本文第1部分中，[30],我们（i）通过考虑基于泰勒级数的方法来求解一类参数化的哈密顿–雅可比–贝尔曼方程，提出一个统一的框架来处理开环和闭环非线性平衡问题；（ii）推导多项式展开系数的显式张量结构，使我们的数值方法能够扩展到数千个状态变量；（iii）提供大规模数值示例、可扩展性分析，以及所有算法的开放访问软件。

本文（第2部分）有三项主要贡献。首先，我们提出一种可扩展的、基于泰勒级数的策略，并将其实现为开放访问软件（NLbalancing代码库 [1]），用于计算非线性状态变换和奇异值函数。随后，我们推导出非线性平衡模型。非线性状态变换在新坐标中同时“对角化”开环和闭环能量函数。然而，这种非线性平衡变换可能存在病态问题（线性时不变情形下也会如此），且计算成本高。其次，我们由此开发了一种计算高效的平衡与降阶策略，通过在非线性流形上进行模型降阶来缩减全阶模型的维数。—该策略解决了完整非线性变换中的病态问题，并能高效构造非线性降阶模型。第三，我们针对伯格斯型偏微分方程的半离散形式，给出非线性平衡降阶模型，研究非线性变换的次数对降阶模型输入输出质量的影响，并展示奇异值函数的行为。我们强调，本文的工作不对动力系统的具体形式作任何假设：该变换仅平衡两个多项式能量函数，并生成可应用于任意非线性系统的非线性映射。

本文的组织结构如下。第二节简要回顾非线性系统能量函数的背景知识。第三节介绍我们的首项关键贡献——

一种可扩展的策略，用于计算非线性基变换和奇异值函数。本节还介绍非线性平衡模型。第四节介绍我们的第二项关键贡献：一种经修改且可扩展的方法，用于获得平衡的非线性降阶模型，以解决完整非线性变换中的病态问题，并提高非线性降阶模型评估的效率。第五节给出半离散 Burgers 方程非线性降阶模型的数值结果。最后，第六节总结全文并展望未来工作。

II. 非线性平衡的能量函数

本节简要回顾非线性控制仿射动力系统的统一概念—— $\mathcal{H}_\infty$ 能量函数。更多详情请参见本文第1部分([30])。考虑有限维系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t), \tag{1}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \tag{2}$$

其中，t 表示时间，$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态，$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$是时变输入向量，$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n\times m}$ 表示驱动机制，$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ 是由函数$\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$测得的输出向量，非线性漂移项为$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$，且$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是$\mathbf{u} = \mathbf{0}$对应的孤立平衡点。对于系统(1)-(2)，状态$\mathbf{x}_0$ 的 $\mathcal{H}_\infty$ 过去能量定义为：对于 $0 < \gamma$、 $\gamma \neq 1$,

$$\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x}_0) := \min_{\substack{\mathbf{u}\in L_2(-\infty,0]\\ \mathbf{x}(-\infty)=\mathbf{0},\\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0}} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (1-\gamma^{-2})\|\mathbf{y}(t)\|^2+\|\mathbf{u}(t)\|^2 \mathrm{d}t. \tag{3}$$

此外，状态$\mathbf{x}_0$ 中的 $\mathcal{H}_\infty$ 未来能量定义为，对于 $0 < \gamma < 1$，其定义为

$$\mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x}_0) := \max_{\substack{\mathbf{u}\in L_2[0,\infty)\\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\\ \mathbf{x}(\infty)=\mathbf{0}}} \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \|\mathbf{y}(t)\|^2 + \frac{\|\mathbf{u}(t)\|^2}{1-\gamma^{-2}} \mathrm{d}t, \tag{4}$$

对于 $\gamma > 1$，其定义为

$$\mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x}_0) := \min_{\substack{\mathbf{u}\in L_2[0,\infty)\\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\\ \mathbf{x}(\infty)=\mathbf{0}}} \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \|\mathbf{y}(t)\|^2 + \frac{\|\mathbf{u}(t)\|^2}{1-\gamma^{-2}} \mathrm{d}t. \tag{5}$$

$\mathcal{H}_\infty$ 能量函数可以通过 Hamilton–Jacobi–Bellman 偏微分方程求得，详见本文第1部分 [30, 第 II 节], 。对于线性时不变系统，这些能量函数关于状态是二次的，可以通过求解$\mathcal{H}_\infty$ 代数Riccati方程得到。

在假设能量函数存在且光滑的情况下，开环非线性能量函数 $\mathcal{E}_c(\mathbf{x})$ 和 $\mathcal{E}_o(\mathbf{x})$（参见 [30, 第 2.5] 节）可以通过以下极限得到

对于能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x})$ 和 $\mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x})$，当 $\gamma \to 1$ 趋于极限时，即，

$$\lim_{\gamma\to 1} \mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_c(\mathbf{x}), \quad \lim_{\gamma\to 1} \mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_o(\mathbf{x}). \tag{6}$$

与 [36] 类似，本文假设能量函数是多项式（或可近似为多项式），这使得我们的方法能够扩展到模型降阶过程。具体而言，我们假设过去能量函数表示为以下形式（或可近似为以下形式）

$$\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}_2^\top \mathbf{x}^{②} + \mathbf{v}_3^\top \mathbf{x}^{③} + \cdots + \mathbf{v}_d^\top \mathbf{x}^{ⓓ}\right). \tag{7}$$

其中$\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n^k}$ 和$\mathbf{x}^{ⓚ}$表示$\mathbf{x}$ 的 k阶克罗内克积，定义为

$$\mathbf{x}^{ⓚ} := \underbrace{\mathbf{x}\otimes\cdots\otimes\mathbf{x}}_{k \text{ times}} \in \mathbb{R}^{n^k}. \tag{8}$$

我们还假设未来能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x})$具有以下形式（或可近似为以下形式）

$$\mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_2^\top \mathbf{x}^{②} + \mathbf{w}_3^\top \mathbf{x}^{③} + \cdots + \mathbf{w}_d^\top \mathbf{x}^{ⓓ}\right), \tag{9}$$

其中 $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n^k}$。为确保式 (7) 和 (9) 中系数表示的唯一性，我们假设能量函数的多项式表示具有如下文所述的对称表示。

定义 *1*（对称系数）：具有实系数 $\mathbf{w}_d^\top \mathbf{x}^{ⓓ}$的单项式，如果满足以下条件，则具有对称系数：

$$\mathbf{w}_d^\top(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\cdots\otimes\mathbf{a}_d) = \mathbf{w}_d^\top(\mathbf{a}_{i_1}\otimes\mathbf{a}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{a}_{i_d}),$$

其中，索引 $\{i_k\}_{k=1}^d$ 是 1，...， d 的任意排列。

注意，本文第1部分中的算法 1 旨在确保计算所得系数具有对称性。该对称性定义将矩阵的对称性定义推广到了张量。例如，对于任意 a 和 b，要求 $\mathrm{w}_2^\top(\mathrm{a}\otimes\mathrm{b}) = \mathrm{w}_2^\top(\mathrm{b}\otimes\mathrm{a})$ 等价于 $(\mathrm{a}^\top\otimes\mathrm{b}^\top)\mathrm{w}_2 = (\mathrm{b}^\top\otimes\mathrm{a}^\top)\mathrm{w}_2$。因此，利用 w_2 =向量化(W_2)，可得 $\mathrm{b}^\top\mathrm{W}_2\mathrm{a} = \mathrm{a}^\top\mathrm{W}_2\mathrm{b}$。由于这些量是实标量，这意味着 $\mathrm{W}_2 = \mathrm{W}_2^\top$。

注释 *1*：在 [30,第 3], 节中，我们介绍了用于计算能量函数的多项式近似（7）和（9）的可扩展方法。不过，也可以采用其他方法，例如机器学习 [11] 或多项式拟合，以获得能量函数的多项式形式。本文中的方法与向量 $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{w}_i$ 的计算方式无关。

III. 从能量函数到平衡模型

能量函数是平衡和模型降阶过程的核心，对于线性系统和非线性系统都是如此。在本节中，我们提出一种基于张量的方法，通过利用（7）和（9）中能量函数的多项式结构，计算两种不同的平衡变换，从而高效地“对角化”这些能量函数。我们将在第三-A节中计算输入正规/输出对角 平衡变换，在第三-B节中计算输入-输出 平衡变换，并在第三-C节中介绍经过非线性变换的全阶模型（其形式为输入正规/输出对角形式或输入-输出平衡形式）。

A. 输入归一/输出对角平衡变换

下面的定理表明，存在一种非线性坐标变换，可将非线性系统(1)–(2)转换为输入正规/输出对角形式。

定理*1*：[20, 定理 8] 假设非线性系统的雅可比线性化是可控、可观且渐近稳定的。那么，存在原点的一个邻域 $\mathcal{W}$ 以及光滑坐标变换 $\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{z})$，定义在 $\mathcal{W}$ 上，其中 $\mathbf{z}=[z_1,z_2,\dots,z_n]$，使得可控性能量函数和可观性能量函数具有输入正规/输出对角形式：

$$\mathcal{E}_c(\Phi(\mathbf{z}))=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2, \tag{10}$$

$$\mathcal{E}_o(\Phi(\mathbf{z}))=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(z_i)z_i^2. \tag{11}$$

上述定理也适用于闭环平衡情形（在附加假设下甚至适用于不稳定系统，见 [46, 定理 5.13]）。在式(11)中，函数$\xi_i(z_i)$称为输入正规形的奇异值函数。可以将式(10)看作一种能量函数，其中每个状态对可控性能量的贡献相同。与线性情形不同，奇异值函数 $\xi_i(z_i)$不是常数，而是依赖于状态。值得注意的是，第 i个奇异值函数 ξ_i仅依赖于第 i个状态 z_i，因此在构造降阶模型时可以截断单个状态，正如我们在第四节中所见。

1）奇异值函数的泰勒展开与状态变换：在定理1的条件下，存在一个 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 映射 $\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{z})$，可将非线性系统变换为输入正规/输出对角形式。这里，我们假设该变换是解析的，因而可以将其写成（或近似为）

我们将其写成（或近似为）

$$\begin{aligned}\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{z})&=\mathbf{T}_1\mathbf{z}+\mathbf{T}_2\mathbf{z}^{②}+\cdots+\mathbf{T}_k\mathbf{z}^{ⓚ}\\&=:\mathbf{T}_1\mathbf{z}+\Phi^h(\mathbf{z}),\end{aligned} \tag{12}$$

其中$\mathbf{T}_j\in\mathbb{R}^{n\times n^j}$ 为多项式系数，$\mathbf{T}_1$ 是非奇异的，而$\mathbf{z}^{ⓚ}$ 与之前一样，是<style id='z'>z的 k 次克罗内克积。这使得该非线性变换能够以可扩展的方式进行计算。为简化下文的符号表示，我们将式 (12) 中的高阶项归并为项 Φ^h。类似地，我们将与第 i 个状态分量对应的输入正规/输出对角形式的奇异值函数展开为 ℓ 次多项式

$$\begin{aligned}\xi_i(z_i)&=\xi_i(0)+c_i^{(1)}z_i+c_i^{(2)}z_i^2+\cdots+c_i^{(\ell)}z_i^\ell\\&=:\xi_i(0)+\xi_i^h(z_i),\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $i=1$，2、.....、n。将 j次项的系数定义为 $\mathbf{c}_j=[c_1^{(j)},\ c_2^{(j)},\dots,c_n^{(j)}]^\top$，于是输入正规/输出对角形式的奇异值函数向量 $\xi(\mathbf{z})=\left[\xi_1(z_1)\ \xi_2(z_2)\cdots\ \xi_n(z_n)\right]^\top$ 可写为

$$\xi(\mathbf{z})=\boldsymbol{\Xi}\cdot\mathbf{1}+\operatorname{diag}(\mathbf{c}_1)\mathbf{z}+\cdots+\operatorname{diag}(\mathbf{c}_\ell)\mathbf{z}^\ell, \tag{14}$$

