arXiv:2302.02045v1 [eess.SP] 4 Feb 2023

雷达杂波协方差估计：非线性谱收缩方法

Shashwat Jain
美国纽约州伊萨卡，康奈尔大学

Vikram Krishnamurthy，IEEE 会士，康奈尔大学，美国纽约州伊萨卡

Muralidhar Rangaswamy，IEEE 会士，美国空军研究实验室

Bosung Kang，IEEE 会员，代顿大学研究所，美国俄亥俄州代顿

SANDEEP GOGINENI，IEEE高级会员，信息系统实验室公司，美国俄亥俄州代顿

摘要——本文利用杂波加噪声协方差矩阵的尖峰协方差结构开展雷达信号处理。借助高维统计学领域的先进技术，我们提出了一种基于非线性收缩的旋转不变尖峰协方差矩阵估计量，并阐述了所估计尖峰特征值的收敛性。我们使用由高保真、特定场地的基于物理的雷达仿真软件RFView生成的数据集，将所提算法与现有的秩约束最大似然（RCML）-期望似然（EL）协方差估计算法进行比较。结果表明，在具有相同信杂噪比（SCNR）性能的情况下，所提算法的估计计算时间短于RCML-EL算法。我们证明，在高维情况下，所提算法与基于RCML-EL的算法具有相同的优化问题。我们使用低秩自适应归一化匹配滤波器（LR-ANMF）检测器，针对一系列目标信噪比，在不同虚警概率下计算检测概率。我们利用RFView的挑战数据集展示了初步结果，表明该检测器能够抵抗污染杂波离散体。最后，我们通过实验证明，所提算法的最小方差无失真波束形成器（MVDR）误差方差与由真实协方差矩阵得到的误差方差相同。

索引词——杂波加噪声协方差估计、尖峰协方差模型、高维数据、非线性收缩、旋转不变估计量、RFView、LR-ANMF

稿件于 XXXXX 00, 0000 收到；于 XXXXX 00, 0000 修订；于 XXXXX 00,0000 接受。

本文的初步 4 页版本正在 ICASSP 审稿。ICASSP 投稿仅包含主要结果和简要的数值示例。当前论文详细阐述了问题的构建和主要结果，并提供了大量数值示例与讨论。

0018-9251 © 2023年 IEEE

I. 引言

杂波加噪声协方差矩阵估计是雷达信号分析不可或缺的一部分。在高维情形下，样本量与协方差矩阵的维数处于同一数量级。因此，样本协方差矩阵会变得奇异，不再是可靠的杂波加噪声协方差矩阵估计量。

为缓解样本协方差矩阵的这种奇异性，我们利用尖峰协方差结构，采用 [1–3] 提出的高维场景模型来描述杂波加噪声协方差矩阵。我们提出一种基于旋转不变非线性收缩的估计量，用于估计杂波加噪声协方差矩阵。

尖峰协方差矩阵的大部分特征值相同，对应于杂波加噪声协方差矩阵中的噪声分量。有限个尖峰特征值的幅度显著大于主体特征值，从而表征了杂波加噪声协方差矩阵中的杂波分量。

我们将 RFView® [4, 5] 模拟的挑战数据集中的杂波建模为尖峰协方差结构。RFView 是一种高保真、特定场址、基于物理的 M&S 工具，可实时构建射频环境。该工具已通过从甚高频到 X波段的实测数据进行了广泛验证，其中一个案例记录于 [4]。

作为一个说明性示例，考虑一部机载雷达俯视异质地形，该地形由山地、水体和植被组成，并由 RFView 模拟，如图所示。1。图1 展示了南加利福尼亚圣迭戈附近这类异质地形的回波信号相对功率。我们观察到，高功率回波区域的面积小于低功率回波区域，且噪声功率高于低功率回波。从根据回波信号计算得到的图2所示杂波加噪声协方差矩阵的特征值图中，可以明显看出这一点。杂波协方差矩阵中有大量特征值低于噪声功率。

本文采用 [3] 中提出的基于非线性收缩的旋转不变估计量，在高维场景下估计杂波加噪声协方差矩阵。对于尖峰协方差模型，我们只需估计噪声功率和尖峰分量。

我们表明，对于维数为 p 的协方差矩阵估计，在 SCNR 和误差方差相同的情况下，与 RCML-EL[1] 算法中的 $\mathcal{O}(p^2)$ 相比，所提算法在联合估计噪声功率和杂波秩时执行 $\mathcal{O}(p)$ 次实数乘法。此外，我们给出所提估计量的估计特征值的收敛结果，以及归一化信杂噪比的界。我们使用低秩自适应归一化匹配滤波器（Low-Rank

[1]RCML-EL表示RCML协方差估计量[6] ，其中杂波秩和噪声功率通过期望似然（EL）方法 [7]获得。

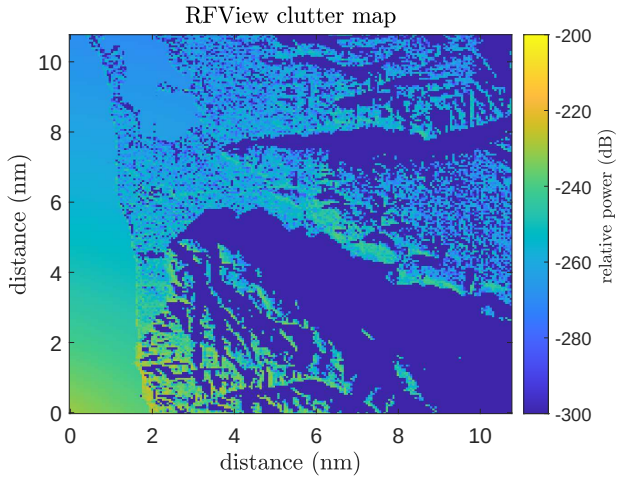

图1：来自沿海山地与水域场景的杂波回波，其中显示了阴影区域（深蓝色）以及较强的信号分量（黄色）。

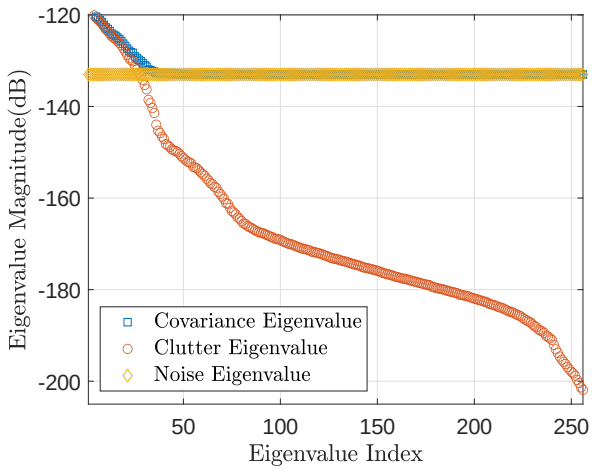

图2：由图中给出的回波信号形成的杂波加噪声协方差矩阵1 表明，大多数杂波分量（红色）低于噪声底。前25个分量高于噪声底。因此，该协方差矩阵呈现尖峰协方差结构。

AdaptiveNormalized Matched Filter (LR-ANMF) 检测器。我们通过实验证明了该检测器对污染杂波离散分量的鲁棒性。我们将所提算法应用于由 RFView 软件模拟的挑战数据集。

A. 相关工作

数据不足情况下的协方差矩阵估计问题在雷达信号处理文献中受到了广泛关注。在数据不足的情况下，样本协方差矩阵不再是可靠的估计量，因为它会变得病态。为了解决这种病态问题，人们提出了对角加载 [9–15] 和因式分解空时方法 [16]。数据依赖技术包括主分量逆 [17]，多级维纳滤波器 [18], 参数自适应匹配滤波器 [19], 和 EigenCanceler [20]。数据独立方法包括 JDL-GLR [21]。

