arXiv:2302.02052v1 [math.OC] 4 Feb 2023

神经形态成像中的双层逆问题

HARBIR ANTIL 和 DAVID SAYRE

Abstract. 事件相机（或神经形态相机）是一种新型仿生传感器，能够异步记录每个像素处基于光强变化的数据。它们具有微秒量级的时间分辨率。这对于包含快速移动物体的场景很有用，因为这类物体可能会导致传统相机产生运动模糊；传统相机会同步记录每个像素在曝光时间内的平均光强。本文提出了一种用于神经形态成像的双层逆问题框架，并证明了逆问题解的存在性。针对这一非凸问题，在特殊情况下推导了二阶充分条件，并进一步推导出一种二阶牛顿型求解器来求解该问题。本文通过若干示例展示了该方法的有效性。

1. Introduction

事件相机（神经形态相机）是一种新型仿生传感器，能够异步记录基于每个像素处光强变化的数据 [9]。如果某个像素处的光强变化超过预设阈值，该像素就会记录一个事件。因此，如果场景没有变化，无论是物体移动还是光源变亮或变暗，都不会记录事件。相反，如果场景因相机移动或场景中物体移动而发生动态变化，事件相机的每个像素都会以微秒量级的时间分辨率记录强度变化 [9]。这种事件记录方式会在时间维度上为每个像素生成非冗余事件流 [16]。这种数据流对于包含快速移动物体的场景特别有用，因为这类物体可能会导致传统相机产生运动模糊；传统相机会同步记录每个像素在曝光时间内的平均光强 [13]。图 1 展示了传统相机与事件相机之间差异的示意图。

先前的工作 [13], 提出了基于事件的双重积分（EDI）和多重基于事件的双重积分（mEDI）算法，以解决潜在逆问题中的运动模糊。EDI模型利用一幅模糊的标准相机图像及其相关联的事件数据，通过能量最小化过程生成一幅或多幅清晰图像。作为EDI模型的扩展，mEDI模型利用多幅图像与事件数据相结合来生成去模糊图像。EDI和mEDI模型是对 [16] 工作的扩展，该工作最初引入了连续时间模型。尽管这些算法相较于早期工作取得了重大进展，但关于以下问题仍存在疑问：

日期：2023年2月7日。2010 数学主题分类。65K05, 90C26, 90C46, 49J20。关键词和短语。双层优化、神经形态成像、解的存在性、二阶充分条件。本研究部分获得美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号为 DMS-2110263、DMS-1913004；以及空军科学研究办公室（AFOSR）资助，奖励编号为 FA9550-22-1-0248 和 FA9550-19-1-0036。

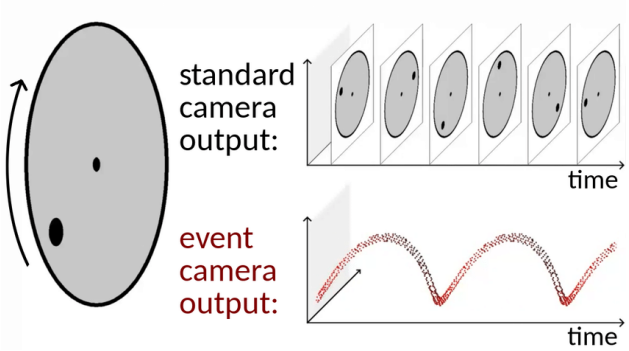

FIGURE 1. 标准帧式相机和事件相机面对旋转圆盘上的黑点时的输出对比。标准相机以固定速率输出帧，因此在场景没有运动时会发送冗余信息 [10]。

这些模型在各种情境下的有效性（见下文），在哪些情况下解存- 在，以及为了找到此类解应采用何种优化过程。本文通过扩展模型并提供一个双层逆问题框架，为先前的方法提供数学基础及进一步扩展。事- 实上，如下所示，EDI和mEDI模型对应于图像去模糊中的逆问题 [3, 4]。具体而言，

(a) 我们提出一个双层优化问题，使得能够同时对所需帧数进行优化。我们还说明，该优化问题确实是一个逆问题。因此，我们交替使用“优化”和“逆问题”这两个术语。(b) 我们证明了该问题解的存在性。在一定条件下，我们推导出二阶充分条件，并证明这些非凸问题的解在局部唯一。(c) 我们开发了一套基于二阶方法、可全面实现的框架。多个数值示例展示了所提方法的优势。

为求完整，我们强调，在传统成像中通过双层方法搜索超参数并非新鲜事，参见例如 [2, 8]。然而，本文所考虑的问题本身就是双层问题，无需搜索超参数。

概要： 本文其余部分安排如下。第2节介绍一些符号和预备结果。第2.1节讨论事件相机的基础知识。第2.3节着重介绍 [13] 中的现有模型，这些模型为第3节提出的基于双层优化的变分模型奠定了基础。定理 3.1证明了所提优化问题解的存在性。此外，定理 3.5证明了约化泛函的局部凸性。第4节首先介绍如何为算法准备数据，随后讨论实现细节。问题本身采用基于牛顿法的二阶方法求解。最后，第5节给出若干数值示例。

2. Notation and Preliminaries

令 n_t 表示图像数量， $n_x \times n_y$ 表示每幅图像的像素数量。我们用 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_t \times n_x \times n_y}$ 表示一个张量。我们使用向量

$$\boldsymbol{u}_{xy} \in \mathbb{R}^{n_t},$$

表示 $\boldsymbol{U}$ 在所有时刻的 (x, y) 像素值。此外，我们使用矩阵

$$\boldsymbol{u}^i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}.$$

表示固定时刻 $i \in \{1, \dots, n_t\}$ 大小为 $\mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ 的图像。我们用标量

$$\boldsymbol{u}^i_{xy} \in \mathbb{R}$$

表示时刻 $i \in \{1, \dots, n_t\}$ 像素位置 (x, y) 处的值。图2展示了图形表示。最后，给定某个 $\eta \in \mathbb{N}$ 对应的量 $\boldsymbol{u}_{xy}$ 和 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n_t \times \eta}$，我们将运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 定义为:

$$\langle \boldsymbol{u}_{xy}, \boldsymbol{M} \rangle := (\boldsymbol{u}_{xy})^\top \boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^\eta.$$

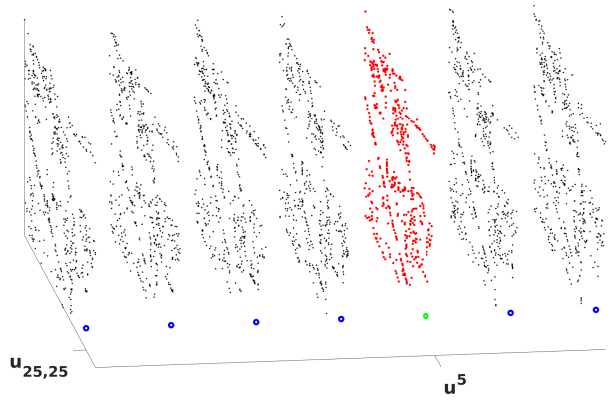

Figure 2. 该图展示了多幅图像，其中一幅例如是 $\boldsymbol{u}^i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$，并以红色标记。圆圈表示向量 $\boldsymbol{u}_{xy} \in \mathbb{R}^{n_t}$，并以蓝色标记。绿色圆圈表示 $\boldsymbol{u}^i$ 与 $\boldsymbol{u}_{xy}$ 之间存在重叠。

本节余下部分的安排如下。首先，我们在第2.1节讨论神经形态相机的基本工作原理。[13] 中所介绍算法的主要思想将在第2.3节阐述。我们还将简要讨论这种方法的一些潜在局限，并由此引出第3节中的算法。

