arXiv:2302.02048v1 [cs.IT] 4 Feb 2023

有限码长下多输入多输出大规模非调度随机接入的能量效率

Junyuan Gao，Yongpeng Wu，IEEE 高级会员，Tianya Li，以及 Wenjun Zhang，IEEE 会士

摘要——本文研究多输入多输出准静态瑞利衰落信道中大规模非调度随机接入（URA）的能量效率。具体而言，我们在逐用户错误概率约束下，推导了最低所需每比特能量的可达界和逆向界，其中逆定理界包含两部分：一部分是一般界，另一部分是较弱的系综界。数值评估表明，在所考虑的条件下，我们的可达界与逆向界之间的差距小于 5 dB。与我们的界相比，一些实用方案的能量效率较低，尤其是在用户数量较多时。此外，我们观察到，与有调度随机接入范式相比，非调度随机接入范式能够实现更高的频谱效率。

索引词——能量效率、有限码长区间、大规模非调度随机接入、多输入多输出信道。

I. 引言

作为未来无线网络中的典型应用场景，大规模机器类通信具有两个不同于传统人类通信的显著特征 [1]。首先，用户数量庞大，但在任意给定时刻，只有一部分用户处于活跃状态。其次，活跃用户向基站（BS）发送少量数据，同时面临严格的时延和能量约束。针对这一场景，人们提出了大规模随机接入技术，其中包括有调度随机接入（SRA）和非调度随机接入（URA）两种范式。对于 SRA，基站需要识别活跃用户并解码其消息。对于 URA，基站只关心发送的消息，而不关心用户身份。URA 范式于 [2] 提出，并受到广泛关注，催生了对新型信息论分析的需求。

关于这一主题，文献 [2] 和 [3] 分别针对高斯信道和瑞利衰落信道中的无协调随机接入，在满足每用户错误概率（PUPE）约束且已知活跃用户数量 K_a 的假设下，推导了最小所需每比特能量的有限码长（FBL）界。此外，文献 [4], 将文献 [2] 中的结果扩展到了未知 K_a的情形。值得注意的是，上述有限码长结果均针对只有一根基站天线的情形。事实上，采用大规模天线阵列具有显著优势。具体而言，文献 [5] 证明，当信道使用次数为 n 且基站天线数为 L 时满足 $K_a/L = o(1)$时，最多可从 $K = \Theta(K_a)$个潜在用户中识别出 $K_a = \mathcal{O}(n^2)$个活跃用户；但当基站只有一根天线时，这一数量会降至 $K_a = \mathcal{O}(n)$。

Y. Wu 的工作部分得到了国家重点研发计划（项目编号：2018YFB1801102）、国家自然科学基金（NSFC，项目编号：62122052 和 62071289）、111计划（项目编号：BP0719010）以及 STCSM（项目编号：18DZ2270700）的资助。（通讯作者：Yongpeng Wu）J. Gao、Y. Wu、T. Li 和 W. Zhang 均任职于上海交通大学电子工程系，中国闵行 200240（电子邮箱：{sunflower0515, yongpeng.wu, tianya, zhangwenjun}@sjtu.edu.cn）

本文研究了多输入多输出（MIMO）准静态瑞利衰落信道中无协调随机接入（URA）的能量效率。假设所有用户共享同一码本，我们推导了 PUPE 约束下最低所需每比特能量的可达界和逆向界。具体而言，我们采用随机编码和最大似然（ML）解码来推导可达界；由于错误事件是多个事件的并集，因此应用了 Fano“良好区域”技术 [6] 。我们的逆定理界包含两部分，即单用户界和多用户 Fano 型界。前者具有普遍适用性，后者则仅适用于高斯码本。数值结果验证了这些界的紧致性，并表明它们对于评估实际方案具有重要意义。结果显示，一些方案尤其在大 K_a 区域中表现为次优。此外，与有源随机接入（ SRA ）相比，无协调随机接入范式可实现更高的频谱效率。

符号说明：本文中，大写和小写粗体字母分别表示矩阵和向量。我们用 $[\mathbf{x}]_m$ 表示 $\mathbf{x}$ 的第 m 个元素，用 $[\mathbf{X}]_{m,n}$ 表示 $\mathbf{X}$ 的第 (m,n) 个元素。我们用 $(\cdot)^T$、$(\cdot)^H$、$|\mathbf{X}|$、$\|\mathbf{x}\|_p$ 和 $\|\mathbf{X}\|_F$ 分别表示转置、共轭转置、行列式、ℓ_p 范数和 Frobenius 范数。令 $\mathrm{diag}\{\mathbf{x}\}$ 表示对角元素由 $\mathbf{x}$ 构成的对角矩阵，$\mathrm{diag}\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$ 表示分块对角矩阵。我们用 $\cdot\backslash\cdot$ 表示集合差，用 $|\mathcal{A}|$ 表示集合 $\mathcal{A}$ 的基数。对于整数 $k>0$，记作 $[k]=\{1,\ldots,k\}$。我们用 $\mathcal{CN}(\cdot,\cdot)$ 和 $\chi^2(\cdot)$ 分别表示圆对称复高斯分布和中心卡方分布。我们用 $\gamma(\cdot,\cdot)$ 和 $\Gamma(\cdot)$ 分别表示下不完全伽马函数和伽马函数。事件 $\mathcal{G}$ 的补集记作 $\mathcal{G}^c$。对于 $0\le p\le 1$，记 $h_2(p) = -p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)$。