在高维情形下，协方差矩阵的性质可由随机矩阵理论解释，如 [22–25] 所述。在这类高维情形中，人们已开发出收缩估计量，用于信号处理和金融领域的协方差矩阵估计。收缩估计量已用于无线通信领域的信道矩阵估计 [26] 、阵列信号处理领域的到达方向估计 [27] ，以及金融领域的马科维茨投资组合优化 [28–31]。收缩方法包括 Ledoit-Wolf 收缩估计量 [32], 、正则化主成分分析 [33], 、岭回归和套索收缩估计量 [34]，以及正则化 M 估计量 [35]。

在雷达信号处理中，协方差矩阵通常包含与杂波相对应的低秩结构。这些协方差矩阵称为杂波加噪声协方差矩阵。 [7, 36–39], 中提出的协方差估计算法假设在高维场景下杂波协方差矩阵具有秩稀疏结构，并据此提出估计方案。这些论文使用布伦南法则，根据杂波和干扰机的主要成分估算秩。然而，正如 [40–42], 所示，当系统和环境因素导致内部杂波运动、天线阵列单元之间的互耦等大量现实效应出现时，布伦南法则便会失效。本文使用高保真、特定场地、基于物理的雷达场景仿真软件 RFView 生成的数据；据 [4] 所述，在这种情况下布伦南法则并不适用。

为解决这些问题，我们利用 [1, 2, 43, 44], 提出的杂波加噪声协方差矩阵的尖峰协方差结构。我们采用 [3] 中的非线性收缩估计技术来估计协方差矩阵。正如[45], 所示，尖峰协方差模型已用于阵列信号处理中估计到达方向（DOA），并已用于 [46]中的目标检测。我们使用尖峰协方差模型来估计杂波加噪声协方差矩阵。

B. 主要结果与论文结构

本文的主要结果和结构安排如下：

1）在第 II-A节中，我们构建旋转不变估计量。第 II-B节定义了大型随机矩阵的渐近模型，以及杂波加噪声协方差矩阵的尖峰协方差模型。2）在第 III 节中，我们介绍 [3] 中提出的尖峰协方差矩阵估计算法。在第 III-A节中，定理1 表明，强大数定律成立（即，估计得到的尖峰特征值几乎必然收敛到一个常数），并且满足中心极限定理。

这是因为，尽管我们处于高维情形，尖峰的数量却是固定的。文中还对 RFview 挑战数据集的收敛性质进行了实证验证。我们在第 ρ 节推导了归一化信杂噪比 III-B 的界。在第 III-C 节中，我们证明，所提算法与高维下的 RCML-EL 估计算法具有相似的性能，这是因为二者共享同一个优化问题。在第 III-D 节中，我们采用 LR-AN MF 检测器，使用旋转不变估计量进行目标检测。

3) 在第 IV-A节中，我们证明，针对使用 RFView 仿真得到的挑战数据集，所提算法与 RCML-EL 算法具有相同的信杂噪比。我们进一步表明，所提算法的估计计算时间短于 RCML-EL 算法。在第 IV-B节中，我们计算不同虚警概率和信杂噪比下的目标检测概率，并通过实验证明该算法对于杂波离散体污染具有鲁棒性。在第 IV-C节中，我们计算所提算法的 MVDR 波束形成器误差方差。

II. 旋转不变估计量与尖峰协方差模型

本节安排如下。第 II-A 节介绍一种通用的旋转不变估计量。第 II-B 节描述高维尖峰协方差模型。

我们采用 [4] 中使用的窄带基带等效模型。雷达发射复值波形$s(k) \in \mathbb{C}$，并在离散时间接收复值回波 $y(k) \in \mathbb{C}$:

$$y(k) = h_t(k) \circledast s(k) + h_c(k) \circledast s(k) + n(k) \quad (1)$$

这里，$\circledast$ 是卷积算子，k 表示离散时间。$h_t \in \mathbb{C}$ 是复值目标脉冲响应，$h_c \in \mathbb{C}$ 是复值杂波冲激响应。含噪测量 $n \in \mathbb{C}$ 是均值为零、方差为 σ^2 的加性白高斯噪声。噪声样本是独立同分布（i.i.d.）的。

用矩阵-向量表示法，1可写为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_t\,\mathbf{s} + \mathbf{H}_c\,\mathbf{s} + \mathbf{n}_s \quad (2)$$

其中，$\mathbf{H}_t$、$\mathbf{H}_c \in \mathbb{C}^{p\times q}$ 分别是由冲激响应 $h_t(k)$ 和 $h_c(k)$ 构造的托普利兹矩阵。$\mathbf{y} \in \mathbb{C}^p$ 是长度为 p 的回波信号，$\mathbf{s} \in \mathbb{C}^q$ 是脉冲长度为 q的波形。噪声$\mathbf{n}_s \in \mathbb{C}^p$是一个复值高斯分布向量，其中$\mathbf{n}_s \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$，且其样本独立同分布。

我们将杂波加噪声回波定义为$\mathbf{y}_c$

$$\mathbf{y}_c := \mathbf{H}_c\,\mathbf{s} + \mathbf{n}_s \quad (3)$$

A. 旋转不变估计量

本小节介绍杂波加噪声协方差估计量的旋转不变估计。旋转不变估计量与样本协方差矩阵具有相同的特征向量，且估计量的特征值是样本协方差矩阵特征值的函数。

杂波加噪声协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \sigma^2\,\mathbf{I} \quad (4)$$

其中，杂波协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_c := \mathbb{E}[\mathbf{H}_c\,\mathbf{s}\mathbf{s}^H\,{\mathbf{H}_c}^H] \quad (5)$$

且 $\sigma^2\mathbf{I}$ 是噪声分量。杂波加噪声协方差的特征值分解为:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (6)$$

其中特征值为 λ_i ，特征向量为 $\mathbf{u}_i$。样本^协方差矩阵 $\mathbf{R}_n$ 为:

$$\hat{\mathbf{R}}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{y}_{c,k}\,\mathbf{y}_{c,k}^H \quad (7)$$

其中，$\mathbf{y}_c$ 是式（3）中定义的杂波加噪声回波，将用作训练数据样本；[2]表示离散时间，n 表示训练数据^样本数量。给定训练数据样本数 n 时，$\mathbf{R}_n$ 的谱分解为:

$$\hat{\mathbf{R}}_n = \sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_{i,n}\mathbf{v}_{i,n}\,\mathbf{v}_{i,n}^H \quad (8)$$

^其中，$\lambda_{i,n}$ 是特征值，$\mathbf{v}_{i,n}$ 是 $\mathbf{R}_n$的特征向量。给定数据样本数 n 时，尖峰协方差矩阵估计为:

$$\bar{\mathbf{R}}_n = \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_{i,n}\,\mathbf{v}_{i,n}\,\mathbf{v}_{i,n}^H \quad (9)$$

¯其中，$\lambda_{i,n}$ 是 $\mathbf{R}_n$的特征值，其特征向量 ^$\mathbf{v}_{i,n}$ 与式（$\mathbf{R}_n$ （8）中的特征向量相同。尖峰协方差估计量是旋转不变估计量。

此外，我们使用归一化信杂噪比来比较协方差估计方法。我们记 ρ 以定义归一化信杂噪比如下:

$$\rho = \frac{(\mathbf{y}_t{}^H\,\bar{\mathbf{R}}^{-1}\,\mathbf{y}_t)^2}{(\mathbf{y}_t{}^H\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{y}_t)(\mathbf{y}_t{}^H\,\bar{\mathbf{R}}^{-1}\,\mathbf{R}\,\bar{\mathbf{R}}^{-1}\,\mathbf{y}_t)}. \quad (10)$$

其中 $\mathbf{y}_t = A_\theta \otimes A_f$ 是角度导向矢量 $[A_\theta]_i = \exp[-j\pi i \sin(\theta)]$、$1 \le i \le N$ 以及多普勒导向矢量 $[A_f]_i = \exp[-j2\pi i f_d]$，$1 \le i \le K$。$N$ 和 K 定义见第 IV节。协方差矩阵的维数为 $p = N \times K$。

¯在下一节中，我们将证明 λ 是 λ 的非线性^函数，其中非线性取决于损失函数。

[2]当目标不存在时，RFView 会收集训练数据。我们假设杂波加噪声协方差矩阵是平稳的，且与目标是否存在无关。这是因为在第II-B节中定义的尖峰协方差模型里，由目标引起的特征值分量与杂波加噪声协方差矩阵的特征值无关。