2.1. **神经形态（事件）相机。**

神经形态相机基础。 神经形态相机由相互独立的像素组成，可在环境中检测到光强变化时即时响应。光强以 $\mathcal{O}(\mu s)$ 进行采样；若光强超过预设的硬件定义阈值 c，便会记录事件。我们用 $\boldsymbol{q}_{xy}^{s} \in \mathbb{R}$ 表示时刻 s 像素位置（x， y）处的瞬时光强。当位于（x， y）的像素在时刻 s 检测到的光强超过阈值时，便会记录一个事件。随后，位于像素位置（x，y）处的参考强度 $\boldsymbol{q}_{xy}^{s_{ref}}$ 会更新。由于采样速率高且相机像素彼此独立，神经形态相机较不易受到曝光问题和图像模糊的影响。图1展示了传统相机与事件相机记录的数据之间的差异。

数据表示。 事件相机在某个时间区间 $\mathcal{I}$ 内的输出形式为 $(s,\ x,\ y,\ p)$，定义如下：

- $s \in \mathcal{I} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\colon\ s_1 < s_2 < \cdots < s_n\}$，其中 $\mathcal{I}$ 表示曝光区间，每个 s_j 表示事件发生时的一个离散时间，而 n 表示在区间 $\mathcal{I}$ 内记录的事件总数。在讨论涉及多幅图像的方法时，我们将第 $i\text{-}th$ 幅图像的曝光区间记为 $\mathcal{I}_i$。我们还将与每幅图像 i 相关联的事件集合记为 $\{s_j^i\}_{j=1}^{n_i}$。采用此记号，有 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n_t$，以及 $j = 1,\ \ldots\ldots,\ n_i$，其中 n_i 表示与图像 i 相关联的事件总数。
- $x_{\boldsymbol{s_j}}\ y$ 表示像素坐标。
- $p_{x,\ y}\colon = \begin{cases} 1, & \log\left(\frac{\boldsymbol{q}_{xy}^{s_j}}{\boldsymbol{q}_{xy}^{s_{ref}}}\right) \geq c \\ -1, & \log\left(\frac{\boldsymbol{q}_{xy}^{s_j}}{\boldsymbol{q}_{xy}^{s_{ref}}}\right) \leq -c \end{cases}$ 是事件的极性。光强增加超过阈值 $c > 0$ 时，我们将其视为极性 1；强度下降则视为极性转变为 -1。如果 $p_{x,\ y}^{s_j} \in (-c,\ c)$，则不会记录事件。

我们可以根据以下定义，将这些事件重新表示为一个数据立方体：

$$\boldsymbol{EC}_{xy}^{s_j} = p_{x,y}^{s_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

由此得到一个稀疏三维矩阵，其元素为 0，1，-1。二维和三维的数据立方体示例见图5。以这种方式表示数据，我们便能逐像素跟踪强度随时间的变化。

2.2. 图像去模糊中的逆问题。图像去模糊是逆问题的经典示例，其目标是从退化的模糊观测中重建未知的原始图像。在图像去模糊中，退化过程可以建模为原始图像与模糊核之间的相互作用，模糊核表示由运动等各种因素造成的模糊 [19, 20]。

在图像去模糊领域，根据已知模糊核 [1, 15, 17, 18, 19] 信息量的多少，可将问题分为盲和非盲两类。在非盲情况下，已知模糊核，因此逆问题较为简单，尽管它仍然是不适定的 [17, 18]。在盲情况下，没有关于模糊核的信息，因此去模糊问题更具挑战性，因为除了原始图像之外，还必须从退化图像中估计模糊核 [15, 19]。半盲情况是一种特殊的

盲图像去模糊问题，即已知部分而非全部模糊核信息 [5, 12, 14]。本项目所研究的问题属于半盲类型。

2.3. 现有模型、算法及其局限。 本文讨论的方法受 [13]启发。该文章 [13] 旨在利用基于事件的双重积分（EDI）和多事件基于事件的双重积分（mEDI）模型，求得潜在清晰图像。下面我们将简要讨论这些模型，随后介绍我们提出的新模型。

***EDI*模型。** 在 [13], 中，使用第2.1节所述的离散事件，为每个（x， y）像素位置生成一个连续函数 $\boldsymbol{e}_{xy}$。具体做法是：在每个 s_j处生成一系列连续单位隆起函数： $\phi_{s_j}(t)$。然后我们可以将 $\boldsymbol{e}_{xy}$ 定义为 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{e}_{xy}(t) := \sum_{s_j \in \mathcal{I}} \boldsymbol{EC}_{xy}^{s_j} \cdot \phi_{s_j}(t) \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

下面我们通过以下事件序列，以图示方式说明如何为单个像素构建此函数:

$$[1, 0, 1, -1, 1].$$

在图3中，我们可以看到函数 $\boldsymbol{e}_{xy}$ 叠加在事件棒状图上 .

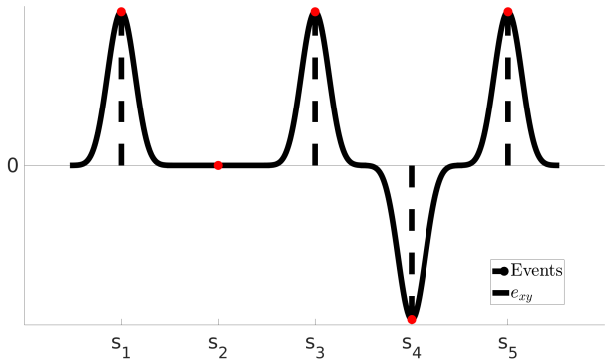

FIGURE 3. 在此图中，实线表示函数 $\boldsymbol{e}_{xy}$ 叠加在棒状图（虚线）上，后者表示一系列记录到的事件。红点用于突出显示这些事件。

根据 2.2 节，我们将从感兴趣的时刻 t_i 到任意时刻 t 的“事件总和”定义为:

$$\boldsymbol{E}_{xy}^{i}(t, t_i) = \int_{t_i}^{t} \boldsymbol{e}_{xy}(r)\, dr, \tag{2.3}$$

其中，$\boldsymbol{E}_{xy}^{i}(t,\ t_i) \in \mathbb{R}$ 对应于一个像素，而 $\boldsymbol{E}^{i}(t,\ t_i) = \{\boldsymbol{E}_{xy}^{i}(t,\ t_i)\}_{xy} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ 由所有像素组成。我们注意到， t_i、 $i = 1$、.....、 n_t 是手动选择的，表示我们希望生成图像的时间。在实践中，我们将设置每个 t_i ，使其对应于模型中所使用的标准相机图像的时间戳。为方便起见，我们

将省略 t_i 在 $\boldsymbol{E}^i_{xy}(t,\ t_i)$中的表示，除非为清晰起见需要保留。引入一个标量变量 z ，即可得到EDI模型:

$$\boldsymbol{B}^i_{xy} = \frac{1}{|\mathcal{I}_i|}\int_{t_i-|\mathcal{I}_i|/2}^{t_i+|\mathcal{I}_i|/2} \boldsymbol{L}^i_{xy}\cdot \exp\big(z\cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\big)dt\,. \tag{2.4}$$

其中， $\boldsymbol{B}^i_{xy}\in\mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{B}^i=\{\boldsymbol{B}^i_{xy}\}_{xy}\in\mathbb{R}^{n_x\times n_y}$ 是标准相机图像。此外，$\boldsymbol{L}^i_{xy}\in\mathbb{R}$ 是位置（$x,\ y$）处未模糊图像的像素值，而 $|\mathcal{I}_i|$ 是该 i^{th} 图像的曝光时间。我们注意到， $\boldsymbol{B}^i_{xy}$ 和 $\boldsymbol{L}^i_{xy}$ 中的上标 i 仅仅是符号上的占位符，因为EDI模型一次只考虑一幅图像。对（2.4）取对数并重新整理各项，可得:

$$\boldsymbol{v}^i_{xy} = \boldsymbol{d}^i_{xy} - \boldsymbol{g}^i_{xy}(z), \tag{2.5}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^i_{xy} &= \log(\boldsymbol{L}^i_{xy}),\quad \boldsymbol{d}^i_{xy} = \log \boldsymbol{B}^i_{xy},\\ \boldsymbol{g}^i_{xy}(z) &= \log\left(\frac{1}{|\mathcal{I}_i|}\int_{t_i-|\mathcal{I}_i|/2}^{t_i+|\mathcal{I}_i|/2}\exp\big(z\cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\big)dt\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