II. 系统模型

我们考虑一个上行单小区系统，其中基站配备 L 根天线，包含 K 个单天线用户；由于突发业务，只有 K_a 个用户处于活跃状态。活跃用户集合记为 $\mathcal{K}_a$。每个活跃用户都有一条包含 $J=\log_2 M$ 比特的消息，需要通过 n 次信道使用进行传输。

我们考虑准静态瑞利衰落信道模型。基站的第 l 根天线观测到的 $\mathbf{y}_l$ 表示为

$$\mathbf{y}_l = \sum\nolimits_{k\in\mathcal{K}_a} h_{k,l}\mathbf{x}_{W_k} + \mathbf{z}_l \in \mathbb{C}^n, \tag{1}$$

其中 $h_{k,l} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{CN}(0,1)$ 表示第 k 个用户与第 l 根基站天线之间的衰落系数；噪声向量为 $\mathbf{z}_l \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I}_n)$； W_k 表示活跃用户 k 的消息，该消息从 $[M]$ 中均匀随机选取；活跃用户 k 发送的码字记为 $\mathbf{x}_{W_k}$。这里，我们假设所有用户共享一个公共码本，矩阵 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M] \in \mathbb{C}^{n\times M}$ 由所有码字拼接而成。接收信号 $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_L]$ 表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\Phi}\mathbf{H} + \mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n\times L}, \tag{2}$$

其中，二元选择矩阵 $\mathbf{\Phi} \in \{0,1\}^{M\times K}$ 满足：$[\mathbf{\Phi}]_{W_k,\,k} = 1$ 如果第 k 个用户处于活跃状态并发送第 W_k 个码字；而 $[\mathbf{\Phi}]_{W_k\,k} = 0$ $= [\,_1 \cdots \,_L] \in$，否则；$\mathbf{H}\,\mathbf{h}_{,,}\mathbf{h},$ $\mathbb{C}^{K\times L}$ 其中 $\mathbf{h}_l = [h_{1,l}, \ldots, h_{K,l}]^T \in \mathbb{C}^K$，对 $l \in [L]$。

我们假设基站和用户都无法预先获知瞬时信道状态信息（CSI），但双方都知道其分布。与 [2] 中一样，由于篇幅限制，本文假设基站已知 K_a；我们的结果也可通过采用 [4] 中的类似思路，扩展到未知 K_a 的情形。接下来，我们介绍 URA 码的概念：

定义 1（*[2]*）：设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{H}_k$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别表示活跃用户的输入字母表、活跃用户 k 的信道衰落系数字母表以及信道 (2) 的输出字母表。一个（n，M，ϵ，P）大规模无源随机接入码由以下部分组成：

1) 编码器 f_{en}：$[M] \mapsto \mathcal{X}$，将消息 W_k 映射为码字 $\mathbf{x}_{W_k} \in \mathcal{X}$，其中 W_k 是从 $[M]$ 中独立且均匀地为 $k \in \mathcal{K}_a$选取的。 $\mathcal{X}$ 中的码字满足最大功率约束

$$\|\mathbf{x}_m\|_2^2 \le nP, \quad m \in [M]. \tag{3}$$

2) 解码器 g_{de}：$\mathcal{Y} \mapsto \binom{[M]}{K_a}$，满足 PUPE 约束

$$P_e = \frac{1}{K_a}\sum\nolimits_{k\in\mathcal{K}_a} \mathbb{P}\left[\left\{W_k \notin \hat{\mathcal{W}}\right\} \cup \{W_k = W_i \text{ for some } i \neq k\}\right] \le \epsilon. \tag{4}$$

ˆ此处，$\mathcal{W}$ 表示大小为 K_a的已解码消息集合。

令 $S_e = \frac{K_a J}{n}$表示频谱效率， $E_b = \frac{nP}{J}$表示每比特能量。最低所需每比特能量记为 $E_b^*(n, M, \epsilon)$ $= \inf$ $\{E_b$：$\exists(n, M, \epsilon,$ $P)$ 码。

III. 主要结果

定理1给出了多输入多输出信道中无协调随机接入的最低所需每比特能量的一个可达界。

定理1：第二节所述URA模型的最低所需每比特能量可上界为

$$E_b^*(n, M, \epsilon) \le \inf \frac{nP}{J}. \tag{5}$$

这里，inf取遍所有满足以下条件的 $P > 0$

$$\epsilon \ge \min_{0<P'<P}\left\{p_0 + \sum\nolimits_{t=1}^{K_a} \frac{t}{K_a}\min\{1, p_t\}\right\}, \tag{6}$$

其中

$$p_0 = \frac{\binom{K_a}{2}}{M} + K_a\left(1 - \frac{\gamma\left(n, \frac{nP}{P'}\right)}{\Gamma(n)}\right), \tag{7}$$

$$p_t = \min_{0\le\omega\le1, 0\le\nu} \{q_{1,t}(\omega,\nu) + q_{2,t}(\omega,\nu)\}, \tag{8}$$

$$q_{1,t}(\omega,\nu) = \binom{K_a}{t}\binom{M-K_a}{t}\mathbb{E}_{\mathbf{C}}\left[\min_{u\ge0, r\ge0, \lambda_{\min}(\mathbf{B})>0} \exp\{Lrn\nu\} \cdot \exp\{L((u-r)\ln|\mathbf{F}| - u\ln|\mathbf{F}_2| + r\omega\ln|\mathbf{F}_1| - \ln|\mathbf{B}|)\}\right], \tag{9}$$