B. 使用大型随机矩阵对杂波加噪声协方差矩阵进行建模

在本小节中，我们定义尖峰协方差模型以及高维场景下的渐近设定。我们使用这一框架对杂波加噪声协方差矩阵进行建模。

定义1:

尖峰协方差矩阵$\mathbf{R}$是一个$p\times p$正定厄米矩阵，其特征值为$(\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_p)$，满足对于有限的$r \ll p$、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_r > \sigma^2$和$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_p = \sigma^2 > 0$。

我们作出两个假设

1) 杂波加噪声协方差矩阵具有定义1中给出的尖峰协方差结构。杂波加噪声协方差矩阵由式（4）给出，其中杂波协方差矩阵$\mathbf{R}_c$的秩为r，其特征值为$\lambda_i - \sigma^2$、$1 \leq i \leq r$。噪声协方差矩阵$\sigma^2\mathbf{I}$为对角矩阵。

2) 存在一个$\gamma \in (0,\ 1)$，对于给定的训练数据量n和维数为p的协方差矩阵，满足：

$$\frac{p}{n} \to \gamma, \quad p, n \to \infty, \quad p < n \tag{11}$$

图1和图2中所示的数据满足这些条件。在图2中，我们看到，杂波协方差矩阵可以近似为一个秩为r的半正定矩阵，因为其余$p-r$个分量都低于噪声底。

我们假设，当杂波矩阵的秩小于杂波加噪声协方差矩阵维数的一定比例χ时，杂波加噪声协方差矩阵具有尖峰结构。为方便起见，我们选择$\chi = 0.1$，因为经验上它与 RFView 模拟的数据相符。更一般的方法是进行模型阶数（维数）估计。在经典统计设置中，惩罚似然方法（如赤池信息准则（AIC）[47], 最小描述长度（MDL）[48], 信息论准则[49],统计技术[50], 数据依赖技术[51],以及极小极大方法（如嵌入指数族）[52]对此已有充分研究。然而，在本文考虑的高维场景中，估计模型阶数（尖峰数量）是一项尚未在本文中讨论的难题。在[7], RCML-EL算法使用布伦南法则[8], 作为杂波协方差矩阵秩的初始估计，以确定模型阶数。与 AIC 和 MDL 技术相比，RCML-EL算法能够正确估计秩。在第III-C节中，由于所提算法与 RCML-EL算法共享类似的优化问题，所提算法能够正确估计模型阶数。

尖峰协方差性质有助于我们处理高维情况下的杂波加噪声协方差矩阵，这种情况在雷达信号处理中经常会遇到。基于这一认识，我们定义了基于非线性收缩的旋转不变估计器。

III. 非线性收缩估计

在本节中，我们提出一种旋转不变估计量，通过对样本协方差矩阵的特征值进行非线性收缩来构造。我们在定理1 中说明估计特征值的收敛性，详见第III-A节。需要注意的是，对于秩为r的固定杂波协方差矩阵，我们将尖峰特征值与协方差矩阵的最大特征值r交替使用。我们概述所提算法的计算成本。在第 III-B节，我们给出归一化信杂噪比（ρ）的界。在第 III-B节，我们说明在高维情况下，所提算法与 RCML-EL 算法的 SCNR 性能相似。最后，我们在第III-C节给出所提算法用于目标检测的自适应归一化匹配滤波器。III-D。

尖峰协方差矩阵$\mathbf{R}$在定义¯中给出，见1。如（$\mathbf{R}_n$）所定义，尖峰协方差矩阵的估计包括两个子问题：估计尖峰特征值以及估计噪声功率σ^2。

1) 噪声功率的估计值如[3] 所述，为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\lambda}_{med}}{\mu_{med}} \tag{12}$$

ˆ其中，λ_{med}是ˆ样本协方差矩阵$\mathbf{R}_n$的特征值的中位数，而μ_{med}是参数为γ的Marchenko-Pastur分布在式(11)中所述的中位数。噪声功率估计量相合性的证明见[3, 第9]节。

2) 收缩函数$\eta^*(\cdot)$如[3] 所述，为

$$\eta^*(\tilde{\lambda}_i) = \begin{cases} \eta(f(\tilde{\lambda}_i)) & \tilde{\lambda}_i > (1+\sqrt{\gamma})^2 \\ 1 & \tilde{\lambda}_i \leq (1+\sqrt{\gamma})^2 \end{cases} \tag{13}$$

其中，$\tilde{\lambda}_i = \hat{\lambda}_i/\hat{\sigma}^2$、$\hat{\lambda}_i$是样本协方差矩阵ˆR的特征值，且ˆ$\sigma^2$在式(12)中定义。函数$f(\cdot)$由下式给出：

$$^{3}f(x) = \frac{x+1-\gamma+\sqrt{(x+1-\gamma)^2-4x}}{2} \tag{15}$$

而$\eta(\cdot)$对于[3], L^{St} =tr($\mathbf{R}^{-1}$ ¯$\mathbf{R}$ − $\mathbf{I}$) − logdet($\mathbf{R}$ $^{-1}$ ¯$\mathbf{R}$)中的Stein损失，如式中所述，由下式给出：

$$\eta^{\mathrm{St}}(x) = \frac{x}{c(x)^2 + s(x)^2\, x} \tag{16}$$

[3]需要注意的是，式(14)是

$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{\gamma x}{x-1} & x > 1+\sqrt{\gamma} \\ (1+\sqrt{\gamma})^2 & 1 \leq x \leq 1+\sqrt{\gamma} \end{cases} \tag{15}$$

其中，当$x > (1+\sqrt{\gamma})^2$, 时，它表示ˆ λ 与 λ 之间的关系，相关解释见[3]。

其中，$c(\cdot)$ 由下式给出

$$c(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\gamma/(x-1)^2}{1+\gamma/(x-1)}} & x > 1+\sqrt{\gamma} \\ 0 & x \le 1+\sqrt{\gamma} \end{cases} \tag{17}$$

$s(\cdot)^2 = 1 - c(\cdot)^2$ 并且 γ 由式（11）给出。

$\bar{}$估计量的特征值$\lambda_{i,\ n}$ 由下式给出：$\mathbf{R}_n$

$$\bar{\lambda}_{i,n} = \hat{\sigma}^2\, \eta^*(\tilde{\lambda}_i) \tag{18}$$

其中 $\hat{}\sigma^2$ 由式（12）给出，而 $\eta^*(\tilde{\lambda}_i)$ 由式（13）给出。该估计量的最优性证明见[3, 第 6]节。

计算该估计量的伪代码见算法1。

算法1 尖峰协方差矩阵估计的非线性收缩算法

1:对样本$\hat{}$协方差矩阵进行特征值分解$\mathbf{R}_n$ ，如式（8）所示，给定数据样本数 n。2: 根据式（$\hat{}\sigma^2$ 12）计算噪声功率。_3: 根据式（$\lambda_{i,\ n}$ 18）计算估计量的特征值。4: 使用步骤3中计算出的特征值，估计的$\bar{}$协方差矩阵 $\mathbf{R}_n$ 由式（9）给出。

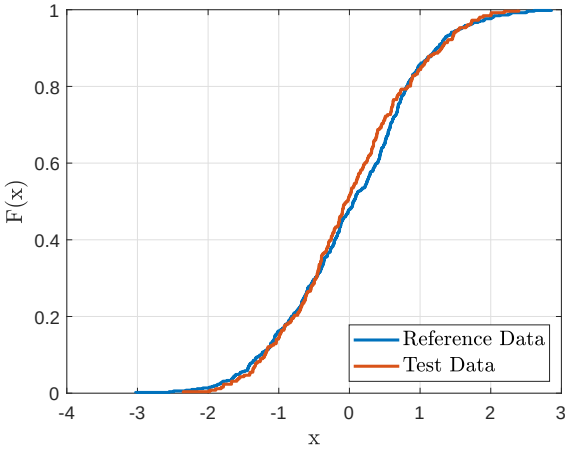

图 3：采用来自指定分布（20）的参考数据和来自挑战数据集的测试数据进行双重 K-S 检验，验证挑战数据集满足定理1 的假设， p值为 0.8390。

A. 所提估计量的特征值收敛性

尽管我们处理的是有限的 p 和 n，但在定理1中，我们指出，当 $p,\ n \to \infty$时，只要尖峰的数量 r 固定，尖峰特征值几乎必然收敛到一个常数，并满足中心极限定理。