（2.5）中的公式揭示了EDI模型与图像去模糊中的其他半盲逆问题之间的关联。其中，$\boldsymbol{B^i}$ 是我们的模糊图像， $\boldsymbol{L^i}$ 是我们的潜在未模糊图像，而 $\boldsymbol{g^i}$ 是我们的核函数。如 [1, 3, 4, 6, 7] 所示，这种公式在许多逆问题中都很常见。我们注意到，EDI/mEDI模型属于第2.2节所述的半盲逆问题类别，因为核函数 $\boldsymbol{g^i}$在参数 z确定后即可确定。

mEDI 模型。 如果考虑两个潜在图像 $\boldsymbol{v}^i$ 和 $\boldsymbol{v}^{i+1}$，我们知道事件数据会提供这两幅图像之间每个像素发生的变化。我们可以用数学方式将这种变化描述为 $\int_{t_i}^{t_{i+1}}\boldsymbol{e}_{xy}(s)ds$ ，其中 $\boldsymbol{e}_{xy}$ 由式 (2.2) 给出， t_i 是用户选定的感兴趣时刻。引入阈值变量 z 后，我们可以列出以下方程

$$\boldsymbol{v}^{i+1}_{xy} - \boldsymbol{v}^i_{xy} = z\int_{t_i}^{t_{i+1}}\boldsymbol{e}_{xy}(s)ds =: \boldsymbol{b}^i_{xy}(z). \tag{2.7}$$

结合 (2.5) 和 (2.7)，可得以下方程组:

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
-1 & 1 & & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & & -1 & 1 & & \\
 & & & & & -1 & 1 & \\
\hline
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 &
\end{array}\right)\boldsymbol{v}_{xy} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_{xy}\\ \boldsymbol{d}_{xy}-\boldsymbol{g}_{xy}\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

注意，(2.8) 给出了 [13] 所描述的 mEDI 模型。(2.8) 中子矩阵上半部分的大小为 $\mathbb{R}^{(n_t-1)\times n_t}$，下半部分矩阵的大小为 $\mathbb{R}^{n_t\times n_t}$。

*mEDI*模型——针对 z 进行优化。对于感兴趣图像中的每个像素（x，y），通过求解以下最小化问题，得到变量 z i:

$$\min_z \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_{xy}^i(z)+\boldsymbol{g}_{xy}^i(z)-\boldsymbol{d}_{xy}^i\|_2^2. \tag{2.9}$$

这里，$\boldsymbol{v}_{xy}$、$\boldsymbol{d}_{xy}^i$和 $\boldsymbol{g}_{xy}^i$（z）如（2.6）中所述。其求解方法请参见 [13]。请注意，（2.7）并未用作最小化问题（2.9）的约束条件，而是利用（2.9）生成图像重建结果。

*mEDI*模型和*EDI*模型的局限性。尽管mEDI模型使用多帧来准确表示去模糊图像，但该模型仍存在一些局限性。

（a）对于单个场景中光强变化较大的图像，该模型的性能可能会下降。例如，在动态范围很大的场景中，明亮房间里出现非常暗的物体。在这些情况下，我们会看到“阴影”效应，即阴影出现在多帧中。具体示例请参见第5节的5.3节。

(b) 引入的优化问题 (2.9) 只寻求一次优化一幅图像中的像素，并忽略了约束条件 (2.7)。随后使用 (2.7) 以相同的 z 值重建多幅图像。

(c) 回顾 2.7，$\boldsymbol{b}_{xy}^i := z\int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{e}_{xy}(s)\ ds$。该定义不包含来自标准图像 $\boldsymbol{B}^i$ 的任何信息。因此，mEDI模型并不适合生成涵盖多个标准图像的时间跨度内的图像重建。

3. Proposed Model and Algorithm

3.1. 模型。对于每个像素 (x，y)，我们考虑以下双层逆问题

$$\min_{\boldsymbol{z}_{xy}} J(\boldsymbol{u}_{xy},\boldsymbol{z}_{xy}) := \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})+\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})-\boldsymbol{d}_{xy}\|_2^2+\frac{\lambda_1}{2}\|\boldsymbol{z}_{xy}\|_2^2 \tag{3.1a}$$

满足约束条件

$$\min_{\boldsymbol{u}_{xy}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{xy}-\boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})\|_2^2+\frac{\lambda_2}{2}\|\boldsymbol{u}_{xy}\|_2^2. \tag{3.1b}$$

请注意，这是针对所有图像中的一个像素进行的优化问题。我们用 $0<\lambda_1$，λ_2 表示正则化参数。此外，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(n_t-1)\times n_t}$$

是式 (2.8) 中给出的矩阵的一个子矩阵。回顾公式 (2.9)，z 被视为标量，优化过程每次针对单个图像进行。我们将 $\boldsymbol{z}_{xy}$ 视为大小

$n_t \times 1$ 以便我们能够针对所有图像同时优化同一个像素（x, y）。此外，与 [13]不同，由于我们已将 $\boldsymbol{z}_{xy}$ 定义为所有图像上的向量，因此还根据以下定义修改变量 $\boldsymbol{b}$：

$$\boldsymbol{b}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) := (\boldsymbol{d}^{i+1}_{xy} - \boldsymbol{g}^{i+1}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) - (\boldsymbol{d}^{i}_{xy} - \boldsymbol{g}^{i}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \in \mathbb{R}^{n_t-1}. \tag{3.2}$$

其中，$\boldsymbol{z}^i_{xy} \in \mathbb{R}$ and 是向量 $\boldsymbol{z}_{xy} \in \mathbb{R}^{n_t}$ 的 $i\text{-}th$ 分量。这样做是为了让与 $i\text{-}th$ 图像相关的事件由 $i\text{-}th$ $\boldsymbol{z}_{xy}$ 分量进行优化。

注意，$\boldsymbol{A}$ 上方的矩阵不是方阵。对于每个 $\lambda_2 > 0$，下层问题都有唯一解，且解为

$$\boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) = (\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} + \lambda_2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) \tag{3.3}$$

with

$$\boldsymbol{K} := (\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} + \lambda_2 \boldsymbol{I}) \in \mathbb{R}^{n_t \times n_t}.$$

将其代入上层问题，可得以下约化问题

$$\min_{\boldsymbol{z}_{xy} \in Z_{ad}} \mathcal{J}(\boldsymbol{z}_{xy}) := J(\boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}), \boldsymbol{z}_{xy}) \tag{3.4}$$

此时这只是一个关于 $\boldsymbol{z}_{xy}$ 的问题。注意，约化问题 (3.4) 等价于全空间表述

$$\min_{\boldsymbol{z}_{xy}} J(\boldsymbol{u}_{xy}, \boldsymbol{z}_{xy}) \tag{3.5a}$$

满足约束条件

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{xy} = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}). \tag{3.5b}$$

接下来的结果证明约化问题 (3.4) 有解，等价地，(3.5) 也有解。

定理 3.1. 约化问题 (3.4) 存在一个解。

证明. 证明基于标准的变分法的直接方法。为简洁起见，我们省略下标 xy。首先注意到，$\mathcal{J}(\cdot)$ 的下界为 0。因此，存在一个极小化序列 $\{\boldsymbol{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\boldsymbol{z}_n) = \inf_{\boldsymbol{z}} \mathcal{J}(\boldsymbol{z}).$$

由此可得

$$\frac{\lambda_1}{2} \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{z}_n\|^2 \le \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\boldsymbol{z}_n) = \inf_{\boldsymbol{z}} \mathcal{J}(\boldsymbol{z}) \le \mathcal{J}(\boldsymbol{0}) = C < \infty,$$