其中，$\mathbf{z}^\ell$ 表示向量$\mathbf{z}$的逐分量幂，$\boldsymbol{\Xi}=\operatorname{diag}(\xi_1^2(0)\dots,\xi_n^2(0))$为对角矩阵，而$\mathbf{1}$ 是全 1 向量。接下来的两节将推导用于高效计算$\mathbf{T}_i$和$\mathbf{c}_i$的张量表达式。

2) 输入正规/输出对角非线性变换的多项式系数矩阵计算：本节概述了求得非线性变换 (12) 的多项式系数矩阵 $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^k$ 所需的计算。首先，将 (7) 和 (9) 改写为

$$\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{V}_2\mathbf{x}+\mathcal{E}_c^h(\mathbf{x}), \tag{15}$$

$$\mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{W}_2\mathbf{x}+\mathcal{E}_o^h(\mathbf{x}), \tag{16}$$

其中，$\mathcal{E}_c^h(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\left(\mathbf{v}_3^\top\mathbf{x}^{③}+\cdots+\mathbf{v}_d^\top\mathbf{x}^{ⓓ}\right)$，而 $\mathcal{E}_o^h(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_3^\top\mathbf{x}^{③}+\cdots+\mathbf{w}_d^\top\mathbf{x}^{ⓓ}\right)$。[46, 注意，根据定理 5.17] 可知，$\operatorname{unvec}(\mathbf{v}_2)=\mathbf{V}_2=\mathbf{Y}_\infty^{-1}$和 $\operatorname{unvec}(\mathbf{w}_2)=\mathbf{W}_2=\mathbf{X}_\infty$是 $\mathcal{H}_\infty$ 滤波器 ARE 的唯一稳定化对称正定解

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_\infty+\mathbf{Y}_\infty\mathbf{A}^\top+\mathbf{B}\mathbf{B}^\top-(1-\gamma^{-2})\mathbf{Y}_\infty\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\mathbf{Y}_\infty=\mathbf{0}, \tag{17}$$

以及 $\mathcal{H}_\infty$ 控制 ARE

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{X}_\infty+\mathbf{X}_\infty\mathbf{A}+\mathbf{C}^\top\mathbf{C}-(1-\gamma^{-2})\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}\mathbf{B}^\top\mathbf{X}_\infty=\mathbf{0}. \tag{18}$$

为获得平衡表示，我们将变换 (12) 代入过去能量函数 (15)，并

对方程 (10) 强制施加输入对角结构，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^\top\mathbf{z} =&\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1\mathbf{z} + 2\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\Phi^h(\mathbf{z})\\ &+ \Phi^h(\mathbf{z})^\top\mathbf{V}_2\Phi^h(\mathbf{z}) + 2\mathcal{E}_c^h(\Phi(\mathbf{z})).\end{aligned} \tag{19}$$

随后，我们可以通过匹配多项式系数来计算矩阵 $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^k$。类似地，将变换 (12) 代入未来能量函数 (16)，并按照 (11) 强制进行对角化，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n z_i^2\left(\xi_i^2(0) + 2\xi_i(0)\xi_i^h(z_i) + \xi_i^h(z_i)^2\right)\\ &\quad= \mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1\mathbf{z} + 2\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\Phi^h(\mathbf{z})\\ &\qquad+ \Phi^h(\mathbf{z})^\top\mathbf{W}_2\Phi^h(\mathbf{z}) + 2\mathcal{E}_o^h(\Phi(\mathbf{z})).\end{aligned} \tag{20}$$

已知上一步得到的 $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^k$，我们可以求解 (20) 得到奇异值函数。

在陈述下一个定理之前，我们先引入以下记号

$$\mathcal{T}_{m,l} = \sum_{\sum i_j = l}\mathbf{T}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{T}_{i_m}\in\mathbb{R}^{n^m\times n^l}, \tag{21}$$

其中，对每个 $j=1$，$i_j\geq 1$，.....，m。因此，$\mathcal{T}_{m,l}$ 表示含有 m 项和 n^l 列的所有互不相同的张量积。例如，$\mathcal{T}_{2,3} = \mathbf{T}_1\otimes\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2\otimes\mathbf{T}_1$，，或 $\mathcal{T}_{3,4} = \mathbf{T}_1\otimes\mathbf{T}_1\otimes\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1\otimes\mathbf{T}_2\otimes\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2\otimes\mathbf{T}_1\otimes\mathbf{T}_1$，，其中包含三个互不相同的三重张量积；以及 $\mathcal{T}_{4,4} = \mathbf{T}_1^{④}$。

定理 *2*（输入正规/输出对角变换）：设$\mathbf{w}_i$，$\mathbf{v}_i$ 分别为式 (7) 和 (9) 中能量函数的多项式系数向量。设$\mathbf{L}$，$\mathbf{R}$ 分别为$\mathbf{W}_2 = \mathrm{unvec}(\mathbf{w}_2)$ 和 $\mathbf{V}_2 = \mathrm{unvec}(\mathbf{v}_2)$ 的 Cholesky 因子，即$\mathbf{W}_2 = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ 且$\mathbf{V}_2 = \mathbf{R}\mathbf{R}^\top$。计算$\mathbf{L}^\top\mathbf{R}^{-\top} = \mathcal{U}\Xi\mathcal{V}^\top$的奇异值分解。式 (12) 中的线性变换$\mathbf{T}_1$ 及其逆$\mathbf{T}_1^{-1}$为

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}^{-\top}\mathcal{V}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad \mathbf{T}_1^{-1} = \Xi^{-1}\mathcal{U}^\top\mathbf{L}^\top\in\mathbb{R}^{n\times n} \tag{22}$$

并且它们满足$\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{I}$（输入正规）以及$\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1 = \Xi^2$（输出对角）。此外，$\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1 = \Xi^2$，即$\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{W}_2$ 与 Σ^2 相似。因此，$\mathbf{T}_1$ 是线性化系统众所周知的输入正规/输出对角变换。对于 $k\geq 2$，非线性变换 (12) 的高阶张量形式为

$$\mathbf{T}_k = -\frac{1}{2}\mathbf{T}_1\,\mathrm{unvec}\left(\mathbf{M}_k\right)^\top\in\mathbb{R}^{n\times n^k},\ \text{where} \tag{23a}$$

$$\mathbf{M}_k = \sum_{\substack{i,j>1\\ i+j=k+1}}\mathrm{vec}\left(\mathbf{T}_j^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_i\right) + \sum_{i=3}^{k+1}\mathcal{T}_{i,k+1}^\top\mathbf{v}_i \tag{23b}$$

注*2*：在下文中，我们经常利用矩阵 $\mathbf{V}_2$ 的对称性$^\top$，从而得到 $\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\Phi^h(\mathbf{z}) + \Phi^h(\mathbf{z})^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1\mathbf{z} = 2\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\Phi^h(\mathbf{z})$，因为这些是标量。类似地，$(\mathbf{z}^{ⓚ})^\top\mathbf{T}_k^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1\mathbf{z} = \mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_k\mathbf{z}$ k 导出 $\mathrm{vec}(\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_k)^\top\mathbf{z}^{k+1} = \mathrm{vec}(\mathbf{T}_k^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1)^\top\mathbf{z}^{k+1}$。一般而言，对于任意向量 b，$\mathrm{vec}(\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_k)^\top\mathbf{b} \neq \mathrm{vec}(\mathbf{T}_k^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1)^\top\mathbf{b}$。

变换的二次部分和三次部分所对应的张量$\mathbf{T}_i$ 具有特定形式

$$\mathbf{T}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{T}_1\,\mathrm{unvec}([\mathbf{T}_1^{③}]^\top\mathbf{v}_3)^\top \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{T}_1\,\mathrm{unvec}\big(&\mathrm{vec}(\mathbf{T}_2^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_2)\ldots\\ &+\mathcal{T}_{3,4}^\top\mathbf{v}_3 + [\mathbf{T}_1^{④}]^\top\mathbf{v}_4\Big)^\top.\end{aligned} \tag{25}$$

证明：我们先证明矩阵 $\mathbf{T}_1$ 的相关结论。比较式 (19) 中的二次项，可得 $\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{I}$；然后比较式 (20) 中的二次项，得到 $\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1 = \mathrm{diag}(\xi_1^2(0)\ldots,\xi_n^2(0)) = \Xi^2$。综合上述结果可得 $\Xi^2 = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{T}_1^{-\top}\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1$。这表明 $\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{W}_2$ 与 Ξ^2 相似，即它们的特征值均为 $\xi_i^2(0)$。因此，$\mathbf{T}_1$ 是采用 $\mathcal{H}_\infty$-ARE 解的输入正规/输出对角线性平衡变换，见式 (17)–(18)，其中 $\mathbf{V}_2 = \mathbf{Y}_\infty^{-1}$，$\mathbf{W}_2 = \mathbf{X}_\infty$。

接下来，我们通过观察式 (19) 的三次及更高次项为零，来确定 $\mathbf{T}_2,\ldots,\mathbf{T}_k$，即

$$0 = 2\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\Phi^h(\mathbf{z}) + \Phi^h(\mathbf{z})^\top\mathbf{V}_2\Phi^h(\mathbf{z}) + 2\mathcal{E}_c^h(\Phi(\mathbf{z})). \tag{26}$$

回忆一下，$\Phi^h(\mathbf{z}) = \mathbf{T}_2\mathbf{z}^{②} + \cdots + \mathbf{T}_k\mathbf{z}^{ⓚ}$。因此，对于 $k\geq 3$，我们匹配 k次项，得到

$$\begin{aligned}&-2\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_{k-1}\mathbf{z}^{(k-1)}\\ &\quad= \left[\Phi^h(\mathbf{z})^\top\mathbf{V}_2\Phi^h(\mathbf{z})\right]^{\{k\}} + 2[\mathcal{E}_c^h(\Phi(\mathbf{z}))]^{\{k\}},\end{aligned} \tag{27}$$

其中，$[\cdot]^{\{k\}}$ 提取括号内表达式的 k 次项。回忆一下，能量函数中的高阶项从三次贡献项开始，即$\mathcal{E}_c^h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}_3^\top\mathbf{x}^{③} + \cdots + \mathbf{v}_d^\top\mathbf{x}^{ⓓ}\right)$。接下来，我们利用对于给定矩阵 M，有 $\mathbf{z}^\top\mathbf{M}\mathbf{z} = \mathrm{vec}(\mathbf{M}^\top)^\top(\mathbf{z}\otimes\mathbf{z})$，另见注2。因此，$\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_{k-1}\mathbf{z}^{(k-1)} = \mathrm{vec}(\mathbf{T}_{k-1}^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1)^\top\mathbf{z}^{ⓚ}$。对于一般的 k，式 (27) 因此可改写为

$$\begin{aligned}&-2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_{k-1}^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1)^\top\mathbf{z}^{ⓚ}\\ &\quad= \sum_{\substack{i,j>1\\ i+j=k}}[\mathbf{z}^{①}]^\top\mathbf{T}_i^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_j\mathbf{z}^{①} + \left(\sum_{i=3}^k\mathbf{v}_i^\top[\Phi(\mathbf{z})]^{①}\right)^{\{k\}},\end{aligned} \tag{28}$$