$$q_{2,t}(\omega,\nu) = \min_{\delta\ge0}\binom{K_a}{t}\mathbb{E}_{\mathbf{C}}\left[\frac{\gamma(Lm, c_\delta)}{\Gamma(Lm)} + 1 - \frac{\gamma(nL, nL(1+\delta))}{\Gamma(nL)}\right], \tag{10}$$

$$c_\delta = \frac{L\left(n(1+\delta)(1-\omega) - \omega\ln|\mathbf{F}_1| + \ln|\mathbf{F}| - n\nu\right)}{\omega\prod_{i=1}^m \lambda_i^{1/m}}, \tag{11}$$

$$\mathbf{B} = (1-u+r)\mathbf{I}_n + u\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{F} - r\omega\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{F}, \tag{12}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_n + \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}}\mathbf{C}^H, \tag{13}$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{I}_n + \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\setminus S_1}\mathbf{C}^H, \tag{14}$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{I}_n + \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\setminus S_1\cup S_2}\mathbf{C}^H. \tag{15}$$

这里，$S_{\mathcal{K}_a}$ 是 $[M]$的任意 K_a子集； S_1 是 $S_{\mathcal{K}_a}$的任意t子集； S_2 是 $[M]\setminus S_{\mathcal{K}_a}$的任意 t子集；C $\in \mathbb{C}^{n\times M}$ $\mathcal{CN}$ 0 P' $\mathbf{\Gamma}_S =$ $\{\gamma_S\}$ $\in$的元素独立同 $\{0,1\}^{M\times M}$ $S \subset [M]$ $[\gamma_S]_i = 1$ $i \in S$ 分布，服从(,)；对于，diag为，其中当 时为，否则为$[\gamma_S]_i = 0$；F_1^{-1} $\mathsf{C}\mathbf{\Gamma}_{S_1}\mathsf{C}^H$的秩为$m = \min\{n, t\}$，其特征值按降序记为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$。

证明：我们使用随机编码生成公共码本 $\mathcal{C}$，其中码字c_m $\overset{\text{i.i.}}{\sim} \cdot\, \mathcal{CN}^{\text{d}}(0, P'\mathbf{I}_n)$，且对于 $m \in [M]$有$P' < P$。令 $\mathsf{C} = [\mathsf{c}_1, \ldots,$ $\mathsf{c}_M]$。如果用户 k 处于活跃状态，则其发送 $\mathbf{x}_{W_k} = \mathsf{c}_{W_k} 1\{\|\mathsf{c}$ $_{W_k}\|_2^2 \le nP\}$。活跃用户发送的消息，即 $S_{\mathcal{K}_a} = \{W_k:$ $k \in \mathcal{K}_a\}$，从 $[M]$中独立且有放回地抽取。为对每用户错误概率进行上界估计，我们进行两次测度变换：1）从 $[M]$中均匀且无放回地抽取 $S_{\mathcal{K}_a}$ 中的消息；2）活跃用户 k发送$\mathbf{x}_{W_k} =$ c_{W_k}。真实测度与新测度之间的全变差距离由式(7)中的 p_0 界定。因此，我们可以将每用户错误概率界定为

$$P_e \le \sum\nolimits_{t=1}^{K_a} \frac{t}{K_a}\mathbb{P}[\mathcal{F}_t] + p_0, \tag{16}$$

其中，$\mathcal{F}_t$ 表示在新测度下恰好有 t 条译码错误消息的事件，其上界如下。

我们使用最大似然解码器得到估计集合 $\hat{S}_{\mathcal{K}_a}$ 发送消息。解码器输出

$$\hat{S}_{\mathcal{K}_a} = \left\{f_{\text{en}}^{-1}(\hat{\mathbf{c}}) : \hat{\mathbf{c}} \in \hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}_a}\right\}, \tag{17}$$

$$\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}_a} = \arg\min_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}_a}\subset\mathcal{C}:\left|\mathcal{C}_{\mathcal{K}_a}\right| = K_a} g(\hat{\mathbf{\Gamma}}), \tag{18}$$

其中，$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \text{diag}\ \{\hat{\boldsymbol{\gamma}}\} \in \{0,1\}^{M\times M}$ with $[\hat{\boldsymbol{\gamma}}]_i = 1$ if c $_i \in \hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}_a}$，且对数似然代价函数 $g(\mathbf{\Gamma})$ 定义为

$$g(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = L\ln\left|\mathbf{I}_n + \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{C}^H\right| + \text{tr}\left(\mathbf{Y}^H\left(\mathbf{I}_n + \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{C}^H\right)^{-1}\mathbf{Y}\right). \quad (19)$$

令 $S_1 \subset S_{\mathcal{K}_a}$ 表示译码错误消息的集合。令 $S_2 \subset [M]\backslash S_{\mathcal{K}_a}$ 表示虚警消息的集合。为简洁起见，我们将“$\cup_{S_1\subset S_{\mathcal{K}_a},\ |S_1|=t}$”改写为“$\cup_{S_1}$”，并将“$\cup_{S_2\subset[M]\backslash S_{\mathcal{K}_a},\ |S_2|=t}$”改写为“$\cup_{S_2}$”；对于$\sum$和 $\cap$也作类似处理。于是，我们有

$$\mathbb{P}[\mathcal{F}_t] \overset{(a)}{\leq} \mathbb{P}[\mathcal{G}_e] \overset{(b)}{\leq} \min_{0\leq\omega\leq 1,\nu\geq 0}\left\{\mathbb{P}[\mathcal{G}_e\cap\mathcal{G}_{\omega,\nu}] + \mathbb{P}\left[\mathcal{G}_{\omega,\nu}^c\right]\right\}, \quad (20)$$