其中常数 C 与 $n \in \mathbb{N}$ 无关。因此，$\{\boldsymbol{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界序列。于是，它有一个收敛子序列，仍记为 $\{\boldsymbol{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\boldsymbol{z}_n \to \bar{\boldsymbol{z}}$。接下来只需证明 $\bar{\boldsymbol{z}}$ 是极小值点。由于，$\boldsymbol{u}_n := \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_n)$ 是 (3.3) 的解，因此我们有 $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{z}})$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_n) \to \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{z}})$，当 $n \to \infty$ 时。随后，根据下确界的定义以及这些收敛估计，我们很容易得到

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\boldsymbol{z}) \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_n) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_n) - \boldsymbol{d}\|_2^2 + \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_1}{2}\|\boldsymbol{z}_n\|_2^2 = \mathcal{J}(\bar{\boldsymbol{z}}).$$

因此，$\bar{\boldsymbol{z}}$ 是极小值点，证明完毕。 □

为了开发用于求解 (3.4) 的基于梯度的求解器，我们接下来写出 $\mathcal{J}$ 的梯度表达式。

引理 3.2。 约化目标函数 $\mathcal{J}$ 连续可微，其导数为

$$\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{z}) = \left\langle \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy}\,,\, \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{b}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{xy}}) \right\rangle + \lambda \boldsymbol{z}_{xy},$$

其中 $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^{\top} \in \mathbb{R}^{n_t \times (n_t-1)}$，

$$\boldsymbol{b}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{g}^1_{xy})' & -(\boldsymbol{g}^2_{xy})' & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{g}^2_{xy})' & -(\boldsymbol{g}^3_{xy})' & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\boldsymbol{g}^3_{xy})' & -(\boldsymbol{g}^4_{xy})' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\boldsymbol{g}^{n_t-1}_{xy})' & -(\boldsymbol{g}^{n_t}_{xy})' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_t-1)\times n_t},$$

且 $\boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{xy}})$是由下式给出的对角矩阵

$$\boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{xy}}) = \tag{3.6}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\int_{\mathcal{I}_1} \boldsymbol{E}^1_{xy}(t)\exp(\boldsymbol{z}^1_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^1_{xy}(t))dt}{\int_{\mathcal{I}_1}\exp(\boldsymbol{z}^1_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^1_{xy}(t))dt} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\int_{\mathcal{I}_2} \boldsymbol{E}^2_{xy}(t)\exp(\boldsymbol{z}^2_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^2_{xy}(t))dt}{\int_{\mathcal{I}_2}\exp(\boldsymbol{z}^2_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^2_{xy}(t))dt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\int_{\mathcal{I}_{n_t}} \boldsymbol{E}^{n_t}_{xy}(t)\exp(\boldsymbol{z}^{n_t}_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^{n_t}_{xy}(t))dt}{\int_{\mathcal{I}_{n_t}}\exp(\boldsymbol{z}^{n_t}_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^{n_t}_{xy}(t))dt} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

证明。 证明可通过简单计算得出。 □

下一个结果表明，对于每个 i，$(\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''$ 有界且严格为正，其中 $\mathcal{I}_i$ 表示 $i\text{-}th$ 曝光时间区间。

定理 3.3。 设 $\mathcal{I}_i$ 表示 $i\text{-}th$ 曝光时间区间，其中 $i = 1, \ldots, n_t$。若存在 $t \in \mathcal{I}_i$，使得对所有 i，$\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)$ 均非零，则对所有 i，$(\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \in \mathbb{R}$ 有界且严格为正。

证明。 首先，我们计算 $(\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''$。回顾：

$$\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) = \log\left(\frac{1}{|\mathcal{I}_i|}\int_{\mathcal{I}_i}\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt\right) \implies (\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))' = \frac{\int_{\mathcal{I}_i}\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt}{\int_{\mathcal{I}_i}\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt},$$

从而得到

$$(\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' = \frac{\boxed{\mathrm{I}} - \left(\int_{\mathcal{I}_i}\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt\right)^2}{\left[\int_{\mathcal{I}_i}\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt\right]^2}, \tag{3.8}$$

where $\boxed{\mathrm{I}} = \left(\int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt \right) \left(\int_{\mathcal{I}_i} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\right]^2 \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt \right)$.
令 $\int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt = \alpha$。则有：

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathrm{I}} &= \left(\int_{\mathcal{I}_i} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\right]^2 \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \cdot \alpha \; dt \right) \\
&= \left(\int_{\mathcal{I}_i} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\right]^2 \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \cdot \left(\int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(s))ds \right) dt \right) \\
&= \left(\int_{\mathcal{I}_i} \int_{\mathcal{I}_i} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\right]^2 \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \cdot \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(s))ds \; dt \right).
\end{aligned}$$

使用富比尼定理，并按照上述步骤处理（3.8）分子中的两个积分乘积，可得以下等式：

$$\begin{aligned}
(3.8) &= \frac{\boxed{\mathrm{I}} - \left(\iint\limits_{\mathcal{I}_i \times \mathcal{I}_i} \boldsymbol{E}^i_{xy}(t) \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \cdot \; \boldsymbol{E}^i_{xy}(s) \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)) \; ds \; dt \right)}{\left[\int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt \right]^2} \\
&= \frac{\left(\iint\limits_{\mathcal{I}_i \times \mathcal{I}_i} \left[\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)) \right] \left(\left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\right]^2 - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) \right) ds \; dt \right)}{\left[\int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt \right]^2} \\
&= \frac{\left(\iint\limits_{\mathcal{I}_i \times \mathcal{I}_i} \left[\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)) \right] \left(\frac{1}{2} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\right]^2 \right) ds \; dt \right)}{\left[\int_{\mathcal{I}_1} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt \right]^2}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

我们注意到，对于 $\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) \neq \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)$，方程（3.9）为正（因为所有项均为正），而当 $t = s$ 时，该表达式为 0。根据假设，存在某个 $t \in \mathcal{I}_i$ 使得 $\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) \neq 0$，这意味着在区间 $\mathcal{I}_i$. 内，像素 xy 处发生了一个事件。为简便起见，假设在时刻 $\bar{t}$ 发生了单个事件。回顾（2.3），$\boldsymbol{E}^i_{xy}(t, \; t_i) = \int_{t_i}^{t} \boldsymbol{e}_{xy}(r) \; dr$。于是 $0 = \boldsymbol{E}^i_{xy}(t_i, \; t_i) \neq \boldsymbol{E}^i_{xy}(\bar{t}, \; t_i)$，这意味着 $\boldsymbol{E}^i_{xy}(t_i) \neq \boldsymbol{E}^i_{xy}(\bar{t})$。进一步可得（3.9）$> 0$。因此我们得出结论：$(\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' > 0$。接下来，利用（3.9），我们得到以下上界：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' &\leq \frac{\left(\iint\limits_{\mathcal{I}_i \times \mathcal{I}_i} \left[\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)) \right] \max\limits_{t,s \in \mathcal{I}_i} \left\{ \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\right]^2 \right\} ds \; dt \right)}{\left[\int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}_{xy}(t))dt \right]^2} \\
&= \max_{t,s \in \mathcal{I}_i} \left\{ \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\right]^2 \right\} \frac{\left(\iint\limits_{\mathcal{I}_i \times \mathcal{I}_i} \left[\exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t)) \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)) \right] ds \; dt \right)}{\left[\int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}^i_{xy} \cdot \boldsymbol{E}^i_{xy}(t))dt \right]^2} \\
&= \max_{t,s \in \mathcal{I}_i} \left\{ \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

因此

$$0 < (\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \leq \max_{t,s\in\mathcal{I}_i}\left\{\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\right]^2\right\}.$$

由此我们可以得出，$(\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''$ 是有界且严格为正的。 □

为了证明 $\mathcal{J}$ 的局部凸性，我们研究 $\mathcal{J}$ 定义中第一项的海森矩阵结构。

引理 3.4。 矩阵 $\left\langle \boldsymbol{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \boldsymbol{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))\ \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy}\right\rangle$ 是一个对角矩阵。