因为 $\mathbf{V}_2$ 是对称的。展开 $\Phi(\mathbf{z})$，并再次使用

$\mathbf{z}^\top\mathbf{M}\mathbf{z}=\mathrm{vec}(\mathbf{M}^\top)^\top(\mathbf{z}\otimes\mathbf{z})$ yields

$$\begin{aligned}&-2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_{k-1}^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1)^\top\mathbf{z}^{\textcircled{k}}\\&=\sum_{\substack{i,j>1\\i+j=k}}\mathrm{vec}\left(\mathbf{T}_j^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_i\right)^\top\mathbf{z}^{\textcircled{k}}\\&+\left(\sum_{i=3}^{k}\mathbf{v}_i^\top[\mathbf{T}_1\mathbf{z}+\mathbf{T}_2\mathbf{z}^{\textcircled{2}}+\cdots+\mathbf{T}_k\mathbf{z}^{\textcircled{k}}]^{\textcircled{1}}\right)^{\{k\}}.\end{aligned}\tag{29}$$

接下来我们使用 $\mathbf{V}_2\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_1^{-\top}$以及具有 i 项和 n^k 列的唯一张量积的定义，$\mathcal{T}_{i,\,k}$ 并注意到，当

$$\begin{aligned}&-2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_{k-1}^\top\mathbf{T}_1^{-\top})^\top\\&=\sum_{\substack{i,j>1\\i+j=k}}\mathrm{vec}\left(\mathbf{T}_j^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_i\right)^\top+\sum_{i=3}^{k}\mathbf{v}_i^\top\mathcal{T}_{i,k}.\end{aligned}\tag{30}$$

将 $k-1$ 重新编号为 k 并重排 (30)，即可证明 (23a)–(23b)。具体而言，对于 $k=2$，式 (23b) 中 $\mathbf{M}_k$ 的第一项求和为零，从而得到 (24)。对于 $k=3$，式 (23b) 得出 (25)。■

下一节将重点介绍如何计算与输入正规形相关的奇异值函数 $\xi_i^h(z_i)$，这些函数通过多项式展开得到。

3) 计算状态依赖奇异值函数：利用能量函数 (7) 和 (9) 得到的 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=2}^d$ 和 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=2}^d$，以及定理 2 中的 $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^k$，接下来只需计算式 (13)–(14) 所定义的奇异值函数的多项式系数 $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^\ell$。奇异值函数用于确定平衡降阶模型中保留哪些模态。为确定奇异值函数，考虑式 (20) 的三次及更高次项，即

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}z_i^2\xi_i^h(z_i)\left(2\xi_i(0)+\xi_i^h(z_i)\right)\\&=2\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\Phi^h(\mathbf{z})+\Phi^h(\mathbf{z})^\top\mathbf{W}_2\Phi^h(\mathbf{z})+2\mathcal{E}_o^h(\Phi(\mathbf{z})),\end{aligned}\tag{31}$$

其中，右侧的项（根据定理 2 得到的 $\mathbf{T}_i$，以及由（9）得到的 $\mathbf{w}_i$）和左侧的 $\xi_i(0)$ 均已知，后者由定理 2 给出。下面的定理将说明如何计算（13）中与状态依赖部分奇异值函数相关的系数 $\mathbf{c}_i$。

定理 *3*：令$\mathbf{z}=[z_1,z_2,\ldots,z_n]^\top$ 为变换后的状态，$\mathbf{c}_k=[c_1^{(k)},\ c_2^{(k)},\ldots,c_n^{(k)}]^\top$ 为式（13）和（14）中定义的、对应于次数k 项的 n维未知系数向量。状态中线性（$k=1$）项的系数可通过以下方式求得

$$\mathbf{c}_1=\mathbf{\Xi}^{-1}\left(\mathrm{vec}(\mathbf{T}_2^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)^\top+\frac{1}{2}\mathbf{w}_3^\top\mathbf{T}_1^{\textcircled{3}}\right)_{\mathcal{I}_1}\tag{32}$$

对于指标 $\mathcal{I}_1=\{j\mid j=(i-1)(n^2+n)+i,\quad i=1,\ldots\ldots,\ n\}$。一般而言，对于 $k\geq1$，可得显式递推式

$$\mathbf{c}_k=\frac{1}{2}\mathbf{\Xi}^{-1}\left[(\mathbf{C}_k)_{\mathcal{I}_k}-\sum_{i+j=k}\mathbf{c}_i\odot\mathbf{c}_j\right]\tag{33}$$

其中

$$\mathbf{C}_k=\sum_{\substack{i,j\geq1\\i+j=k+2}}\mathrm{vec}\left(\mathbf{T}_j^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_i\right)^\top+\sum_{i=3}^{k+2}(\mathcal{T}_{i,k+2})^\top\mathbf{w}_i,\tag{34}$$

$\mathcal{I}_k$ 是索引集 $\mathcal{I}_k=\{j\mid j=(i-1)\sum_{l=1}^{k+1}n^l+i,\ i=1,\ldots,n\}$，而 $\odot$ 表示 Hadamard 积（逐分量乘法）。

证明：我们先将（31）两边的次数为 k 的多项式项进行匹配，得到

$$\sum_{i=1}^{n}z_i^2\left[\xi_i^h(z_i)\left(2\xi_i(0)+\xi_i^h(z_i)\right)\right]^{\{k-2\}}\tag{35a}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{i=1}^{n}z_i^2\left[\left(c_i^{(1)}z_i+c_i^{(2)}z_i^2+\cdots+c_i^{(\ell)}z_i^\ell\right)\right.\\&\quad\left.\cdot\left(2\xi_i(0)+c_i^{(1)}z_i+c_i^{(2)}z_i^2+\cdots+c_i^{(\ell)}z_i^\ell\right)\right]^{\{k-2\}}\end{aligned}\tag{35b}$$

$$\begin{aligned}&=2\mathbf{z}^\top\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_{k-1}\mathbf{z}^{\textcircled{k-1}}+[\Phi^h(\mathbf{z})^\top\mathbf{W}_2\Phi^h(\mathbf{z})]^{\{k\}}\\&\quad+2[\mathcal{E}_o^h(\Phi(\mathbf{z}))]^{\{k\}}.\end{aligned}\tag{35c}$$

与定理 2 的证明类似，对于 $k\geq3$，我们得到以下方程组

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}z_i^2\left[(c_i^{(1)}z_i+c_i^{(2)}z_i^2+\cdots+c_i^{(k-2)}z_i^{(k-2)})\cdot\right.\\&\left.\left(2\xi_i(0)+c_i^{(1)}z_i+c_i^{(2)}z_i^2+\cdots+c_i^{(k-3)}z_i^{(k-3)}\right)\right]^{\{k-2\}}\\&=\left(\sum_{\substack{i,j\geq1\\i+j=k}}\mathrm{vec}\left(\mathbf{T}_j^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_i\right)^\top+\sum_{i=3}^{k}\mathbf{w}_i^\top\mathcal{T}_{i,k}\right)\mathbf{z}^{\textcircled{k}},\end{aligned}\tag{36}$$

其中，在（35b）中，我们将第一个 ℓ 替换为 $k-2$，并将第二个 ℓ 替换为 $k-3$，因为它们对应于我们预期在 $\{k-2\}$ 选取过程中匹配的最高次多项式。此外，我们利用了 $\mathbf{W}_2$ 的对称性，以及以下事实：$2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_{k+1}^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)^\top\mathbf{z}^{\textcircled{2}}=\mathrm{vec}(\mathbf{T}_1^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_{k+1})^\top\mathbf{z}^{\textcircled{2}}+\mathrm{vec}(\mathbf{T}_{k+1}^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)^\top\mathbf{z}^{\textcircled{2}}$。

聚焦于 $k=3$ 的情形，可得到关于系数 $\mathbf{c}_1$ 的方程：

$$2\sum_{i=1}^{n}\xi_i(0)c_i^{(1)}z_i^3=\left(2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_2^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)^\top+\mathbf{w}_3^\top\mathbf{T}_1^{\textcircled{3}}\right)\mathbf{z}^{\textcircled{3}}.\tag{37}$$

对于 $i=1,2,\ldots,n$，比较（37）两边 z_i^3 的系数，可得到（32），即 $\mathbf{c}_1$，的公式，其中索引集 $\mathcal{I}_1$ 对应于单项式在 $\mathbf{z}^{③}$ 中的位置。接下来，我们聚焦于（36）中的四次（$k=4$）项，并得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left(2c_i^{(2)}\xi_i(0)+(c_i^{(1)})^2\right)z_i^4\\&=\big(2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_3^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)^\top+\mathrm{vec}(\mathbf{T}_2^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_2)^\top\\&\quad+\mathbf{w}_3^\top\mathcal{T}_{3,4}+\mathbf{w}_4^\top\mathbf{T}_1^{④}\big)\mathbf{z}^{④}.\end{aligned}\tag{38}$$

同样，对于 $i=1,2,\ldots,n$，我们对等式两边的 z_i 系数进行匹配，因此对于 $\mathbf{c}_2=[c_1^{(2)},c_2^{(2)},\ldots,c_n^{(2)}]^\top$，得到公式

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2=&\frac{1}{2}\mathbf{\Xi}^{-1}\Big[\Big(2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_3^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)+\mathrm{vec}(\mathbf{T}_2^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_2)\\&+\mathcal{T}_{3,4}^\top\mathbf{w}_3+(\mathbf{T}_1^{④})^\top\mathbf{w}_4\Big)_{\mathcal{I}_2}-\mathbf{c}_1^2\Big]\end{aligned}\tag{39}$$

对于指标 $\mathcal{I}_2=\{j\mid j=(i-1)(n^3+n^2+n)+i,\ i=1,\ldots,n\}$，它们对应于 $\mathbf{z}^{④}$ 中单项式的位置，其中 $\mathbf{c}_1^2$ 表示 $\mathbf{c}_1$ 的分量平方。情形 $k=5$ 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left(2c_i^{(1)}c_i^{(2)}+2\xi_i(0)c_i^{(3)}\right)z_i^5\\&=\Big(2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_4^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)^\top+2\mathrm{vec}\left(\mathbf{T}_2^\top\mathbf{W}_2^\top\mathbf{T}_3\right)^\top\\&\quad+\sum_{i=3}^{5}\mathbf{w}_i^\top\mathcal{T}_{i,k}\Big)\mathbf{z}^{⑤},\end{aligned}\tag{40}$$

从而得到 $\mathbf{c}_3$ 的显式表达式：

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_3=&\frac{1}{2}\mathbf{\Xi}^{-1}\Big[\Big(2\mathrm{vec}(\mathbf{T}_4^\top\mathbf{W}_2\mathbf{T}_1)\\&+2\mathrm{vec}\Big(\mathbf{T}_3^\top\mathbf{W}_2^\top\mathbf{T}_2\Big)\\&+\sum_{i=3}^{5}\mathcal{T}_{i,k}^\top\mathbf{w}_i\Big)_{\mathcal{I}_3}-2\mathbf{c}_1\odot\mathbf{c}_2\Big]\end{aligned}\tag{41}$$

对于指标 $\mathcal{I}_3=\{j\mid j=(i-1)(n^4+n^3+n^2+n)+i,\ i=1,\ldots,n\}$。以此类推，可得到一般 k 情况下 $\mathbf{c}_k$ 的递推公式 (33)，其中进行了指标变换 $k-2\to k$。■

4）完整算法与实现：非线性输入正规/输出对角变换 $\Phi(\mathbf{z})$ 的基于张量的计算完整算法见算法 1，其对应的奇异值函数 $\xi_i(z_i)$见算法 2。

注*3*：在线性情形中，能量函数是二次的，例如 $\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{v}_2^\top\mathbf{z}^{②}$，因此 $\bar{\mathbf{v}}_i=\mathbf{0}$ for $i\geq 3$。由算法 1 可知，$\mathbf{T}_i=\mathbf{0}$ for $i\geq 2$。由此，我们恢复了常见的线性状态变换$\Phi(\mathbf{z})=\mathbf{T}_1\mathbf{z}$。此外，我们知道奇异值函数是常数，并且由算法 2 可知

算法 1 多项式系数的计算 $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^k$ 对式 (12) 中 $\Phi(\mathbf{z})$ 的近似。

输入： 系数 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=}^{d}$ $_2$ 和 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=2}^{d}$ 由 (7) 和 (9).