其中 $\mathcal{G}_e = \bigcup_{S_1,\ S_2}\left\{g(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\backslash S_1\cup S_2}) \leq g(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}})\right\}$ 和 $\mathcal{G}_{\omega,\ \nu} = \bigcap_{S_1}\{\ \in\mathcal{R}_{t\ S_1}\}$ Y，。这里，(a) 成立是因为我们将$\mathcal{G}_e$ 中的所有平局都视为错误；(b) 根据引理1中给出的 Fano“良好区域”技术得到，其中“良好区域”$\mathcal{R}_{t,\ S_1}$ 选为

$$\mathcal{R}_{t,S_1} = \left\{\mathbf{Y} : g\left(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}}\right) \leq \omega g\left(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\backslash S_1}\right) + nL\nu\right\}. \quad (21)$$

引理1（ *[6]*）：令 y 为接收信号，$\mathcal{R}$ 为“良好区域”。我们可以将解码错误概率界定为

$$\mathbb{P}[e] \leq \mathbb{P}[e\cap\{\mathbf{y}\in\mathcal{R}\}] + \mathbb{P}[\mathbf{y}\notin\mathcal{R}]. \quad (22)$$

(20) 中的项 $\mathbb{P}[\mathcal{G}_e\cap\mathcal{G}_{\omega,\nu}]$ 可进一步界定为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\mathcal{G}_e\cap\mathcal{G}_{\omega,\nu}] \\
&\leq \sum\nolimits_{S_1,S_2}\mathbb{E}_{\mathbf{C}}\big[\mathbb{P}\big[\big\{g\big(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\backslash S_1\cup S_2}\big) \leq g\big(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}}\big)\big\} \\
&\qquad\qquad \cap\big\{g\big(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}}\big) \leq \omega g\big(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\backslash S_1}\big) + nL\nu\big\}\big|\,\mathbf{C}\big]\big] \quad (23)\\
&\leq \sum\nolimits_{S_1,S_2}\mathbb{E}_{\mathbf{C}}\Big[\min_{0\leq u,0\leq r}\mathbb{E}_{\mathbf{H},\mathbf{Z}}\big[\exp\big\{rnL\nu + (u-r)g\big(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}}\big) \\
&\qquad\qquad -ug\big(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\backslash S_1\cup S_2}\big) + r\omega g\big(\mathbf{\Gamma}_{S_{\mathcal{K}_a}\backslash S_1}\big)\big\}\big|\,\mathbf{C}\big]\Big] \quad (24)\\
&\leq q_{1,t}(\omega,\nu)\,, \quad (25)
\end{aligned}$$

其中，$q_{1,\ t}(\omega,\nu)$ 在(9)中给出；(23)由并集界得到；(24)是将 Chernoff界$\mathbb{P}[\{Z\geq 0\}\cap\{W\geq 0\}] \leq \mathbb{E}[\exp\ \{uZ+rW\}]$（对于 $u,r\geq 0$ [7]）应用于(23)中的概率得到的；(25)是将引理2应用于关于 H 和 Z 的(24)中的期望得到的。

引理2（ *[8]*）：假设 $\mathbf{x}\ \in\mathbb{C}^{p\times 1}$ 服从 $\mathbf{x}\ \sim\mathcal{CN}(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$ 分布。令 B $\in\mathbb{C}^{p\times p}$ 为厄米矩阵。对于任意 γ，如果 $\mathbf{I}_p - \gamma\mathbf{\Sigma}$B 的特征值为正，则有

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\gamma\mathbf{x}^H\mathbf{B}\mathbf{x}\right\}\right] = \left|\mathbf{I}_p - \gamma\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}\right|^{-1}. \quad (26)$$

定义事件 $\mathcal{G}_\delta = \bigcup_{S_1}\left\{\sum_{i=1}^n \chi_i^2(2L)\ \leq 2nL(1+\delta)\right\}$，其中 $\delta\geq 0$。类似于式 (20)，我们可以将 $\mathbb{P}\left[\mathcal{G}_{\omega,\nu}^c\right]$ 界定为

$$\mathbb{P}\left[\mathcal{G}_{\omega,\nu}^c\right] \leq \min_{\delta\geq 0}\left\{\mathbb{P}\left[\mathcal{G}_{\omega,\nu}^c\cap\mathcal{G}_\delta\right] + \mathbb{P}\left[\mathcal{G}_\delta^c\right]\right\}. \quad (27)$$

Here, $\mathbb{P}[\mathcal{G}_\delta^c] = 1 - \frac{\gamma(nL,nL(1+\delta))}{\Gamma(nL)}$ and $\mathbb{P}\left[\mathcal{G}_{\omega,\nu}^c\cap\mathcal{G}_\delta\right]$ is bounded as