Proof. 不失一般性，假设 $n_t = 3$。根据我们的定义，回顾 :

$$\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) = \begin{pmatrix} \log(\frac{1}{|\mathcal{I}_1|}\int_{\mathcal{I}_1}\exp(\boldsymbol{z}^1_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^1_{xy}(t))dt) \\ \log(\frac{1}{|\mathcal{I}_2|}\int_{\mathcal{I}_2}\exp(\boldsymbol{z}^2_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^2_{xy}(t))dt) \\ \log(\frac{1}{|\mathcal{I}_3|}\int_{\mathcal{I}_3}\exp(\boldsymbol{z}^3_{xy}\cdot\boldsymbol{E}^3_{xy}(t))dt) \end{pmatrix}.$$

那么，回顾式（3.7）中 $\boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})$ 的表达式。现在，为了计算 $\boldsymbol{g}$ 的海森矩阵，我们需要再次对每个变量分别求导。这将得到$\mathbf{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \in \mathbb{R}^{n_t\times n_t\times n_t}$，其形式为:

$$\mathbf{Hess}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) = \left\{\begin{pmatrix}(\boldsymbol{g}^1_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (\boldsymbol{g}^2_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\boldsymbol{g}^3_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''\end{pmatrix}\right\},$$

其中，$(\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{z}_{xy}))''$ 在定理 3.3 中定义。接下来我们考虑$\mathbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))$。注意:

$$\mathbf{Hess}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \cdot \mathbf{Hess}(\boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))$$

其中

$$\mathbf{Hess}(\boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) = \left\{\begin{pmatrix}(\boldsymbol{g}^1_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -(\boldsymbol{g}^2_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' & 0\\ 0 & (\boldsymbol{g}^2_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{g}^3_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''\end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathbf{Hess}(\boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \in \mathbb{R}^{n_t-1\times n_t\times n_t},$$

and

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top := \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{\kappa}_1 & \boldsymbol{\kappa}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_t\times(n_t-1)}.$$

这里，$\boldsymbol{\kappa}_i$、$i = 1...n_t$ 表示 $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top$的列。于是我们有以下结果：**Hessian(** $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})$**)**

$$= \left\{(\boldsymbol{g}^1_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''\cdot\begin{pmatrix}| & 0 & 0\\ \boldsymbol{\kappa}_1 & 0 & 0\\ | & 0 & 0\end{pmatrix}, (\boldsymbol{g}^2_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''\cdot\begin{pmatrix}0 & | & 0\\ 0 & \boldsymbol{\kappa}_2-\boldsymbol{\kappa}_1 & 0\\ 0 & | & 0\end{pmatrix}, (\boldsymbol{g}^3_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))''\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & |\\ 0 & 0 & \boldsymbol{\kappa}_3\\ 0 & 0 & |\end{pmatrix}\right\},$$

其中 $\textbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) \in \quad \mathbb{R}^{n_t\times n_t\times n_t}$。接下来，我们可以加上 $\textbf{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))$ 和 $\textbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))$，得到：

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \textbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \\
&= \left\{ (\boldsymbol{g}^1_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \begin{pmatrix} | & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 & 0 & 0 \\ | & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{g}^2_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\gamma}_2 & 0 \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{g}^3_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\gamma}_3 \\ 0 & 0 & | \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_i \in \mathbb{R}^{n_t}$，$i = 1, \ldots\ldots, n_t$。最后，令 $\boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} = \boldsymbol{\alpha}_{xy} \in \mathbb{R}^{n_t}$。则

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \textbf{Hess}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \textbf{Hess}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})), \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle \\
&= \left\{ (\boldsymbol{g}^1_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{g}^2_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\gamma}_2^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{g}^3_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\gamma}_3^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} \end{pmatrix} \right\} \\
&\cong \begin{pmatrix} (\boldsymbol{g}^1_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \boldsymbol{\gamma}_1^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{g}^2_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \boldsymbol{\gamma}_2^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & (\boldsymbol{g}^3_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \boldsymbol{\gamma}_3^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} \end{pmatrix}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

此处 $\cong$ 表示张量 $\left\langle \textbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \textbf{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \ \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle$ 的模态 1 展开。关于张量矩阵乘法的更多细节可参见 [11]。证明完毕。□

接下来，我们证明，当适当选择 λ_1 时，$\mathcal{J}$ 在任意有限区间上都是严格局部凸的。

定理 3.5。设 $\mathcal{I}_i$ 表示具有 $i = 1$ 的 $i\text{-}th$ 曝光时间区间，$\ldots, n_t$。若存在 $t \in \mathcal{I}_i$，使得对所有 i，$\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)$ 均非零，则对于以 0 为中心、半径为 δ 的任意闭球 $\Omega = \mathcal{B}_\delta(0)$，存在 $\lambda_1 > 0$，使得对于 $\boldsymbol{z}_{xy} \in \Omega$，$\mathcal{J}$ 是严格凸的。

证明。首先，我们计算$\textbf{Hessian}(\mathcal{J})$：

$$
\begin{aligned}
\textbf{Hess}(\mathcal{J}) = &\left\langle \ \boldsymbol{u}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})), \boldsymbol{u}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \ \right\rangle \\
&+ \left\langle \textbf{Hess}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \textbf{Hess}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})), \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle + \lambda_1 \boldsymbol{I}.
\end{aligned}
$$

注意到项 $\left\langle \ \boldsymbol{u}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \ \boldsymbol{u}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}'_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \ \right\rangle$ 具有形式$\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}$，这意味着它是对称半正定的。接下来，根据引理 3.4，我们回顾一下，项 $\left\langle \textbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \textbf{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) \ \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle$ 是一个对角矩阵。若对角元素（特征值）均大于 0，则结论成立。假设某个特征值小于 0，并令 $\boldsymbol{z}_{xy} \in \Omega := \mathcal{B}_\delta(0)$，这意味着 $\|\boldsymbol{z}_{xy}\|_\infty \le \delta$。给定 $\delta > 0$，选择 $\lambda_1 > 0$ 使得

$$
0 < \delta < \frac{\lambda_1 - (\|\boldsymbol{\gamma}\|_\infty \cdot M_1 \cdot \|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty)(2\|\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top\|_\infty + 1)}{(\|\boldsymbol{\gamma}\|_\infty \cdot M_1 \cdot M_2)(2\|\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top\|_\infty) + 1)}.
$$

其中 $M_2 = \max_i \left\{ \left| \min_{t\in\mathcal{I}_i} \{\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\} \right|, \max_{t\in\mathcal{I}_i} \{\boldsymbol{E}^i_{xy}(t)\} \right\}$ 以及 $M_1 = \max_i \left\{ \max_{t,\ s\in\mathcal{I}_i} \left\{ \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\right]^2 \right\} \right\}$。回顾定理 3.3 可知 $0 < (\boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \le \max_{t,\ s\in\mathcal{I}_i} \left\{ \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^i_{xy}(t) - \boldsymbol{E}^i_{xy}(s)\right]^2 \right\}$，这意味着

$(\boldsymbol{g}_{xy}^i(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \leq M_1$ 对任意 i 均成立。然后利用 3.9 可得:

$$
\begin{aligned}
&\|\left\langle \mathbf{Hess}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \mathbf{Hess}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})), \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle\|_\infty \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} (\boldsymbol{g}_{xy}^1(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \boldsymbol{\gamma}_1^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{g}_{xy}^2(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \boldsymbol{\gamma}_2^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\boldsymbol{g}_{xy}^{n_t}(\boldsymbol{z}_{xy}))'' \cdot \boldsymbol{\gamma}_{n_t}^\top \boldsymbol{\alpha}_{xy} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&\leq M_1 \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_\infty \Big(\|\boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})\|_\infty + \|\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})\|_\infty + \|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty \Big) \\
&\leq M_1 \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_\infty \Big(\|\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}\|_\infty + M_2 \|\boldsymbol{z}_{xy}\|_\infty + \|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty \Big) \\
&\leq M_1 \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_\infty \Big(\|\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top\|_\infty \|\boldsymbol{b}_{xy}\|_\infty + M_2 \|\boldsymbol{z}_{xy}\|_\infty + \|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty \Big) \\
&\leq M_1 \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|_\infty \Big(\|\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top\|_\infty \left(2\|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty + 2M_2 \|\boldsymbol{z}_{xy}\|_\infty\right) + M_2 \|\boldsymbol{z}_{xy}\|_\infty + \|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty \Big) \\
&< \lambda_1.
\end{aligned}
$$