我们对维数为 p的协方差矩阵 $\mathbf{R}$作如下假设：A1. 前 r 个互不相同的特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r$ 的重数均为 1，且下界为 $1+\sqrt{\gamma}$。A2. 特征值 $\lambda_{r+1} = 1,\ \cdots,\ \lambda_p = 1$。

定理1：

$\bar{}$考虑维数为 p 的估计量 $\mathbf{R}_n$ ，其特征-$\bar{}$ $\bar{}$值为 $(\lambda_{1,\ n},\ \lambda_{2,\ n},\ \cdots,\ \lambda_{p,\ n})$，用于估计满足假设 (A1) 和 (A2) 的尖峰协方差矩阵$\mathbf{R}$。假设 $p/n \to \gamma \in (0,\ 1)$ $p,\ n \to \infty$。那么$\lambda_{i,\ n}$'s， $1 \le i \le r$ 满足

$$\bar{\lambda}_{i,n} \xrightarrow{a.s.} \eta^*(\beta_i) \tag{19}$$

此外，如果 $p/n - \gamma = o(n^{-1/2})$，则

$$\sqrt{n}(\bar{\lambda}_{i,n} - \eta^*(\beta_i)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \alpha_i^2\,(\eta'(\beta_i))^2) \tag{20}$$

其中 $\eta^*(\cdot)$ 由式（13）给出，且 $\eta(\cdot)$ 由式（16）给出。$\beta_i = \lambda_i + \frac{\gamma\lambda_i}{\lambda_i - 1}$, $\alpha_i^2 = 2\lambda_i^2\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_i - 1()^2}\right)$ 和 γ 由式（11）给出。

证明：通过对 [2, Thm. 2] 应用连续映射定理，并使用函数 [2, ，可以证明几乎必然收敛。

通过对 [2, Thm. 3] 应用 δ 方法，并使用函数 η，可以证明分布内收敛。■

我们使用显著性水平为 5% 的双重 Kolmogorov-Smirnov（K-S）检验和 1024 次蒙特卡洛模拟，实证验证了挑战数据集满足定理 1 的假设。参考数据由式（20）中的指定分布生成，测试数据则来自挑战数据集。测试数据和参考数据的累积分布函数图（图3 ）表明，挑战数据集满足定理 1的假设。

计算成本

算法 1 无需预先知道尖峰的数量。算法1中的步骤 (2) 和步骤 (3) 确定高于噪声底的特征值。该算法的计算成本如下：

1) 特征值分解需要 $\mathcal{O}(p^3)$ 次实数乘法。2) 噪声功率估计步骤 (2) 是一种中位数查找算法，需要 $O(p)$ 次实数乘法。3) 非线性收缩步骤 (3) 需要 $\mathcal{O}(r)$ 次实数乘法，其中 r 为杂波协方差矩阵的秩。

我们将算法1 与 RCML-EL 算法进行比较，其计算成本如下：

1) 特征值分解步骤需要 $\mathcal{O}(p^3)$ 次实数乘法。2) 联合噪声与秩估计步骤需要 $\mathcal{O}(p^2)$次实数乘法。

差异在于噪声和秩估计步骤；算法1 需要 $\mathcal{O}(p)$ 次实数乘法，而

RCML-EL算法需要 $\mathcal{O}(p^2)$。这一点将在第 IV-A 节通过实验证明。

B. ρ的界

本节利用 [53] 中的结果，推导归一化信杂噪比（ρ）的下界和上界。

我们将 ρ 由（10）改写为

$$\rho = \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{(\mathbf{x}^H\bar{\mathbf{R}}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}\bar{\mathbf{R}}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x})(\mathbf{x}^H\bar{\mathbf{R}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{R}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{x})}, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{R}}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}_{t0}$。不失一般性，假设$\|\mathbf{x}\| = 1$。我们使用 Kantorovich 不等式的矩阵形式来界定分母。对于半正定矩阵 A 和单位向量 x，$\|\mathbf{x}\|_2 = 1$，$(\mathbf{x}^H A\mathbf{x})(\mathbf{x}^H A^{-1}\mathbf{x}) \leq \frac{1}{4}(\kappa(A) + \kappa^{-1}(A) \pm 2)$，其中 $\kappa(A)$ 是矩阵 A 的条件数。根据柯西-施瓦茨不等式，$(\mathbf{x}^H A\mathbf{x})(\mathbf{x}^H A^{-1}\mathbf{x}) \geq 1$。我们将 ρ下界估计为：

$$\rho \geq \frac{1}{\frac{1}{4}(\kappa(\mathbf{A}) + \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})} + 2)} \quad (22)$$

其中 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{R}}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}\bar{\mathbf{R}}^{-\frac{1}{2}}$。由 [53], 可得

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\max\left[1, \max_{1\leq i\leq r} \nu_+(\lambda_i^*, \eta_i)\right]}{\min\left[1, \min_{1\leq i\leq r} \nu_-(\lambda_i^*, \eta_i)\right]} \quad (23)$$

其中

$$\nu_\pm(\lambda_i^*, \eta_i) = T/2 \pm \sqrt{T^2/4 - D}$$

$$D = \eta^{\mathrm{St}}/\lambda^*, \quad T = \left(\frac{s^2 + \eta^{\mathrm{St}}c^2}{\lambda^*} + c^2 + \eta^{\mathrm{St}}s^2\right)$$

η^{St} 在（16）中定义，且 $\lambda_i^* = \lambda_i/\sigma^2$。

在第 IV 节中，我们将证明所提算法的性能处于推导出的界内。

C. 所提算法与 RCML-EL 算法之间的性能相似性

本节将说明，所提算法与 RCML-EL 算法能够得到相似的 SCNR 性能。

假设噪声功率为 1，杂波加噪声协方差矩阵估计的优化问题在 [6, (35)] 中定义如下：

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \quad & \mathbf{d}^T\bar{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{1}^T\log\bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}} \preceq \mathbf{g} \\ & \mathbf{E}\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{h} \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $d_i = \lambda_i$，回顾第II 节，$\hat{\lambda}$ 是估计量的特征值，而 λ 是样本协方差矩阵的特征值。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}\mathbf{U}^T & -\mathbf{I}_{p\times p} & \mathbf{I}_{p\times p}\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3p\times p}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{p\times 1}^T & -\boldsymbol{\epsilon}_{p\times 1}^T & \mathbf{1}_{p\times 1}^T\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3p\times 1}$$

$\boldsymbol{\epsilon}_{p\times 1} = [\epsilon, \ldots, \epsilon]_{p\times 1}$, $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{r\times r} & \mathbf{0}_{r\times p-r} \\ \mathbf{0}_{(p-r)\times r} & \mathbf{I}_{p-r}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix}0, 0, \cdots, 0_r, 1, 1, \cdots, 1\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p\times 1}.$$

式（24）中的第一个约束要求 λ_i 按降序排列且为正，第二个约束则要求估计量的最后 $p-r$ 个特征值相等。在高维场景下，这些约束使估计量具有尖峰协方差矩阵结构，如定义1所述。在 [3], 尖峰协方差模型下，针对 Stein 损失估计前导 r 个特征值的优化问题如下：

$$\min_{\bar{\lambda}_i, 1\leq i\leq r} \quad a_i\bar{\lambda}_i - b_i\log\bar{\lambda}_i + m_i \quad (25)$$

其中，$a_i = c^2/g(\hat{\lambda}_i) + s^2$、$b_i = 1$ 和 $m_i = 1/g(\hat{\lambda}_i) - 1 - a_i + \log(f(\lambda_i))$; $f(\cdot)$见式（14），$g(\cdot)$见式（15），$c(\cdot)$和 $s(\cdot)$见式（17）。