输出： 系数 $\{\mathbf{T}_i\}_{i=}^{k}$ $_1$ 变换的，并且 $\mathbf{\Xi}=\mathrm{diag}(\xi_1(0)\ldots,\xi_n(0))$

1：计算 Cholesky 因子 $\mathbf{V}_2=\mathbf{R}\mathbf{R}^\top$ 和 $\mathbf{W}_2=\mathbf{L}\mathbf{L}^\top$

2：计算 the 奇异 值 分解 $\mathbf{L}^\top\mathbf{R}^{-\top}=\mathcal{U}\mathbf{\Xi}\mathcal{V}^\top$ 并设置

$$\mathbf{T}_1=\mathbf{R}^{-\top}\mathcal{V}$$

3：计算高次数多项式系数：

$$\mathbf{T}_2=-\frac{1}{2}\mathbf{T}_1\ \mathrm{unvec}([\mathbf{T}_1^{③}]^\top\mathbf{v}_3)^\top$$

$$\mathbf{T}_3=-\frac{1}{2}\mathbf{T}_1\ \mathrm{unvec}\left(\mathrm{vec}(\mathbf{T}_2^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_2)+\mathcal{T}_{3,4}^\top\mathbf{v}_3+[\mathbf{T}_1^{④}]^\top\mathbf{v}_4\right)^\top$$

$$\mathbf{T}_k=-\frac{1}{2}\mathbf{T}_1\mathrm{unvec}\left(\sum_{\substack{i,j>1\\i+j=k+1}}\mathrm{vec}\left(\mathbf{T}_j^\top\mathbf{V}_2\mathbf{T}_i\right)+\sum_{i=3}^{k+1}\mathcal{T}_{i,k+1}^\top\mathbf{v}_i\right)^\top$$

4：在每一步对系数 $\mathbf{T}_k$ 进行对称化（见注2）。

事实上，对于 $i\geq 1$，$\mathbf{c}_i=\mathbf{0}$。总之，在线性情形下，能量函数为二次函数，变换为线性变换，奇异值函数为常数。然而，这种次数递进关系对于一般的非线性情形并不成立。假设能量函数恰好是三次的，即 $\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x})=\frac{1}{2}(\mathbf{v}_2^\top\mathbf{z}^{②}+\mathbf{v}_3^\top\mathbf{z}^{③})$。在算法 1 中，我们仍然能够计算 $\mathbf{T}_k,k\geq 3$，将其表示为 $\mathbf{T}_3\neq\mathbf{0}$，因此，在$\mathbf{T}_k$ 计算中，右侧的第一项之和也非零。类似地，我们看到算法 2 中的 $\mathbf{c}_i$ 系数也可能非零。因此，通常而言，能量函数的次数不会直接影响变换和奇异值函数的次数。

5) 演示：我们演示采用高次数变换将能量函数转化为输入正规/输出对角形式的有效性。使用 [30,第 IV.B 节] 中的示例（经[29]修改），我们考虑

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{N}(\mathbf{x}\otimes\mathbf{x})+\mathbf{B}u,\qquad y=\mathbf{C}\mathbf{x}\tag{42}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2\\-x_2\end{bmatrix},\quad\mathbf{N}(\mathbf{x}\otimes\mathbf{x})=\begin{bmatrix}-x_2^2\\0\end{bmatrix},\\&\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad\mathbf{C}=[1\ 1].\end{aligned}\tag{43}$$

图 1 给出了过去能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x})$ 的 8 次近似图，其中 $\eta=0.1$（或 $\gamma=\sqrt{2}$）。显然，该函数不是二次函数。

算法 2 计算输入正规奇异值函数
值函数 $\xi_i(z_i)$，由式 (14) 得出。

输入： 来自式 (7) 和式 (9) 的系数 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=2}^{d}$ 和 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=2}^{d}$，以及来自算法 1 的 $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\boldsymbol{\Xi}$。**输出：** 奇异值函数的系数 $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^{\ell}$。1：计算线性项的系数

$$\mathbf{c}_1 = \boldsymbol{\Xi}^{-1}\Big(\text{向量化}(\mathbf{T}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{T}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{T}_{3\,1}\bigcirc)^\top \mathbf{w}_3\Big)_{\mathcal{I}_1}$$

对于指标 $\mathcal{I}_1 = \{j \mid j = (i-1)(n^2+n)+i,\quad i = 1,\ldots n\}$.

2：对于 $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ \ell$，计算系数

$$\mathbf{c}_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Xi}^{-1}\left[\left(\sum_{\substack{i,j\geq 1\\ i+j=m+2}} \text{vec}\left(\mathbf{T}_j^\top \mathbf{W}_2^\top \mathbf{T}_i\right) + \sum_{i=3}^{m+2} \mathcal{T}_{i,m+2}^\top \mathbf{w}_i\right)_{\mathcal{I}_m} - \sum_{i+j=m} \mathbf{c}_i \odot \mathbf{c}_j\right]$$

对于索引集 $\mathcal{I}_m = \{j \mid j = (i-1)\sum_{l=1}^{m+1} n^l + i,\ i = 1、\ \ldots、\ n\}$.

为将其化为输入正规形（其中过去能量函数为二次型，见 (10)），我们定性比较采用线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_1\mathbf{z}$（图 2）和二次变换 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_1\mathbf{z} + \mathbf{T}_2\mathbf{z}$②（图 3）的效果。虽然线性状态变换无法将能量充分变换为二次型，但我们观察到，使用二次状态变换可以更好地局部近似式 (10)。这种变换的良好效果可延伸至 z 坐标下的区域 $(-0.2,\ 0.2) \times (-0.2,\ 0.2)$。

为了定量评估多项式变换将过去能量函数化为输入正规形（即使其关于状态呈二次形式）的能力，我们在表 I 中列出了不同大小区域内变换后的能量函数与目标形式（10）之间的最大误差。正如预期，在靠近原点的区域内，次数更高的变换能更好地解决平衡问题。我们还观察到，越接近原点，使用高次数变换的优势越明显。这些变换是作为局部近似构造的，但在更大的区域内，我们仍能看到它们优于线性变换。此外，在本例中，采用二次或三次变换也能在远离原点处达到较高精度。越接近原点，高次数变换的优势就越突出。

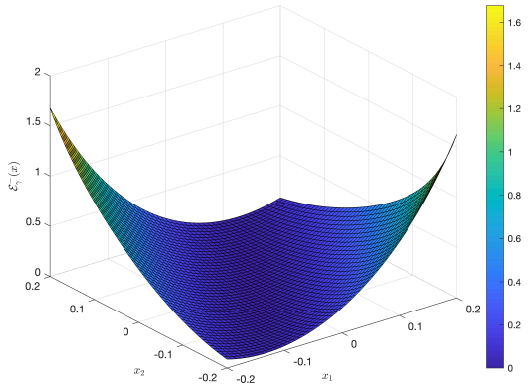

图 1。 原始坐标下模型 $\mathcal{E}_\gamma^-$ 的过去能量函数，模型为 (42)–(43) 。

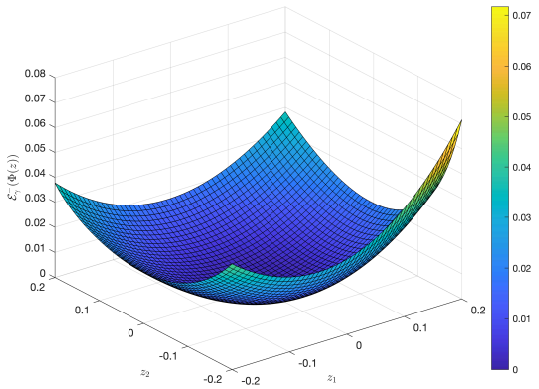

图 2. 过去能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-$ 模型 (42)–(43) 采用线性状态变换，$\mathbf{x} = \mathbf{T}_1\mathbf{z}$。

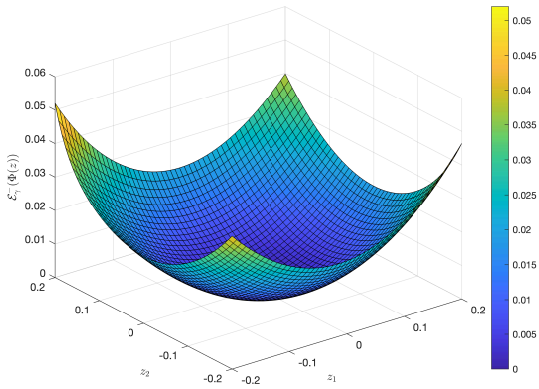

图 3. 过去能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-$ 模型 (42)–(43) 采用二次状态变换，$\mathbf{x} = \mathbf{T}_1\mathbf{z} + \mathbf{T}_2(\mathbf{z} \otimes \mathbf{z})$。

表 I不同次数变换对定义域 $(-a,\ a)^2$上变换后的过去能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-$ 的最大误差的影响。

次数	$a = 0.2$	$a = 0.05$	$a = 0.01$
1	4.0566e-02	1.5498e-04	1.0886e-06
2	1.8411e-02	7.6587e-06	9.2309e-09
3	1.6217e-02	1.7734e-06	4.2417e-10
4	1.8339e-02	4.2031e-07	1.9737e-11
5	1.6364e-02	1.0820e-07	1.0743e-12
6	1.8547e-02	2.3594e-08	6.2827e-14
7	1.5997e-02	1.7912e-08	4.7472e-15
8	1.9368e-02	1.1080e-08	1.0545e-15

B. 输入-输出平衡变换

第三节 A 中的变换将系统化为输入正规/输出对角形式，见定理 1。下一个定理给出一种变换，可将系统化为广泛使用的输入-输出平衡形式，此时奇异值同时出现在可控性能量函数和可观测性能量函数中。

定理 *4*： [20,定理 9] 假设非线性系统的雅可比线性化是可控、可观且渐近稳定的。则存在原点的一个邻域 $\mathcal{W}$ 以及一个光滑坐标变换 $\mathbf{x} = \Phi(\bar{\mathbf{z}})$，在 $\mathcal{W}$ 上将控制能量函数和可观性能量函数转换为以下形式

$$\mathcal{E}_c(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^2}{\sigma_i(\bar{z}_i)}, \tag{44}$$

$$\mathcal{E}_o(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(\bar{z}_i)\bar{z}_i^2. \tag{45}$$

此外，如果 $\mathcal{W} = \mathbb{R}^n$，则非线性系统的汉克尔范数为

$$\|\Sigma\|_H := \sup_{\mathbf{u}\in L_2(\mathbb{R}^+),\mathbf{u}\neq\mathbf{0}}\frac{\|\mathcal{H}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} = \sup_{\bar{z}_1}\sigma_1(\bar{z}_1), \tag{46}$$

其中，$\mathcal{H}$ 是该非线性系统的汉克尔算子。

在更严格的假设下，闭环系统也存在这样的变量变换，参见 [46,定理 5。13],其中，过去与未来能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-$和 $\mathcal{E}_\gamma^+$被变换为输入输出形式，且底层系统可能是不稳定的。注意，由于式（44）中的每个奇异值函数都与单个状态分量 z_i相关联，因此可用它们来决定状态的截断，参见第 IV 节。要得到变换 $\Phi(\bar{\mathbf{z}})$，首先考虑输入正规形下的过去能量函数，即 $\mathcal{E}_\gamma^-(\Phi(\mathbf{z})) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$ 10 ，见（）。现在需要对各个状态进行缩放，以得到 $\mathcal{E}_\gamma^-(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^2}{\sigma_i}(\bar{z}_i)$。为此，考虑非线性变换

$$\bar{z}_i = z_i\sqrt{\xi_i(z_i)} = \bar{\Phi}_i^{-1}(z_i) \quad \Rightarrow \quad \bar{\Phi}_i(\bar{z}_i) = z_i. \tag{47}$$