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\mathcal{G}_{\omega,\nu}^c\cap\mathcal{G}_\delta\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\bigcup_{S_1}\left\{\sum\nolimits_{l=1}^L\left(\mathbf{y}_l^H\left(\mathbf{F}^{-1} - \omega\mathbf{F}_1^{-1}\right)\mathbf{y}_l\right) > b\right\}\cap\mathcal{G}_\delta\right] \quad (28)\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[\bigcup_{S_1}\left\{\sum_{i=1}^n(1-\omega-\omega\lambda_i)\frac{\chi_i^2(2L)}{2} > b\right\}\cap\mathcal{G}_\delta\middle|\mathbf{C}\right]\right] \quad (29)\\
&\leq \sum_{S_1}\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^m\frac{\lambda_i\chi_i^2(2L)}{2} < \frac{nL(1+\delta)(1-\omega)-b}{\omega}\middle|\mathbf{C}\right]\right] \quad (30)\\
&\leq \binom{K_a}{t}\mathbb{E}\left[\frac{\gamma(Lm,c_\delta)}{\Gamma(Lm)}\right], \quad (31)
\end{aligned}$$

其中 $b = L(\omega\ln|\mathbf{F}_1| - \ln|\mathbf{F}| + n\nu)$；式 (29) 成立是因为，在给定 C 且 $\tilde{}$ $\mathbf{y}_l \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathcal{CN}(\mathbf{0},\mathbf{I}_n)$ 的条件下，对于 $l\ \in\ [L]$，$\mathbf{y}_l = \mathbf{F}^{\frac{1}{2}}\tilde{}\mathbf{y}_{l\ \text{i.i.d.}}\ \sim\mathcal{CN}(\mathbf{0},\mathbf{F})$；式 (30) 由并集界和不等式 $\mathbb{P}[\{Z\geq 0\}\cap\{W\geq 0\}] \leq \mathbb{P}[uZ+rW\geq 0]$（对于 u、$r\geq 0$）得出；式 (31) 根据 [8, 式 (4.6a.17)] 得出。将式 (31) 代入式 (27)，我们得到关于 $\mathbb{P}\left[\mathcal{G}_{\omega,\nu}^c\right]$ 的上界 $q_{2,\ t}(\omega,\nu)$。结合式 (20) 和式 (25)，即可得到式 (8) 中的 p_t。

■

[5] 中建立的标度律为可能的工作区间提供了一些见解，但无法刻画实际无协调随机接入系统的具体能量效率。为此，我们在定理1中推导了最低所需每比特能量的有限码长可达界。其中一个严重问题是，错误事件是许多事件的并集。为了解决这一问题，我们在引理1中利用Fano“良好区域”技术来界定 $\mathbb{P}[\mathcal{G}_e]$ 在(20)中的概率，其中“良好区域”$\mathcal{R}_{t,\ S_1}$ 按照(21)进行选择。对于落入该区域的接收信号，与实际发送码字对应的(19)中的代价函数较小，因此，根据(18)中的解码原则，正确解码的可能性更高，而不是输出一组未发送的码字。此外，我们的“良好区域”由 ω和 ν参数化。通过调整这两个参数，我们可以灵活地调节该区域的形状，从而找到更紧的可达界。

在MIMO信道中，由于跨越 L 根天线接收到的信号具有相同的稀疏支撑，因此应对这些信号进行联合处理。然而，由于分析时需要考虑由 L 个接收信号张成的子空间与由 K_a 个码字张成的子空间之间的夹角，因此难以在 [3] 中应用投影解码器来解决这一问题。作为替代方案，我们采用最大似然解码器。其代价函数（19）易于处理，但需要预先知道衰落分布。

除了可达界之外，我们还在定理2中给出了最低所需每比特能量的逆向界。

定理2：第二节所述URA模型的最低所需每比特能量可下界为

$$E_b^*(n,M,\epsilon) \geq \inf\frac{nP}{J}. \quad (32)$$

此处，inf 取遍所有满足以下条件的 $P>0$

$$J - \log_2 K_a \leq -\log_2\mathbb{P}\left[\chi^2(2L) \geq (1+(n+1)P)r\right], \quad (33)$$

其中， r 是以下方程的解

$$\mathbb{P}\left[\chi^2(2L) \le r\right] = \epsilon. \tag{34}$$

证明：在 [9, 定理 3], 中，我们针对信道状态信息未知的多输入多输出信道中的单用户情形给出了逆向界。本部分假设已知$K_a - 1$ 活跃用户的发送码字及其信道状态信息，以推导逆向界；该界可基于 [9, 定理 3] 并作如下修改得到：1）为简单起见，我们选择辅助分布 $\prod_{l=1}^{L} \mathcal{CN}(0, \mathrm{I}_{n+1})$；2）我们将$J$ 中 [9, 定理 3] 的 $J -$ 替换为$_2\, K_a \log_2 K_a$ ，原因如下。由于所有用户共享一个公共码本，可能发生消息冲突；因此，在已知的 $K_a - 1$活跃用户的发送消息中，不同消息的数量 B 满足 $1 \le B \le K_a - 1$。所以，解码器旨在输出另外 $K_a - B$ 个可能的消息，以恢复剩余活跃用户发送的消息。为了推导逆向界，我们将列表大小从 $K_a - B$放宽为 K_a，每用户错误概率变为 $\mathbb{P}[W_1 \notin \hat{\mathcal{W}}]$。利用列表解码的元逆向界变体 [3, 定理 4.1], ，我们将 [9, 定理 3] 中的结果修改为将 J 替换成 $\log_2 M/K_a$。

■

定理2适用于所有码，但其推导基于已知 $K_a - 1$ 活跃用户发送的消息及其信道状态信息。当 K_a 较大时，该界可能较松，因为此时多用户干扰（MUI）是一个显著的瓶颈，而且难以获取信道状态信息。相比之下，定理 3考虑的是信道状态信息和发送消息均未知的情况。由于分析起来较为棘手，我们采用了更强的高斯码本假设，这使得逆向结果退化为较弱的系综逆向界，并引出了一个尚未解决的问题：在对码本采用更一般假设的情况下，能否推导出紧的逆向界?