由于式（24）的代价函数仅相差一个常数，且式(25)（24）的约束已隐含于式（25）的优化问题中，因此归一化信杂噪比、ρ 以及杂波协方差矩阵的秩 r将保持一致。

在第IV 节中，我们将证明，所提算法的信杂噪比性能与RCML-EL算法相同，且计算时间更短。

D. 低秩自适应归一化匹配滤波器检测

本节将采用 [54] 中所述的基于旋转不变估计量的低秩自适应归一化匹配滤波器（LR-ANMF）检测器。该检测方案与（13）中的特征值收缩无关，仅依赖于高维情况下样本协方差矩阵的特征向量。所提算法和 RCML-EL 算法均使用同一检测器。

对于单个目标，我们有以下二元假设：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \\ \mathcal{H}_1 &: \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(h_t\mathbf{s}, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (26)$$

其中，$\mathcal{H}_0$ 表示不存在目标时的零假设，而 $\mathcal{H}_1$ 表示存在目标时的备择假设。目标信号$\mathbf{s}$ 的定义与$\mathbf{y}_t$ 在（10）中的定义相同，其复数幅度为 h_t，且$\mathbf{R}$ 为杂波加噪声协方差矩阵。 [55],中给出的、基于 n 个数据样本的 LR-ANMF 检验统计量为

$$T_n = \frac{|\mathbf{s}\hat{\Pi}_n\mathbf{y}|^2}{\|\hat{\Pi}_n\mathbf{s}\|^2} > \delta \quad (27)$$

其中

$$\hat{\Pi}_n = \mathbf{I} - \sum_{i=1}^{r} \mathbf{v}_{i,n}\, \mathbf{v}_{i,n}^H$$

是利用特征向量构造的投影矩阵$\mathbf{v}_{i,\ n}$ 定义于（8）中，对应于 r 尖峰协方差矩阵的尖峰，且 δ 是检测阈值。回顾第II-B 节， r 是杂波协方差矩阵的秩。噪声功率 σ^2 的知识不会影响检测，因为我们使用了第III-A 节中的假设（A1），其中 σ^2 已被估计。我们给出 [54] 中的收敛定理，它们说明检验统计量在$\mathcal{H}_0$ 和 $\mathcal{H}_1$ 下的分布内收敛。

定理 2（**[54],** 定理 2）：
在 $\mathcal{H}_0$ 及假设（A1）下，检验统计量 T_n满足：

$$T_n \xrightarrow{D} \chi^2(2) \tag{28}$$

其中 $\chi^2(2)$ 服从自由度为 1 的复卡方分布。检测阈值为 δ 时的虚警概率为：

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n > \delta|\mathcal{H}_0) = \int_{\delta}^{\infty} \exp(-x)\, dx \\ &= \exp\left(-\delta\right) \end{aligned} \tag{29}$$

定理 3（**[54],** 定理 3）：
在 $\mathcal{H}_1$ 及假设（A1）下，检验统计量 T_n满足：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(T_n < x) - F\left(x; 2, \Delta\right)| \to 0 \tag{30}$$

其中， $F(x; 2, \Delta)$ 表示具有一个复自由度、非中心参数为 Δ 的非中心 χ^2 分布的累积分布。

$$\Delta = \frac{2|h_t|^2}{\nu} \tag{31}$$

h_t 定义于式（26）中，

$$\begin{aligned} \nu = &\frac{1}{\|\Pi\mathbf{s}\|^2 + \sum_{i=1}^{r}(1-c^2(\lambda_i))|\mathbf{s}^H\,\mathbf{u}_i|^2} \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i-1)(1-c^2(\lambda_i))|\mathbf{s}^H\,\mathbf{u}_i|^2}{(\|\Pi\mathbf{s}\|^2 + \sum_{i=1}^{r}(1-c^2(\lambda_i))|\mathbf{s}^H\,\mathbf{u}_i|^2)^2} \end{aligned}$$

其中 $\Pi = \mathbf{I} - \sum_i^r \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^H$， $c(\cdot)$ 定义于式（17）中，$\mathbf{u}_i$定义于式（6）中， r 是杂波协方差矩阵的秩，$\mathbf{s}$ 定义于式（26）中。相应的检测阈值为 δ 时，目标检测概率为：

$$\begin{aligned} P_D &= \exp(-\Delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \left[1 - \frac{\int_0^{\delta} x^k \exp(-x)\, dx}{\Gamma(k+1)}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n > \delta|\mathcal{H}_1) \end{aligned} \tag{32}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。

在第 IV-B节中，我们针对一系列信噪比（SNR），计算不同虚警概率下的检测概率，并通过实验评估检测器在存在多个充当污染杂波离散分量的目标时，检测单个目标的鲁棒性。污染杂波离散分量是由非预期目标引起的额外尖峰。它们不属于杂波尖峰，并会使杂波协方差矩阵的秩从 r 变为 $\hat{}r$。

本节最后，我们利用样本协方差矩阵提出了基于非线性收缩的旋转不变估计器。我们给出了该估计量的尖峰特征值的收敛性，并给出了归一化信杂噪比的界。我们证明了高维场景下 RCML-EL算法与所提算法等价。我们还给出了基于所提算法的目标检测器。

IV. 数值示例

我们使用通过 RFView® 软件生成的数据集，该软件能够准确表征复杂的射频环境。它使用随机传递函数 [4]来模拟实际环境中遇到的高保真射频杂波。

该数据集由时域中的数据立方体构成，是一个多维 $N \times K \times n$ 矩阵，其中 N是（快时间）的总数，K 是慢时间，n 是指定相干处理间隔内的距离门数。对于本例，我们将距离门数作为数据样本数 n。

在第 IV-A 节中，我们使用由 RFView 生成的挑战数据集。我们将算法 1 与 [7] 中给出的基于 RCML-EL 的估计算法进行性能比较。我们绘制归一化信杂噪比（ρ）随训练数据量 n、归一化多普勒和归一化角度变化的曲线，该信杂噪比定义见（10）。所有图中，我们都在 $n = \mathcal{O}(p)$ 的条件下进行仿真，即$1/10 < p/n < 1$。此外，我们还展示了所提算法和 RCML-EL 算法在不同 n 下的计算时间。

在第 IV-B节中，我们计算了在一系列虚警概率和信杂噪比下的目标检测概率。在第 IV-C节中，我们使用所提算法计算最小方差无失真响应波束形成器的误差方差，并将其与对应于 RCML-EL算法和真实协方差矩阵的误差方差进行比较。

我们仅与 RCML-EL算法进行比较，因为如 [56], Chen 算法 [57] 和 AIC [47], 中所述，该算法在所有指标上均优于样本协方差矩阵样本矩阵求逆、FML [7] 。由于定理 1 背后的理论仅在 $n > p$的情况下成立，因此对于 $n < p$的情况无法作出确定性结论。因此，所提算法的有效性仅限于 $n > p$的情况。

我们的结果是在运行于配备 16GB RAM 的 AMD Ryzen 7 5800H 微处理器的 Windows-11 操作系统上的 Matlab®-R2021b 中模拟得到的。

A. SCNR 性能

挑战数据集包含由 RFView 生成的雷达目标和杂波回波®。挑战数据集中的场景包含 4 个目标，以及含有建筑物的地面杂波。该场景描述了一部机载单基地雷达在圣迭戈附近的太平洋海岸上空飞行，向下探测地面运动目标。平台以恒定速度沿海岸线移动期间，数据涵盖多个相干处理间隔。在表 II-IX的附录中，我们列出了该场景使用的所有参数。