我们将这个变换代入式（10）中的能量函数，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\gamma^-(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^2}{\xi_i(z_i)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^2}{\xi_i(\bar{\Phi}_i(\bar{z}_i))} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^2}{\sigma_i(\bar{z}_i)},\end{aligned} \tag{48}$$

其中，新的输入-输出奇异值函数定义如下（见 [20,定理 11]）

$$\sigma_i(\bar{z}_i) := \xi_i(\bar{\Phi}_i(\bar{z}_i)) = \xi_i(z_i). \tag{49}$$

这意味着，输入正规/输出对角变换与输入-输出平衡变换的奇异值函数相同。为阐明这一点，我们回顾一下线性情形。对于线性时不变系统，设$\mathbf{Y}_\infty$ 和 $\mathbf{X}_\infty$ 分别是方程$\mathcal{H}_\infty$ （17）和（18）的解。于是，输入正规形式意味着$\mathbf{Y}_\infty = \mathbf{I}$ 且$\mathbf{X}_\infty = \mathrm{diag}(\xi_1(0)^2, \ldots, \xi_n(0)^2)$。然而，由于$\mathcal{H}_\infty$-特征值 $\xi_i(0)$（在极限 $\gamma \to 1$ 下即为（3）–（5）中的汉克尔奇异值）在状态空间变换下保持不变，因此在完全平衡的坐标中（经过适当缩放后）有$\mathbf{Y}_\infty = \mathbf{X}_\infty = \mathrm{diag}(\xi_1(0)\ldots, \xi_n(0))$。

接下来，我们考察非线性状态变换 (47) 如何影响输入正规/输出对角形式 $\mathcal{E}_\gamma^+(\Phi(\mathbf{z})) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\xi_i^2\ z_i$ ( ) 的未来能量函数。应用 (47) 中的非线性变换后，未来能量函数会自动变换为定理 4 所示的输入-输出平衡形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\gamma^+(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{z}_i^2\xi_i(z_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{z}_i^2\xi_i(\bar{\Phi}(\bar{z}_i))\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{z}_i^2\sigma_i(\bar{z}_i),\end{aligned} \tag{50}$$

其中奇异值函数由 (49) 给出。

注 *4*： 将 (44) 中的能量函数写成如下形式，可以进一步理解其与线性时不变系统平衡截断之间的联系

$$\mathcal{E}_\gamma^-(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{z}}^\top\boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{z}})^{-1}\bar{\mathbf{z}}, \tag{51}$$

$$\mathcal{E}_\gamma^+(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{z}}^\top\boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{z}})\bar{\mathbf{z}} \tag{52}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{z}}) = \mathrm{diag}(\sigma_1(\bar{z}_1)\ldots, \sigma_n(\bar{z}_n))$。这种形式的解释是：在平衡坐标 $\boldsymbol{\Sigma}(\bar{\mathbf{z}})$中，将“格拉姆矩阵”视为状态相关的，而非像线性时不变情形那样为常数。

C. 平衡高维模型

将动力系统 (1)–(2) 转换为输入-输出平衡坐标系的定理 4 和式 (47) 中的非线性变换可概括如下：

$$\begin{cases} \mathbf{x} &= \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}}) = \mathbf{T}_1\mathbf{z} + \mathbf{T}_2\mathbf{z}^{②} + \cdots + \mathbf{T}_k\mathbf{z}^{ⓚ} \\ z_i &= \bar{z}_i/\sqrt{\sigma_i(\bar{z}_i)}. \end{cases} \tag{53}$$

请注意，变换矩阵 $\mathbf{T}_i$ 没有变化，因为输入正规/输出对角形式已经对角化，但缩放发生了变化。换言之，使用（49）将每个新状态按 $\sqrt{\xi_i(z_i)}$ 缩放，即可得到定理 4 中的完全平衡形式。在线性时不变情形下，由（12）得到的 $\mathbf{x} = \mathbf{T}_1\mathbf{z}$ 给出输入正规/输出对角形式；对状态进行额外缩放 $\bar{z}_i/\sqrt{\xi_i(0)} = z_i$ 后，我们得到变换 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_1\mathbf{z} = \mathbf{T}_1\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\bar{\mathbf{z}}$，即（53）中的输入-输出平衡形式。

动力系统经过输入-输出平衡变换 $\mathbf{x} = \Phi(\bar{\mathbf{z}})$ 变换后为

$$\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{z}})\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})) + \mathbf{g}(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}}))\mathbf{u}, \tag{54}$$

其中，状态空间变换的雅可比矩阵 $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{z}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{z}}) :=& \frac{\mathrm{d}\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})}{\mathrm{d}\bar{\mathbf{z}}} \\ =& \mathbf{T}_1 + 2\mathbf{T}_2(\bar{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{I}) + 3\mathbf{T}_3(\bar{\mathbf{z}} \otimes \bar{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{I}) + \ldots, \end{aligned} \tag{55}$$

这里我们利用了这样一个事实：由于我们使用对称系数计算 $\mathbf{T}_k$，因此例如有 $\mathbf{T}_2(\bar{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{I}) = \mathbf{T}_2(\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{z}})$。有关对称系数的更多详细信息，请参见定义 1。雅可比矩阵可以显式计算，无需数值近似，因为它是多项式变换的导数。值得注意的是，输入正规/输出对角变换 (12) 的雅可比矩阵 $\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{z})}{\mathrm{d}\mathbf{z}}$ 与输入-输出平衡变换 (53) 的雅可比矩阵 $\frac{\mathrm{d}\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{z}})}{\mathrm{d}\bar{\mathbf{z}}}$ 具有相同的系数矩阵 $\mathbf{T}_i$，这大大简化了降阶模型仿真。在下一节中，我们将重新审视通常会导致病态问题的标准平衡变换。随后，我们将介绍一种新颖的近似方法，以良好条件数且计算高效的方式同时对非线性系统进行平衡与降阶。

IV. 通过非线性变换实现平衡截断降阶

在本节中，我们将对完全平衡模型 (54) 进行降维。为确定降阶模型的降阶维数 r，我们在 $\mathcal{H}_\infty$ 奇异值函数中寻找显著的间隔，即寻找满足以下条件的降阶维数 r：

$$\max_{\bar{z}_r} \sigma_r(\bar{z}_r) \gg \max_{\bar{z}_{r+1}} \sigma_{r+1}(\bar{z}_{r+1}) \tag{56}$$

（至少要求“>”在原点的某个邻域内成立）。这表明，就过去与未来能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-$ 和 $\mathcal{E}_\gamma^+$ 而言，状态分量 $\bar{z}_1$、$\bar{z}_2$、……、$\bar{z}_r$ 比状态 $\bar{z}_{r+1}$、$\bar{z}_{r+2}$、……、$\bar{z}_n$ 更重要。因此，我们在平衡坐标中设定 $\bar{z}_{r+1} = \bar{z}_{r+2} = \ldots = \bar{z}_n = 0$，并将降阶状态向量定义为

$$\bar{\mathbf{z}}_r = \mathbf{\Psi}_r^\top \bar{\mathbf{z}} = [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_r]^\top, \quad \mathbf{\Psi}_r = [\mathbf{I}_r \ \mathbf{0}]^\top \in \mathbb{R}^{n\times r}. \tag{57}$$

接下来的第 IV-A 节介绍 [45], [46] 中最初提出的平衡降阶模型。第 IV-B 节提出一种新颖且数值效率更高、条件更好的近似策略，用于计算与此截断策略对应的非线性降阶模型。第 IV-C 节则从另一种视角看待非线性降阶模型，即在非线性平衡流形上进行近似。

A. 先平衡后降阶方法

[45],[46] 中提出的先平衡*then*后降阶策略，首先计算完整的平衡变换，然后截断所得的完全平衡系统。将其应用于方程（54），可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_r =& \underbrace{\mathbf{\Psi}_r^\top[\bar{\mathbf{J}}([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}])]^{-1}\mathbf{f}(\bar{\Phi}([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}]))}_{=:\mathbf{f}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)} \\ &+ \underbrace{\mathbf{\Psi}_r^\top[\bar{\mathbf{J}}([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}])]^{-1}\mathbf{g}(\bar{\Phi}([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}]))}_{=:\mathbf{g}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)}\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\mathbf{y}_r = \underbrace{\mathbf{h}(\bar{\Phi}([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}]))}_{=:\mathbf{h}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)}. \tag{59}$$

高维状态重构为 $\mathbf{x} \approx \Phi([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}])$。平衡截断的一个目标是获得在降阶坐标下平衡的降阶模型，并保留全阶模型的性质，例如稳定性。以下定理表明，能否获得此类结果取决于用于平衡的能量函数。首先，我们考虑使用式（6）中的开环能量函数进行平衡的情形。

定理 *5*：[20, 定理 10] 考虑非线性动力系统 (1)–(2)。设

1) the open-loop controllability and observability energy functions $\mathcal{E}_c$ and $\mathcal{E}_o$ exist,
2) the matrices $\left[\frac{\partial^2\mathcal{E}_c(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})\right]_{i,j=1,\ldots n}$ and $\left[\frac{\partial^2\mathcal{E}_o(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})\right]_{i,j=1,\ldots n}$ are positive definite,
3) the eigenvalues of $\left[\frac{\partial^2\mathcal{E}_c(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})\right]^{-1}\left[\frac{\partial^2\mathcal{E}_o(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})\right]$ are distinct.

然后，利用输入-输出平衡变换 $\Phi(\bar{\mathbf{z}})$，平衡降阶模型的可控性函数 $\mathcal{E}_{c,r}$ 和可观性

能量函数$\mathcal{E}_{o,r}$ 满足关系

$$\mathcal{E}_{c,r}(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathcal{E}_c([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}]), \quad \mathcal{E}_{o,r}(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathcal{E}_o([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}]). \quad (60)$$

此外，降阶模型的奇异值函数 $\sigma_{i,\ r}(\bar{z}_i)$ 同样满足

$$\sigma_{i,r}(\bar{z}_i) = \sigma_i(\bar{z}_i), \quad (61)$$

并且降阶模型的能量函数按照定理 4 的意义是平衡的。

注 *5*： 由定理 5 可知，在适当的假设下，开环能量函数在降阶模型层面得以保留。这意味着降阶模型继承了全阶模型的局部渐近稳定性 [45,Thm 5.3]。在一些特殊情况下，还可以保证全局渐近稳定性，见 [45,Thm 5.4]。pp

下一个定理讨论使用闭环（过去和未来）能量函数 (3)–(4) 进行平衡的情形。在这种情况下，需要额外的条件，以确保降阶模型在降阶坐标下也保持平衡。

定理 *6*： [46, 定理 6.1。] 令 $\check{\mathbf{z}} = [\bar{z}_{r+1}, \ldots, \bar{z}_n]$ 为从全阶模型中截断的状态分量向量。相应地，将输入输出平衡系统 (54) 分块表示为 $[\dot{\bar{\mathbf{z}}}_r;\ \dot{\check{\mathbf{z}}}]^\top = [\mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{z}}); \mathbf{f}_2(\bar{\mathbf{z}})]^\top + [\mathbf{g}_1(\bar{\mathbf{z}}); \mathbf{g}_2(\bar{\mathbf{z}})]^\top \mathbf{u}$。假设式 (3)–(4) 中的闭环能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-$ 和 $\mathcal{E}_\gamma^+$ 存在。经过输入输出平衡变换 $\Phi(\bar{\mathbf{z}})$ 后，平衡降阶模型 (58)–(59) 的过去能量函数满足

$$\mathcal{E}_\gamma^-(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathcal{E}_\gamma^-([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}]). \quad (62)$$