定理 3：对于第二节所述的无协调随机接入模型，假设码本具有独立同分布的高斯元素，且$M > 2K_a$和 $\epsilon \le 1 - K_a/M$，则每比特所需的最小能量可下界为

$$E_b^*(n, M, \epsilon) \ge \inf \frac{nP}{J}. \tag{35}$$

这里，inf 是对所有满足以下条件的 $P > 0$ 取下确界

$$\begin{aligned} &nL\log_2(1 + K_a P) - Lp_{no}\mathbb{E}\left[\log_2\left|\mathbf{I}_n + \mathbf{X}_{K_a}\mathbf{X}_{K_a}^H\right|\right] \\ &\ge (1-\epsilon)\, K_a\,(J - \log_2 K_a) - K_a h_2(\epsilon), \end{aligned} \tag{36}$$

其中，$p_{no} = 1 - \binom{K_a}{2}/M$ 且 $\mathbf{X}_{K_a} \in \mathbb{C}^{n\times K_a}$ 的元素服从独立同分布$\mathcal{CN}(0, P)$。

证明：不失一般性，假设活跃用户集合为 $[K_a]$。设 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times M}$ 为一个码本矩阵。记 $\bar{\mathbf{X}}_{K_a M} = [\ \cdots\ ] \in \mathbb{C}^{n\times K_a M}$ $\bar{\ } = \{\bar{\ }_{K_a M} \cdots \bar{\ }_{K_a M}\} \in$ X、X 和 $\mathbb{C}^{nL\times K_a ML}$ $\bar{\ }_l$ $K_a M \times K_a M$ X diag X , , X。设 H 为一个分块对角矩阵，其第 k 个块是一个对角 $M \times M$矩阵，对角元素均为 $h_{k,l}$。令 $\bar{\mathbf{H}} = \left[\bar{\mathbf{H}}_1, \ldots\ldots, \bar{\mathbf{H}}_L\right]^T$。向量 $\bar{\boldsymbol{\beta}} \in \{0,1\}^{K_a M}$包含 K_a 个块，其中第 k 个块记为 $\bar{\boldsymbol{\beta}}_k$，其大小为 M，且包含一个 1。于是，我们有

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{H}}\bar{\boldsymbol{\beta}} + \bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}^{nL\times 1}, \tag{37}$$

其中 $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}^{nL\times 1}$ 的每个元素均独立同分布于 $\mathcal{CN}(0, 1)$。

令 $P_{e,\,k}^{de} = \mathbb{P}[W_k \notin \hat{\mathcal{W}}]$ 以及 $P_e^{de} = \frac{1}{K_a}\sum_{k\in[K_a]} P_{e,\,k}^{de}$。由于 $P_e^{de} \le P_e$，基于约束 $P_e^{de} \le \epsilon$的逆向界对于约束 (4) 也成立。应用 [3, 式 (61) 和式 (63)] （其中式 (61) 由 Fano不等式 [7]推出），并允许其中的 S_2 为 $[K_a]$，且 $M > 2K_a$, 可得

$$\log_2\frac{M}{K_a} - h_2\left(P_e^{de}\right) - P_e^{de}\log_2\left(\frac{M}{K_a} - 1\right) \le \frac{I\left(\mathcal{W}_{[K_a]}; \hat{\mathcal{W}}\,|\,\bar{\mathbf{X}}\right)}{K_a}. \tag{38}$$

假设 $P_e^{de} \le \epsilon \le 1 - K_a/M$，我们有

$$P_e^{de}\log_2\left(\frac{M}{K_a} - 1\right) + h_2\left(P_e^{de}\right) \le \epsilon\log_2\frac{M}{K_a} + h_2(\epsilon). \tag{39}$$

(38) 中的互信息有如下界 [10, 式 (149)]

$$I\left(\mathcal{W}_{[K_a]}; \hat{\mathcal{W}}\,|\,\bar{\mathbf{X}}\right) \le I\left(\bar{\mathbf{H}}\bar{\boldsymbol{\beta}}; \bar{\mathbf{y}}\,|\,\bar{\mathbf{X}}\right) - I\left(\bar{\mathbf{H}}\bar{\boldsymbol{\beta}}; \bar{\mathbf{y}}\,|\,\bar{\boldsymbol{\beta}}, \bar{\mathbf{X}}\right). \tag{40}$$

于是，我们可以得到

$$\begin{aligned} I\left(\bar{\mathbf{H}}\bar{\boldsymbol{\beta}}; \bar{\mathbf{y}}\,|\,\bar{\mathbf{X}}\right) &\le L\mathbb{E}\left[\log_2\left|\mathbf{I}_n + \frac{1}{M}\bar{\mathbf{X}}_{K_a M}\bar{\mathbf{X}}_{K_a M}^H\right|\right] &(41)\\ &\le nL\log_2(1 + K_a P), &(42)\end{aligned}$$