数据集由一个 $32 \times 64 \times 2335$ 数据立方体矩阵构成，其中包含 32 个通道、64 个脉冲和 2335 个数据样本的杂波冲激响应。我们将8 个通道拼接起来，得到大小为 512×2335 的杂波冲激响应矩阵。将杂波冲激响应矩阵的各行与脉冲长度为1000 的波形进行卷积，得到维数为 512×3334 的杂波回波矩阵。我们向所得杂波回波矩阵中加入均值为零、方差为 $\sigma^2 = 5 \times 10^{-14}$ 的加性白高斯噪声。杂波加噪声协方差矩阵的维数为 512×512。我们将 n 从 p 的倍数逐步增加到 $n < 3334$，以获得样本协方差矩阵。每幅图均使用 1024 次蒙特卡洛模拟。对于归一化多普勒，我们将角度区间固定为 $\frac{\pi}{180}$，并对其进行边缘化。对于归一化角度，我们将多普勒区间固定为 $\frac{\pi}{50}$，并对其进行边缘化。两种情况下，我们均固定 $n = 1024$。

图4 展示了平均归一化SCNR随数据样本数量的变化情况 n。不同算法的运行时间 n见表I。归一化SCNR随归一化多普勒的变化情况见图5 ，归一化SCNR随归一化角度的变化情况见图6。

训练 Data 大小 (n)	所提算法	RCML-EL算法
512	0.012035s	0.107116秒
1024	0.003046秒	0.070876秒
1536	0.002028秒	0.053037秒
2048	0.002026秒	0.050819s
2560	0.002095s	0.050504s

表I：算法1 在挑战数据集上所需的计算时间少于RCML-EL算法。

B. 目标检测

本节使用第III-D 节中目标多普勒为 $f_d = 0.2$ 、角度为 $\theta = 30°$的结果。我们绘制目标检测概率 P_D随虚警概率 P_{FA} 从 10^{-5} 到10^{-1} 的变化曲线，间隔为10的倍数，信杂噪比从=-10dB到30dB。我们使用 $n = 1024$ 个数据样本进行1024次蒙特卡洛模拟。

挑战数据集包含4个目标。我们考虑检测单个目标，并将其余目标视为污染杂波离散分量。这些污染杂波离散分量与感兴趣目标的特性并不相同，因此不会发生自目标抵消。回顾第III-D 节，污染杂波离散分量会使杂波秩变为未知的$\hat{r}$。通过引入多个目标作为污染杂波离散分量，我们展示了检测器的鲁棒性。

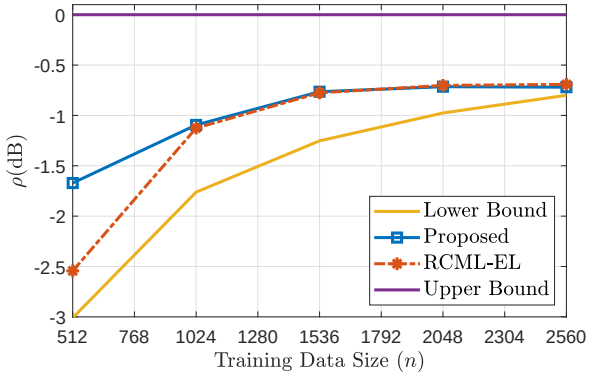

图4：所提算法与RCML-EL算法具有相同的信杂噪比。两种估计器的信杂噪比均在推导出的界内。

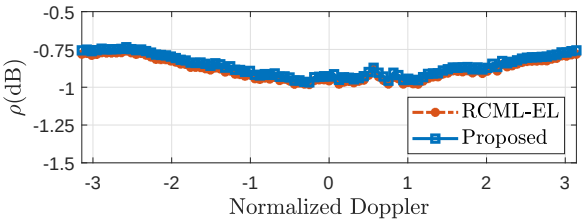

图5：算法1 与RCML-EL算法具有相同的信杂噪比。

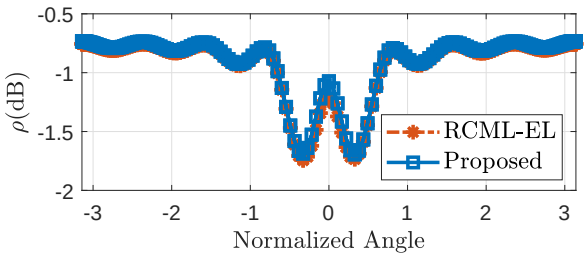

图6：算法1 与RCML-EL算法具有相同的信杂噪比。

由于检测器仅使用样本协方差矩阵的特征向量，因此RCML-EL算法和所提算法的检测概率相同。检测概率如图7所示。

C. 经验误差方差

本节通过实验展示所提算法产生的最小方差无失真波束形成器（MVDR）误差方差，并将其与

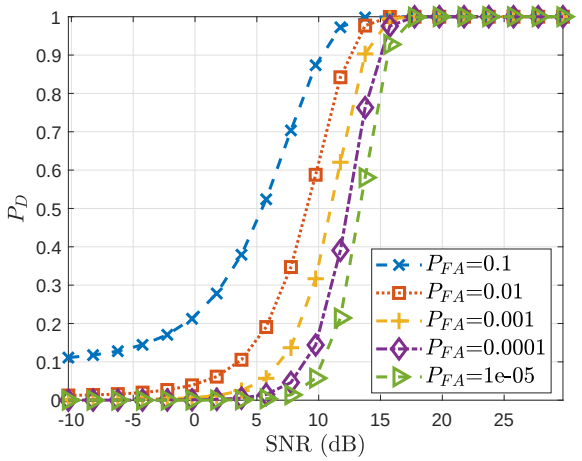

图 7：随着 P_{FA} 减小，单个目标需要更高的信噪比才能达到固定的 P_D。其他目标的存在不会影响检测概率，因为它们被投影到了目标子空间的零空间中。实证结果表明，该检测器能够抵御杂波离散体的干扰。

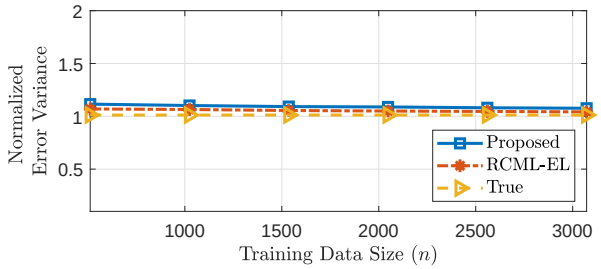

图 8：所提算法和 RCML-EL 算法的归一化误差方差与真实协方差矩阵的归一化误差方差相同。我们用真实协方差矩阵的误差方差对式（33）中的误差方差进行归一化。

RCML-EL算法波束形成器的误差方差及真实协方差矩阵进行比较。该波束形成器的误差方差为

$$\text{Error Variance} = 1/|\mathbf{s}^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{s}| \tag{33}$$

其中，对于所提算法，$\mathbf{M} = \hat{\mathbf{R}}_{\text{proposed}}$；对于 RCML-EL 算法，$\hat{\mathbf{R}}_{\text{RCML-EL}}$；对于真实协方差矩阵，$\mathbf{R}$。目标信号 $\mathbf{s}$（定义方式与式（10）中 $\mathbf{y}_t$ 相同）具有多普勒频率 $f_d = 0.3$ 和角度 $\theta = 30°$。在图8中，RCML-EL 算法和所提算法的误差方差与真实协方差矩阵的误差方差相同。随着训练数据量增加，误差方差不会变化，因为我们处于渐近区间。这是因为在渐近区间内，估计协方差矩阵以概率 1 收敛到真实协方差矩阵。因此，当 $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ 时，式（33）中的误差方差仅为式（10）中信噪比的倒数。

总之，在本节中我们证明了，在缩短协方差计算时间的同时，算法 1 能够实现在所提出的界内，其信杂噪比性能与基于EL的协方差估计算法相同。然而，噪声计算步骤需要预先计算不同 γ 值对应的 Marchenko–Pastur分布中位数。这也使我们的算法对场景参数的突然变化不够稳健，因为数据样本可能因距离测绘带而异。

我们展示了使用 LR-ANMF 检测器时，不同虚警概率下的目标检测概率。我们通过实验证明了该方法对于挑战数据集中污染杂波离散分量的鲁棒性。我们通过实验证明，所提算法的误差方差与真实协方差矩阵相同。