进一步假设

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\gamma^+}{\partial \check{\mathbf{z}}}(\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0})\mathbf{f}_2(\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_\gamma^+}{\partial \check{\mathbf{z}}}(\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0})\mathbf{g}_2(\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}) = 0 \quad (63)$$

成立；则未来能量函数满足

$$\mathcal{E}_\gamma^+(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathcal{E}_\gamma^+([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}]). \quad (64)$$

由于在 $\mathcal{H}_\infty$ 框架下并未假设原系统稳定，因此一个值得研究的问题是：先降阶再设计 $\mathcal{H}_\infty$次优控制的策略，是否能保证为 $\mathcal{H}_\infty$平衡降阶模型生成次优控制。关于该结论成立的条件，请参见 [46,定理 6.3]。

对于特殊情形 $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{N}(\mathbf{z} \otimes \mathbf{z})$, 降阶模型 (58) 右端多项式项的求值可以简化为

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\bar{\Phi}([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}])) &= \sum_{i=1}^{k} [\mathbf{A}\mathbf{T}_i \mathbf{I}_{n\times r}^{\textcircled{i}}]\bar{\mathbf{z}}_r^{\textcircled{i}} \\ &+ \mathbf{N}\left(\sum_{i=1}^{k} [\mathbf{T}_i \mathbf{I}_{n\times r}^{\textcircled{i}}]\bar{\mathbf{z}}_r^{\textcircled{i}} \otimes \sum_{i=1}^{k} [\mathbf{T}_i \mathbf{I}_{n\times r}^{\textcircled{i}}]\bar{\mathbf{z}}_r^{\textcircled{i}}\right). \quad (65)\end{aligned}$$

然而，模拟降阶模型 (58) 的计算开销很大，而且很可能需要求逆一个病态矩阵，这与线性情形类似。在下一节中，我们将提出一种条件更好、计算效率更高的非线性降阶模型实现方法。

B. 同时平衡与降阶

在平衡降阶模型 (58)–(59) 中计算 $\mathbf{\Psi}_r^\top[\bar{\mathbf{J}}([\bar{\mathbf{z}}_r, \mathbf{0}])]^{-1}$，需要先求完整雅可比矩阵的逆，再进行截断。这在计算量和数值稳定性方面都有缺点。首先，按照定理 2 的方法构造完整的 $\mathbf{T}_j \in \mathbb{R}^{n\times n^j}$, $j = 2,$ ....., k需要大量浮点运算。其次，计算 $\mathbf{T}_1$ 需要求逆，而对于大规模系统（本文的主要研究对象），这通常会导致病态问题，因为需要对所有 $\mathcal{H}_\infty$- 特征值求逆，包括最小的特征值。在线性情形中，先平衡再降阶的策略众所周知会因汉克尔奇异值较小而导致病态问题，参见例如 [2,第 7.3]节；解决方法之一是同时进行模型降阶和截断。

我们根据线性情形中的这些思路，为非线性情形提出一种新的计算框架。我们的目标是直接计算定理 2 中线性变换和高阶张量的截断版本$\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^k$，而无需计算全阶量。我们首先推导在应用一般多项式状态变换和同时降阶时，系统（1）–（2）的非线性降阶模型形式。换言之，我们要在非线性（此处为平衡）流形上近似全阶模型（1）–（2），使得 $\mathbf{x} \approx \Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r)$，其中映射 Φ_r 定义了一个流形。以下结果适用于任意多项式状态变换。

命题 *1*： 考虑非线性系统（1）–（2）。设 $\mathbf{T}_{k,\ r} \in \mathbb{R}^{n\times r^k}$ 为具有对称系数的（截断）变换矩阵，且 $\bar{\mathbf{z}}_r \in \mathbb{R}^r$ 表示降阶状态。定义嵌入 $\Phi_r : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^n$ 为

$$\mathbf{x} \approx \Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r) := \mathbf{T}_{1,r}\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{T}_{2,r}\bar{\mathbf{z}}_r^{\textcircled{2}} + \cdots + \mathbf{T}_{k,r}\bar{\mathbf{z}}_r^{\textcircled{k}}, \quad (66)$$

其中，降阶雅可比矩阵可通过以下方式显式计算

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_r(\bar{\mathbf{z}}_r) :=& \frac{\mathrm{d}\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r)}{\mathrm{d}\bar{\mathbf{z}}_r} \\ =& \mathbf{T}_{1,r} + 2\mathbf{T}_{2,r}(\bar{\mathbf{z}}_r \otimes \mathbf{I}) \\ &+ 3\mathbf{T}_{3,r}(\bar{\mathbf{z}}_r \otimes \bar{\mathbf{z}}_r \otimes \mathbf{I}) + \cdots \in \mathbb{R}^{n\times r}. \quad (67)\end{aligned}$$

因此，$\bar{\mathbf{z}}_r \in \mathbb{R}^r$ 的非线性降阶模型为

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_r = \underbrace{\mathbf{J}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)^\dagger \mathbf{f}(\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r))}_{=:\mathbf{f}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)} + \underbrace{\mathbf{J}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)^\dagger \mathbf{g}(\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r))}_{=:\mathbf{g}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)} \mathbf{u} \quad (68)$$

$$\mathbf{y}_r = \underbrace{\mathbf{h}(\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r))}_{=:\mathbf{h}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)}. \quad (69)$$

其中 $[\cdot]^\dagger$ 表示 Moore–Penrose 伪逆。证明：给定 (66) 中的 $\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r)$，并采用 (55) 中的对称性论证（这些论证源于我们对$\mathbf{T}_{i,r}$的对称化计算），即可直接验证：将 (55) 中的$\mathbf{z}_r$ 替换为 $\bar{\mathbf{z}}$后，雅可比矩阵仍具有相同的多项式形式，从而得到 (67)。定义该降阶雅可比矩阵后，模型 (54) 可写为

$$\mathbf{J}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)\dot{\mathbf{z}}_r = \mathbf{f}(\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r)) + \mathbf{g}(\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r))\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n. \quad (70)$$

我们在最后一个方程左乘雅可比矩阵的伪逆，得到降阶模型 (68)–(69)。■

命题 1 中给出的降阶模型版本解决了病态问题，因为它不再需要求逆完整的雅可比矩阵。现在需要一种策略，在无需构造完整系数矩阵$\mathbf{T}_{i} \in \mathbb{R}^{n\times n^i}$（$i=2,1$）的情况下，计算非线性嵌入 Φ_r 的系数矩阵$\mathbf{T}_{i,r} \in \mathbb{R}^{n\times r^i}$。遵循定理和算法，并以线性平衡截断框架为启发，我们将在下一个结果中提出一种新策略，用于计算非线性平衡变换 (66) 的矩阵$\mathbf{T}_{i,r}$ 。在陈述该结果之前，我们指出，(68) 中的降阶模型计算仍需将f(·) 和g(·)作为非线性函数，在维数为 n的向量上进行求值。我们将在注 6 中重新讨论并解决这一问题，即所谓的提升瓶颈。

命题 *2*：(截断的（近似）平衡变换) 令 $\mathbf{v}_i$，$\mathbf{w}_i$ 为式（7）、（9）中能量函数的多项式系数向量。令$\mathbf{R}$，$\mathbf{L}$ 为它们的 Cholesky 因子，即 $\mathbf{V}_2 = \mathbf{R}\mathbf{R}^\top$ 和$\mathbf{W}_2 = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$。令$\mathbf{L}^\top\mathbf{R}^{-\top} = \mathcal{U}\Xi\mathcal{V}^\top$ 为奇异值分解，并定义

$$\mathcal{U}_r = \mathcal{U}(:,1:r),\ \ \Xi_r = \Xi(1:r,1:r),\ \ \mathcal{V}_r = \mathcal{V}(:,1:r).$$

那么，式 (66) 中非线性嵌入 $\Phi_r : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^n$ 的系数矩阵为

$$\mathbf{T}_{1,r} = \mathbf{R}^{-\top}\mathcal{V}_r \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad (71)$$

$$\mathbf{T}_{1,r}^\dagger = \Xi_r^{-1}\mathcal{U}_r^\top\mathbf{L}^\top \in \mathbb{R}^{r\times n}, \text{ (left inverse)} \quad (72)$$

$$\mathbf{T}_{2,r} = -\frac{1}{2}\mathbf{T}_{1,r}\ \text{unvec}\left([\mathbf{T}^{③}_{1,r}]^\top \mathbf{v}_3\right)^\top \in \mathbb{R}^{n\times r^2}, \quad (73)$$

更一般地，对于 $2 \le k$,

$$\mathbf{T}_{k,r} = -\frac{1}{2}\mathbf{T}_{1,r}\text{unvec}(\mathbf{M}_{k,r})^\top \in \mathbb{R}^{n\times r^k}, \text{ where} \quad (74a)$$

$$\mathbf{M}_{k,r} = \sum_{\substack{i,j>1\\ i+j=k+1}} \text{vec}\left(\mathbf{T}_{j,r}^\top \mathbf{V}_2 \mathbf{T}_{i,r}\right) + \sum_{i=3}^{k+1} \mathcal{T}_{i,k+1}^\top \mathbf{v}_i. \quad (74b)$$

我们强调，由于上述计算$\mathbf{T}_{i,r}$的方式，嵌入及其雅可比矩阵比第 IV-A 节中的先平衡后降阶策略具有更好的条件数，并且计算速度更快。下一个定理表明，变换的线性部分将 Gramian 矩阵的乘积对角化，这与线性情形相同。

命题 *3*：带有$\mathbf{T}_{i,r}$ 且来自命题 2 的近似平衡变换（66）满足

$$\Xi_r^2 = \text{diag}(\xi_1^2(0),\dots,\xi_r^2(0)) = \mathbf{T}_{1,r}^\dagger \mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{W}_2\mathbf{T}_{1,r}. \quad (75)$$

证明：根据命题 2 的定义，我们可以直接计算得到

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_{1,r}^\dagger \mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{W}_2\mathbf{T}_{1,r}\\
&= \Xi_r^{-1}\mathcal{U}_r^\top\mathbf{L}^\top\mathbf{R}^{-\top}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^\top\mathbf{R}^{-\top}\mathcal{V}_r\\
&= \Xi_r^{-1}\mathcal{U}_r^\top\mathcal{U}_r\Xi_r\mathcal{V}_r^\top\mathcal{V}_r\Xi_r\mathcal{U}_r^\top\mathcal{U}_r\Xi_r\mathcal{V}_r^\top\mathcal{V}_r\\
&= \Xi_r^{-1}\Xi_r^3 = \Xi_r^2
\end{aligned}$$

■

借助数值条件良好的降阶模型（68）–（69），以及一种计算非线性平衡流形的高效方法（见命题 2），我们在算法 3 中总结了得到同时平衡与降阶的降阶模型的步骤。

算法 3 非线性输入-输出平衡降阶模型的计算。

输入：常数 $\gamma > \gamma_0 \ge 0$, $\gamma \ne 1$；多项式次数 $d > k > \ell$；降阶模型阶数 r输出：输入-输出非线性 $\mathcal{H}_\infty$-平衡降阶模型 (68)–(69)。 1：获得过去与未来能量函数 $\mathcal{E}_\gamma^-(\mathbf{x})$ 和 $\mathcal{E}_\gamma^+(\mathbf{x})$ 的多项式表示（或近似），即式 (7)、(9) 中的系数 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=2}^d$ 和 $\{\mathbf{w}_i\}_{i=2}^d$（例如，通过本文第1部分 [30]） 2：根据命题 2，按照式 (66) 计算 $\mathbf{x} \approx \Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r)$ 的截断多项式系数矩阵 $\{\mathbf{T}_{i,r}\}_{i=1}^k$。 3：对称化系数 $\{\mathbf{T}_{i,r}\}_{i=1}^r$ （见注 2） 4：按照式 (68)–(69)，利用式 (67) 中的显式雅可比矩阵，组装非线性降阶模型函数 $\mathbf{f}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)$,$\mathbf{g}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)$,$\mathbf{h}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)$。