Here

$$
\boldsymbol{\gamma} := \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \dots & \boldsymbol{\gamma}_{n_t} \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}^\top,
$$

$\boldsymbol{\gamma}_i$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{xy}$ 在方程 3.9 中定义。注意，M_2 由关于 $\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})$ 的界推导如下:

$$
\boldsymbol{g}_{xy}^i(\boldsymbol{z}_{xy}) = \log\left(\frac{1}{|\mathcal{I}_i|} \int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \boldsymbol{E}_{xy}^i(t)) dt \right) \leq \boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \max\left\{ \boldsymbol{E}_{xy}^i(t) \right\}, \text{ where } \boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \boldsymbol{E}_{xy}^i(t) \geq 0
$$

and

$$
\boldsymbol{g}_{xy}^i(\boldsymbol{z}_{xy}) = \log\left(\frac{1}{|\mathcal{I}_i|} \int_{\mathcal{I}_i} \exp(\boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \boldsymbol{E}_{xy}^i(t)) dt \right) \geq \boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \min\left\{ \boldsymbol{E}_{xy}^i(t) \right\}, \text{ where } \boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \boldsymbol{E}_{xy}^i(t) \leq 0
$$

$$
\implies |\boldsymbol{g}_{xy}^i(\boldsymbol{z}_{xy})| \leq |\boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot M_2|.
$$

回顾一下，$\left\langle \mathbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \mathbf{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))\ \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle$ 根据 3.9 为对角矩阵。将对角元素记为 $\sigma_i, i = 1, \dots, n_t$。不失一般性，令 $|\sigma_1| \geq |\sigma_i|, i = 2, \dots, n_t$。于是得到:

$$
|\sigma_i| \leq |\sigma_1| = \|\left\langle \mathbf{Hessian}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \mathbf{Hessian}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}))\ \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle\|_\infty < \lambda_1.
$$

因此，对所有 i，都有 $\sigma_i < \lambda_1$。此外，对所有 i，都有 $\sigma_i + \lambda_1 > 0$。我们注意到

$$
\left\langle \mathbf{Hess}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{b}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})) + \mathbf{Hess}(\boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy})), \boldsymbol{u}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) + \boldsymbol{g}_{xy}(\boldsymbol{z}_{xy}) - \boldsymbol{d}_{xy} \right\rangle + \lambda_1 \boldsymbol{I}
$$

由于其为对角矩阵，且其元素为: $\sigma_i + \lambda_1 > 0$，因此它是对称正定的。因此，$\mathbf{Hessian}(\mathcal{J})$ 是对称正定的，因为它是一个对称正定矩阵与一个对称半正定矩阵之和。我们得出，对于任意凸集 Ω，都存在 λ_1，使得 $\mathcal{J}$ 在 Ω 上严格凸。□

我们进一步注意到，根据定理 3.5，一旦选定一个区间，就可以通过以下方式计算 λ_1 的下界：

$$\lambda_1 > \|\boldsymbol{\gamma}\|_\infty \cdot M_1 \bigg(\|\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{A}^\top\|_\infty \left(2\|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty + 2M_2\|\boldsymbol{z}_{xy}\|_\infty\right) + M_2\|\boldsymbol{z}_{xy}\|_\infty + \|\boldsymbol{d}_{xy}\|_\infty \bigg).$$

4. Experimental Setup

本节　　重点介绍如何准备将在我们的计算中使用的数据集。

标准化 $\boldsymbol{B^i}$。根据所使用的事件相机，式（2.4）中的矩阵 $\boldsymbol{B^i}$ 的元素可能处于不同的取值范围，其中 i 表示所考虑序列中的一幅唯一标准相机图像，取值范围可能包括 $[0, 255]$ 或 $[-255, 255]$。我们使用 MATLAB 函数 mat2gray 对 $\boldsymbol{B^i}$ 进行标准化。该函数会将 $\boldsymbol{B^i}$ 的值映射到对数尺度上的范围 $[0, 1]$ 。不过，由于我们将矩阵 $\boldsymbol{d}^i$ =定义为 log($\boldsymbol{B^i}$)，因此必须确保 $\boldsymbol{B^i}$ 不含任何零值。我们可以通过在 mat2gray 函数中手动指定范围 $[\min \boldsymbol{B^i} - \epsilon,\ \max \boldsymbol{B^i} + \epsilon]$来轻松避免这一问题，其中$\epsilon$足够小。在我们的计算中，我们设定 $\epsilon = 1e-3$。注意，$\min \boldsymbol{B}^i$ 和 $\max \boldsymbol{B}^i$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{B}^i$中所有元素的最小值和最大值。

构建数据立方体。为了在三维空间中查看该问题，我们创建了一个如图（5）所示的数据立方体。如（2.1）中所述，我们将此立方体定义为：

$$\boldsymbol{EC}_{xy}^{s_j} = p_{x,y}^{s_j}.$$

由于事件数据几乎是连续生成的，数据立方体的大小为 $\mathbb{R}^{\nu \times n_x \times n_y}$ ，其中 $\nu := \sum n_i$ 是重建中使用的事件总数$_i$，涵盖所有图像。注意， n_i 在 2.1 节中有更详细的说明。平均而言，我们的图像重建使用约 $\nu \approx 25,\ 000$ 个事件。由于数据立方体的规模过大，直接以数值方式使用它并不实际。通过时间压缩来缩小数据立方体的大小，可以解决这一问题。选择某个 $r,\ k \in \mathbb{N}$，使得 $\nu \approx r \cdot k$，并定义一个新的数据立方体如下：

$$\boldsymbol{dc}^\pi = \sum_{\omega=1+(\pi-1)\cdot k}^{\pi \cdot k} \boldsymbol{EC}^\omega$$

于是我们有 $\boldsymbol{dc} \in \mathbb{R}^{r \times n_x \times n_y}$，其中 $r \approx \frac{\nu}{k}$，且 $\pi = 1,\ \ldots\ldots,\ r$。在我们的示例中，我们选择了 $k \approx 200$。

计算 $\boldsymbol{g(z)}$。构建数据立方体后，我们就可以计算函数 $\boldsymbol{g(z)}$，其定义为逐分量定义：

$$\boldsymbol{g}_{xy}^i(\boldsymbol{z}_{xy}) = \log\left(\frac{1}{|\mathcal{I}_i|} \int_{\mathcal{I}_i} \exp\left(\boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \boldsymbol{E}_{xy}^i(\tau, t_i)\right) dt \right), \quad i = 1, \ldots, n_t.$$

数值上，我们使用梯形法则对其进行近似：

$$\boldsymbol{g}_{xy}^i(\boldsymbol{z}_{xy}) \approx \log\left(\frac{1}{|\mathcal{I}_i|} \sum_{l=2}^{r} \left(\frac{\triangle\tau_{l-1}}{2}\right) \left(\exp\left(\boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \boldsymbol{E}^i(\tau_{l-1}, t_i)\right) + \exp\left(\boldsymbol{z}_{xy}^i \cdot \boldsymbol{E}^i t_{xy}(\tau_l, t_i)\right)\right) \right),$$

其中， t_i 在 (2.3) 中定义， $\Delta\tau_{l-1} = \tau_l - \tau_{l-1}$ 为步长。我们以类似的方式计算函数$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z})$，以及 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z})$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$ 的导数。

省略针对 $\boldsymbol{z}$的不必要计算。我们回顾一下， $\boldsymbol{z}$ 必须针对每个像素分别计算。为缩短计算时间，我们只对捕获到事件数据的像素优化 $\boldsymbol{z}_{xy}$。