其中，(41) 来自不等式 [10, 式 (151)], 而 (42) 是在假设码本中的元素独立同分布且均值为 0、方差为 P 的情况下，由 Jensen 不等式 得到的。项 $I\left(\bar{\ }\mathrm{H}\bar{\beta};\ \bar{\ }\mathrm{y}\,|\,\bar{\beta},\ \bar{\ }\mathrm{X}\right)$ 可如下界定：

$$\begin{aligned} I\left(\bar{\mathbf{H}}\bar{\boldsymbol{\beta}}; \bar{\mathbf{y}}\,|\,\bar{\boldsymbol{\beta}}, \bar{\mathbf{X}}\right) &\ge L\mathbb{E}\left[\log_2\left|\mathbf{I}_n + \mathbf{X}\sum\nolimits_{k=1}^{K_a}\mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{\beta}}_k)\mathbf{X}^H\right|\right] &(43)\\ &\ge p_{no}\,L\,\mathbb{E}\left[\log_2\left|\mathbf{I}_n + \mathbf{X}_{K_a}\mathbf{X}_{K_a}^H\right|\right], &(44)\end{aligned}$$

其中， p_{no} 表示没有发生碰撞的概率，X_{K_a}包含由 K_a 个未发生碰撞的活跃用户发送的码字。这里，(44 $\mathbb{E}\left[f\left(\quad\bar{\boldsymbol{\beta}}\right)\right]$ =) 成立 $p_{no}\mathbb{E}\left[f_{\text{no-col}}\left(\quad\bar{\boldsymbol{\beta}}\right)\right] + \ 1 - p_{no}\ \mathbb{E}\left[f_{\text{col}}\left(\quad\bar{\boldsymbol{\beta}}\right)\right]$ 是因为 X X ( ) X，而 $f_{\text{no-col}}\left(\mathrm{X}\ \bar{\boldsymbol{\beta}}\right) = \log_2\left|\mathbf{I}_n + \mathrm{X}_{K_a}\mathrm{X}_{K_a}^H\right|$ 的期望可在高斯码本假设下计算。由此完成定理 3 的证明。

■

IV. 数值结果

本节对推导出的界进行数值评估。在图 1 中，我们考虑如下场景：$n = 3200$ $J = 100$ 比特、 $L = 50$和 $\epsilon \in \{0.025, 0.1\}$。在此情况下，我们比较了我们得到的可达界和逆向界，以及 [5], [11]–[13], 中提出的方案在不同活跃用户数量下的最低所需每比特能量。接下来，我们说明每条曲线是如何得到的：

1) 定理1中的可达界通过蒙特卡洛方法生成10000个样本来计算其中的期望。2) 分别绘制定理2和定理 3中的逆定理界。其中的期望通过蒙特卡洛方法，使用500个样本进行计算。3) 为了评估 [5], 中提出的基于协方差的方案，我们采用包含16个时隙的帧，每个时隙有200个维度。二进制子块长度为15，树码的奇偶校验配置为 $[0, 7, 8, 8, 9, \ldots, 9, 13, 14]$。我们计算漏检概率

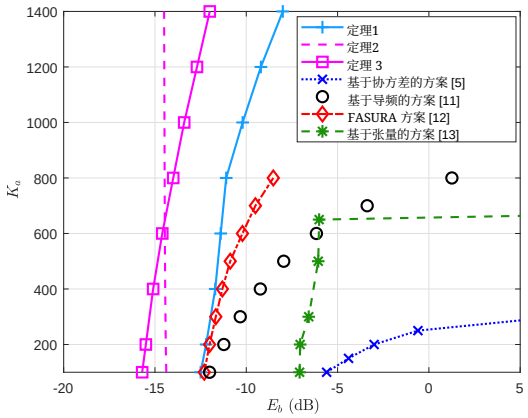

图 1：无协调随机接入中活跃用户数与每比特能量的关系，其中 $n = 3200$、$J = 100$ 比特、$L = 50$、$\epsilon = 0.1$ 对应基于张量的方案，而其他情况对应 $\epsilon = 0.025$ 。

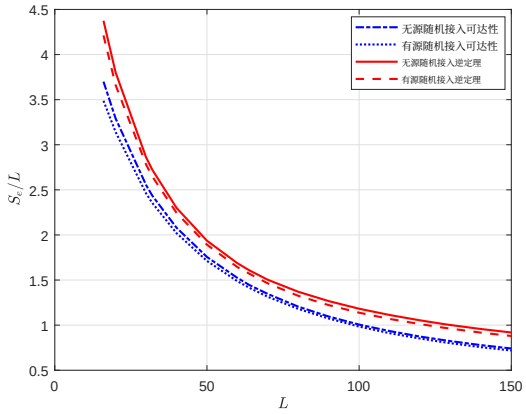

图 2：无协调随机接入和有源随机接入（$K_a/K = 0.4$）的每根天线频谱效率与基站天线数量的关系，其中 n =1000、$J = 100$ 比特、$E_b = 16$ dB，且 $\epsilon = 0.1$。

和虚警概率的平均值，即 $P_e = \left(p^{md} + p^{fa}\right)/2$，并绘制满足 $P_e \leq \epsilon$时的最低所需每比特能量。4) 基于导频的方案按照 [11, 图 7]进行评估。数据分为两部分，分别为16比特和84比特。第一部分编码为长度为1152的“导频”；第二部分使用长度为2048的极化码编码。错误要求与基于协方差的方案相同。5) FASURA方案按照 [12, 图 4]进行评估。与基于导频的方案类似， [11], 中该方案将消息分为两部分。与 [11] 不同之处在于使用扩频序列、检测活跃序列以及信道/符号估计技术。6) 对 [13] 中提出的基于张量的方案进行评估，采用张量签名(8, 5, 5, 4, 4)、外层BCH码以及更高的错误要求 $\epsilon = 0.1$。