算法 3 需要选择降阶模型维数 r。为此，可以绘制式 (13) 中所有状态依赖奇异值函数（其系数通过算法 2 获得），并根据函数值的大小确定排序。

不过，这一过程会增加算法的（离线）成本，因为需要计算所有$\mathbf{c}_i$ 和$\mathbf{T}_i$，其中 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$。为降低离线成本，在某些情况下，只考虑奇异值函数中的常数项 $\xi_i(0)$，并根据其衰减来决定截断可能就足够了；线性时不变系统的平衡截断便是如此。

注 6：算法 3 通过采用同时（近似）平衡与降阶策略，有助于解决先平衡后降阶策略中的计算复杂度和数值病态问题。然而，如前文所述，我们指出，式（68）—（69）中的降阶模型计算仍需要将完整的 f（·）和 g(·) 作为作用于维数为 n 的向量的非线性函数进行求值。这是非线性模型降阶中的一个常见问题，并非非线性平衡截断所特有。如果输入和输出是线性的，则 $\mathbf{g}_r(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathbf{J}_r(\bar{\mathbf{z}}_r)^{\dagger}\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{h}_r(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathbf{C}\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r)$，其中 C 和 $\mathbf{T}_k$、r 的所有乘积均可预先计算。然而，式（68）中的降阶模型仍需要对完整的非线性项进行求值。可以通过超降阶过程来规避这一问题，例如离散经验插值法 [13]及其变体 [16], [17]。只有当输入、输出和动力学均为线性时，才有 $\Phi(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathbf{T}_{1,r}\bar{\mathbf{z}}_r$ 和 $\mathbf{J}_r(\bar{\mathbf{z}}_r) = \mathbf{T}_{1,r}^{\dagger}$、$r$，因此线性降阶模型变为

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_r = \mathbf{T}_{1,r}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{T}_{1,r}\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{T}_{1,r}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y}_r = \mathbf{C}\mathbf{T}_{1,r}\bar{\mathbf{z}}_r, \tag{76}$$

其中所有内容都可以预先计算，并且无需参考完整维度即可仿真降阶模型 n。

C. 非线性平衡流形降阶模型

所述非线性平衡截断方法在一个 r维多项式非线性流形上执行具有特定结构的模型降阶。非线性平衡截断首先执行非线性平衡变换 $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{z})$，随后进行截断。因此，$\mathbf{x} \approx \Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r) := \mathbf{T}_{1,r}\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{T}_{2,r}\bar{\mathbf{z}}_r^{(2)} + \cdots + \mathbf{T}_{k,r}\bar{\mathbf{z}}_r^{(k)}$ 如式 (66) 所示，该式定义了非线性平衡流形

$$\mathcal{M} := \{\Phi_r(\bar{\mathbf{z}}_r) \ : \ \bar{\mathbf{z}}_r \in \mathbb{R}^r\} \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{77}$$

图 4 显示，系统在原始状态空间的这一平衡非线性流形（ $\bar{z}_i$-坐标）上演化（原始状态空间由 x_i-坐标表示），因此可以通过定理 4 中概述的广为人知的平衡形式，评估降阶状态的过去能量和未来能量（或可控性/可观性能量）。这一

因此，每个状态都有与之相关的能量，从而可以截断单个状态。在 $\mathcal{H}_\infty$-平衡情形下，保留的降阶模型状态易于筛选且易于控制。在开环情形下，保留的状态易于到达且易于观测。

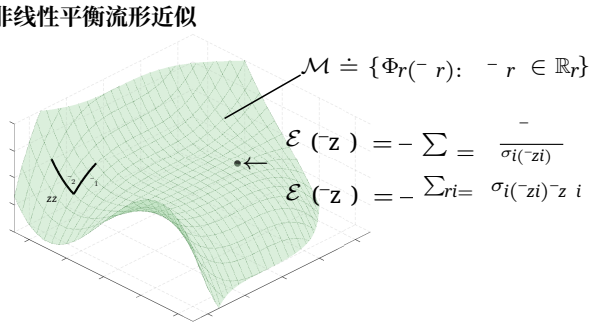

图 4. 输入输出平衡降阶模型在非线性流形 $\mathcal{M}$ 上演化，使得状态的可控性/可观性（或过去/未来）能量可以用众所周知的形式来度量，该形式涉及奇异值函数 $\boldsymbol{\sigma_i(\bar{z}_i)}$。

非线性流形降阶模型近年来日益流行，因为它们能够应对线性子空间降阶模型因 Kolmogorov$n$-宽度衰减缓慢而面临的挑战，参见综述文章 [42]。例如，文献 [19], [34] 中的作者采用完全非线性自编码器方法定义非线性流形降阶模型 $\mathbf{x} \approx \psi(\bar{\mathbf{z}}_r)$；而文献 [4], [22], [27] 则采用了形如 $\mathbf{x} \approx \mathbf{V}\bar{\mathbf{z}}_r + \mathbf{V}(\bar{\mathbf{z}}_r \otimes \bar{\mathbf{z}}_r)$ 的二次流形。尽管这些非线性流形方法改善了状态近似误差，但它们在降阶过程中没有考虑系统理论中的能量（可观性/可控性），因而忽略了输入输出映射的完整动力学。

V. 数值结果：Burgers 方程

我们给出一个概念验证示例，用于检验第三节和第四节所介绍算法的有效性。该有限维模型由偏微分方程的有限元离散生成。选择伯格斯型偏微分方程，是因为它具有二次非线性项。这个测试问题在分布参数系统控制研究中有着悠久的历史，例如 [50],包括有效计算方法的发展，例如 [12],以及降阶模型的发展，例如 [32]。考虑受控的 Burgers 方程

$$\omega_t(\xi,t) = \epsilon\omega_{\xi\xi}(\xi,t) - \frac{1}{2}\left(\omega^2(\xi,t)\right)_\xi + \sum_{j=1}^{m} b_j^m(\xi)u_j(t), \tag{78}$$

$$y_i(t) = \int_{\chi_{[(i-1)/p,\,i/p]}} \omega(\xi,t)\mathrm{d}\xi, \qquad i = 1,\ldots,p, \tag{79}$$

满足零狄利克雷边界条件。控制输入通过特征函数 χ as$b_j^m(\xi) = \chi_{[(j-1)/m,\,j/m]}(\xi)$ 表示，输出则是在 p 个等间距子域上的解的空间平均值。我们使用 $n+1$ 个线性

有限元离散化，从而得到一个 n 维状态向量。离散化系统的形式为

$$\widetilde{\mathbf{E}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\omega} + \widetilde{\mathbf{N}}_2(\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{\omega}) + \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \tag{80}$$

$$\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\omega}, \tag{81}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}(t)$ 是 $\omega(x,t)$ 的有限元近似的系数。为了将其写成形式 (1)–(2)，使质量矩阵为单位矩阵，我们引入变量变换 $\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{E}}^{1/2}\boldsymbol{\omega}$，其中 $\widetilde{\mathbf{E}}^{1/2}$ 是有限元质量矩阵的矩阵平方根。然后定义 $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{E}}^{-1/2}\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{E}}^{-1/2}$、$\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{E}}^{-1/2}\widetilde{\mathbf{B}}$、$\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{C}}\widetilde{\mathbf{E}}^{-1/2}$、$\mathbf{N}_2 = \widetilde{\mathbf{N}}_2(\widetilde{\mathbf{E}}^{-1/2}\otimes\widetilde{\mathbf{E}}^{-1/2})$，即可得到所需形式的系统。

A. 奇异值函数

在第一次实验中，我们使用数值 $\epsilon = 0.05$，$n = 16$，$m = 4$，$p = 4$ 和 $\gamma = 3$，并按照本文第1部分所述，计算过去与未来能量函数的四次近似，[30]，以求得式 (7) 和 (9) 中的系数。利用这些系数，我们使用算法 1 计算三次变换张量 $\mathbf{T}_1$,$\mathbf{T}_2$,$\mathbf{T}_3$。最后，我们按照算法 2 计算奇异值函数的二次近似。图5绘出了其中前八个函数。对于这个问题，我们观察到，前四个奇异值函数的幅值显著大于其余函数。此外，奇异值函数的秩会随变量范围而变化。第五个奇异值函数呈现出有趣的行为：其二次近似在零附近的一个小区域内迅速变为负值。受篇幅所限，此处未绘出，但使用 $p = 1$ 和 $p = 2$ 输出时，情况有所不同。在 $p = 1$ 情况下，奇异值函数不会在同一参数区间内交叉；ξ_1、ξ_2 和 ξ_3 之间相差一个数量级；ξ_5 和 ξ_6 之间则相差近两个数量级。对于 $p = 2$ 情况，奇异值函数在 0 附近明显分离，但 ξ_1 和 ξ_2 确实会在约 $|z| \approx 0.1$ 处交叉。下一节中，我们将考察维数逐渐增加时降阶模型的质量，并将结果与奇异值函数的定性行为联系起来。

B. 输出行为

我们对上述系统的输出进行仿真。我们展示不同降阶模型维度r 以及不同次数 k 非线性变换的结果。我们对从 $t = 0$ 到 $t = 10$ 的降阶模型进行仿真，并报告每个输出 e_i的相对误差，其定义如下

$$e_i = \frac{\left(\int_0^{10} |y_i(t) - y_{i,r}(t)|^2 \ \mathrm{d}t\right)^{1/2}}{\left(\int_0^{10} |y_i(t)|^2 \ \mathrm{d}t\right)^{1/2}}, \ i = 1, \ldots, p,$$

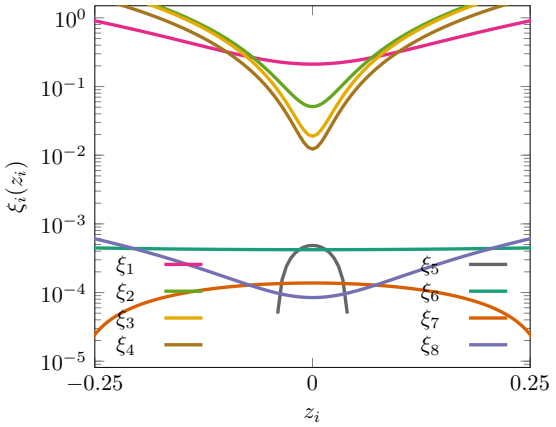

图5。Burgers 算例中前八个奇异值函数的二次近似。

表 II $\boldsymbol{m = 4}$ 和 $\boldsymbol{p = 1}$ 情形的相对误差（$\boldsymbol{e_1}$）。

r	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1	0.0714831	0.0714814	0.0713882
2	0.0036861	0.0036778	0.0031076
3	0.0026888	0.0026784	0.0026665
4	0.0024333	0.0024288	0.0024238
5	0.0024095	0.0024032	0.0023853

其中$y_{i,\ r}$ 是阶数为 r的降阶模型的第 i个输出。对于所有测试，$m > 1$，我们使用以下输入

$$u_i(t) = \begin{cases} 0.002\tan^{-1}(t) + 0.001\sin(t), & i = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

表 II 展示了降阶模型在模型阶数和非线性变换次数逐步增加时的表现。正如预期，随着降阶维数和变换次数的增加，相对误差总体呈下降趋势。表 II 未列出超过 $r = 5$ 的结果，因为正如图5中的奇异值函数行为所示，无论变换次数如何增加，相对误差都不会进一步改善。