图像重建。如图5所示，我们的方法能够生成两种图像表示。给定某个值 $\boldsymbol{z}$， $\boldsymbol{u}$ 表示为: $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z})$，定义见（3.3）。 $\boldsymbol{u}$ 表示仅重建图像的动态部分。这是由于我们在（3.2）中对 $\boldsymbol{b}$ 的定义。为了重建完整图像，包括图像中没有动态变化的部分，我们采用

$$\boldsymbol{v}^i_{xy} = \boldsymbol{d}^i_{xy} - \boldsymbol{g}^i_{xy}(\boldsymbol{z}),$$

（2.5）中定义的一种变体。通常，我们将后一种表述称为重建，并在呈现时将 $\boldsymbol{u}$ 表示特别标记出来。

5. Numerical Examples

接下来，我们将展示一系列示例，以说明所提出的方法在实践中可能具有的优势。

5.1. **基准问题：单位脉冲**。第一个示例是一个合成案例，我们考虑一个模糊的单位脉冲，见图 4。为了进行这项分析，我们需要一幅用于比较的基准图像、一系列连续图像作为ESIM生成器[10] 和我们提出的方法的输入、一幅模糊图像以及相应的事件数据。首先，我们将在黑色背景上创建一个白色圆形（未显示），以此构造一系列连续图像。以这幅初始图像为基础，我们将白色圆形向右移动两个像素、向下移动两个像素，重复八次。这组九幅图像构成了我们的图像序列。接下来，我们将这九幅图像取平均，生成第十幅图像，即模糊图像（图 4 中间）。这组图像中的第五幅被指定为基准图像（图 4 左侧）。最后，为了生成相关的事件数据，我们使用 [10] 中的 ESIM生成器。ESIM生成器以一系列图像作为输入，并输出事件数据。请记住，我们的模型需要一系列图像和事件数据来生成重建图像。我们将 $\boldsymbol{B}^1$ 设为九幅图像中的第四幅， $\boldsymbol{B}^2$ 设为模糊图像， $\boldsymbol{B}^3$ 设为第六幅图像。我们将方法的结果（图 4 右侧）与基准图像进行比较。如图所示，我们获得了高质量的重建结果，结构相似性指数为 0.96，峰值信噪比为 27.3。此示例将作为基准，用于将我们的方法应用于基于事件的数据集。

5.2. **多个基于事件的数据集示例**。 图 5–7 展示了我们的方法在多个示例中的应用。在每个示例中，均使用三张标准相机图像来定义 $\boldsymbol{B}$ 变量，而 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 变量则根据相关事件数据计算得出。在每个示例中， $\boldsymbol{B}^2$ 图像均选为模糊图像。在本节余下部分中，我们将 $\boldsymbol{B}^2$ 图像称为模糊图像。

在图5中，对于所选的三帧图像序列，记录了 $\approx 39{,}000$ 个事件。左侧显示模糊图像，右侧显示我们的重建结果。我们的重建结果

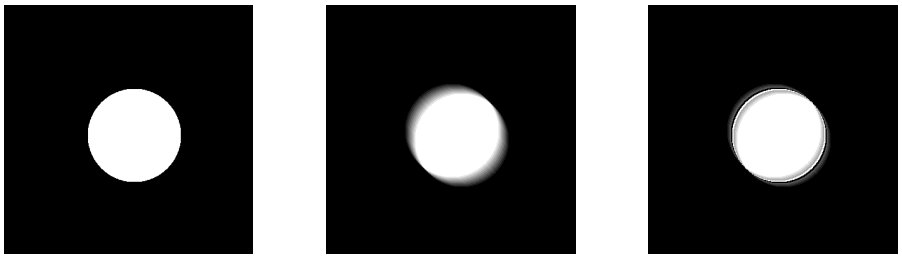

FIGURE 4. 从左到右依次为基准图像、模拟模糊图像，最后是我们的重建图像。该重建图像所用的事件由 [10] 中的 ESIM生成器生成。使用参数 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 1e-3$，我们得到 0.96 的结构相似性指数和 27.3 的峰值信噪比。

能够对栅栏线进行去模糊，同时捕捉到模糊图像中不明显的草和树木纹理。图6左侧的模糊图像显示一个人正在挥动枕头。此示例中捕获了约 26,000 个事件。我们的模型成功重建了枕头的边界，以及这个人的手和拇指。图7展示了一个人跳跃的示例，所用的三帧图像序列包含 ≈ 16000 个相关事件。请注意，左侧模糊图像中的手臂几乎不可见。相比之下，我们的模型能够重建出这个人的手臂（右侧）。

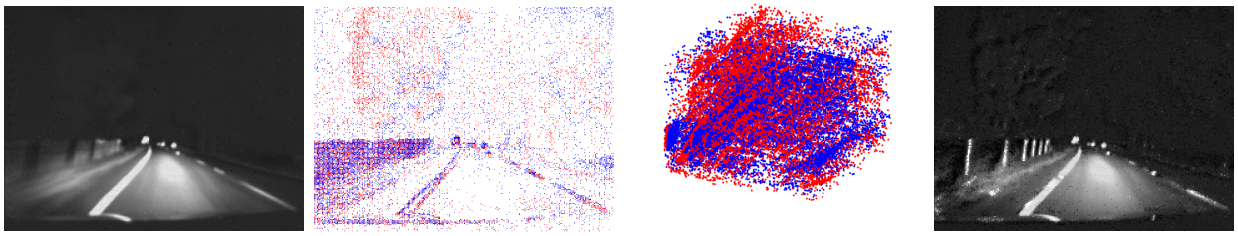

FIGURE 5. 我们的方法在夜间驾驶数据集上的示例。从左到右依次为包含运动模糊的标准相机图像、事件数据的二维表示（正事件以红色编码，负事件以蓝色编码）、事件随时间变化的三维表示，最后是使用我们的双层优化方法重建的图像。这里，我们使用了 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 1e-3$。

5.3. 基于事件的问题：阴影效应。 如第2.3节所述，mEDI模型的局限之一是在高对比度环境中会出现阴影。在 [13] 和图8、图9中可以看到这种阴影效应。如图8和图9所示，我们的模型能够显著减轻EDI和mEDI模型的阴影效应。图10展示了随机选取的五个像素的变化情况。我们观察到牛顿法的典型收敛行为。

CONCLUSION, LIMITATION, AND FUTURE WORK

本研究在变分框架内结合事件数据与多幅标准相机图像，提出了一种新颖的图像去模糊方法。我们的方法



FIGURE 6. 从左到右依次为标准相机拍摄的原始模糊图像、 $\boldsymbol{u}$ 表示，以及使用我们的双层方法进行重建得到的图像。该重建图像使用 $\lambda_1 = 0.5$ 和 $\lambda_2 = 1e-3$生成。

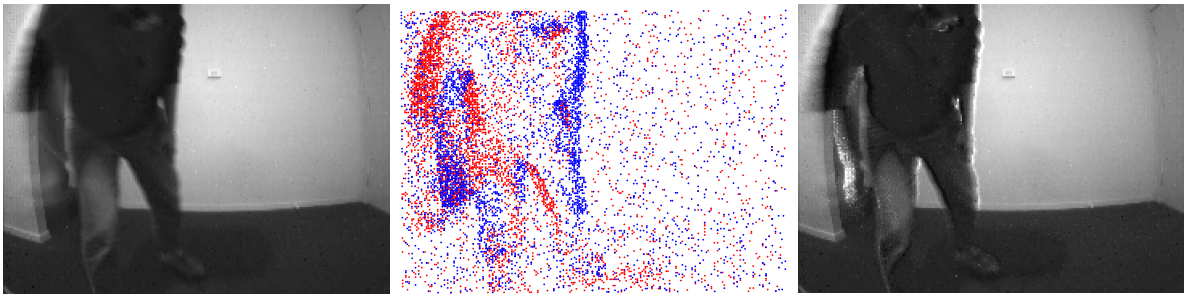

FIGURE 7. 从左到右依次为标准相机拍摄的模糊图像、记录的事件，最后是我们的重建图像。该重建图像使用 $\lambda_1 = 1.5$ 和 $\lambda_2 = 1e-3$生成。