结论

我们利用高维场景下杂波加噪声协方差矩阵的尖峰协方差结构，提出了一种基于非线性收缩的旋转不变估计器。我们阐述了该估计器的尖峰特征值的收敛性。与 RCML-EL 算法相比，我们展示了协方差计算时间的缩短。所提算法的信杂噪比性能与 RCML-EL 算法相同。我们采用 LR-ANMF 检测器进行鲁棒目标检测，并通过实验证明，该算法的误差方差与真实协方差矩阵相同。

所提算法是一种分批算法。未来值得开发该算法的自适应版本。我们还将通过引入各种约束并推导所提算法的集中界，研究适用于不同场景的其他损失函数。挑战数据集中污染杂波离散分量的数量及其相对强度不足以全面分析 LR-ANMF 检测器的鲁棒性。这一技术特性将在未来进行更深入的探究。

附录

本节列出了我们在表 II-IX 中使用的 ChallengeDataset 参数。

纬度	北纬 32.66 度
经度	西经 118 度
高度	6000 米
速度	100 米/秒
速度向量方位角 （相对于真北的角度，单位：度）	0 度
速度矢量仰角 （相对于地平线的角度，单位：度）	0 度

表 II：雷达平台位置

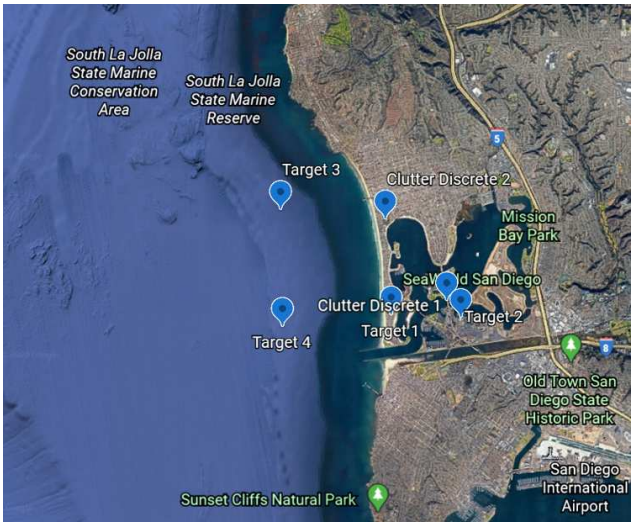

图 9：挑战数据集场景包含4个目标和2 个杂波离散体。

阵列元素数量（水平维数）	32
阵列元素数量（垂直维数）	5
水平空间数量通道（接收机）	32
垂直空间通道数—通道（接收机）	1
空间通道总数（接收机）	32
通道总数（发射—发射机）	1
发射天线增益	503.3509
接收天线增益	15.7297
中心频率	10 GHz
阵列单元间距	0.015 米
相干处理间隔数（CPI）	30
每个CPI的脉冲数	64
脉冲重复频率	1 千赫
雷达波形	标准线性调频
雷达波形带宽	10 MHz
雷达波形占空比	0.1
采样频率	10000000
峰值发射信号功率	1000 瓦
距离单元数量	2334
数据立方体大小（每个相干处理间隔）	32 x 64 x 2334
距离幅宽	20000 米
雷达方位角 Look 角度（固定）	80.8321 度
雷达仰角 视线角（固定）	-5.1364 度
杂波场景尺寸	20千米 x 20千米
杂波块尺寸	20米 × 20米

表III：挑战数据集场景的单基地雷达参数。

纬度	北纬 32.7627 度
经度	西经 117.2524 度
高度	0 m
速度	10 米/秒
速度矢量方位角（相对于真北的角度，单位：度）	0
速度矢量仰角（相对于地平线的角度，单位：度）	0
RCS	40

表IV：第一个目标正在圣迭戈米申海滩公园附近的 Ocean Front Walk 上沿地面向正北直线移动。

纬度	北纬32.7668度
经度	117.2334 度西
高度	0 m
速度	20 米/秒
速度矢量方位角（相对于真北的角度，单位：度）	0
速度矢量仰角（相对于地平线的角度，单位：度）	0
RCS	40

表 V：第二个目标正沿着圣迭戈海洋世界附近 Ingraham 街的地面向正北直线行进。

纬度	北纬 32.793 度
经度	西经 117.283 度
高度	0 m
速度	10 米/秒
速度矢量方位角（相对于真北的角度，单位：度）	180
速度矢量仰角（相对于地平线的角度，单位：度）	0
RCS	20

表 VI：第三个目标正在圣迭戈海岸外的水域中向南移动。在本次仿真中，与其他目标相比，它是一个较弱的目标。

纬度	北纬 32.763 度
经度	117.283 度西
高度	0 m
速度	15 米/秒
速度矢量方位角（相对于真北的角度，单位：度）	0
速度矢量仰角（相对于地平线的角度，单位：度）	0
RCS	30

表 VII：第四个目标正在圣迭戈海岸附近的水域中向北移动。

参考文献

[1] I. M. Johnstone，“论主成分分析中最大特征值的分布”，The 《统计学年鉴》，第 29 卷，第 2 期，第 295–327 页，2001 年。[2] D. Paul，《高维尖峰协方差模型中样本特征结构的渐近性质》，《统计学年鉴》，第 1617–1642 页，2007年。[3]D. L. Donoho、M. Gavish 和 I. M. Johnstone，《尖峰协方差模型中特征值的最优收缩

纬度	北纬 32.7665 度
经度	西经 117.2305 度
高度	6 m
速度	0 米/秒
RCS	50

表 VIII：第一个杂波目标是圣迭戈海洋世界内的一座 L 形建筑

纬度	北纬32.7901度
经度	西经117.252度
高度	6 m
速度	0 米/秒
RCS	50

表IX：第二个杂波目标是圣迭戈Mission大道旁的一栋立方体建筑物

协方差模型，”《统计学年鉴》，第46卷，第4期，第1742页，2018年。[4]S. Gogineni、J. R. Guerci、H. K. Nguyen、J. S. Bergin、D. R. Kirk、B. C. Watson和M. Ran-gaswamy，《高保真射频杂波建模与仿真》，《IEEE航空航天与电子系统杂志》，第37卷，第24–43页，2022年11月。[5] https://rfview.islinc.com/RFView/login.jsp。访问日期：2022-12-02。[6] B. Kang、V. Monga和M. Rangaswamy，《结构化协方差矩阵的秩约束最大似然估计》，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第50卷，第1期，第501–515页，2014年。[7]B. Kang、V. Monga、M. Rangaswamy和Y. Abramovich，《用于确定协方差估计约束的期望似然方法》，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第52卷，第5期，第2139–2156页，2016年。[8] I. Reed、J. Mallett和L. Brennan，《自适应阵列的快速收敛率》，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第AES-10卷，第6期，第853–863页，1974年。[9] Y. I. Abramovich和A. Nevrev，《利用估计相关矩阵求逆的自适应信噪比最大化方法的有效性分析》，《无线电工程与电子物理》，第26卷，第12期，第67–74页，1981年。[10] B. A. Johnson和Y. I. Abramovich，《一种矩阵扩展的欠采样似然比检验及其在音乐崩溃预测与修复中的应用》，《通信杂志》，第2卷，第3期，第64–72页，2007年。[11] Y. I. Abramovich，《基于最大信噪比准则的滤波器自适应优化控制方法》，《无线电工程与电子物理》，第26卷，第3期，第87–95页，1981年。[12] B. D. Carlson，《自适应阵列中的协方差矩阵估计误差与对角加载》，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第24卷，第4期，第397–401页，1988年。[13]M. C. Wicks、M. Rangaswamy、R. Adve 和 T. B. Hale，“空时自适应处理：机载雷达的知识辅助视角”，IEEE信号处理杂志，第23卷，第1期，第51–65页，2006年。[14]F. Gini 和 M. Rangaswamy，《基于知识的雷达检测、跟踪与分类》。John Wiley & Sons，2008年。[15] J. Ward，“空时自适应处理”，技术报告 ESC-TR，第94–109页，1994年。[16] R. C. DiPietro，“面向机载雷达系统的扩展因式空时处理”，载于《第二十六届阿西洛马会议（信号、系统与计算机）论文集》，第425–426页，IEEE计算机学会，1992年。[17] I. P. Kirsteins 和 D. W. Tufts，“利用数据矩阵的低秩近似进行自适应检测”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第30卷，第1期，第55–67页，1994年。[18] J. S. Goldstein、I. S. Reed 和 L. L. Scharf，“基于正交投影的维纳滤波器多级表示”，IEEE《信息论汇刊》，第44卷，第7期，第2943–2959页，1998年。[19]J. R. Roman、M. Rangaswamy、D. W. Davis、Q. Zhang、B. Himed 和 J. H. Michels，“面向机载雷达应用的参数自适应匹配滤波器”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第36卷，第2期，第677–692页，2000年。[20] A. Haimovich，“特征抵消器：基于特征分析方法的自适应雷达”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第32卷，第2期，第532–542页，1996年。[21] H. Wang 和 L. Cai，“机载监视雷达系统的自适应空时处理”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第30卷，第3期，第660–670页，1994年。[22]M. J. Wainwright，《高维统计：非渐近视角》，第48卷。剑桥大学出版社，2019年。[23] R. Vershynin，《高维概率：数据科学中的应用导论》，第47卷。剑桥大学出版社，2018年。[24]Z. Bai 和 J. W. Silverstein，《大维随机矩阵的谱分析》，第20卷。施普林格，2010年。[25]W. Wang 和 J. Fan，“高维尖峰协方差矩阵经验特征结构的渐近性质”，《统计学年鉴》，第45卷，第3期，第1342页，2017年。[26]A. M. Tulino、S. Verd´u 等，“随机矩阵理论与无线通信”，《通信与信息论基础与趋势》，第1卷，第1期，第1–182页，2004年。[27] R. Couillet、F. Pascal 和 J. W. Silverstein，“一种结合阵列处理应用的联合稳健估计与随机矩阵框架”，载于2013年IEEE