正如前文所预测的，我们可以从图 1 观察到，在较小的 K_a 范围内，定理2中的逆向界占主导地位；而在其他情况下，较弱的定理 3 中的系综界占主导地位。数值结果验证了我们界的紧致性：在我们的研究范围内，可达界与（占主导地位的）逆定理界之间的差距小于 5 dB。在多输入多输出信道中，当 K_a 较小时，所需的 E_b 几乎为常数，这与单接收天线场景 [2], [3]中几乎完美的多用户干扰消除相符。此外，我们的界为评估实际方案提供了理论基准。具体而言，在 [5], [11]–[13],提出的方案中， [12] 的 FASURA 方案表现最佳，但在较大的 K_a 范围内，它与我们的界之间仍存在较大差距。如何缩小这一差距是未来值得研究的课题。

图 2 比较了不同基站天线数量下，URA 的可达界（定理 1 中）和逆向界（定理 3 中）对应的每根天线最大频谱效率，其中 $n = 1000$ $J = 100$ 比特、$E_b = 16$ dB，且 $\epsilon = 0.1$。由于 n 和 J 均为固定值，图 2 展示了可靠服务的活跃用户数量随基站天线数量变化的界限。我们还展示了理论上的 SRA 的界限，见 [14]。与 SRA 相比，URA 范式可实现更高的频谱效率，因为在这种情况下，所有用户共享一个公共码本，且用于查找发送消息的搜索空间更小。对于 SRA 和 URA 两种范式，总频谱效率 S_e 随 L增加，而每根天线的频谱效率 S_e/L则因信道不确定性增加而逐渐降低。

V. 结论

本文研究了具有严格时延和能量约束的 MIMO准静态瑞利衰落信道中的大规模无源随机接入问题。具体而言，在 PUPE约束下，我们推导了一个可达界、一个一般逆向界，以及一个较弱的系综逆向界。数值评估验证了这些结果的紧致性，并表明一些现有方案与我们的理论界之间存在较大差距，尤其是在用户数量较多时。此外，我们还观察到，与有源随机接入范式相比，无协调随机接入范式能够实现更高的频谱效率。

参考文献

[1] Y. Wu、X. Gao、S. Zhou、W. Yang、Y. Polyanskiy 和 G. Caire，“面向未来无线通信系统的大规模接入”，IEEE Wireless Commun.，第27卷，第4期，第148–156页，2010年8月。[2] Y. Polyanskiy，“对大规模随机接入的展望”，载于 IEEE 信息论国际研讨会（ISIT）论文集，德国亚琛，2017年6月，第2523–2527页。[3] S. S. Kowshik、K. Andreev、A. Frolov 和 Y. Polyanskiy，“无线回程中能量高效的编码随机接入”，IEEE Trans. Commun.，第68卷，第8期，第4694–4708页，2020年8月。[4] K.-H. Ngo、A. Lancho、G. Durisi 和 A. Graell i Amat，“具有随机用户活动的非调度多址接入”，2022年2月，arXiv: 2202 06365 [ ] 2202 06365 。[5] 在线。网址：https://arxiv.org/abs/。A. Fengler 、 S. Haghighatshoar 、P. Jung 和 G. Caire，“采用大规模MIMO接收机的非贝叶斯活动检测、大尺度衰落系数估计和非调度随机接入”，IEEE Trans. Inf. Theory，第67卷，第5期，第2925–2951页，2021年5月。[6] R. M. Fano，《信息传输》。由 MIT出版社和约翰·威立父子出版公司联合出版，1961年。[7] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论基础》，第2版。美国新泽西州霍博肯：约翰·威立父子出版公司，2006年。

[8] A. M. Mathai 和 B. P. Serge，《随机变量的二次型：理论与应用》。美国纽约州纽约市：Marcel Dekker，1992年。[9] J. ¨Ostman、W. Yang、G. Durisi 和 T. Koch，“有限码长下的分集与复用”，载于 IEEE 无线通信系统国际研讨会（ISWCS）论文集，西班牙巴塞罗那，2014年8月，第702–706页。[10] S. S. Kowshik 和 Y. Polyanskiy，“具有有限载荷和衰落的多用户MAC的基本极限”，IEEE Trans. Inf. Theory，第67卷，第9期，第5853–5884页，2021年9月。[11] A. Fengler、O. Musa、P. Jung 和 G. Caire，“采用大规模MIMO接收机、干扰消除和功率控制的基于导频的无源随机接入”，IEEE J. Sel. Areas Commun.，第40卷，第5期，第1522–1534页，2022年5月。[12] M. Gkagkos、K. R. Narayanan、J. -F. Chamberland 和 C. N. Georghi- ades，“FASURA：一种适用于准静态大规模MIMO无源随机接入信道的方案”，载于 IEEE 无线通信高级信号处理国际研讨会（SPAWC）论文集，芬兰奥卢，2022年7月。[13] A. Decurninge、I. Land 和 M. Guillaud，“面向无源大规模随机接入的基于张量的调制”，IEEE Wireless Commun. Lett.，第10卷，第3期，第552–556页，2021年3月。[14] J. Gao、Y. Wu、S. Shao、W. Yang 和 H. V. Poor，“有限码长下MIMO准静态瑞利衰落信道中的大规模随机接入能量效率”，即将在 IEEE Trans. Inf. Theory 发表，2022年11月，arXiv:2210.11970。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2210.11970