在下一个实验中，我们考虑模型的线性部分更为显著 ϵ =0。1的问题，并采用两个模型输出 $p = 2$ （输入数量相同 $m = 4$）。这些实验的结果见表 III。我们再次观察到与 $\epsilon = 0.05$ 示例相同的趋势：降阶模型维数和变换次数均有所改善。降阶模型阶数降低带来的改善最为显著，而变换维数的改善则温和得多。每个输出的相对误差并不会随着模型阶数的增加而单调改善（比较 e_1 对于 $r = 4$ 和 $r = 5$的情况），但总体而言，模型通常有所改善（在本例中，e_2 从 $r = 4$ 到 $r = 5$ 的改善更为显著）。

表 III
（e_1 和 e_2）以及 $m = 4$ 和 $p = 2$情形下的相对误差。

r		$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1	e_1	0.361839	0.361834	0.361626
	e_2	0.710212	0.710226	0.710790
2	e_1	0.043155	0.043149	0.043112
	e_2	0.111431	0.111421	0.111301
3	e_1	0.004940	0.004941	0.004861
	e_2	0.009017	0.009017	0.008764
4	e_1	0.003625	0.003623	0.003628
	e_2	0.020935	0.020940	0.020898
5	e_1	0.004086	0.004087	0.004091
	e_2	0.018565	0.018553	0.018534

VI. 结论与未来方向

我们提出了一种新颖且可扩展的方法，用于对中型至大型非线性控制仿射系统进行非线性平衡截断。该方法假设系统能量函数（例如可控性和可观性函数）以多项式形式给出。我们推导出可扩展的张量公式，用于多项式非线性状态变换，以便在新的坐标中同时“对角化”这些相关能量函数。由于这种非线性平衡变换可能病态且计算成本高，受线性情形启发，我们开发了一种计算高效的平衡并降阶 策略。这进一步提升了可扩展性，并改善了截断变换的条件数。我们推导出了所得降阶模型的闭式表达式。需要指出的是，本文的工作不对动力系统模型形式作任何假设，仅对能量函数的形式（多项式）作出假设。因此，本文的方法适用于一般的控制仿射形式非线性系统。

还有几个值得探索的有趣研究方向。首先，$\mathcal{H}_\infty$ 和HJB平衡方法会自动（作为副产品）为非线性系统提供控制器，参见本文第1部分 [30, 第 2] 节和[43], [46]。我们计划评估这些控制器在非线性系统上的性能。其次，可通过采用经验插值技术，进一步加速非线性项的计算和雅可比矩阵计算。第三，奇异值函数依赖于状态，并且会在状态空间中相交，因此有必要开发局部降阶模型。

VII. 致谢

我们感谢NickCorbin协助制作图4，并对本文草稿提出宝贵意见。

参考文献

[1] NLbalancing代码库。github.com/jborggaard/NLBal ancing。
[2] A. C. Antoulas。《大规模动力系统的近似》。设计与控制进展。工业与应用数学学会，宾夕法尼亚州费城，美国，2005年。[3] A. C. Antoulas、C. Beattie 和 S. Gugercin。模型降阶的插值方法。计算科学与工程 21。SIAM，宾夕法尼亚州费城，2020年。[4] J. Barnett 和 C. Farhat。用于缓解基于投影的非线性模型阶数降阶中 Kolmogorov障碍的二次近似流形。《计算物理杂志》，第 111348 页，2022年。[5] P. Benner 和 T. Breiten。第 6 章：基于系统平衡的模型阶数降阶，第 261–295 页。SIAM，2017年。[6] P. Benner、A. Cohen、M. Ohlberger 和 K. Willcox，编。《模型降阶与近似：理论与算法》。计算科学与工程。SIAM 出版社，宾夕法尼亚州费城，2017年。[7] P. Benner 和 P. Goyal。二次双线性控制系统的平衡截断模型阶数降阶。arXiv:1705 00160，2017年。[8] P. Benner、S. Gugercin 和 K. Willcox。参数化动力系统的基于投影的模型降阶方法综述。SIAM评论，57(4):483–531，2015年。[9] P. Benner 和 J. Saak。大型稀疏连续时间代数矩阵黎卡提方程和李雅普诺夫方程的数值求解：现状综述。GAMM通讯，36(1):52–132，2013年。[10] B. Besselink、N. van de Wouw、J. M. Scherpen 和 H. Nijmeijer。通过增量平衡截断对非线性系统进行模型降阶。IEEE 自动控制汇刊，59(10):2739–2753，2014年。[11] J. Bouvrie 和 B. Hamzi。用于近似非线性系统的核方法。《SIAM 控制与优化杂志》，55(4):2460–2492，2017年。[12] J. A. Burns 和 S. Kang。具有有界输入/输出的 Burgers 方程控制问题。技术报告，ICASE，1990年。[13] S. Chaturantabut 和 D. C. Sorensen。通过离散经验插值进行非线性模型降阶。SIAM科学计算杂志，32(5):2737–2764，2010年。[14] M. Condon 和 R. Ivanov。非线性系统——代数格拉姆矩阵与模型降阶。COMPEL——电气与电子工程中的计算与数学国际期刊，24(1):202–219，2005年。[15] U. Desai 和 D. Pal。随机模型降阶的变换方法。IEEE 自动控制汇刊，29(12):1097–1100，1984年。[16] Z. Drmac 和 S. Gugercin。离散经验插值法的一种新选择算子——改进的先验误差界及其扩展。SIAM科学计算杂志，38(2):A631–A648，2016年。[17] Z. Drmac 和 A. Saibaba。离散经验插值法：加权内积空间中的规范结构与公式。SIAM《矩阵分析与应用杂志》，39(3):1152–1180，2018年。[18] D. F. Enns。基于平衡实现的模型降阶：误差界及频率加权推广。载于《第 23 届 IEEE 决策与控制会议》，第 127–132 页。IEEE，1984年。[19] S. Fresca、L. Dede 和 A. Manzoni。针对非线性时变参数化偏微分方程降阶建模的全面深度学习方法。《科学计算杂志》，87(2):1–36，2021年。[20] K. Fujimoto 和 J. M. Scherpen。基于奇异值分析的非线性系统平衡实现与模型阶数降阶。SIAM 控制与优化杂志，48(7):4591–4623，2010年。[21] K. Fujimoto 和 D. Tsubakino。基于泰勒级数展开的非线性平衡实现计算与模型降阶。《系统与控制快报》，57(4):283–289，2008年。[22] R. Geelen、S. Wright 和 K. Willcox。用于非侵入式模型降阶的算子推断与二次流形。

《计算力学与工程中的计算方法》，403:115717，2023。[23] W. S. Gray 和 J. M. Scherpen。奇异值函数与平衡非线性实现的非唯一性。《系统与控制快报》，44(3):219–232，2001年。[24] W. S. Gray 和 E. I. Verriest。代数定义的非线性系统格拉姆矩阵。载于《决策与控制》，2006 年第 45 届 IEEE 会议，第 3730–3735 页。IEEE，2006年。[25] M. Green。平衡随机实现。《线性代数及其应用》，98:211–247，1988年。[26] S. Gugercin 和 A. C. Antoulas。平衡截断模型降阶综述及若干新结果。《国际控制期刊》，77(8):748–766，2004年。[27] S. Jain、P. Tiso、J. B. Rutzmoser 和 D. J. Rixen。用于非线性结构动力学模型阶数降阶的二次流形。《计算机与结构》，188:80–94，2017年。[28] E. Jonckheere 和 L. Silverman。线性系统的一组新不变量——在降阶补偿器设计中的应用。IEEE 自动控制汇刊，28(10):953–964，1983年。[29] Y. Kawano 和 J. M. Scherpen。基于非线性汉克尔算子的微分平衡模型降阶。IEEE 自动控制汇刊，62(7):3293–3308，2016年。[30] B. Kramer、S. Gugercin、J. Borggaard 和 L. Balicki。非线性平衡截断：第1部分——能量函数的计算。arXiv:2209.07645，2022年。[31] A. J. Krener。非线性控制系统的降阶建模。载于《非线性控制系统的分析与设计》，第 41–62 页。施普林格，2008年。[32] K. Kunisch 和 S. Volkwein。利用适当正交分解的降阶方法控制 Burgers 方程。《优化理论与应用杂志》，102(3):345–371，1999年。[33] S. Lall、J. E. Marsden 和 S. Glavaski。用于非线性控制系统模型降阶的平衡截断子空间方法。《国际鲁棒与非线性控制期刊：IFAC 关联期刊》，12(6):519–535，2002年。[34] K. Lee 和 K. T. Carlberg。利用深度卷积自编码器对非线性流形上的动力系统进行模型降阶。《计算物理杂志》，404:108973，2020年。[35] T. Li、E. K.-w. Chu、W.-W. Lin 和 P. C.-Y. Weng。通过倍增法求解大型连续时间代数黎卡提方程。《计算与应用数学杂志》，237(1):373–383，2013年。[36] D. L. Lukes。非线性动力系统的最优调节。SIAM 控制杂志，7(1):75–100，1969年。[37] B. Moore。线性系统中的主成分分析：可控性、可观性与模型降阶。IEEE 自动控制汇刊，26(1):17–32，1981年。[38] C. Mullis 和 R. Roberts。最小舍入噪声定点数字滤波器的综合。IEEE 电路与系统汇刊，23(9):551–562，1976年。[39] D. Mustafa 和 K. Glover。基于 H_∞ 平衡截断的控制器降阶。IEEE 自动控制汇刊，36(6):668–682，1991年。[40] R. Ober。线性系统类的平衡参数化。SIAM 控制与优化杂志，29(6):1251–1287，1991年。[41] P. C. Opdenacker 和 E. A. Jonckheere。一种保持压缩映射的平衡降阶方案及其无穷范数误差界。IEEE 电路与系统汇刊，35(2):184–189，1988年。[42] B. Peherstorfer。以非线性模型降阶突破 Kolmogorov障碍。《美国数学学会通报》，69(5)，2022年。[43] S. Sahyoun、J. Dong 和 S. M. Djouadi。基于非线性平衡截断的流体流动降阶建模。载于《2013 年美国控制会议》，第 1284–1289 页。IEEE，2013年。[44] M. Sassano 和 A. Astolfi。动态广义可控性与能观函数及其在模型降阶和传感器部署中的应用。《自动化》，50(5):1349–1359，2014年。[45] J. M. Scherpen。非线性系统的平衡。《系统与控制快报》，21(2):143–153，1993年。[46] J. M. Scherpen。 $\mathcal{H}_\infty$ 非线性系统的平衡。国际鲁棒与非线性控制期刊，6 668，1996 7 645( ): – 。[47] J. M. A. Scherpen 和 A. Van der Schaft。不稳定非线性系统的归一化互素分解与平衡。国际控制期刊，60(6):1193–1222，1994年。[48] W. H. Schilders、H. A. van der Vorst 和 J. Rommes，编。模型降阶：理论、研究方面与应用，柏林，2008年。施普林格。[49] V. Simoncini。线性矩阵方程的计算方法。*SIAM*评论，58(3):377–441，2016年。[50] L. Thevenet、J.-M. Buchot 和 J.-P. Raymond。二维伯格斯方程的非线性反馈镇定。《*ESAIM*：控制、优化与变分法》，16(4):929–955，2009年。[51] E. I. Verriest。通过平衡实现进行次优LQG设计。载于*1981*年第二十届*IEEE*决策与控制会议（含自适应过程研讨会），第686–687页。IEEE，1981年。[52] E. I. Verriest 和 W. S. Gray。非线性系统的流平衡。载于*2000*年国际数学理论网络系统研讨会论文集，2000年。[53] K. Zhou、J. Doyle 和 K. Glover。鲁棒与最优控制。普伦蒂斯·霍尔，新泽西州上萨德尔河，1996年。