FIGURE 8. 在该图中，我们可以看到高对比度环境可能产生的阴影效应。从左到右依次为标准相机图像、mEDI方法生成的图像，最后是使用我们的双层优化方法并结合 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 1e-3$生成的图像。显然，我们的方法有助于克服阴影效应。

证明了局部凸问题解的存在性，并将二阶牛顿求解器应用于多个示例，展示了该方法的有效性。

尽管我们的方法确实提供了一种系统化地构建去模糊图像的方法，但该模型仍存在一些局限性。

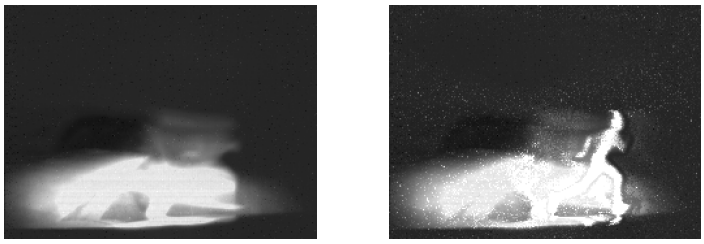

FIGURE 9. 面板展示了我们方法的第二个示例（右），该方法用于对标准相机图像（左）进行去模糊，与现有方法相比，所得结果的阴影更少。

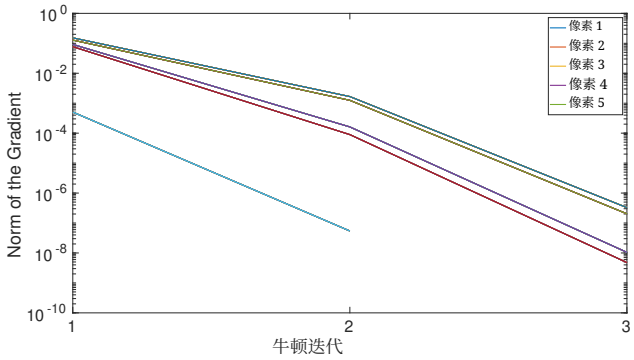

FIGURE 10. 该图展示了在一组像素样本上，每次牛顿迭代对应的值 $\|\nabla \mathcal{J}(z)\|$ 。图中所示的牛顿迭代来自对从图8所示图像重建中采样的像素进行的优化。

（a）我们的方法需要逐像素进行优化，并且根据相机分辨率的不同，可能会遇到可扩展性问题。当动态变化发生在大多数像素上时，这一问题在图像中会表现得最为明显。

（b）如第4节所述，可能需要对某些参数进行手动调节。

为降低可扩展性风险，我们建议过滤掉事件计数明显低于其他像素的像素。在未来的工作中，我们还计划测试模型在域偏移场景下的稳健性，例如相机进出水面的情况。此外，我们旨在开发一个参数学习框架，以优化正则化参数，从而获得更好的性能。

ACKNOWLEDGEMENT

作者感谢 Patrick O'Neil博士和 Diego Torrejon博士（BlackSky）以及 Noor Qadri博士（美国海军研究实验室，华盛顿特区），感谢他们让作者关注到神经形态成像这一主题，并进行了多次富有成效的讨论。

REFERENCES

[1] Mariana SC Almeida 和 Luis B Almeida. 自然图像的盲去模糊与半盲去模糊. *IEEE* 图像处理汇刊, 19(1):36–52, 2009.

[2] Harbir Antil、Zichao Wendy Di 和 Ratna Khatri. 双层优化、深度学习与分数阶拉普拉斯正则化及其在断层成像中的应用. 逆问题, 36(6):064001, 2020年5月..[3] Simon Arridge、Peter Maass、Ozan Oktem 和 Carola-Bibiane Sch¨onlieb. 使用数据驱动模型求解逆问题. 《数值学报》, 28:1–174, 2019年.[4] Mario Bertero、Patrizia Boccacci 和 Christine De Mol. 成像逆问题导论. CRC出版社, 2021年.[5] Alessandro Buccini、Marco Donatelli 和 Ronny Ramlau. 一种用于逆问题的半盲正则化算法及其在图像去模糊中的应用. 《SIAM科学计算杂志》, 40(1):A452–A483, 2018年.[6] Leon Bungert 和 Matthias J Ehrhardt. 利用错位结构信息实现稳健图像重建. 《IEEE Access》, 8:222944–222955, 2020年.[7] Julianne Chung、Matthias Chung 和 Dianne P O'Leary. 为逆问题设计最优谱滤波器. 《SIAM科学计算杂志》, 33(6):3132–3152, 2011年.[8] Juan Carlos De los Reyes、Carola-Bibiane Sch¨onlieb 和 Tuo mo Valkonen. 面向高阶全变分正则化模型的双层参数学习. 《数学成像与视觉杂志》, 57(1):1–25, 2017年.[9] Guillermo Gallego、Tobi Delbr¨uck、Garrick Orchard、Chiara Bartolozzi、Brian Taba、Andrea Censi、Ste- fan Leutenegger、Andrew J. Davison、J¨org Conradt、Kostas Daniilidis 和 Davide Scaramuzza. 基于事件的视觉：综述. 《IEEE模式分析与机器智能汇刊》, 44(1):154–180, 2022年.[10] Daniel Gehrig、Henri Rebecq、Guillermo Gallego 和 Davide Scaramuzza. 使用事件和帧进行异步光度特征跟踪. 收录于《欧洲计算机视觉会议》（ECCV）论文集，第750–765页，2018年.[11]Tamara G. Kolda 和 Brett W. Bader. 张量分解及其应用. 《SIAM评论》, 51(3):455–500, 2009.[12] Renaud Morin、St´ephanie Bidon、Adrian Basarab 和 Denis Kouam´e. 用于超声成像分辨率增强的半盲反卷积. 收录于2013年IEEE国际图像处理会议论文集，第1413–1417页。IEEE，2013年.[13] Liyuan Pan、Cedric Scheerlinck、Xin Yu、Richard Hartley、Miaomiao Liu 和 Yuchao Dai. 借助事件相机，让模糊帧以高帧率重现清晰. 收录于IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，第6820–6829页，2019年.[14] Se Un Park、Nicolas Dobigeon 和 Alfred O Hero. 半盲稀疏图像重建及其在磁共振力显微镜中的应用. IEEE 图像处理汇刊, 21(9):3838–3849, 2012年.[15] Pooja Satish、Mallikarjunaswamy Srikantaswamy 和 Nataraj Kanathur Ramaswamy. 图像去模糊盲反卷积技术综述. 《信号处理》, 37(3), 2020年.[16] Cedric Scheerlinck、Nick Barnes 和 Robert E. Mahony. 使用事件相机进行连续时间强度估计. CoRR, abs/1811.00386, 2018年.[17] Shu Tang、Weiguo Gong、Weihong Li 和 Wenzhi Wang. 基于局部与非局部全变分模型的非盲图像去模糊方法. 《信号处理》, 94:339–349, 2014年.[18] Shipeng Xie、Xinyu Zheng、Wen-Ze Shao、Yu-Dong Zhang、Tianxiang Lv 和 Haibo Li. 基于全变分深度网络的非盲图像去模糊方法. 《IEEE Access》, 7:37536–37544, 2019年.[19] Zhengrong Xue. 盲图像去模糊：综述. CoRR, abs/2201.10522, 2022年.[20] Min Zhang、Geoffrey S Young、Yanmei Tie、Xianfeng Gu 和 Xiaoyin Xu. 一种用于设计图像去模糊迭代技术的新框架. 《模式识别》, 124:108463, 2022年.

H. Antil. The Center for Mathematics and Artificial Intelligence and Department of Mathematical Sciences, George Mason University, Fairfax, VA 22030, USA.电子邮箱：hantil@gmu.edu

D. Sayre. The Center for Mathematics and Artificial Intelligence and Department of Mathematical Sciences, George Mason University, Fairfax, VA 22030, USA.电子邮箱地址：dsayre@gmu.edu