国际声学、语音与信号处理会议，第6561–6565页，IEEE，2013年。[28] O. Ledoit 和 M. Wolf，“Stein损失下大维协方差矩阵的最优估计”，Bernoulli，第24卷，第4B期，第3791–3832页，2018年。[29] O. Ledoit 和 M. Wolf，“大协方差矩阵的二次收缩”，Bernoulli，第28卷，第3期，第1519–1547页，2022年。[30] O. Ledoit 和 M. Wolf，“投资组合选择中的协方差矩阵非线性收缩：Markowitz 遇上 Goldilocks”，《金融研究评论》，第30卷，第12期，第4349–4388页，2017年。[31] O. Ledoit 和 M. Wolf，“（非）线性收缩的威力：协方差矩阵估计综述与指南”，《金融计量学杂志》，第20卷，第1期，第187–218页，2022年。[32] O. Ledoit 和 M. Wolf，“适用于大维协方差矩阵的良态估计量”，《多元分析杂志》，第88卷，第2期，第365–411页，2004年。[33] J. Bun、R. Allez、J.-P. Bouchaud 和 M. Potters，“一般含噪矩阵的旋转不变估计量”，IEEE《信息论汇刊》，第62卷，第12期，第7475–7490页，2016年。[34] X. Yuan、W. Yu、Z. Yin 和 G. Wang，“结合图形套索的改进型大维动态协方差矩阵估计及其在投资组合选择中的应用”，IEEE Access，第8卷，第189179–189188页，2020年。[35] R. Couillet、F. Pascal 和 J. W. Silverstein，“大维情形下的协方差矩阵稳健估计”，IEEE《信息论汇刊》，第60卷，第11期，第7269–7278页，2014年。[36] S. Sen，“用于空时自适应处理雷达的低秩矩阵分解与空时稀疏恢复”，IEEE信号处理选题杂志，第9卷，第8期，第1510–1523页，2015年。[37] K. Duan、H. Yuan、H. Xu、W. Liu 和 Y. Wang，“机载雷达中基于稀疏性的非平稳杂波抑制技术”，IEEE Access，第6卷，第56162–56169页，2018年。[38] B. Kang、V. Monga 和 M. Rangaswamy，“结构化协方差矩阵的约束最大似然估计及其在雷达空时自适应处理中的应用”，载于2013年第5届IEEE多传感器自适应处理计算进展国际研讨会（CAMSAP），第101–104页，IEEE，2013年。[39]R. Abrahamsson、Y. Selen 和 P. Stoica，“自适应波束形成中的增强型协方差矩阵估计量”，载于2007年IEEE国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP'07），第2卷，第II–969页，IEEE，2007年。[40] J. R. Guerci，“认知雷达：知识辅助全自适应方法”，载于2010年IEEE雷达会议，第1365–1370页，IEEE，2010年。[41]B. Kang、S. Gogineni、M. Rangaswamy、J. R. Guerci 和 E. Blasch，“自适应信道估计用于认知全自适应雷达”，《IET雷达、声纳与导航》，第16卷，第4期，第720–734页，2022年。[42] J. Guerci、J. Bergin、R. Guerci、M. Khanin和M. Rangaswamy，“用于认知雷达的新型MIMO杂波模型”，载于《2016年IEEE雷达会议（RadarConf）》，第1–6页，IEEE，2016年。[43] B. Nadler，“主成分分析的有限样本近似结果：一种矩阵扰动方法”，2008年。[44]F. Benaych-Georges和R. R. Nadakuditi，“大型随机矩阵的有限秩低秩扰动的特征值和特征向量”，《数学进展》，第227卷，第1期，第494–521页，2011年。[45]L. Yang、M. R. McKay和R. Couillet，“高维MVDR波束形成：基于尖峰随机矩阵模型的优化解”，《IEEE信号处理汇刊》，第66卷，第7期，第1933–1947页，2018年。[46]B. D. Robinson、R. Malinas和A. O. Hero，“低样本支持下的空时自适应检测”，《IEEE信号处理汇刊》，第69卷，第2939–2954页，2021年。[47] H. Akaike，“重新审视统计模型识别”，《IEEE自动控制汇刊》，第19卷，第6期，第716–723页，1974年。[48] P. D. Gr¨unwald，《最小描述长度原理》，麻省理工学院出版社，2007年。[49] M. Wax和T. Kailath，“基于信息论准则的信号检测”，《IEEE声学、语音与信号处理汇刊》，第33卷，第2期，第387–392页，1985年。[50] Z.-D. Bai、P. R. Krishnaiah和L.-C. Zhao，“白噪声条件下信号处理中高效检测准则的收敛速率”，《IEEE信息论汇刊》，第35卷，第2期，第380–388页，1989年。[51]A. A. Shah和D. W. Tufts，“从短数据记录中确定信号子空间的维数”，《IEEE信号处理汇刊》，第42卷，第9期，第2531–2535页，1994年。[52] S. Kay，“指数嵌入族——模型阶数估计的新方法”，《IEEE航空航天与电子系统汇刊》，第41卷，第1期，第333–345页，2005年。[53] D. L. Donoho和B. Ghorbani，“尖峰模型中条件数损失下的最优协方差估计”，arXiv预印本arXiv:1810.07403，2018年。[54] P. Vallet、G. Ginolhac、F. Pascal和P. Forster，“高维情形下改进的低秩检测器”，载于《ICASSP 2019—2019年IEEE国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）》，第5336–5340页，IEEE，2019年。[55] M. Rangaswamy、F. C. Lin和K. R. Gerlach，“异质雷达杂波场景下的鲁棒自适应信号处理方法”，《信号处理》，第84卷，第9期，第1653–1665页，2004年。[56] M. Steiner和K. Gerlach，“用于结构化协方差矩阵的快速收敛自适应处理器，还是结构化协方差矩阵的自适应处理器”，

《IEEE航空航天与电子系统汇刊》，第36卷，第4期，第1115–1126页，2000年。[57] P. Chen、M. C. Wicks和R. Adve，“用于检测雷达测量中信号数量的统计方法开发”，《IEE雷达、声纳与导航学报》，第148卷，第4期，第219–226页，2001年。